Лекция 3

6. Объем области на многообразии

Укажем на связь внешних форм максимальной степени с объемом ограниченной области на римановом многообразии. Будем считать, что читатель знаком с определением многомерного (кратного) интеграла Римана. Пусть M^n — гладкое риманово многообразие и D — открытая область в M^n, диффеоморфная открытой области U в $\mathbf{R}^n$, отнесенном к декартовым координатам $x^1, \ldots, x^n$. Конечно, не для каждой области D на M^n существует такой диффеоморфизм, но для простоты мы ограничимся «достаточно малыми» областями. Пусть $g(x)$ — определитель матрицы $(g_{ij}(x))$.

Определение 1. *Объемом области* $D \subset M^n$ называется число:

$$V(D) = \mathrm{vol}\,(D) = \int\limits_{U(x)} \ldots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты в области $U(x) \subset \mathbf{R}^n$ (рис. 6).

А как определить объем «большой» области D в многообразии M^n, т. е. не содержащейся целиком в одной открытой карте на M? Пусть гладкое компактное многообразие M задано своим атласом: $M = \cup(U_i, \psi_i)$, где (U_i, ψ_i) — локальные карты на M. Рассмотрим так называемое разбиение единицы, ассоциированное с открытым покрытием $\{U_i\}$ (см. главу 3, лемма 5). Напомним, что существует набор гладких функ-

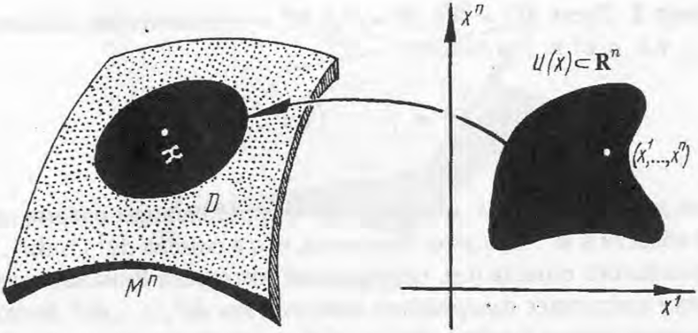

Рис. 6

ций $\{\varphi_i\}$ таких, что: 1) $\varphi_i(x) \geqslant 0$ для любого $x \in M$; 2) $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset \subset U_i$, где носитель $\operatorname{supp}(\varphi_i) = \overline{\{x : \varphi_i(x) > 0\}}$ (черта обозначает замыкание множества); 3) $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ для любого x. Тогда объем произвольной области D в M можно определить так: $\operatorname{vol}(D) = \int\limits_D \sqrt{g}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =$

$$= \int\limits_D \Big(\sum_i \varphi_i(x)\Big)\sqrt{g(x)}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum\nolimits_i \int\limits_{D\cap U_i} \varphi_i(x)\sqrt{g(x)}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

так как $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subset U_i$.

В последней сумме каждый интеграл уже имеет смысл, так как теперь область $D \cap U_i$ является «достаточно малой» (см. определение выше).

Осталось убедиться, что введенное нами понятие объема «больших» областей D не зависит от выбора разбиения единицы. В самом деле, пусть $M = \cup_i U_i$ и $M = \cup_\alpha W_\alpha$ — два различных открытых покрытия многообразия M картами $\{U_i\}$ и $\{W_\alpha\}$. Пусть $\{\varphi_i\}$ и $\{\rho_\alpha\}$ — соответствующие разбиения единицы. Тогда имеем $\operatorname{vol}(D) = \sum\limits_i \int\limits_{U_i} \varphi_i\sqrt{g}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =$

$$= \sum_i \int\limits_{U_i} \Big(\sum_\alpha \rho_\alpha\Big)\varphi_i\sqrt{g}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{i,\alpha} \int\limits_{U_i\cap W_\alpha} \varphi_i\rho_\alpha\sqrt{g}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Теперь заметим, что в точности такое же выражение мы получим, начав с разбиения единицы $\{\rho_\alpha\}$, т. е. $\sum\limits_{\alpha,i} \int\limits_{W_\alpha\cap U_i} \rho_\alpha\varphi_i\sqrt{g}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. □

Данное нами определение нужно обосновать, т. е. показать, что в простейших случаях эта формула приводит к тем же значениям объема, которые получаются из других соображений.

