ЛЕКЦИЯ 4

Внешний дифференциал d для внешних форм. Два определения.

Выше мы показали, что существует взаимно-однозначное соответствие между кососимметрическими тензорами в внешними дифференциальными формами. Поэтому определение внешнего дифференциала мы сформулируем в двух видах: на языке тензоров и на языке внешних форм.

Первое определение на языке кососимметрических тензоров. Рассмотрим кососимметрическое тензорное поле ранга k $T_{i_1 \dots i_k}$ и зададим

новое кососимметрическое тензорное поле ранга k+1 по формуле:

$$(dT)_{i_1 \dots i_{k+1}} = \sum_{\alpha=1}^{k+1} (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial T_{i_1 \dots \hat{i}_\alpha \dots i_{k+1}}}{\partial x^{i_\alpha}}$$

Здесь значком ^ обозначается выброшенный (пропущенный) индекс.

Второе определение на языке внешних дифференциальных форм. Пусть дана внешняя форма степени k, то есть

$$\omega = \omega^{(k)} = T_{i_1 \dots i_k} \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}_{<}$$

Напомним, что по индексам, повторяющимся вверху и внизу предполагается суммирование. Знак суммы мы, для простоты, не пишем. Далее, символом

$\vdash\!\!\!\longrightarrow < \longleftarrow\!\!\!\dashv$ Мы обозначаем строку индексов, которые строго упорядочены по возрастанию. Тогда внешний дифференциал задается так:

$$d\omega = \sum_{i_0=1}^{n} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge \underbrace{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}}_{<}$$

(где $n = \dim M^n$)

Утверждение. Два указанных определения дифференциала d эквивалентны.

Доказательство. Рассмотрим второе определение d и переобозначим индексы, как указано в формуле:

$$d\omega = \sum_{i_0=1}^{n} \frac{\partial T_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge \underbrace{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}}_{<\ \alpha} =$$

надо упорядочить, поставить i_0 на нужное место α, т.е. $i_1 < \ldots < i_0 < \ldots < i_k$

$$= \sum_{i_0=1}^{n} \boxed{\sum_{\alpha=1}^{k+1} (-1)^{\alpha-1} \frac{\partial T_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^{i_0}}} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_0} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

$i_0 \to j_\alpha$; $T_{i_1\ldots i_k} \to T_{j_1\ldots j_\alpha\ldots j_{k+1}}$; $i_1 \to j_1$, $i_0 \to j_\alpha$, $i_k \to j_{k+1}$

$$= (dT)_{j_1\ldots j_{k+1}}$$

Ясно, что мы получили первое определение дифференциала d. Утверждение доказано.

Утверждение. Внешний дифференциал является тензорной операцией.

Доказательство. Воспользуемся первым определением d. Для простоты, рассмотрим ковекторное тензорное поле T_i . Тогда имеем:

$$(dT)_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i}; \quad (dT)_{i'j'} = \frac{\partial T_{i'}}{\partial x^{j'}} - \underbrace{(\leftrightarrow)}_{\text{перестановка индексов}} =$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} T_k\right) - (\leftrightarrow) =$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial T_k}{\partial x^j} + \underbrace{\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} T_k}_{\text{сократится при перестановке индексов } i'j'} - \underset{i'j'}{(\leftrightarrow)} =$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial T_k}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} (dT)_{kj}$$

получили тензорный закон для $(dT)_{ij}$.

Воспользовались тем, что $\dfrac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} = \dfrac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}$.

Доказано.

Проверка тензорности для произвольного ранга сводится к рассмотренному случаю.

Теорема. Внешний дифференциал обладает следующими важными свойствами.

1. **Оператор линеен.**
2. **Его квадрат равен нулю, т.е.** $d^2 \equiv 0$.
3. **Справедлива формула Лейбница, т.е.**

$$d\left(\omega^{(k)} \wedge \tau^{(p)}\right) = \left(d\omega^{(k)}\right) \wedge \tau^{(p)} + (-1)^k \omega^{(k)} \wedge \left(d\tau^{(p)}\right).$$

Доказательство. Линейность очевидна. Применяя d два раза, получаем:

$$d^2 \omega^{(k)} = \sum_{\substack{p,q \\ \text{по всем} \\ \text{парам } (p,q)}} \frac{\partial^2 T_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^p \partial x^q} dx^p \wedge dx^q \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = 0$$

Мы воспользовались тем, что в силу косой симметрии внешнего произведения (умножения): $dx^p \wedge dx^q = -dx^q \wedge dx^p$, а для гладких функций частные производные коммутируют, т.е.

$$\frac{\partial^2 T_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^p \partial x^q} = \frac{\partial^2 T_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^q \partial x^p}$$

Пункт 2 доказан.

