Лекция 6

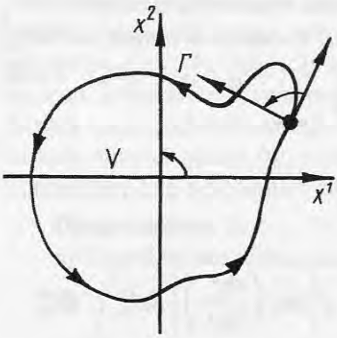


Рис. 1

✍ ***Пример 1.*** Рассмотрим в плоскости $\mathbf{R}^2$ гладкую замкнутую кривую Γ без самопересечений, ограничивающую открытую область V в $\mathbf{R}^2$. Будем считать, что на кривой Γ введен параметр t, задающий направление обхода и, следовательно, ориентацию Γ как одномерного многообразия. Тогда замыкание $\overline{V}$ является ориентированным двумерным многообразием с краем $\partial V = \Gamma$. Если ориентация области $\overline{V}$ задается линейной системой координат (x^1, x^2), то ориентация на границе Γ окажется согласованной с ориентацией в области $\overline{V}$, если при обходе кривой Γ при увеличении параметра t область $\overline{V}$ остается слева (см. рис. 1). Пусть ω произвольная форма степени 1 на плоскости $\mathbf{R}^2$. Форма ω в координатах (x^1, x^2) имеет вид $\omega = P(x^1, x^2)dx^1 + Q(x^1, x^2)dx^2$. Тогда интеграл от формы ω по кривой Γ совпадает с интегралом второго рода:

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_\Gamma \left(Pdx^1 + Qdx^2\right) =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(P(x^1(t), x^2(t))\frac{dx^1}{dt} + Q(x^1(t), x^2(t))\frac{dx^2}{dt}\right) dt.$$

По формуле (9) имеем:

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_V d\omega = \int\limits_V (dP\wedge dx^1 + dQ\wedge dx^2) =$$
$$= \int\limits_V \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\right) dx^1\wedge dx^2 = \iint\limits_V \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2.$$

Таким образом, мы получили известную *формулу Грина* на плоскости:

$$\int\limits_\Gamma (Pdx^1 + Qdx^2) = \iint\limits_V \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2}\right) dx^1 dx^2.$$

✍ ***Пример 2.*** Аналогично, пусть Γ — гладкая замкнутая кривая без самопересечений в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$, ограничивающая некоторую двумерную поверхность V. Тогда по формуле (9) получаем известную *формулу Стокса*. Для этого рассмотрим форму ω степени 1 в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$.

$$\omega = P(x^1, x^2, x^3)dx^1 + Q(x^1, x^2, x^3)dx^2 + R(x^1, x^2, x^3)dx^3.$$

Тогда интеграл второго рода по кривой Γ интерпретируется как интеграл формы ω:

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(P(x^1, x^2, x^3) \frac{dx^1}{dt} + Q(x^1, x^2, x^3) \frac{dx^2}{dt} + R(x^1, x^2, x^3) \frac{dx^3}{dt} \right) dt.$$

На основании формулы (9) имеем: $\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{V} d\omega$;

$$\begin{aligned} d\omega = dP \wedge dx^1 + dQ \wedge dx^2 + dR \wedge dx^3 = \\ = \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \\ + \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} - \frac{\partial R}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл по кривой Γ выражается через интеграл второго рода по поверхности V:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Gamma} (Pdx^1 + Qdx^2 + Rdx^3) = \\ &= \iint\limits_{V} \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial x^2} - \frac{\partial Q}{\partial x^3} \right) dx^2 dx^3 + \right. \\ &\left. \quad + \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} - \frac{\partial R}{\partial x^1} \right) dx^3 dx^1 \right\}. \end{aligned}$$

