Лекция 2

3. Алгебраические операции над тензорами

1) Пусть даны два тензорных поля одинакового типа и ранга: $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ и $P^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$; тогда можно образовать новое тензорное поле, определив его как набор функций: $C^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} + P^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$. Исходя из определения тензора, проверяется, что $C^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ — тензор (проверьте!).

2) Если $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ — тензорное поле, а $f(x)$ — гладкая функция на M^n, то набор $f(x)\cdot T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ также образует тензорное поле на M^n. Доказательство очевидно.

3) *Перестановка индексов одного типа.* Пусть дано тензорное поле (для простоты рассмотрим поле типа $(0,q)$): $T_{i_1\dots i_q}$; построим новое поле по формуле: $P_{i_1\dots i_s\dots i_\alpha\dots i_q} = T_{i_1\dots i_\alpha\dots i_s\dots i_q}$; т. е. операция сводится к перестановке компонент тензора (перенумерация). Ясно, что эта операция — тензорная (проверьте!). Здесь была применена перестановка, менявшая местами два индекса: i_s и i_α. Ясно, что можно было бы применить любую перестановку.

Замечание. Перестановка индексов разного типа (т. е. ковариантного и контравариантного индексов) не является, вообще говоря, тензорной операцией, так как верхние индексы преобразуются с помощью матрицы J, а нижние — с помощью $(J^{-1})^\top$ (см. выше), а эти матрицы, вообще говоря, различны.

✍ ***Пример 1.*** Рассмотрим поле типа $(1,1)$, т. е. поле операторов C в $T_P(M^n)$; предположим, что в некоторой системе координат (x) выполняется тождество: $C^i_j = C^j_i$, т. е. C «симметричен». Здесь мы поменяли местами верхний и нижний индексы. На языке матрицы C это условие выглядит так: $C = C^\top$. Допустим, что и в любой другой системе, выполняется то же соотношение: $C^{i'}_{j'} = C^{j'}_{i'}$, т. е. $C' = (C')^\top$. Пусть A — матрица Якоби замены, переводящая (x) в (x'); тогда $C' = ACA^{-1}$, $ACA^{-1} = (ACA^{-1})^\top$; $(A^\top A)C = C(A^\top A)$, т. е. $BC = CB$, где $B = A^\top A$. Итак, наше условие эквивалентно условию коммутирования матриц B и C, что выполняется далеко не всегда. Если бы замена $(x)\to(x')$ обладала бы ортогональной матрицей Якоби A, т. е. $A^\top A = E$, то перемена местами индексов i и j была бы тензорной операцией.

4) *Операция свертки.* Пусть $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ — тензорное поле; фиксируем два индекса разного типа — ковариантный j_s и контравариантный i_α; и построим следующие функции: $P^{i_1\dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1}\dots i_p}_{j_1\dots j_{s-1} j_{s+1}\dots j_q} = \sum\limits_i T^{i_1\dots i_{\alpha-1}, i_\alpha = i, i_{\alpha+1}\dots i_p}_{j_1\dots j_{s-1}, j_s = i, j_{s+1}\dots j_q}$. Эта операция — тензорная (проверьте!) и переводит тензор типа (p,q) в тензор типа $(p-1,q-1)$. Если $p=q$, то для исходного поля $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ можно определить полную свертку, свернув все верхние индексы со всеми нижними; получится скалярная функция spur (T), являющаяся инвариантом поля T, т. е. не меняющаяся при заменах координат.

Спрашивается: зависит ли полная свертка $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_p}$ от порядка суммирования (свертки)? Да, в общем случае зависит. Например, пусть $T^{ik}_{js} = a^i_j b^k_s$. Тогда $a^i_j b^j_i = Tr(A\cdot B)$, где $A = (a^i_j)$, $B = (b^k_s)$. Далее: $a^i_i b^j_j = TrA\cdot TrB$. Ясно, что существуют матрицы A и B такие, что $Tr(A\cdot B) \neq TrA\cdot TrB$.