В силу линейности d, проверку формулы Лейбница достаточно сделать для мономов, т.е. для дифференциальных форм простого вида:

$$\omega^{(k)} = f(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = f \cdot dx^I$$
$$\tau^{(p)} = g(x)\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p} = g \cdot dx^J$$

Для краткости иногда в дальнейшем мы будем обозначать всю строку индексов $i_1 \ldots i_k$ одной буквой I. Тогда мы должны рассмотреть следующее выражение:

$$d\left(\left(f \cdot dx^I\right) \wedge \left(g \cdot dx^J\right)\right) = d\left(f \cdot g \cdot dx^I \wedge dx^J\right) =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \cdot g\, dx^\alpha \wedge dx^I \wedge dx^J + f \boxed{\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} dx^\alpha} \wedge dx^I \wedge dx^J =$$

к перестановок

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^I\right) \wedge \left(g\, dx^J\right) + (-1)^k \left(f\, dx^I\right) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \wedge dx^J\right) =$$
$$= (d\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau.$$

что и требовалось.

Компле'кс внешних дифференциальных форм на гладком многообразии М.

Пусть М – произвольное гладкое связное многообразие. Все внешние дифференциальные формы степени к на М образуют, вообще говоря, бесконечномерное линейное пространство, которое мы обозначим $\Lambda^k(M)$. Внешний дифференциал d отображает формы степени к в формы степени к+1, то есть задает линейное отображение $d_k : \Lambda^k \longrightarrow \Lambda^{k+1}$.

Тем самым, возникает последовательность из абелевых групп (= линейных пространств) с связывающих их гомоморфизмов (линейных отображений):

$$C^\infty(M) = \Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \to \ldots \to \Lambda^{k-1} \xrightarrow{d} \Lambda^k \xrightarrow{d} \Lambda^{k+1} \to \ldots \to \Lambda^n \xrightarrow{d} 0$$

где $n = \dim M$.

Этот объект **называется комплексом внешних дифференциальных форм данного многообразия М**. Через $\Lambda(M)$ обозначим прямую сумму всех указанных пространств (абелевых групп, по сложению), т.е. $\Lambda(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(M)$.

Отметим, что $d\omega^{(0)} = df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Так как $d^2 \equiv 0$, то $d_k \circ d_{k-1} \equiv 0$ для любого к, т.е. композиция двух последовательных гомоморфизмов равна нулю.

Определение. Форма $\omega^{(k)}$ называется **замкнутой (или коциклом)**, если $d\omega^{(k)} = 0$. Форма $\omega^{(k)}$ называется **точной (или когранцей)**, если $\omega^{(k)} = d\tau^{(k-1)}$ для некоторой формы $\tau^{(k-1)}$.

Обозначим множество всех замкнутых форм степени к через $Z^k(M)$, а множество всех точных форм степени к через $B^k(M)$. Из линейности оператора d сразу следует, что Z^k и B^k являются линейными пространствами (абелевыми группами). Группа Z^k лежит в группе Λ^k и называется группой коциклов (группой замкнутых форм), а группа B^k лежит в группе Z^k и называется группой кограниц (группой точных форм). Ясно, что $Z^k = \mathrm{Ker}\, d_k$ (ядро оператора d) и $B^k = \mathrm{Im}\, d_{k-1}$ (образ оператора d).

Утверждение. Любая замкнутая форма является точной. Это означает, что $Z^k(M) \supseteq B^k(M)$.

Доказательство. Сразу вытекает из того, что $d^2 = 0$, т.е. $d_k \circ d_{k-1} = 0$.

Так как $Z^k \supset B^k$, то возникает фактор-группа $H^k(M) = Z^k / B^k$.

Определение. Абелева группа $H^k(M)$ называется группой к-мерных (вещественных) когомологий многообразия М, вычисленной при помощи внешних дифференциальных форм. Иногда в литературе эти когомологии называются «когомологиями де Рама». Размерность β_k группы $H^k(M)$, как размерность линейного вещественного пространства, называется к-мерным числом Бетти многообразия М. Альтернированная сумма чисел Бетти, то есть число $\chi(M)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\beta_k$, называется Эйлеровой характеристикой многообразия М. Будем также рассматривать группу $H^*(M)=\oplus_{k=0}^{n}H^k(M)$, являющуюся прямой суммой всех групп когомологий.

Элементами группы $H^k(M)$ являются классы $[\omega]$, состоящие из форм вида $\omega+d\tau$, где ω - замкнутая к-форма, а $d\tau$ - произвольные точные формы, т.е. $[\omega]=\{\omega+d\tau\}$. Сложение классов индуцируется сложением замкнутых форм, являющихся представителями классов. Ясно, что это определение сложения классов корректно, не зависит от выбора представителей.

Две формы ω и ρ называются **когомологичными (т.е. принадлежащими одному и тому же классу когомологий),** если $\omega-\rho=d\tau$, т.е. их разность является точной формой. Форма ω называется когомологичной нулю, если $\omega=d\tau$, т.е. если она точна. Другими словами, ее класс когомологий $[\omega]$ - нулевой: $[\omega]=0$ в $H^k(M)$.

Теорема.

1.Если многообразие М связно, гладко и компактно, то все его числа Бетти конечны, т.е. $\beta_k=\dim H^k(M)<\infty$.

2.Если гладкие многообразия M_1 **и** M_2 **гомеоморфны, то** $H^*(M_1)\cong H^*(M_2)$, **т.е. все их группы когомологий изоморфны:** $H^k(M_1)\simeq H^k(M_2)$, $\forall k$.

3.Внешнее умножение форм вводит в группе $H^*(M)$ **структуру ассоциативной алгебры (кольца) с единицей (это вовсе не обязательно внешняя алгебра). Она называется алгеброй когомологий. Умножение классов когомологий определяется так:** $[\omega]\wedge[\psi]=[\omega\wedge\psi]$.