✍ ***Пример 3.*** Последняя формула, *формула Гаусса—Остроградского*, тоже является частным случаем формулы (9). Пусть Γ замкнутая поверхность в $\mathbf{R}^3$, ограничивающая область V. Пусть ω внешняя дифференциальная форма степени 2. Форма ω в координатах (x^1, x^2, x^3) имеет вид:

$$\omega = Pdx^1 \wedge dx^2 + Qdx^2 \wedge dx^3 + Rdx^3 \wedge dx^1.$$

Тогда интеграл второго рода по поверхности Γ интерпретируется как интеграл формы ω. Применяя формулу (9), получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = - \int\limits_{V} d\omega,$$

$$\begin{aligned} d\omega = dP \wedge dx^1 \wedge dx^2 + dQ \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dR \wedge dx^3 \wedge dx^1 = \\ = \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} + \frac{\partial Q}{\partial x^1} + \frac{\partial R}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Gamma} (Pdx^1dx^2 + Qdx^2dx^3 + Rdx^3dx^1) =$$

$$= -\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x^3} + \frac{\partial Q}{\partial x^1} + \frac{\partial R}{\partial x^2}\right) dx^1dx^2dx^3.$$

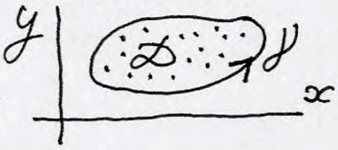
Мы пришли к формуле Гаусса—Остроградского с обратным знаком. Знак минус связан с тем, что в классической формуле Гаусса—Остроградского ориентация поверхности Γ, задаваемая парой векторов $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ в касательном пространстве к поверхности Γ, выбирается так, чтобы третий вектор $\mathbf{e}_3$ указывал направление вне области V.

✍ ***Пример 4.*** Наконец, частным случаем формулы (9) можно считать и *формулу Ньютона—Лейбница*: $\int\limits_a^b \frac{df}{dx}(x)dx = f(b) - f(a)$. Левую часть формулы Ньютона—Лейбница интерпретируем как интеграл формы $df = \frac{df}{dx}dx$ по отрезку $[a, b]$ вещественных чисел, который является одномерным ориентированным многообразием с краем. Краем отрезка $[a, b]$ является совокупность двух точек $\{a, b\}$, которые мы будем считать нульмерным многообразием. Однако для нульмерных многообразий мы не определяли понятие ориентации, поскольку у них отсутствуют касательные векторы. Поэтому можно поступить следующим образом. Будем считать, что точка края одномерного многообразия M имеет положительную ориентацию, если вектор, указывающий направление внутрь M, дает исходную ориентацию многообразия M, и, наоборот, имеет отрицательную, если вектор, указывающий направление внутрь M, дает противоположную ориентацию многообразия M. Нульмерная форма на многообразии является просто функцией. Поэтому интеграл функции по нульмерному многообразию будем считать суммой значений функции в точках, взятых со знаком, равным ориентации точек на многообразии. В нашем случае, правая часть формулы Ньютона—Лейбница будет истолкована как интеграл функции f по краю, состоящему из двух точек $\{a, b\}$. При этом точка a имеет положительную ориентацию, а точка b отрицательную. Поэтому $\int\limits_{\partial[a,b]} f = f(a) - f(b)$. Формула же (9) имеет вид: $\int\limits_{[a,b]} df = (-1)^n \int\limits_{\partial[a,b]} f$.

Переформулируем формулы из примеров 1,2 и 3 на другом языке, используемом в приложениях.

Пример 1а. На плоскости задана область $\mathcal{D}$, ограниченная гладкой кривой $\gamma(t)$. Область не обязательно диск и кривая может состоять из нескольких компонент. Пусть кривая γ записана в виде $\gamma = (x(t), y(t))$. Задана 1-форма $\omega^{(1)} = P\,dx + Q\,dy$. Рассмотрим векторное поле $v = (P, Q)$, отвечающее этой 1-форме (относительно декартовых координат). Тогда формула Стокса превращается в следующую формулу:

$$\int_\gamma (P\dot{x} + Q\dot{y})\,dt = \iint_{\mathcal{D}} (Q_x - P_y)\,dx \wedge dy.$$