Следовательно, рассматривая всевозможные полные свертки тензорного поля, можно получать различные его инварианты.

5) *Тензорное произведение*. Пусть даны два тензорных поля общего вида: $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ и $P^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{\beta_1\ldots\beta_t}$. Можно образовать новое поле $C^{i_1\ldots i_p\alpha_1\ldots\alpha_s}_{j_1\ldots j_q\beta_1\ldots\beta_t} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}P^{\alpha_1\ldots\alpha_s}_{\beta_1\ldots\beta_t}$. Ясно, что это — тензорное поле типа $(p+s, q+t)$; оно обозначается так: $C = T\otimes P$. Операция тензорного умножения, вообще говоря, некоммутативна: $T\otimes P\neq P\otimes T$.

6) *Поднятие и опускание индексов*. Рассмотрим, например, тензорное поле типа $(0,2)$ — a_{ij}; пусть оно невырожденно, т. е. матрица $A = (a_{ij})$ невырождена в каждой точке; тогда существует обратная матрица A^{-1}, коэффициенты которой обозначим a^{ij}. Отсюда $a^{ik}a_{kl} = \delta^i_j$. Пусть дано произвольное тензорное поле $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$; можно построить новое поле вида: $P^{i_2\ldots i_p}_{\alpha j_1\ldots j_q} = a_{\alpha i_1}T^{i_1\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_q}$. Аналогично, можно построить и поле $C^{\alpha i_1\ldots i_p}_{j_2\ldots j_q} = a^{\alpha j_1}T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$. Первая операция называется *операцией опускания индекса*, вторая — *поднятием индекса*. Эти операции — тензорные, так как являются композицией двух тензорных операций: умножения и свертки тензоров. Операции поднятия и опускания индексов взаимно обратны в силу невырожденности тензорного поля a^{ij}; в самом деле: $a_{j_1\alpha}C^{\alpha i_1\ldots i_p}_{j_2\ldots j_q} = a_{j_1\alpha}a^{\alpha s}T^{i_1\ldots i_p}_{s j_2\ldots j_q} = \delta^s_{j_1}T^{i_1\ldots i_p}_{s j_2\ldots j_q} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1 j_2\ldots j_q}$. Обычно в качестве a_{ij} берется метрический тензор g_{ij} на римановом многообразии. Например, если $M^n = \mathbf{R}^n$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$, то закон преобразования верхних и нижних индексов совпадает (в той системе, в которой $g_{ij} = \delta_{ij}$, т. е. в декартовой системе, относительно ортогональных замен и параллельных переносов); поэтому в декартовой системе нет разницы между верхними и нижними индексами и их можно поднимать и опускать в произвольном порядке, например, считать все их нижними. Операция поднятия и опускания индексов в общем случае позволяет произвести каноническое отождествление T_PM^n и $T^*_PM^n$. В самом деле, элементами T_PM^n являются векторы — тензоры типа $(1,0)$, а элементами $T^*_PM^n$ — ковекторы, т. е. тензоры типа $(0,1)$. Построим линейные отображения:

$$A{:}T\to T^*,\quad A(\mathbf{a})=\xi,\quad \text{где}\quad \mathbf{a}\in T=T_PM^n,\ \ \xi\in T^*=T^*_PM^n;$$

$$\xi_i=g_{i\alpha}a^\alpha;\quad B{:}T^*\to T;\quad B(\eta)=\mathbf{b};\quad b^i=g^{i\alpha}\eta_\alpha.$$

Тогда:

$$((B\circ A)\mathbf{a})^i = g^{i\alpha}(A\mathbf{a})_\alpha = g^{i\alpha}g_{\alpha j}a^j = \delta^i_j a^j = a^i,$$

т. е.

$$B\circ A : T\to T,\quad B\circ A = 1_T$$

(тождественное отображение). Аналогично:

$$((A\circ B)\xi)_i = g_{i\alpha}(B\xi)^\alpha = g_{i\alpha}g^{\alpha j}\xi_j = \delta^j_i\xi_j = \xi_i$$