✍ ***Пример 1.*** Пусть $M^n = \mathbf{R}^n$, $U = D \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $g_{ij} = \delta_{ij}$, т. е. $g(x) \equiv 1$, а потому

$$\operatorname{vol}(D) = \underset{U(x)}{\int \ldots \int} dx^1 \ldots dx^n,$$

что совпадает с обычным, «евклидовым», определением объема ограниченной области в $\mathbf{R}^n$. При этом считается, что в символ $dx^1 \ldots dx^n$, кроме его формального смысла (см. определение интеграла Римана) вкладывается также следующее содержание: если считать $dx^1, \ldots, dx^n$ бесконечно малыми величинами, то $d\sigma = dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n$ — есть бесконечно малый объем бесконечно малого параллелепипеда со сторонами $dx^1, \ldots, dx^n$, измеренными в декартовых координатах $x^1, \ldots, x^n$. Итак, объем ограниченной области $U(x) \subset \mathbf{R}^n$ можно представлять как «сумму» бесконечного числа объемов бесконечно малых параллелепипедов, вычисленных по обычной формуле (т. е. объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению всех его ребер, выходящих из одной вершины).

✍ ***Пример 2.*** Пусть M^n — гладкое подмногообразие в $\mathbf{R}^N$, $g_{ij}(x)$ — индуцированная риманова метрика на $M^n \subset \mathbf{R}^N$ (объемлющая метрика — евклидова). Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — криволинейные координаты в окрестности точки P на M^n; пусть область D содержится в области действия координат $(x^1, \ldots, x^n)$; тогда можно считать, что объем области D есть сумма бесконечного числа объемов бесконечно малых параллелепипедов (уже не прямоугольных) $\{\Pi_k\}$, которые получаются при разбиении D координатными плоскостями $x^i = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{const}}$ (с «бесконечно малым шагом») (рис. 7). Так как M^n — гладкое подмногообразие в $\mathbf{R}^N$, то можно считать, что Π_k хорошо аппроксимируется «линейным параллелепипедом» $\widetilde{\Pi}_k$, содержащимся в $T_P M^n$, где P — вершина Π_k (рис. 8). Стороны Π_k направлены вдоль координатных линий $\{x^i\}$, проходящих через P. Пусть

