

ЛЕКЦИЯ 5

Операция «звездочка» на дифференциальных формах

Эта операция $*$ определена на внешних формах на лбом гладком многообразии M , однако для простоты мы рассмотрим ее на дифференциальных формах, заданных на евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , причем в декартовых координатах x^1, \dots, x^n . Общее определение см. в нашем учебнике. Операция отображает форму степени k в форму степени $n-k$, где n – размерность многообразия, т.е. $n = \dim M$,

$*$: $\Lambda^k \longrightarrow \Lambda^{n-k}$.
 Определение. Пусть $\omega^{(k)} = \omega_{i_1 \dots i_k} \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}$.

Тогда $*\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} *(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) =$

$$= \sum_{i_1 < \dots < i_k} (-1)^\sigma \omega_{i_1 \dots i_k} \underbrace{dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-k}}}, \text{ где}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} I & J \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k & ; & j_1 & \dots & j_{n-k} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \dots & \dots & n \end{pmatrix} \text{ перестановка}$$

где набор индексов j_1, \dots, j_{n-k} является дополнительным к набору индексов i_1, \dots, i_k .

Теорема.

1. Операция $*$ линейна.

2. Ее квадрат является с точностью до знака тождественным отображением, а именно: $*^2 = (-1)^{k(n-k)} id$.

3. Операция $*$ коммутирует с действием ортогональной группы $SO(n)$ в \mathbb{R}^n то есть с действием на дифференциальных формах, индуцированных действием группы $SO(n)$.

Доказательство. Свойство 1 очевидно вытекает из определения операции $*$.

Проверим свойство 2. Имеем:

$$** \underbrace{(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})} = (-1)^{\sigma_1} * \underbrace{(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-k}})} =$$

$$= (-1)^{\sigma_1} (-1)^{\sigma_2} \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}, \text{ где } \sigma_1 = \begin{pmatrix} I & J \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} J & I \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}, \text{ а потому } \sigma_2 = (-1)^{k(n-k)} \sigma_1. \text{ Отсюда:}$$

$$(-1)^{\sigma_1} (-1)^{\sigma_2} = (-1)^{k(n-k)} (-1)^{2\sigma_1} = (-1)^{k(n-k)}.$$

Пункт 2 доказан. Перейдем к пункту 3. Он следует из описанного выше представления k -формы $\omega^{(k)}$ как функционала на k векторах

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$. Значение такой формы является суммой взвешенных объемов. Достаточно рассмотреть действие на одном мономе дифференциальной формы. Тогда ее значение на k векторах – это объем проекции k -мерного параллелепипеда, натянутого на эти вектора, на k -мерную плоскость, задаваемую координатами x^{i_1}, \dots, x^{i_k} . См. рисунок.



А значение формы $\ast \omega$ на дополнительных $(n-k)$ векторах b_1, \dots, b_{n-k}

равно

$(n-k)$ -мерному объему проекции $(n-k)$ -мерного параллелепипеда, натянутого на вектора b_1, \dots, b_{n-k} , на плоскость, порожденную координатами $x^{j_1}, \dots, x^{j_{n-k}}$. См. рисунок.

Ясно, что при ортогональном вращении евклидова пространства объемы проекций обоих параллелепипедов не меняются. Это и доказывает инвариантность операции \ast при вращениях. Теорема доказана.

Примеры. Рассмотрим действие операции \ast на формах, заданных на плоскости \mathbb{R}^2 . Имеем:

$$\omega^{(1)} = P dx + Q dy ; \ast dx = dy, \ast dy = -dx ;$$

$$\ast \omega^{(1)} = -P dy + Q dx = Q dx - P dy .$$

Рассмотрим векторное поле $v = (P, Q)$, ассоциированное с данной 1-формой в евклидовых координатах. Тогда векторное поле, ассоциированное с 1-формой $\ast \omega$, имеет вид $w = (-Q, P)$. То есть вектор w повернулся на $\pi/2$, см. рисунок.



Теперь рассмотрим действие операции $*$ на 2-формах в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . Имеем: $\omega = A dx \wedge dy + B dx \wedge dz + C dy \wedge dz$;
 $*$ $(dx \wedge dy) = dz$, $*$ $(dy \wedge dz) = dx$, $*$ $(dx \wedge dz) = -dy$.
 $*$ $\omega^{(2)} = * (A dx \wedge dy + B dx \wedge dz + C dy \wedge dz) =$
 $= C dx - B dy + A dz$. Это - 1-форма в \mathbb{R}^3 .