4.Умножение в алгебре когомологий многообразия обладает свойством: если $\omega^{(k)}$ **и** $\psi^{(p)}$ **- классы, отвечающие однородным формам степеней** k **и** p**, то** $\omega\wedge\psi=(-1)^{kp}\psi\wedge\omega$.

Пункты 1 и 2 теоремы мы здесь не доказываем. А пункты 3 и 4 докажем.

Доказательство пунктов 3 и 4. Класс $[\omega]\wedge[\psi]$ задается внешним умножением однородных форм ω и ψ. Рассмотрим другие представители перемножаемых классов $[\omega]$ и $[\psi]$, т.е. $\omega+d\alpha$ и $\psi+d\beta$. Докажем, что $[\omega]\wedge[\psi]=[\omega+d\alpha]\wedge[\psi+d\beta]$.

В самом деле: $(\omega+d\alpha)\wedge(\psi+d\beta)=\omega\wedge\psi+\omega\wedge d\beta+$
$$+(d\alpha)\wedge\psi+(d\alpha)\wedge(d\beta)=$$
$$=\omega\wedge\psi+d\left(\pm\omega\wedge\beta+\alpha\wedge\psi+\alpha\wedge(d\beta)\right)=\omega\wedge\psi+d\tau.$$
Здесь: $d\omega=d\psi=0$ и $d^2\alpha=d^2\beta=0$.

Следовательно, два сравниваемых произведения отличаются друг от друга на некоторую точную форму, т.е. принадлежат одному и тому же классу смежности. Пункт 3 доказан. Пункт 4 вытекает из косой коммутативности внешнего произведения форм. Для доказательства равенства:
$$\omega^{(k)}\wedge\alpha^{(p)}=(-1)^{kp}\alpha^{(p)}\wedge\omega^{(k)}$$
достаточно проверить его на однородных мономах, т.е.
$dx^I\wedge dx^J=(-1)^{kp}dx^J\wedge dx^I$. Этот факт очевиден. Здесь, как и выше, через I и J обозначены строки индексов. Итак, пункты 3 и 4 доказаны.

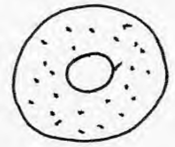
Верно усиление пункта 2 теоремы. Но сначала напомню понятие гомотопии и гомотопической эквивалентности.

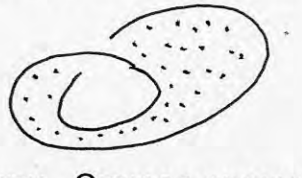
Определение. Два непрерывных отображения f и g топологического пространства X в топологическое пространство Y называются **гомотопными,** если существует семейство отображений $\varphi_t: X\longrightarrow Y$, где параметр t (время) меняется на отрезке $[0,1]$, причем $\varphi_t(x)$ непрерывно одновременно по обоим аргументам t и x, и $\varphi_0=f$ и $\varphi_1=g$. Иными словами, φ_t является непрерывной деформацией, «перетягивающей» отображение f в отображение g. Обозначение: $f\sim g$.

Определение. Два топологических пространства X и Y называются гомотопически эквивалентными, если существуют непрерывные отображения $f: X\longrightarrow Y$ и $g: Y\longrightarrow X$ такие, что композиция $gf: X\longrightarrow X$ гомотопна тождественному отображению id_X пространства X на себя, а композиция $fg: Y\to Y$ гомотопна тождественному отображению Y на себя: $fg\sim id_Y$.
Обозначение: $X\sim Y$.

Примеры (докажите).

1.Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке. Отсюда, кстати, видно, что при гомотопической эквивалентности может меняться размерность пространства.

2. Кольцо $S^1 \times D^1 =$  гомотопически эквивалентно

окружности. Лист Мебиуса $\mathcal{M} =$  тоже

гомотопически эквивалентен окружности. Отсюда следует, что ориентируемость (неориентируемость) не является гомотопически инвариантом. То есть, ориентируемое пространство может быть гомотопически эквивалентно неориентируемому пространству.

Теорема (усиление пункта 2 предыдущей теоремы). Если два гладких многообразия M и N гомотопически экививалентны, то их алгебры (кольца) когомологий изоморфны, т.е. $H^*(M) \cong H^*(N)$.

То есть изоморфны именно как алгебры, с умножением.

Этот факт мы не доказываем.

Замечание иногда алгебру когомологий многообразия M обозначают как $H^*(M, \mathbb{R})$, явно указывая, что она определена над полем вещественных чисел.

Обратное утверждение неверно. Это означает, что существуют такие многообразия M и N , у которых изоморфны алгебры когомологий, однако многообразия гомотопически не эквивалентны. Вот пример (без доказательства). Пусть $M = \mathbb{R}P^3$ (трехмерное проективное пространство), а $N = S^3$ (трехмерная сфера). В обоих случаях алгебра когомологий является внешней алгеброй $\Lambda(x_3)$ с одной существенной образующей x_3 степени 3. Однако можно показать, что сфера и проективное пространство гомотопически неэквивалентны.

Отметим полезное следствие из теоремы.