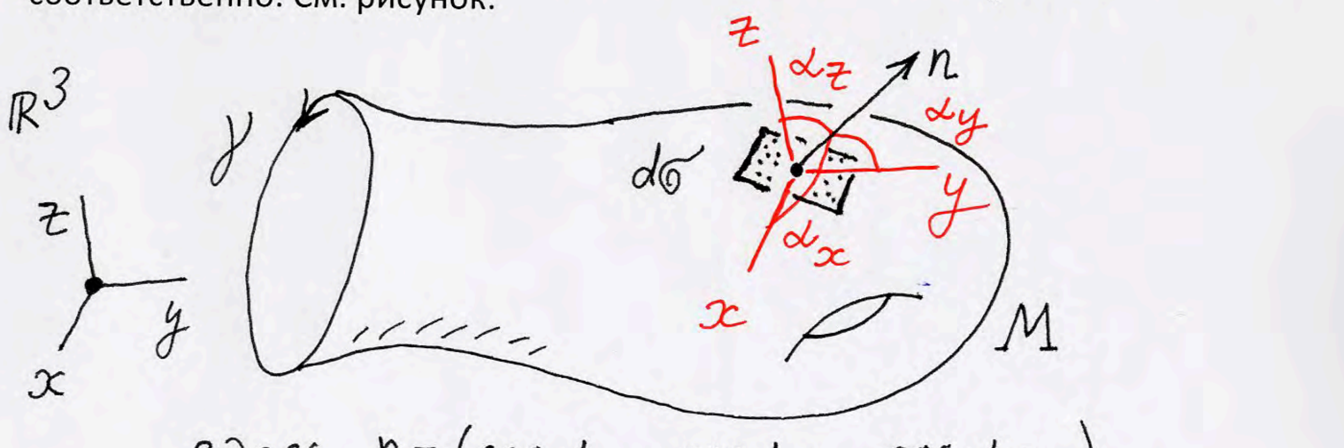
Обозначая через $\langle\ ,\ \rangle$ евклидово скалярное произведение, получаем:

$$\int_{\gamma = \partial\mathcal{D}} \langle v, \dot{\gamma}\rangle\,dt = \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{rot}(v)\,dx \wedge dy.$$

Интеграл слева называется <u>циркуляцией</u> векторного поля v вдоль контура γ. Интеграл справа называется <u>потоком ротора</u> через область $\mathcal{D}$. Итак:

Теорема. Циркуляция произвольного векторного поля вдоль замкнутого контура γ равна потоку ротора этого поля через область, ограниченную данным контуром.

Пример 2а. Пусть $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ - гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, ограничивающая некоторую гладкую 2-поверхность M. Пусть $\omega^{(1)} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ 1-форма и $v = (P, Q, R)$ - соответствующее ей векторное поле (относительно декартовых координат). Обозначим через $d\sigma$ элемент площади (2-форму) на поверхности M. Рассмотрим поле единичных нормалей к поверхности M и в каждой точке определим три угла $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$, которые нормаль образует с координатными осями x, y, z соответственно. См. рисунок:



здесь $n = (\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z)$

Тогда из элементарных геометрических соображений следует связь 2-формы площади $d\sigma$ с элементами площади на координатных плоскостях. А именно: $dx\wedge dy=\cos\alpha_z\, d\sigma,\ dx\wedge dz=-\cos\alpha_y\, d\sigma,\ dy\wedge dz=\cos\alpha_x\, d\sigma.$

Тогда формула Стокса превращается в следующую формулу:

$$\int_{\gamma}(P\dot{x}+Q\dot{y}+R\dot{z})dt=\iint_M\left[(Q_x-P_y)\cos\alpha_z+(R_x-P_z)\cos\alpha_y+\right.$$
$$\left.+(R_y-Q_z)\cos\alpha_x\right]d\sigma;\quad \text{т.е.} \int_{\gamma=\partial M}\langle v,\dot{\gamma}\rangle dt=\iint_M\langle \operatorname{rot} v, n\rangle d\sigma.$$

Теорема. Циркуляция произвольного гладкого векторного поля v в $\mathbb{R}^3$ вдоль гладкого замкнутого контура γ равна потоку ротора этого поля через поверхность, ограниченную данным контуром.

Теорема. Поток ротора векторного поля через поверхность М не зависит от этой поверхности, если контур $\gamma=\partial M$ фиксирован (не меняется).

Теорема. Поток ротора произвольного гладкого векторного поля через замкнутую поверхность (без границы) равен нулю.