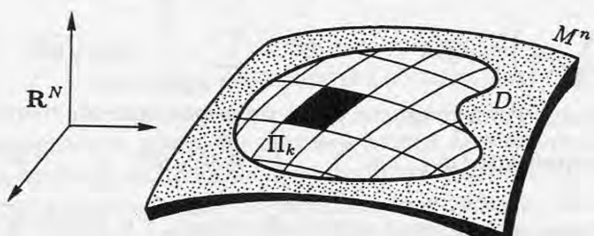

Рис. 7

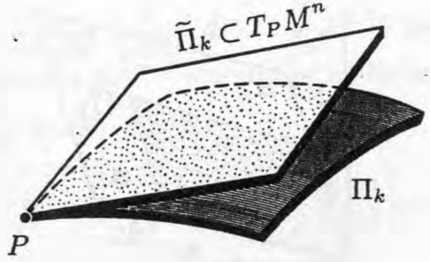

Рис. 8

$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — векторы скоростей этих линий (т. е. $\mathbf{a}_i$ — вектор скорости линии, вдоль которой меняется только i-я координата x^i, а остальные фиксированы). Так как g_{ij} индуцирована евклидовой метрикой, то $\operatorname{vol}(\Pi_k) \cong \operatorname{vol}(\widetilde{\Pi}_k)$ совпадает с евклидовым объемом (n-мерным) $\widetilde{\Pi}_k$, вложенного в $\mathbf{R}^n$. Итак, $\operatorname{vol}(D) \cong \sum_{(i)} \operatorname{vol}(\widetilde{\Pi}_k)$. Пусть в точке P, наряду с исходными криволинейными координатами $x^1, \ldots, x^n$ введены координаты $y^1, \ldots, y^n$, ортогональные в P, т. е. задающие декартовы координаты в $T_P M^n$. Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — векторы скоростей этих новых координатных линий в точке P; пусть они единичной длины. Тогда в координатах $y^1, \ldots, y^n$ имеем: $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$ в точке P (только в одной точке, вообще говоря). Пусть $(x) \to (y)$ — замена и J — матрица Якоби в точке P. Тогда J, действуя в $T_P M^n$, переводит $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Докажем, что $\operatorname{vol}(\widetilde{\Pi}_k) = \sqrt{g(x)}\, d\sigma^n$, где $d\sigma^n = dx^1 \ldots dx^n$ — евклидов объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами $dx^1, \ldots, dx^n$. Рассмотрим параллелепипед Π'_k, на $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Тогда $\operatorname{vol} \Pi'_k(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \sqrt{g(x)}$, где vol обозначает евклидов объем. В самом деле, так как в координатах $y^1, \ldots, y^n$ тензор g_{ij} имеет вид: $g_{ij}(y) = \delta_{ij}$, то $(g_{ij}(x)) = J(g_{ij}(y))J^\top = JEJ^\top = JJ^\top$, т. е. $g(x) = \det(g_{ij}(x)) = \det(JJ^\top) = \det(J)^2$, т. е. $\det J = \sqrt{g(x)}$. Так как при действии J орторепер $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ переходит в $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, то, в силу леммы 2 из п. 5: $\sqrt{g(x)} = \det J = \operatorname{vol} \Pi'_k(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Утверждение доказано.

Так как $\widetilde{\Pi}_i$ натянут на $(dx^1)\mathbf{a}_1, \ldots, (dx^n)\mathbf{a}_n$ (рис. 9), то

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{vol} \widetilde{\Pi}_k(\mathbf{a}_1 \cdot dx^1, \ldots, \mathbf{a}_n \cdot dx^n) = \\
&= \left(\operatorname{vol} \Pi'_k(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)\right) \cdot dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n = \\
&= \sqrt{g(x)}\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n.
\end{aligned}
$$

Так как из объемов $\widetilde{\Pi}_k$ (при их суммировании) и набирается объем области D, то $\operatorname{vol}(D) = \int\limits_{U(x)} \ldots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n$, что и требовалось.

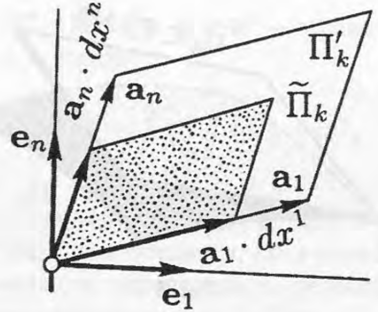

Рис. 9

✍ ***Пример 3.*** Пусть $M^2 \subset \mathbf{R}^3$ — гладкое подмногообразие, задаваемое радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$; тогда в силу данного определения площади области D на M^2, имеем:

$$\operatorname{vol}(D) = \iint\limits_{U(u,v)} \sqrt{g(u,v)}\, dudv; \quad \det\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2,$$

т. е.

$$\operatorname{vol}(D) = \iint \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \iint\limits_{U(v)} |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|\, dudv,$$

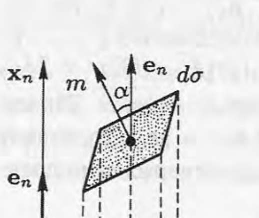

Рис. 10

где через [,] обозначено векторное произведение, а через |[,]| — его модуль. Итак, формула для площади области совпала с одной из формул, выводимых в курсе классического анализа.