Далее. Рассмотрим векторное поле v в \mathbb{R}^3 и сделаем с ним несколько операций. Сначала сопоставим ему дифференциальную 1-форму (пользуясь тем, что заданы евклидовы координаты), затем применим оператор d внешнего дифференцирования, затем применим операцию $*$, после чего получившуюся 2-форму превратим снова в векторное поле. В итоге, мы сопоставили векторному полю v некоторое другое векторное поле w . Спрашивается, что это за результирующая операция? Давайте вычислим. Имеем: $v \rightarrow \omega^{(1)} \xrightarrow{d} d\omega^{(1)} \xrightarrow{*} *d\omega^{(1)} \rightarrow w$;

$$v = (P, Q, R) \rightarrow \omega^{(1)} = P dx + Q dy + R dz \xrightarrow{d} \\ \rightarrow (Q_x - P_y) dx \wedge dy + (R_x - P_z) dx \wedge dz + (R_y - Q_z) dy \wedge dz \xrightarrow{*} \\ \rightarrow (Q_x - P_y) dz + (P_z - R_x) dy + (R_y - Q_z) dx \rightarrow \\ \xrightarrow{\text{поле}} w = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = \text{rot}(v).$$

Итак: $w = \text{rot}(v)$


Утверждение. Получившееся векторное поле имеет вид $w = \text{rot}(v)$, т.е. является «ротором исходного поля». Тем самым, мы обнаружили, что $\text{rot} = *d$ в \mathbb{R}^3 , т.е. связали операцию $*$ на формах с ротором.

Это - одно из возможных определений ротора.

Перейдем теперь к важной теореме, имеющей многочисленные приложения в геометрии, топологии, математической физике. Это - теорема Стокса.

ТЕОРЕМА СТОКСА.

Начнем с того, что вкратце ее сформулируем. Речь идет о формуле:

$$\int_{\partial M^{k+1}} \omega^{(k)} = (-1)^k \int_{M^{k+1}} d\omega^{(k)} \quad V = \partial M^{k+1}$$


The diagram shows a 3D representation of a manifold \$M^{k+1}\$, which looks like a cylinder with a handle. The boundary is labeled \$V = \partial M^{k+1}\$. A differential form \$\omega^{(k)}\$ is indicated by an arrow pointing towards the manifold.

Формула Стокса является многомерным аналогом одномерной формулы Лейбница: $\int_a^b df = f(b) - f(a)$. В многомерном случае мы будем интегрировать внешние дифференциальные формы.

Теперь надо подробно разъяснить, как понимать обозначения в формуле Стокса.

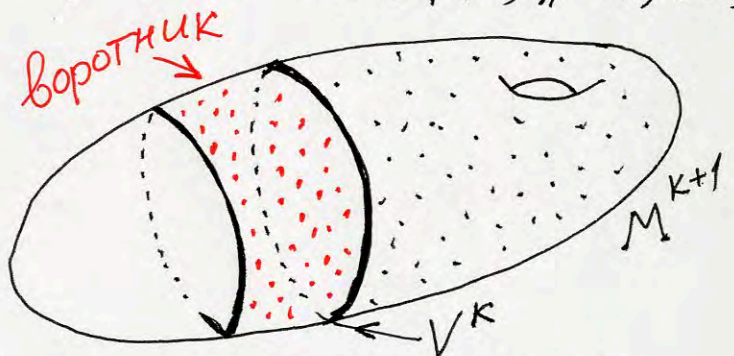
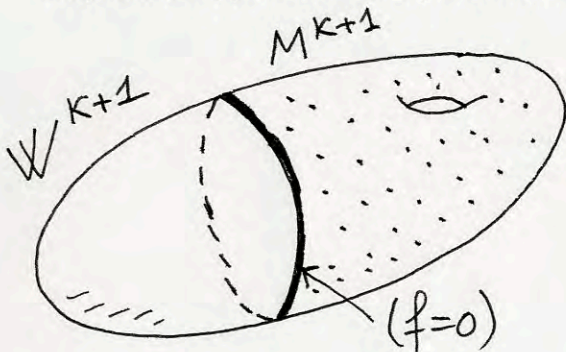
1. Воротник многообразия с краем. Рассмотрим гладкое компактное связное ориентируемое многообразие M^{k+1} с краем $V = V^k = \partial M^{k+1}$.