Следствие. Пусть у двух многообразий M и N различные алгебры когомологий: $H^*(M) \neq H^*(N)$. Тогда M и N гомотопически не эквивалентны. Важный пример: M_g^2 и N_p^2 - двумерные связные замкнутые ориентируемые компактные многообразия разного рода $g \neq p$, т.е. M_g^2 – это 2-сфера с g

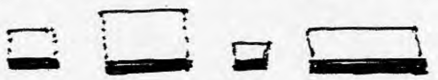
ручками, а N_p^2 - это 2-сфера с p ручками. Тогда их алгебры когомологий различны, а потому указанные двумерные поверхности разного рода гомотопически не эквивалентны. А тем более не гомеоморфны. Аналогично, неориентируемые 2-поверхности (т.е. 2-сферы с пленками Мебиуса) разного рода гомотопически не эквивалентны.**

Этот факт мы пока доказывать не будем.

Примеры вычисления когомологий.

1.Пусть M – гладкое многообразие, состоящее из к связных компонент. Тогда $H^0(M) \cong \mathbb{R}^k$.

Доказательство. По определению, $H^0 = Z^0/B^0$. Здесь группа коциклов имеет вид: $Z^0 = \{f(x): df = 0\} = \{f(x) = const \text{ локально}\}$,
где $f(x)$ - гладкие функции на M. Группа кограниц $B^0 = 0$, т.е. нулевая, так как на M нет нетривиальных форм степени -1. Следовательно, $H^0 = Z^0$. На каждой компоненте связности функция $f(x)$ с нулевым дифференциалом является константой. Следовательно, нульмерный коцикл, то есть замкнутая 0-форма на M однозначно задается набором констант, число которых равно количеству компонент связности. Это и означает, что $H^0(M) \cong \mathbb{R}^k$. См. рис.



$= f(x)$

2.Пусть M = $\mathbb{R}^1$ – вещественная прямая (одномерное некомпактное многообразие). Тогда группы когомологий таковы: $H^0 = \mathbb{R}^1$, $H^1 = H^2 = \ldots = 0$.

Доказательство. Поскольку нульмерные когомологии произвольного гладкого многообразия мы уже вычислили, то в данном случае имеем: $H^0(\mathbb{R}^1) \cong \mathbb{R}$, поскольку прямая $\mathbb{R}^1$ - связное 1-многообразие.

Далее. Группа $H^1 = Z^1/B^1$. Общий вид 1-формы на прямой таков: $\omega^{(1)} = f(x)\,dx$. Поскольку ненулевых 2-форм на прямой нет, $d\omega^{(1)} = 0$, следовательно, $Z^1 = \Lambda^1$, то есть 1-группа коциклов совпадает с группой Λ^1 . Иными словами, любая 1-форма на прямой – замкнута. Найдем теперь группу 1-кограниц B^1 . Это 1-формы вида: $\omega^{(1)} = dg(x)$, где g - гладкая функция на прямой. **Лемма. Любая 1-форма на прямой (она автоматически замкнута) является кограницей.** Другими словами, любая 1-форма, т.е. $f(x)\,dx$ является дифференциалом некоторой гладкой функции $g(x)$ на прямой, т.е.

$\omega^{(1)} = f(x)\,dx = dg(x)$. В самом деле, достаточно взять в качестве функции g следующую функцию: $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Итак, мы доказали, что $d\omega^{(1)} = 0$ для $\forall\, \omega^{(1)}$

и, что любая 1-форма на прямой точна. Это означает, что $\Lambda^1 = Z^1 = B^1$, $\Lambda^k = 0,\ k > 1$. Следовательно, $H^1(\mathbb{R}^1) = 0$. Итак, $H^0 = \mathbb{R}$, $H^1 = H^2 = \ldots = 0$.

4.Пусть $M = S^1$ **- окружность. Тогда группы когомологий** $H^k(S^1)$ **таковы:** $H^0 = \mathbb{R},\ H^1 = \mathbb{R},\ H^2 = H^3 = \ldots = 0$.

Доказательство. Опять-таки нульмерные когомологии нам уже известны: $H^0 = \mathbb{R}$, так как окружность – связное 1-многообразие. Ищем одномерные когомологии. Имеем: $H^1 = Z^1/B^1$ и опять-таки $Z^1 = \Lambda^1$,

так как любая 1-форма на окружности замкнута (нет нетривиальных 2-форм). Осталось найти группу одномерных кограниц B^1. Рассмотрим гомоморфизм $\alpha : (Z^1 = \Lambda^1) \longrightarrow \mathbb{R}$, задаваемый так:

$$\alpha(\omega^{(1)}) = \alpha(f(x)\,dx) = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi \in \mathbb{R}.$$

Здесь в качестве координаты на окружности взят полярный угол $x = \varphi$.

Утверждается, что гомоморфизм α является отображением «на» то есть эпиморфизмом. В самом деле, $\alpha(1 \cdot d\varphi) = 2\pi \neq 0$, то есть образ α «накрывает» всю прямую $\mathbb{R}$. Далее, утверждается, что $Ker(\alpha) = B^1 \subset Z^1$. В самом деле, пусть $\omega \in Ker\,\alpha$. Надо доказать, что $\omega \in B^1$.

То есть, нам известно, что $\alpha(\omega) = 0 = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\,d\varphi$.