✍ ***Пример 4.*** Пусть подмногообразие $M^{n-1} \subset \subset \mathbf{R}^n$ задано в виде графика гладкой функции $x^n = f(x^1, \ldots, x^{n-1})$. Найдем объем ограниченной области $D \subset M^{n-1}$. Можно считать, что $\operatorname{vol}(D) = \Sigma(d\sigma)$, где $d\sigma$ — бесконечно малый объем бесконечно малого параллелепипеда. Проектируя его на координатную гиперплоскость $\mathbf{R}^{n-1}(x^1, \ldots, x^{n-1})$, получаем на ней бесконечно малый объем $d\omega = dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^n$, связанный с $d\sigma$ так: $d\sigma = \dfrac{d\omega}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} \cdot dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{n-1}$ (рис. 10). Здесь α — угол между нормалью $\mathbf{m}$ к M^{n-1} и вектором $\mathbf{e}_n$. Найдем $\cos\alpha$. Ясно, что $\cos\alpha = \dfrac{\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{m}\rangle}{|\mathbf{e}_n| \cdot |\mathbf{m}|} = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{m}\rangle$, где

$$\mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1); \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{grad}\, F}{|\,\mathbf{grad}\, F|},$$

где

$$F(x^1, \ldots, x^n) = x^n - f(x^1, \ldots, x^{n-1});$$

$$\mathbf{grad}\, F = (-f_{x^1}, \ldots, -f_{x^{n-1}}, 1);$$

$$|\,\mathbf{grad}\, F| = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2};$$

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2}};$$

$$d\sigma = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2\, dx^1 \cdot \ldots \cdot dx^{n-1}}.$$

Итак,

$$\mathrm{vol}\,(D) = \int \ldots \int \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{x^i})^2\, dx^1 \ldots dx^{n-1}}.$$

Совпадает ли эта формула с общей формулой, предложенной выше для определения объема? Найдем явный вид индуцированной метрики на M^{n-1}. Имеем:

$$ds^2 = \left(1 + (f_{x^i})^2\right)(dx^i)^2 + 2 f_{x^i} f_{x^j} dx^i dx^j;$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + (f_{x^1})^2 & & f_{x^i} f_{x^j} \\ & \ddots & \\ f_{x^i} f_{x^j} & & 1 + (f_{x^{n-1}})^2 \end{pmatrix};$$

$g(x) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n-1} f_{x^i}^2$ (проверьте!). Например, если $n = 3$, то: $g(x) = 1 + f_x^2 + f_y^2$.

Задача 1. Найдите площадь круга радиуса r на плоскости Лобачевского и на двумерной сфере.

Итак, мы предъявили несколько обоснований общей формулы: $\mathrm{vol}(D) = \int\limits_{U(x)} \dots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \dots dx^n$, с помощью которой предлагается вычислять объемы ограниченных областей D на римановых многообразиях. Правда, мы предполагали, что D содержится в одной карте. При обосновании формулы мы доказали, что для числа $\mathrm{vol}\,(D)$ существует представление:

$$\mathrm{vol}\,(D) = \int\limits_{U(x)} \dots \int \sqrt{g(x)} \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(\mathbf{a}_1 dt^1, \dots, \mathbf{a}_n dt^n),$$

т. е.

$$(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(\mathbf{a}_1 dt^1, \dots, \mathbf{a}_n dt^n) = dx^{[1}(\mathbf{a}_1 dt^1) \cdot \ldots \cdot dx^{n]}(\mathbf{a}_n dt^n),$$

где $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ — касательные векторы скорости к координатным линиям $\{x^i\}$ в точке P, а $dt^1, \dots, dt^n$ — величины бесконечно малых смещений из P вдоль этих линий; эти смещения образуют бесконечно малый параллелепипед $\widetilde{\Pi}_k(\mathbf{a}_1 dt^1, \dots, \mathbf{a}_n dt^n)$. Поэтому формулу для объема можно записать так:

$$\mathrm{vol}(D) = \int\limits_{U(x(t))} \dots \int \sqrt{g(x(t))}(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(\mathbf{a}_1 dt^1, \dots, \mathbf{a}_n dt^n).$$

Обычно ее пишут в сокращенном виде: $\int \dots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, подразумевая развернутую формулу, приведенную выше.