т. е. $A \circ B : T^* \to T^*$; $A \circ B = 1_{T^*}$. Это означает, что A и B — изоморфизмы. Более того, возникающее отождествление T и T^* инвариантно относительно замен координат, так как использованные операции — тензорные. В частности, следующие две диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} T^* & \xrightarrow[(J^{-1})^\top]{} & T^* \\ A\uparrow & & \uparrow A \\ T & \xrightarrow[J]{} & T \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T^* & \xrightarrow[(J^{-1})^\top]{} & T^* \\ B\downarrow & & \downarrow B \\ T & \xrightarrow[J]{} & T \end{array}.$$

7) *Симметрирование*. Рассмотрим сначала пару индексов одного типа и по тензорному полю $T_{\ldots i \ldots j \ldots}$ построим новое поле $\frac{1}{2}(T_{\ldots i \ldots j \ldots} + T_{\ldots j \ldots i \ldots})$ (переставив эти два индекса). Определим общее симметрирование так: $P_{j_1 \ldots j_q} = T_{(j_1 \ldots j_q)} = \frac{1}{q!} \sum\limits_{(\sigma)} T_{\sigma(j_1 \ldots j_q)}$, где суммирование ведется по всем перестановкам индексов $i_1, \ldots, i_q$. Операция симметрирования — тензорная (проверьте!).

Определение 1. Поле $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ называется *симметричным*, если оно не меняется при перестановке местами любых двух индексов одного типа.

Применение симметрирования к симметричному полю дает то же самое поле.

✍ ***Пример 2.*** Метрический тензор g_{ij} симметричен.

8) *Альтернирование*. Рассмотрим сначала пару соседних индексов одного типа и по тензорному полю $T_{\ldots ij} \ldots$ построим новое поле: $P_{\ldots ij \ldots} = \frac{1}{2}(-T_{\ldots ji \ldots} + T_{\ldots ij \ldots})$. Альтернирование определим так:

$$P_{j_1 \ldots j_q} = T_{[j_1 \ldots j_q]} = \frac{1}{q!} \sum_{(\sigma)} (-1)^{\varphi(\sigma)} T_{\sigma(j_1 \ldots j_q)}.$$

Здесь $\varphi(\sigma)$ — четность перестановки σ (иногда пишут $(-1)^\sigma$). Операция альтернирования — тензорная (проверьте!).

Определение 2. Тензорное поле $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ называется *кососимметричным*, если его компоненты меняют знак при транспонировании любых двух соседних индексов одного типа.

Лемма 1. *Альтернирование не меняет кососимметричный тензор $T_{i_1\dots i_k}$. (Для простоты рассматриваем тензоры, имеющие ковариантные индексы.) Альтернирование обращает симметричный тензор в нуль.*

Доказательство следует из определения симметричных и кососимметричных тензоров. □

На этом мы закончим перечисление основных алгебраических операций над тензорами. Обсудим понятие симметричного и кососимметричного оператора. Мы привели пример, показывающий, что попытки определить, например, симметричный оператор $C = (c^i_j)$ формулой: $C = C^\top$ (которая должна выполняться во всех системах координат), приводят к противоречиям, так как это определение — не тензорное, и соотношение $C = C^\top$ разрушается при заменах координат. Понятие симметрии и косой симметрии операторов имеют смысл только при наличии римановой метрики на многообразии (более общо: при наличии невырожденного тензорного поля типа $(0,2)$ или $(2,0)$). Рассмотрим M^n с метрикой g_{ij}, порождающей в каждом T_PM^n скалярное произведение

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle_P = g_{ij}(P)a^ib^j, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_PM^n.$$

Определение 3. Оператор T (в одной точке P) или операторное поле типа $(1,1)$ называется *симметричным* (соответственно, *кососимметричным*), если выполняется тождество: $\langle T\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \equiv \langle \mathbf{a}, T\mathbf{b}\rangle$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_PM^n$ (в одной точке, или во всех точках — для операторного поля); соответственно: $\langle T\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \equiv -\langle \mathbf{a}, T\mathbf{b}\rangle$; $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_PM^n$ (для кососимметричного случая).