Отметим, что этот край может быть несвязен. Напомним определение многообразия с краем. Рассмотрим компактное связное замкнутое (т.е. без края) многообразие W^{k+1} , т.е. такое, каждая точка которого имеет открытую окрестность, гомеоморфную диску. Зададим на W гладкую функцию $f(x)$, рассмотрим ее уровень (поверхность) $(f(x)=0)$ и пусть $\text{grad } f(x) \neq 0$, т.е. $(\partial f / \partial x_i) \neq 0$ (для какого-то i)

на всем этом уровне. Тогда по теореме о неявных функциях (см. предыдущий семестр) уровень $(f=0)$ является k -мерным гладким компактным замкнутым многообразием V^k . Это – подмногообразие в W^{k+1} .

Теперь рассмотрим многообразие M^{k+1} , задаваемое неравенством $f \geq 0$.

Оно и называется многообразием M^{k+1} с краем V^k . Итак, $M^{k+1} = \{f \geq 0\}$. «Воротником» многообразия M назовем многообразие с краем, задаваемое неравенствами: $\{x \in W^{k+1} : 0 \geq f(x) \geq -\varepsilon, \varepsilon > 0\}$



Другими словами, «воротник» получается, когда мы «слегка» продолжаем многообразие M^{k+1} «наружу», то есть приклеиваем к его краю V^k «узкую полоску» = воротник. В итоге получается «чуть большее»

многообразие с краем. Воротник – это прямое произведение V^k на отрезок: $V^k \times I$.

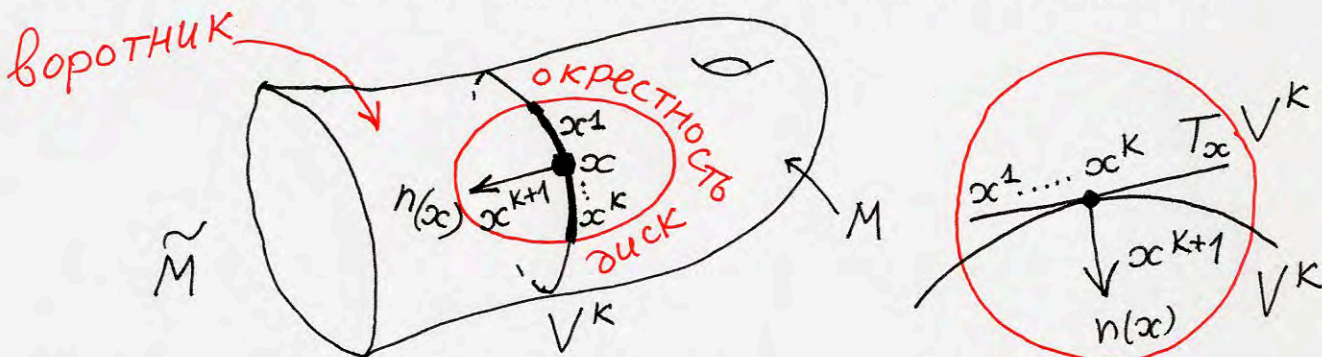
2. Выбор локальных координат около края многообразия. Пусть $x \in V$

- произвольная точка края. Рассмотрим ее достаточно малую окрестность в многообразии M с добавленным воротником, гомеоморфную диску.

Выберем локальные координаты x^1, \dots, x^k, x^{k+1} так, что координаты x^1, \dots, x^k «обслуживают» часть края V^k , попавшую в эту окрестность. Другими словами, будем считать, что край V в этой окрестности задается уравнением $x^{k+1} = 0$. То есть координата x^{k+1}

«направлена» трансверсально краю. Будем считать, что она «направлена наружу», т.е. увеличивается, когда мы выходим из многообразия M в его воротник. В точке x зададим наружную нормаль $n(x)$. Она направлена наружу M и показывает направление роста координаты x^{k+1} .

Обозначим многообразие M с добавленным к нему воротником через \tilde{M} .



3. Понятие индуцированной (согласованной) ориентации на краю ориентируемого многообразия.