Рассмотрим функцию $g(\varphi) \in \Lambda^0$, задаваемую формулой: $g(\varphi) = \int_0^{\varphi} f(t)\,dt$. Тогда имеем: $g(\varphi) = g(\varphi + 2\pi)$, т.е. функция

g периодична на окружности, корректно определена как функция угла, поскольку $g(0) = g(2\pi) = 0$. Итак, доказали, что $Ker\,\alpha \subset B^1$.

Обратно. Пусть $\omega = f(\varphi)\,d\varphi$ и $\omega = dg(\varphi)$, где функция $g(\varphi)$

Является однозначной гладкой функцией на окружности. Тогда имеем:

$$\alpha(\omega) = \alpha(dg(\varphi)) = \int_0^{2\pi} dg(\varphi)\,d\varphi = g(2\pi) - g(0) = 0.$$

Это и означает, что $\omega \in Ker(\alpha)$. Что и требовалось. Таким образом,

$H^1(S^1) = Z^1/B^1 = Z^1/Ker\,\alpha = \mathbb{R} = Im(\alpha)$. Итак, $H^0(S^1) = \mathbb{R}$,

$H^1(S^1)=\mathbb{R}$, $H^2=H^3=\ldots=0$, т.е. (где $k>1$) все остальные группы когомологий равны нулю (на окружности нет нетривиальных форм степеней, больших 1). Утверждение доказано.

Спрашивается, зачем нужны группы когомологий? Ответ. Приложений много. Например, как уже было сказано, эти группы являются гомотопическими инвариантами пространств. Если группы когомологий различны, то пространства гомотопически не эквиваленты. Другое приложение – к дифференциальным уравнениям, о чем сейчас расскажем.

Группы когомологий и дифференциальные уравнения.

Оказывается, многие важные законы физики, механики и химии записываются в виде $d\tau^{(k-1)}=\omega^{(k)}$ (*) . Точнее, пусть на гладком многообразии M задано дифференциальное уравнение (*), где дифференциальная форма ω задана, а форма τ ищется. Это – система уравнений в частных производных.

Теорема.

1.Уравнение (*) имеет решение тогда и только тогда, когда форма $\omega^{(k)}$ замкнута (т.е. $d\omega=0$) и определяемый ею класс когомологий $[\omega]=0$ в группе когомологий $H^k(M)$.

2.Любые два решения уравнения (*) отличаются на замкнутую (к-1)-форму. Если τ_0 - частное решение уравнения (*), то любое другое решение τ имеет вид $\tau=\tau_0+z$, где (к-1)-форма $z^{(k-1)}$ замкнута. Другими словами, все (к-1)-формы вида $\tau=\tau_0+Z^{k-1}$ - это решения уравнения (*), где Z^{k-1} - группа всех замкнутых (к-1)-форм.

3.Локально, - на области, гомеоморфной открытому диску, на любом многообразии M уравнение (*) разрешимо для любой замкнутой к-формы. Это утверждение известно как Лемма Пуанкаре.

Доказательство. Пункт 1. Если $d\tau=\omega$, то $d^2\tau=d\omega=0$, т.е. форма ω замкнута. А так как $\omega=d\tau$, то она же и точна, следовательно определяет нулевой класс когомологий в группе $H^k(M)$. Обратно. Если форма такова, что $d\omega=0$ и $[\omega]=0$ в группе когомологий (нулевой класс смежности), тогда существует (к-1)-форма τ такая, что $\omega=d\tau\in B^k$. То есть форма τ является решением уравнения (*) . Что и требовалось. Кстати, отсюда видно, что ненулевые когомологии – это топологическое препятствие к разрешимости уравнения (*).

Пункт 2. Пусть τ_1 и τ_2 - два решения уравнения (*). Тогда $d\tau_1=\omega$ и

$d\tilde{\tau}_2=\omega$. Следовательно, вычитая, получаем: $d(\tilde{\tau}_1-\tilde{\tau}_2)=0$, т.е. форма $\tilde{\tau}_1-\tilde{\tau}_2$ замкнута, принадлежит группе Z^{k-1}. Пусть $\tilde{\tau}_0$ - частное решение. Рассмотрим формы $\tau=\tilde{\tau}_0+z^{(k-1)}$, где $z^{(k-1)}$ - произвольные формы из группы коциклов Z^{k-1}. Тогда τ является решением, поскольку $d\tilde{\tau}_0=\omega$ и $d\tau=\omega$.

Пункт 3 (Лемма Пуанкаре). Мы здесь докажем лемму Пуанкаре лишь в частных случаях. Общее доказательство см. в книге Мищенко и Фоменко «Курс дифференциальной геометрии и топологии», изд-во УРСС, 2020.

Первый случай. Пусть М – это евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Оно гомеоморфно открытому диску (шару). Докажем, что уравнение $d\tau=\omega^{(n)}$ здесь всегда разрешимо для любой формы $\omega^{(n)}$. Отметим, что все такие формы замкнуты, поскольку нет ненулевых форм степени $n+1$. Форма ω степени n имеет вид: $\omega=f(x)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$, где f - некоторая гладкая функция. Будем искать форму τ в виде: $\tau^{(n-1)}=g(x)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{n-1}$.