Пример 3а. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана область $\mathcal{D}$, ограниченная 2-поверхностью S и пусть задана 2-форма $\omega=P\,dx\wedge dy+Q\,dx\wedge dz+R\,dy\wedge dz.$

Как и примере 2а, рассмотрим поле нормалей n к поверхности S и пусть $\alpha_x,\ \alpha_y,\ \alpha_z$ - углы, образуемые нормалью с координатными осями. Рассмотрим операцию * и применим ее к 2-форме. Получим 1-форму $\tau=*\omega=R\,dx-Q\,dy+P\,dz;$

Этой 1-форме сопоставим векторное поле $v=(R,-Q,P)$ относительно декартовых координат. Тогда формула Стокса перепишется в виде:

$$\iint_{S=\partial\mathcal{D}}(P\cos\alpha_z-Q\cos\alpha_y+R\cos\alpha_x)d\sigma=\iiint_{\mathcal{D}}(P_z-Q_y+R_x)dx\wedge dy\wedge dz$$

или, еще проще, в виде:

$$\iint_S\langle v,n\rangle d\sigma^2=\iiint_{\mathcal{D}}\operatorname{div}(v)d\sigma^3.$$

Выражение $R_x-Q_y+P_z$ называется дивергенцией векторного поля $v=(R,-Q,P)$. Итак: $v=(A,B,C),\ \operatorname{div}v=A_x+B_y+C_z$ и:

$$\iint_S\langle v,n\rangle d\sigma^2=\iiint_{\mathcal{D}}\operatorname{div}(v)d\sigma^3,$$

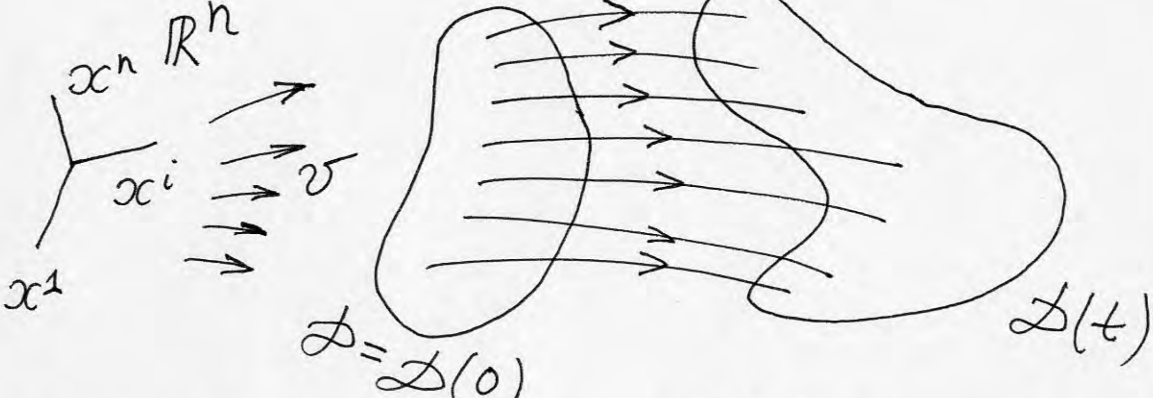
где через $d\sigma^2$ и $d\sigma^3$ обозначены элементы 2-площади и 3-объема соответственно.

Теорема. Поток любого гладкого векторного поля v через замкнутую 2-поверхность равен интегралу от дивергенции этого поля по трехмерной области, ограниченной данной 2-поверхностью.

Обсудим геометрический смысл дивергенции векторного поля.

Дивергенция, изменение объема области под действием потока и поток несжимаемой жидкости.