Рассмотрим точку x на краю V^k и рассмотрим касательную плоскость $T_x \tilde{M}$ к многообразию \tilde{M} в точке x . В ней лежит касательная плоскость $T_x V^k$ к краю V^k . Будем считать, что внешняя нормаль $n(x)$ ортогональна плоскости $T_x V^k$.

Пусть (e_1, e_2, \dots, e_k)

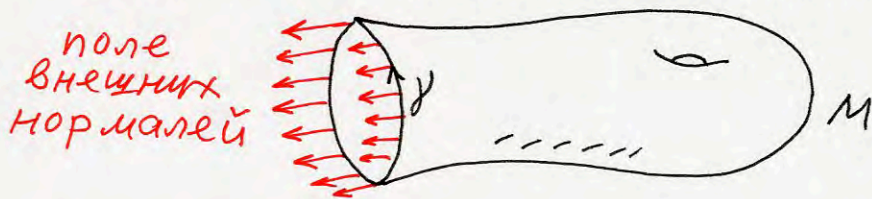
- базис в касательной плоскости $T_x V^k$. Тогда расширенный набор векторов: $(e_1, \dots, e_k, n(x))$ очевидно является базисом в касательной плоскости $T_x \tilde{M}$.

Скажем, что базис e_1, \dots, e_k задает положительную ориентацию на краю V^k , если расширенный базис $e_1, \dots, e_k, n(x)$ задает положительную ориентацию \tilde{M} . Напомним, что многообразие M было предположено ориентируемым, а потому и расширенное многообразие \tilde{M} также ориентируемо.

Задержимся немного на понятии индуцированной ориентации на краю.

Утверждение. Край ориентируемого многообразия всегда ориентируем.

Доказательство. Допустим противное. Пусть край V является неориентируемым многообразием. Воспользуемся понятием ориентации многообразия, использующим замкнутые пути-петли, вдоль которых мы гладко переносим касательный репер и сравниваем его начальную и конечную ориентации (после возвращения в исходную точку). Пусть нашелся замкнутый путь γ , целиком лежащий на крае V , выходящий из точки x и возвращающийся в нее и такой, что при гладкой невырожденной деформации репера e_1, \dots, e_k вдоль него, этот исходный репер возвращается в точку x с обратной (противоположной) ориентацией. Посмотрим, что происходит с ориентацией расширенного репера $e_1, \dots, e_k, n(x)$ при его переносе (скольжении) вдоль указанной петли. Поскольку внешняя нормаль n все время «смотрит наружу» при скольжении вдоль пути γ , мы получаем, что ориентация расширенного репера тоже изменилась на противоположную после возвращения в исходную точку. Но тем самым мы нашли в многообразии M замкнутый путь-петлю, вдоль которого перенос касательного репера меняет ориентацию. Это означает, что многообразие M неориентируемо, что противоречит предположению. Утверждение доказано.



Следствие. Неориентируемое многообразие может быть краем только ориентируемого многообразия.

Утверждение. Край ориентируемого многообразия может быть как ориентируемым, так и неориентируемым.

Доказательство. Для доказательства достаточно построить два примера.

Возьмем лист Мебиуса



. Он – неориентируем. Его

Край – это окружность. Она ориентируема. Мы предъявили неориентируемое многообразие с ориентируемым краем. Далее. Нужно построить пример неориентируемого многообразия с неориентируемым краем. Рассмотрим прямое произведение листа Мебиуса на отрезок:

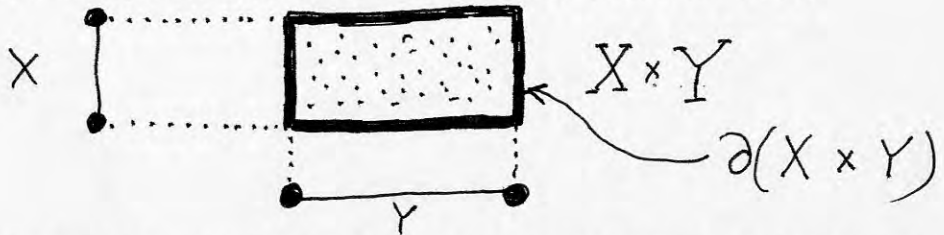
$$\mathcal{N}^3 = \mu \times \mathcal{D}^1$$