Тогда $d\tau=(-1)^{n-1}\dfrac{\partial g}{\partial x^n}\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$.

Отсюда получаем уравнение на искомую функцию g, а именно: $f=(-1)^{n-1}\dfrac{\partial g}{\partial x^n}$. Ясно, что в качестве g можно взять функцию

$$g(x)=\pm\int_0^{x^n} f(x^1,\ldots,x^n)\,dx^n+h(x^1,\ldots,x^{n-1}),$$

где h - произвольная гладкая функция.

Важное замечание. В описанном случае лемма Пуанкаре вытекает из гомотопической инвариантности групп когомологий (впрочем, мы не доказывали этого). Так как $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно точке: $\mathbb{R}^n\sim *$, то $H^k(\mathbb{R}^n)=H^k(*)=0,\ k>0$. Следовательно, любая замкнутая к-форма $(k>0)$ на $\mathbb{R}^n$ точна.

Второй случай. Докажем лемму Пуанкаре для 1-форм на двумерной плоскости (гомеоморфной 2-диску). Рассмотрим уравнение (*): $d\tau=\omega^{(1)}$, где ищется 0-форма $\tau=f$, т.е. гладкая функция на плоскости. Пусть $\omega^{(1)}=P\,dx+Q\,dy$ и $d\omega=0$. Это означает, что $P_y=Q_x$. Уравнение на функцию f имеет вид:

$$df=\omega=P\,dx+Q\,dy;\ \Rightarrow f_x\,dx+f_y\,dy=P\,dx+Q\,dy;$$

$$\Rightarrow f_x=P,\ f_y=Q;\ \Rightarrow f(x,y)=\int_0^x P(x,y)\,dx+g(y);$$

$$Q=f_y=\int_0^x P_y(x,y)\,dx+g'_y(y)=$$

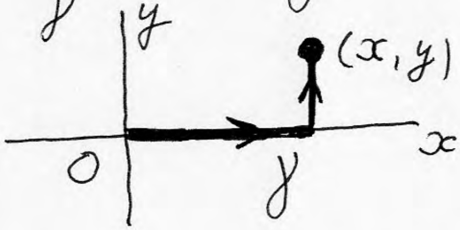
$$= \int_0^x Q_x(x,y)\,dx + g'_y(y) = Q(x,y) - Q(0,y) + g'(y).$$

Значит: $Q(x,y) = Q(x,y) - Q(0,y) + g'(y); \Rightarrow$

$g'(y) = Q(0,y); \Rightarrow g(y) = \int_0^y Q(0,y)\,dy + C\,(const);$

$\Rightarrow f(x,y) = \int_0^x P(x,y)\,dx + \int_0^y Q(0,y)\,dy + C =$

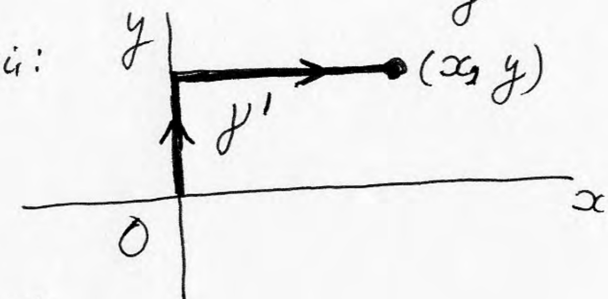
$= \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + const = \int_\gamma \omega + const$, где путь γ такой:



Аналогично можно получить:

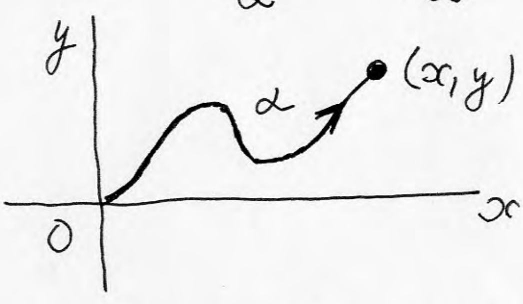
$f(x,y) = \int_{\gamma'} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma'} \omega$, где

путь γ' такой:



На самом деле,

$f(x,y) = \int_\alpha \omega = \int_\alpha P\,dx + Q\,dy$, где путь α такой:



т.е. любой кусочно-гладкий путь из точки O в точку (x,y). Это мы получим ниже из формулы Стокса.

2-й случай доказан.

Вернемся к дифференциальному уравнению $d\tau = \omega$ на гладком многообразии. Форма ω дана, ищется форма τ. Как мы уже знаем, локально (на области, гомеоморфной диску), это уравнение всегда разрешимо, если форма ω замкнута. Оказывается, «глобально» уравнение может быть неразрешимым. Рассмотрим, для простоты, случай одномерной формы $\omega^{(1)}$. Тогда уравнение приобретает вид: $df = \omega^{(1)}$, то есть ищется функция $f(x)$ на многообразии М такая, чтобы ее дифференциал совпал бы с заданной 1-формой $\omega^{(1)}$. Такая функция (если она есть) называется иногда потенциалом.