Рассмотрим в n-мерном евклидовом пространстве векторное поле $v = (a^1, \ldots, a^n)$ и область D. Векторное поле задает поток жидкости в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим диффеоморфизмы f_t пространства $\mathbb{R}^n$, порожденные сдвигами вдоль интегральных траекторий поля v (т.е. «линий тока» потока v). Если $x \in \mathbb{R}^n$ - произвольная точка, выпустим из нее интегральную траекторию $x(t)$ векторного поля v. Будем считать, что в момент времени $t=0$ мы находимся в начальной точке x. Фиксируем время (параметр) t, рассмотрим на траектории точку $x(t)$ и сопоставим ее начальной точке $x=x(0)$. В результате получаем отображение $f_t : x \longrightarrow x(t)$. Оно является диффеоморфизмом пространства $\mathbb{R}^n$ на себя. При этом заданная заранее область D подвергнется преобразованию f_t, сдвинется в некоторое новое положение $D(t) = f_t D$. Иными словами, поток жидкости v «увлекает» за собой область D и как-то ее деформирует со временем.



Рассмотрим n-мерный объем области $D(t)$ и обозначим его через $vol\, D(t)$. Ясно, что для гладкого поля v этот объем является гладкой функцией времени.

Теорема. Справедлива формула: $$\left.\frac{d}{dt} vol\, D(t)\right|_{t=0} = \int_D div(v)\, d\sigma^n,$$

где $$div(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a^i(x)}{\partial x^i}, \quad d\sigma^n = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Доказательство. Поскольку область $\mathcal{D}$ можно разбить в объединение бесконечно малых «кубиков» и так как интеграл – аддитивная операция, то доказательство достаточно провести для случая, когда область $\mathcal{D}$ является бесконечно малым «кубиком». Нужно вычислить искажение его объема под действием потока:

Π  $\tilde{\Pi}$

Пусть $t = \varepsilon$ - бесконечно малая величина, т.е. деформация f_ε бесконечно близка к исходному тождественному преобразованию. Тогда координаты x^i точки x заменятся на новые координаты $y^i(x)$, являющиеся гладкими функциями. Раскладывая функции y^i в ряд по малому параметру ε, получаем: $y^i = x^i + \varepsilon \cdot a^i(x) + \ldots$.

Членами с $\varepsilon^2, \ldots$ будем пренебрегать. Как мы знаем, объем искаженного кубика $vol\,\tilde{\Pi}$ связан с объемом исходного кубика формулой:

$vol\,\tilde{\Pi} = \det\left(\partial y / \partial x\right) vol\,\Pi$, где через $\left(\partial y / \partial x\right)$ обозначена матрица Якоби отображения $f_\varepsilon : x \to y(x)$. Вычисляем и получаем:

$$vol\,\tilde{\Pi} = \det\begin{pmatrix} \partial y^1/\partial x^1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & \partial y^n/\partial x^n \end{pmatrix} \cdot vol\,\Pi =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1+\varepsilon\, \partial a^1/\partial x^1 & & \varepsilon \cdot * \\ & \ddots & \\ \varepsilon \cdot * & & 1+\varepsilon\, \partial a^n/\partial x^n \end{pmatrix} \cdot vol\,\Pi \cong$$

$$\cong \left(1 + \varepsilon \cdot \sum \frac{\partial a^i}{\partial x^i}\right) \cdot vol\,\Pi, \Rightarrow$$

$$\frac{vol\,\tilde{\Pi} - vol\,\Pi}{\varepsilon} = div(v) \cdot vol\,\Pi = div(v) \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

$$\left\{\begin{matrix} \text{суммируем} \\ \text{по всем кубикам} \\ \Pi \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{интегрируем} \\ \text{по области } \mathcal{D} \end{matrix}\right\}; \text{ пусть } \varepsilon \to 0,$$

$$\left.\frac{d}{dt}\, vol\,\mathcal{D}(t)\right|_{t=0} = \int_{\mathcal{D}} \ldots \int div(v)\, d\sigma^n$$

что и требовалось.

Определение. Векторное поле v (поток жидкости) называется несжимаемым (жидкость называется несжимаемой), если $div(v)=0$.

Из доказанной теоремы сразу следует, что $\frac{d}{dt} vol\, \mathcal{D}(t)=0$, т.е. поток несжимаемой жидкости не меняет объема увлекаемых им областей. Область как-то деформируется, но ее объем не меняется.

Опишем еще одно приложение формулы Стокса.