. Так как лист Мебиуса неориентируем, то получившееся трехмерное многообразие \mathcal{N} неориентируемо. Найдем его край. Для этого можно воспользоваться общей «формулой» для вычисления края

прямого произведения многообразий. Пусть X и Y - два многообразия с краем. У многообразия X - край ∂X , а у многообразия Y - край ∂Y :



Рассмотрим их прямое произведение, условно изображенное так:



Краем прямого произведения на условном рисунке является выделенная черным «граница квадрата». Ясно, что она состоит из следующих двух «кусков»:

$$\partial(X \times Y) = (\partial X) \times Y \cup X \times \partial Y.$$

Эта геометрическая «формула» является аналогом формулы для дифференцирования произведения двух гладких функций. Итак, применим «геометрическую формулу» в нашем случае. Получаем:

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{N}^3 &= \partial(\mu \times \mathcal{Z}^1) = (\partial \mu) \times \mathcal{Z}^1 \cup \mu \times \partial \mathcal{Z}^1 = \\ &= (\underbrace{S^1}_{\text{кольцо}} \times \mathcal{Z}^1) + (\partial \mu) = \mu + \mu = KL^2. \end{aligned}$$

Вывод: граница трехмерного многообразия \mathcal{N}^3 - это бутылка Клейна:



Это многообразие неориентируемо. Значит мы предъявили пример неориентируемого 3-многообразия с неориентируемой 2-границей. Утверждение доказано.

4. Интегрирование формы по подмногообразию. Этот сюжет мы уже

обсуждали, однако напомним. Пусть \mathcal{N}^k - некоторое гладкое подмногообразие в многообразии \mathbb{R}^n и пусть $\omega^{(k)}$ - форма некоторой степени k . Рассмотрим вложение $i: \mathcal{N}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, где y - локальные

координаты на \mathcal{N} , а x - локальные координаты на \mathbb{R}^n . Тогда имеем:

$$i: x = x(y); \quad \omega^{(k)} = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k};$$

$$i^*: \omega \xrightarrow{\text{на } \mathbb{R}^n} i^*(\omega) \xrightarrow{\text{на } \mathcal{N}};$$

$$i^* \omega^{(k)} = \omega_{i_1 \dots i_k}(x(y)) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial y^{\alpha_k}} dy^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dy^{\alpha_k}.$$

альтернатива по $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

Поэтому интеграл k -формы ω , заданной изначально на многообразии \mathbb{R}^n по подмногообразию $N^k \subset \mathbb{R}^n$, определяется как $\int_N i^*(\omega)$.

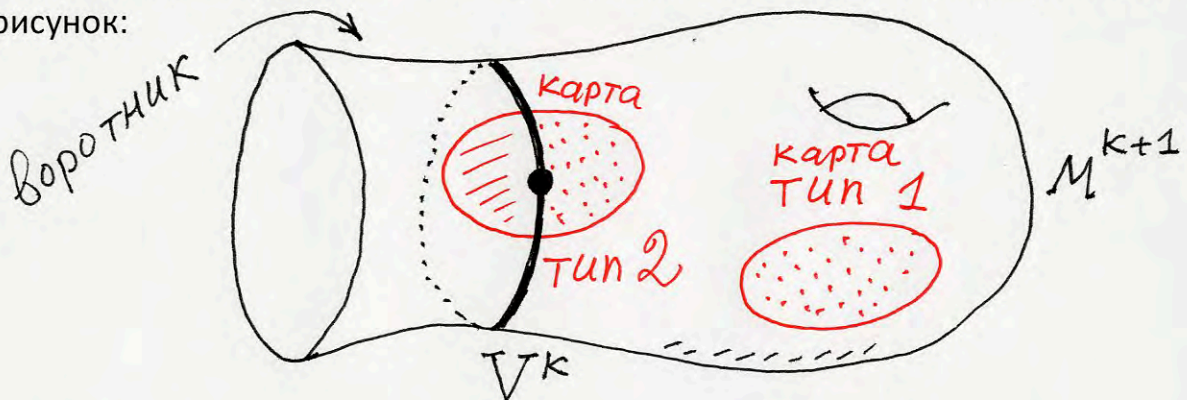
Теперь мы можем окончательно сформулировать общую теорему Стокса.