Пусть многообразие М риманово, т.е. снабжено римановой метрикой g_{ij}. Напомним, что g_{ij} - это гладкое симметричное невырожденное тензорное поле на М. Оно определяет симметричное невырожденное скалярное произведение $\langle \, , \rangle$ касательных векторов к многообразию М. При наличии римановой метрики 1-форме ω на М можно сопоставить векторное поле v, компоненты которого вычисляются по формуле $v^i = g^{ik}\omega_k$, где $\omega^{(1)} = \omega_k dx^k$,

а $x^1, \ldots, x^n$ - локальные регулярные координаты на многообразии. И обратно, по векторному полю можно построить соответствующую дифференциальную 1-форму, поскольку матрица римановой метрики (g_{ij}) обратима (в силу ее невырожденности).

Напомним, что каждой гладкой функции $f(x)$ на М отвечает ковекторное поле, называемое **градиентом** и компоненты которого имеют вид $(\partial f/\partial x^i)$ (частные производные в заданной системе координат). Если 1-форма ω

является точной, т.е. является дифференциалом некоторой функции $f(x)$, то $\omega_k = \partial f/\partial x^k$ и соответствующее векторное поле $v^i = g^{ik}\partial f/\partial x^k$ является потенциальным. Иными словами, **1-форма ω точна тогда и только тогда, когда соответствующее ей (в данной римановой метрике) векторное поле $v^i = g^{ik}\partial f/\partial x^k$ является потенциальным, $v = (v^i)$.**

Соответственно, уравнение $df = \omega^{(1)}$ неразрешимо (т.е. не существует функции $f(x)$) тогда и только тогда, когда соответствующее 1-форме ω векторное поле $v = (v^i)$ не является потенциальным.

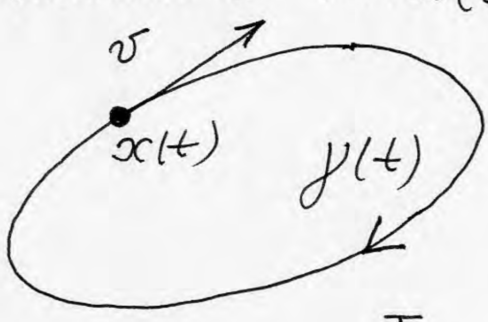
Покажем примеры неразрешимости уравнения $df = \omega^{(1)}$. Ясно, что неразрешимость эквивалентна тому, что замкнутая 1-форма ω не является точной, т.е. определяет ненулевой класс когомологий в группе $H^1(M)$. То есть эта форма не является когомологичной нулю.

Теорема. Пусть М – риманово многообразие с метрикой g_{ij} и пусть $\langle , \rangle$ - соответствующее симметричное скалярное произведение, т.е. $\langle a, b \rangle = g_{ij} a^i b^j$. Пусть гладкое векторное поле $v(x)$ на М имеет хотя бы одну замкнутую интегральную траекторию, т.е. периодическое решение, отличное от точки, т.е. на траектории существует точка, где $v \neq 0$. Тогда поле v не является глобально потенциальным на М. Пусть $\omega^{(1)}$ - дифференциальная 1-форма, отвечающая данному векторному полю v относительно данной метрики. Тогда уравнение $df = \omega$ неразрешимо, т.е. не существует подходящей функции $f(x)$ на М.

Доказательство. Допустим противное, т.е. пусть существует гладкая <u>однозначная</u> функция $f(x)$ на всем М (на самом деле достаточно рассматривать ее только в окрестности периодического решения), такая, что

$$df = \omega, \text{ т.е. } \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \omega_i dx^i; \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = g_{ik} v^k.$$

Пусть $\gamma(t) = x(t)$ - периодическое решение (замкнутая траектория) векторного поля v, т.е. $\dot{x}(t) = v(x(t))$. См. рисунок.



$x(0) = x(T)$, где T — период замкнутой траектории γ,

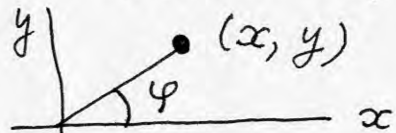
$$\frac{dx^i}{dt} = v^i(x(t)),$$

Тогда имеем: $$\int_\gamma df = \int_0^T df(x(t)) = f(x(T)) - f(x(0)) = 0,$$ т.к. f — однозначная функция.

Далее: $$\int_\gamma df = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} dt = \int_0^T g_{ik} v^k v^i dt = \int_0^T \langle v, v \rangle dt = \int_0^T |v|^2 dt > 0,$$ т.к. хотя бы в одной точке на траектории γ имеем: $v = \dot{x} \neq 0$.

Получили противоречие. Что и требовалось доказать.