Формула Коши. Рассмотрим на двумерной плоскости (x, y) комплексную координату $z=x+iy$ и пусть $f(z)$ - комплексная голоморфная мероморфная функция (т.е. определена на всей плоскости и все ее особые в конечной части плоскости – это полюса). Функция $f(z)$ разлагается в ряд Лорана $f=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ только по степеням переменной z, то есть в разложении нет членов с комплексно-сопряженной переменной $\bar{z}$.

Рассмотрим 1-форму $\omega=f(z)dz$.

Пусть на плоскости задан замкнутый контур, т.е. гладкая (или кусочно-гладкая) кривая γ, охватывающая компактную область $\mathcal{D}$. Во многих задачах комплексного анализа и приложений нужно уметь вычислять интеграл функции f вдоль контура γ, т.е. $\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma \omega$.

Оказывается, это можно делать при помощи так называемых вычетов функции f в ее особых точках. Это и есть формула Коши, которую мы сейчас выведем.

Пусть x_α - точки нерегулярности функции f (ее особые точки). Предположим, что этих точек конченое число в области $\mathcal{D}$. Окружим каждую особую точку окружностью малого радиуса и обозначим получившиеся малые диски через $\mathcal{D}^2_\alpha$, где $\alpha=1,\dots,N$. Выбросим эти диски из области $\mathcal{D}$ и получим новую область $W=\mathcal{D}\setminus\bigcup_{\alpha=1}^{N}\mathcal{D}^2_\alpha$. Функция $f(z)$ регулярна во всех точках области W. Теперь рассмотрим 2-форму $d\omega$. В каждой регулярной точке области W эта 2-форма имеет вид $d\omega=\frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dz}^{=0}+$

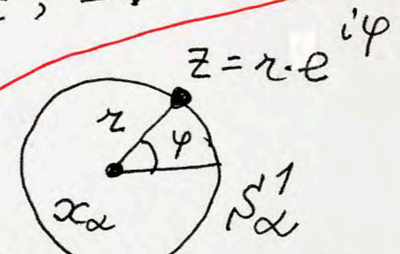
$+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}_{0=}d\bar{z}\wedge dz=0$, т.е. форма ω замкнута. Здесь $dz\wedge dz=0$ в силу косой симметрии внешнего умножения, а $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$

так как в разложении функции $f(z)$ нет переменной $\bar{z}$. Таким образом, 1-форма $\omega = f(z)dz$ является замкнутой во всех точках области W. Обозначим граничные окружности дисков D^2_α через S^1_α. Применим теперь формулу Стокса к области W и заданной на нем 1-форме $\omega = f(z)dz$. Получаем:

$\iint\limits_W d\omega = \int\limits_{\partial W} \omega$, а так как $d\omega = 0$, то $\int\limits_{\partial W} \omega = 0$.

Здесь $\partial W = \gamma - \bigcup\limits_\alpha S^1_\alpha$, с учетом индуцированной ориентации на окружностях S^1_α. Тогда:

$$0 = \int\limits_{\gamma - \bigcup_\alpha S^1_\alpha} f(z)dz = \int\limits_\gamma f(z)dz - \int\limits_{\bigcup_\alpha S^1_\alpha} f(z)dz, \Rightarrow$$



введем полярные координаты (r, φ). Здесь $r = \text{const}$, а φ — меняется.

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \sum_\alpha \int\limits_{S^1_\alpha} f(z)dz =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{S^1_\alpha} (a_n z^n) dz =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_n \int_0^{2\pi} a_n r^n e^{in\varphi} \cdot ir e^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= \sum_\alpha \sum_n i a_n r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi =$$

$= 0$ если $n+1 \neq 0$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} 2\pi i \cdot a_{-1}$$, где a_{-1}/z — полюс $f(z)$ в особой точке x_α

Величина $2\pi i\, a_{-1} = \underset{(x_\alpha)}{\text{Res}}\, f(z)$ называется вычетом функции $f(z)$ в особой точке (полюсе) x_α.

Мы видим, что важны здесь лишь полюса первого порядка: $a_{-1} \cdot z^{-1}$. Итак, Теорема Коши:

[Интеграл $\int\limits_\gamma f(z)dz$ по контуру γ равен сумме вычетов функции $f(z)$ по всем ее особым точкам, попавшим внутрь контура γ.