Теорема. Пусть M^{k+1} - ориентируемое гладкое компактное связное многообразие с краем $V^k = \partial M$ (быть может, несвязным). Пусть ω - внешняя k -форма на многообразии M^{k+1} . Зададим на M ориентацию и снабдим край $V = \partial M$ индуцированной, т.е. согласованной, ориентацией (край автоматически ориентируем). Тогда

$$\int_{V^k = \partial M^{k+1}} \omega^{(k)} = (-1)^k \int_{M^{k+1}} d\omega^{(k)}.$$

Доказательство. Шаг 1. Выберем удобное конечное покрытие многообразия M

открытыми множествами - локальными картами, гомеоморфными диску. То есть $M = U(\mathcal{U}_i, \varphi_i)$. Покрытие можно считать конечным ввиду компактности M . Локальные карты можно считать принадлежащими двум типам. Тип 1 - это карты (диски), замыкание которых не пересекается с границей многообразия: $\bar{\mathcal{U}}_i \cap V = \emptyset$. Тип 2 - это карты (диски), имеющие непустое пересечение с границей многообразия. Причем в этом случае будем считать, что «центр диска» лежит на границе $V = \partial M$ и эта граница разбивает диск-карту на «две половинки». Одна половинка шара лежит внутри многообразия M , а вторая лежит в воротнике многообразия, см. рисунок:



Шаг 2. Рассмотрим гладкое разбиение единицы, ассоциированное с указанным выше покрытием многообразиями картами типов 1 и 2. То есть:

$$(\mathcal{U}_i, \varphi_i) \sim \alpha_i(x); \quad \sum_i \alpha_i(x) \equiv 1; \quad \alpha_i \geq 0; \quad \text{supp}(\alpha_i) \subset \mathcal{U}_i$$

Тогда нашу задачу можно локализовать в следующем смысле:

$$\begin{aligned} \int_V \omega &= (-1)^k \int_M d\omega \cong \int_V 1 \cdot \omega = (-1)^k \int_M d(1 \cdot \omega) \cong \\ &\int_V \sum_i \alpha_i \omega = (-1)^k \int_M d(\sum_i \alpha_i \omega) \cong \\ &\sum_i \int_{V \cap \mathcal{U}_i} (\alpha_i \omega) = \sum_i (-1)^k \int_{\mathcal{U}_i} d(\alpha_i \omega) \cong \end{aligned}$$

То есть достаточно доказать, что каждого номера i верно следующее:

$$\int_{U_i} (\alpha_i \omega) = (-1)^k \int_{U_i} d(\alpha_i \omega), \text{ причем } \text{supp}(\alpha_i \omega) \subset U_i, \\ \forall \cap U_i$$

то есть носитель формы $\alpha_i \omega$ целиком лежит в карте U_i .

Переобозначая форму $\alpha_i \omega$ через ω и считая теперь, что ее носитель

целиком лежит в карте U_i , получаем, что достаточно доказать

следующую «локальную формулу Стокса»:

$$\int_{U_i} \omega = (-1)^k \int_{U_i} d\omega,$$

$\forall \cap U_i$

где $\text{supp} \omega \subset U_i$. Итак, повторим, задача стала локальной.

Шаг 3. Начнем со случая локальных карт первого типа, т.е. $U_i \cap V = \emptyset$.

Запишем общий вид k -формы ω на $(k+1)$ -мерном многообразии M .

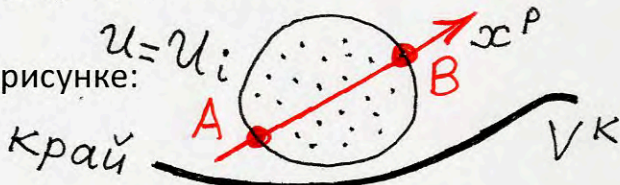
Имеем: $\omega^{(k)} = \sum_{p=1}^{k+1} a_p(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^p} \wedge \dots \wedge dx^{k+1}$.

Значком \wedge мы обозначаем пропущенный дифференциал. Тогда:

$$d\omega^{(k)} = \sum_{p=1}^{k+1} \frac{\partial a_p}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^p} \wedge \dots \wedge dx^{k+1} = \\ = \left(\sum_{p=1}^{k+1} (-1)^{p-1} \frac{\partial a_p}{\partial x^p} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p \wedge \dots \wedge dx^{k+1}$$

Случай карты первого типа показан на рисунке:

Пусть $U_i = U$.