Таким образом, если 1-форма ω замкнута на М, то **локально** уравнение $df = \omega$ всегда разрешимо (по лемме Пуанкаре). Тем самым, возникают «локальные потенциалы», каждый из которых определен на своей достаточно малой окрестности (гомеоморфной диску). Однако, как мы показали, в общем случае они могут «не сшиваться» в единый глобальный потенциал, то есть определенный на всем М как однозначная функция. Приведем простой пример. Рассмотрим двумерную евклидову плоскость с проколом, выбросим начало координат. Получаем некомпактное двумерное многообразие $\mathbb{R}^2 \setminus O$. Рассмотрим на нем 1-форму $\omega = d\varphi$, где $\varphi(x, y)$ - полярный угол, см. рисунок:



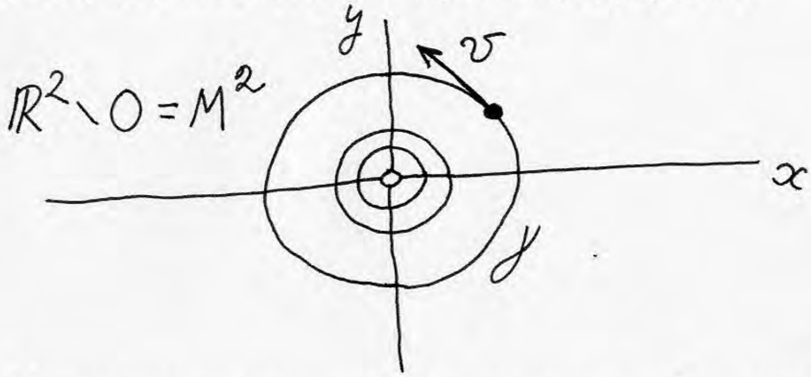
Тогда уравнение $df = d\varphi = \omega$ глобально неразрешимо на плоскости с проколом. Хотя **локально** оно, конечно, разрешимо. Ведь локально функция $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$ является гладкой однозначной функцией. Но этот «локальный потенциал» нельзя продолжить до глобального потенциала. Дело в том, что эта функция многозначна. При каждом обороте вокруг начала координат будет добавляться величина 2π .

Однако пока эта явная многозначность функции φ не доказывает неразрешимости уравнения $df = \omega = d\varphi$. Ведь не исключено, что существует какая-то другая однозначная функция f (отличная от функции «угол») и являющаяся решением уравнения. Покажем, что такой функции нет. Воспользуемся доказанной теоремой. Рассмотрим векторное поле v , соответствующее данной 1-форме $d\varphi$ относительно декартовых координат (x, y) на плоскости. Тогда

$$v = \operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

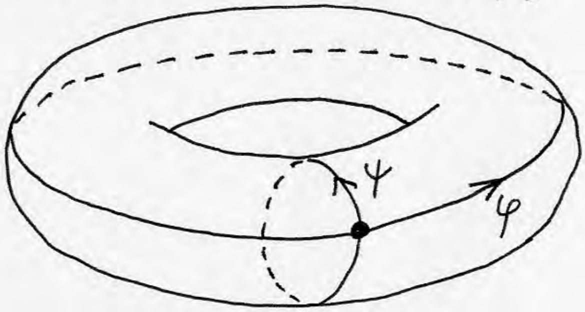
Рассмотрим интегральные траектории этого поля. Очевидно, они являются концентрическими окружностями с центром в начале координат (выброшенном). Все они – периодические. А нам достаточно было найти хотя бы одно периодическое решение. Итак, по доказанной теореме, данное поле v не является потенциальным, т.е. уравнение $df = \omega = d\varphi$ неразрешимо в классе однозначных функций на плоскости с проколом. (А в классе многозначных функций решение есть – это угол $\varphi(x, y)$). Хотя 1-форма $\omega = d\varphi$ очевидно замкнута, ее дифференциал равен нулю, поскольку $d^2 \equiv 0$.

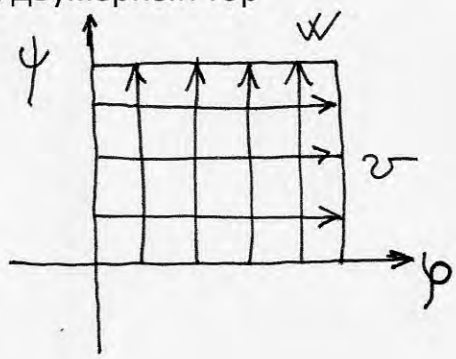
Топологическая причина обнаруженного эффекта состоит в следующем. Построенное нами векторное поле имеет замкнутую интегральную траекторию, которая не стягивается в точку по многообразию, т.е. по плоскости с проколом. Она обходит вокруг этого прокола, образует «нетривиальный цикл». Иными словами, эта траектория γ «не гомотопна нулю», не стягивается в точку по многообразию.



Мы построили пример на некомпактном 2-многообразии. Однако не составляет труда построить аналогичные примеры на компактных замкнутых многообразиях. Рассмотрим, например, двумерный тор

$$T^2 = S^1(\varphi) \times S^1(\psi)$$





Рассмотрим два векторных поля $v=(1,0)$ и $w=(0,1)$, т.е. векторные поля (потоки жидкости), текущие вдоль параллелей тора и вдоль его меридианов. На плоской модели 2-тора, т.е. на квадрате со склеенными противоположными сторонами, эти поля изображаются плоско-параллельными потоками вдоль координатных линий. Оба эти поля имеют замкнутые интегральные траектории. Это параллели тора и его меридианы. Следовательно, по доказанной теореме, эти поля не являются глобально потенциальными (хотя локально они потенциальны). И опять-таки, эти замкнутые траектории нестягиваемы в точку на 2-торе. То есть, они определяют нетривиальные циклы, отличные от нуля элементы фундаментальной группы тора. А соответствующие 1-формы $d\varphi$ и $d\psi$ задают нетривиальные 1-коциклы в одномерной группе когомологий тора, изоморфной группе $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.