Ясно, что интеграл $\int\limits_{U(x)} \dots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ не зависит от выбора локальной системы координат. В самом деле, если дана замена: $(x) \to (y)$, то:

$$\int\limits_{U(y)} \dots \int \sqrt{g(y)}\, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = \int\limits_{U(y)} \dots \int (\det J_y) \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n =$$

$$= \int\limits_{U(y(x))} \dots \int (\det J_x) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) \cdot dy^1(x) \wedge \dots \wedge dy^n(x) =$$

$$= \int\limits_{U(y(x))} \dots \int (\det J_x) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =$$

$$= \int\limits_{U(y(x))} \dots \int (\det J_x) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =$$

$$= \int\limits_{U(x)} \ldots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Интеграл $\int\limits_{D} \ldots \int \sqrt{g(x)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ иногда удобно рассматривать как интеграл от внешней дифференциальной формы максимального ранга, значения которой берутся на семействе векторов вида $\mathbf{a}_1(x)dt^1, \ldots, \mathbf{a}_n(x)dt^n$. В результате получается число — объем области D. Рассмотрим еще одну структуру: связанную с кососимметрическими тензорами второго ранга.

Определение 2. Говорят, что на M^{2n} задано *кососимметрическое скалярное произведение*, если на M^n задана внешняя 2-форма $\omega^{(2)} = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$, матрица которой (ω_{ij}) невырождена, т. е. $\det(\omega_{ij}) \neq 0$. (Такие 2-формы называются невырожденными.)

Из невырожденности ω_{ij} следует существование обратного поля: ω^{ij}, т. е. $\omega_{ij}\omega^{jk} = \delta_i^k$. С формой $\omega^{(2)}$ можно связать форму максимального ранга Ω, а именно: $\Omega = \Omega^{(2n)} = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n раз).

Теорема 1. *Кососимметрическое произведение $\omega^{(2)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \omega_{ij}a^ib^j$ невырожденно в точке $P \in M^{2n}$ тогда и только тогда, когда форма $\Omega^{(2n)}$ отлична от нуля в этой точке.*

Доказательство. Поступим по аналогии с доказательством формулы: $d\sigma = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ для римановой метрики. Доказательство теоремы 1 сводится к проверке подобной формулы для кососимметрического скалярного произведения. Так как Ω — форма максимального ранга, то в координатах $x^1, \ldots, x^{2n}$ она имеет вид: $\Omega = f(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n}$, где $f(x)$ — гладкая функция на M^{2n}. Отличие от нуля Ω в точке P означает, что $f(x) \neq 0$. Мы утверждаем, что $f(x) = \sqrt{\det(\omega_{ij})}$. Отсюда и будет следовать теорема. В самом деле, рассмотрим матрицу ω_{ij} в точке P. Тогда в окрестности P можно выбрать новые координаты $y^1, \ldots, y^{2n}$, в которых

$(\omega_{ij}(y))$ (в точке P) примет вид:

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что любая кососимметрическая матрица может быть приведена к такому виду (независимо от ее вырожденности или невырожденности). Если $(\omega_{ij}(y))$ невырождена, то она не имеет нулевого собственного числа. Пусть (ω_{ij}) невырождена; J — матрица Якоби замены $(x) \to (y)$; тогда: $A(x) = JA(y)J^\top$, где $A(x) = (\omega_{ij}(x))$, $A(y) = (\omega_{ij}(y))$, т. е. $\det J = \sqrt{\det A(x)} = \sqrt{\det(\omega_{ij}(x))}$. Относительно $y^1, \ldots, y^{2n}$ форма Ω имеет в точке P вид: $\Omega(y) = dy^1 \ldots \wedge dy^{2n}$. Переходя к $x^1, \ldots, x^{2n}$, т. е. делая замену: $(x) \to (y)$, имеем: $\Omega(x) = \det J\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{2n}$, т. е. $f(x) = \sqrt{\det(\omega_{ij}(x))}$, что и требовалось. Для невырожденной матрицы (ω_{ij}) утверждение доказано. Если же $\det(\omega_{ij}) = 0$, то (ω_{ij}) имеет нулевые собственные числа, т. е. в точке P в ее каноническом разложении $\omega = \Sigma dx^i \wedge dx^{n+i}$ не содержатся некоторые переменные (отвечающие нулевым числам). Следовательно, рассматривая n-ю внешнюю степень, получаем, что $\Omega = 0$. $\square$