В левой части локальной формулы Стокса мы получаем ноль, так как

$$\int_{U \cap V = \emptyset} \omega = 0$$

. Напомним, что форма ω равна нулю вне карты U .

Посмотрим теперь на правую часть локальной формулы Стокса. Имеем:

$$(-1)^k \int_U d\omega = (-1)^k \int_U \sum_{p=1}^{k+1} (-1)^{p-1} \frac{\partial a_p}{\partial x^p} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k+1} = \\ = (-1)^k \sum_{p=1}^{k+1} \int_{x^1 \wedge \dots \wedge x^p \wedge \dots \wedge x^{k+1}} (-1)^{p-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1} \left(\int \frac{\partial a_p}{\partial x^p} dx^p \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k+1}$$

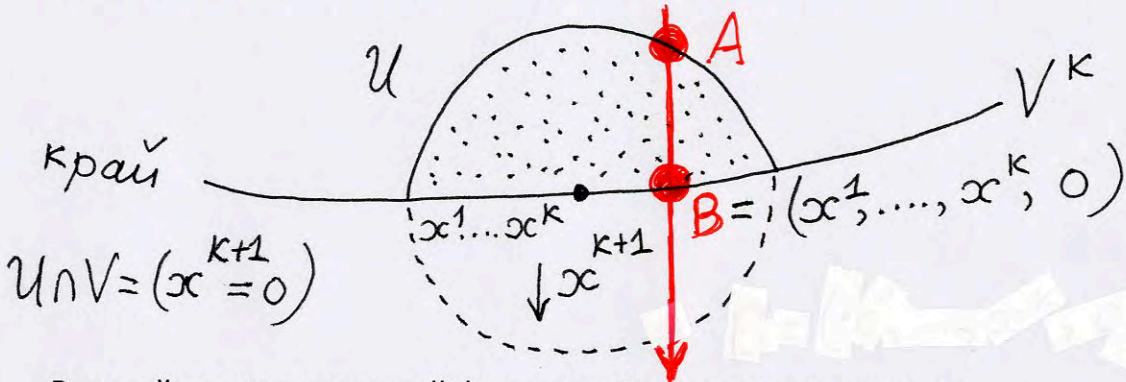
$$\text{Здесь } \int \frac{\partial a_p}{\partial x^p} dx^p = \\ = \int_A^B d(a_p(x)) = \\ = a_p(B) - a_p(A)$$

$$a_p(B) - a_p(A) = 0$$

Так как $\omega = 0$ на границе шара U , т.е. $a_p(B) = a_p(A) = 0$

Итак, в случае карт первого типа локальная формула Стокса доказана. Отсюда видно, что общая формула Стокса как бы «сосредоточена около границы многообразия», поскольку «внутри многообразия», вдали от границы, она (а точнее ее локальные формулы Стокса) превращается в тождество «ноль равен нулю».

Шаг 4. Теперь рассмотрим локальные карты $U_i = U$ второго типа, т.е. пересекающиеся с границей многообразия. На рисунке показано «поведение» такой карты в окрестности границы:



В левой части локальной формулы Стокса теперь имеем:

$$\int_{U \cap V} \omega = \sum_{p=1}^{k+1} \int_{U \cap V = \{x^{k+1}=0\}} a_p dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^p} \wedge \dots \wedge dx^{k+1} =$$

уравнение края

$$= \int_{\substack{U \cap V \\ (x^1, \dots, x^k) \\ x^{k+1} = 0}} a_{k+1}(x^1, \dots, x^k, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$$

остальные слагаемые в сумме $\sum_{p=1}^{k+1}$ равны нулю, т.к. при $p \neq k+1$ подстановка: $(x^{k+1}=0)$ обращает в ноль дифференциал dx^{k+1} .

В правой части локальной формулы Стокса теперь имеем:

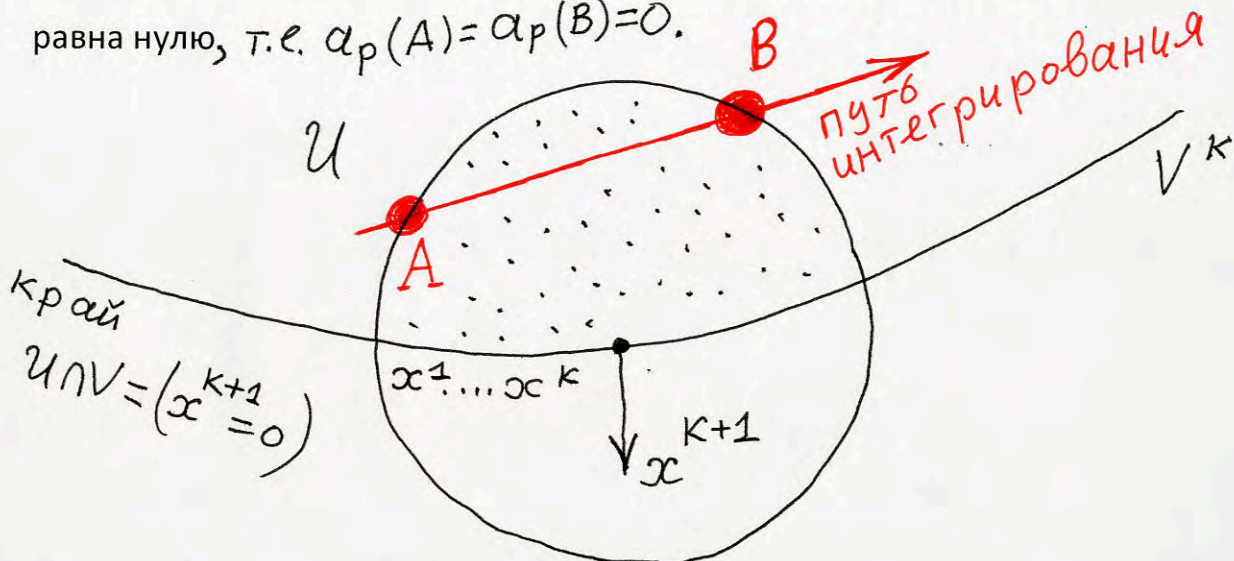
$$(-1)^k \sum_{p=1}^{k+1} \int_U (-1)^{p-1} \frac{\partial a_p}{\partial x^p} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k+1} =$$

$$= (-1)^k \sum_{p=1}^{k+1} \int_{x^1 \wedge \dots \wedge x^p \wedge \dots \wedge x^{k+1}} (-1)^{p-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{p-1} \left(\int_{x^p} \frac{\partial a_p}{\partial x^p} dx^p \right) dx^{p+1} \wedge \dots \wedge dx^{k+1}$$

||
 $a_p(B) - a_p(A)$

здесь $\int_{x^p} \frac{\partial a_p}{\partial x^p} dx^p =$
 $= \int_{x^p} d(a_p(x)) = a_p(B) - a_p(A)$

Здесь для разных значений p возникают две разные ситуации. Если $p \neq k+1$, то геометрическая картина такова. Путь интегрирования от A до B не пересекается с краем многообразия, а потому в обеих точках A и B форма равна нулю, т.е. $\alpha_p(A) = \alpha_p(B) = 0$.



Следовательно, $\alpha_p(B) - \alpha_p(A) = 0$ и соответствующее слагаемое в сумме обращается в ноль.

Если же $p = k+1$, то геометрическая картина показана выше. Здесь путь интегрирования от A до B протыкает границу многообразия в точке B .

Следовательно, в точке A имеем: $\alpha_{k+1}(A) = 0$, а в точке B имеем:

$$\alpha_{k+1}(B) = \alpha_{k+1}(x^1, \dots, x^k, 0).$$

Значит, вся сумма в правой части локальной формулы Стокса сводится к

$$\text{одному слагаемому: } (-1)^k \int_{x^1, \dots, x^k} (-1)^k dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k (\alpha_{k+1}(x^1, \dots, x^k, 0)) =$$

$$= \int_{\substack{U \cap V \\ (x^1, \dots, x^k)}} \alpha_{k+1}(x^1, \dots, x^k, 0) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k.$$

Оно, очевидно, совпадает с формулой, полученной нами выше для левой части локальной формулы Стокса. Тем самым, эта формула доказана. А следовательно, доказана и общая формула Стокса, которую мы свели к проверке локальных формул Стокса. Теорема Стокса доказана полностью.