Пояснение (например, для симметричного оператора): $\langle \mathbf{a}, T\mathbf{b}\rangle = \langle T\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$; $\langle \mathbf{a}, T\mathbf{b}\rangle = g_{ij}a^i(T\mathbf{b})^j = g_{ij}a^iT^j_kb^k = (g_{ij}T^j_k)a^ib^k = T_{ik}a^ib^k$, где $T_{ik} = g_{ij}T^j_k$. Далее: $\langle T\mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = g_{ij}(T\mathbf{a})^ib^j = g_{ij}T^i_ka^kb^j = g_{jk}T^j_ia^ib^k = T_{ki}a^ib^k$, где $T_{ki} = g_{jk}T^j_i$. Так как $T_{ik}a^ib^k \equiv T_{ki}a^ib^k$, то $T_{ik} = T_{ki}$. Итак, после опускания индексов у тензора T типа $(1,1)$ условие симметрии (наложенное на тензор типа $(0,2)$) приобретает привычный вид, т. е. T_{ik} не меняются при транспозиции индексов. Аналогично устанавливается косая симметрия T_{ik} после опускания индексов в кососимметрическом случае.

4. Кососимметричные тензоры

Будем рассматривать ковариантные кососимметричные тензоры $T_{i_1\ldots i_k}$ (или тензорные поля).

Лемма 1. *Кососимметричный тензор $T_{i_1\ldots i_n}$ максимального ранга n на M^n полностью определяется только одной своей компонентой $T_{12\ldots n}$ (существенной компонентой); остальные отличаются от нее только множителем $(-1)^\sigma$, т. е.*

$$T_{i_1\ldots i_n} = (-1)^\sigma T_{12\ldots n}, \quad (i_1, \ldots, i_n) = \sigma(1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство. Фиксируем систему координат $x^1, \ldots, x^n$; тогда в ней $T_{i_1\ldots i_n} = (-1)^\sigma T_{12\ldots n}$ (см. определение косой симметрии). Пусть сделана замена: $(x) \to (x')$. Имеем:

$$T_{1'\ldots n'} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}} T_{i_1\ldots i_n} = \left(\sum_\sigma (-1)^\sigma \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{1'}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{n'}}\right) T_{12\ldots n} =$$
$$= (\det J) \cdot T_{12\ldots n}.$$

Итак, для описания кососимметричного тензора максимального ранга достаточно знать его существенную компоненту (в какой-то одной системе координат, так как существенные компоненты в других системах получаются домножением на якобиан замены). Лемма доказана. □

Для кососимметричных тензоров определена важная операция: *внешнее умножение.* Пусть $T_{i_1\ldots i_k}$ и $P_{j_1\ldots j_q}$ — два кососимметричных тензора; определим новый кососимметричный тензор, обозначаемый через $T \wedge P$, где

$$R_{i_1\ldots i_k j_1\ldots j_k} = T_{[i_1\ldots i_k} P_{j_1\ldots j_q]} = \frac{1}{k!q!} \sum_\sigma (-1)^\sigma T_{\sigma(i_1\ldots i_k} P_{j_1\ldots j_q)}. \qquad (1)$$

Это умножение является билинейной операцией; ранги тензоров суммируются. Рассмотрим интерпретацию на языке внешних дифференциальных форм. Сначала рассмотрим кососимметричные тензоры $T_{i_1\ldots i_k}$, заданные в одной точке M^n. Тогда $T_{i_1\ldots i_k}$ определяет кососимметричное полилинейное отображение $T : \underbrace{(T_* \times \ldots \times T_*)}_{k} \to \mathbf{R}$, где $T_* = T_P M^n$.

Фиксируем некоторую систему координат $x^1, \ldots, x^n$ и рассмотрим их как гладкие функции на окрестности точки P; тогда определены дифференциалы $dx^1, \ldots, dx^n$ этих функций. Для любой гладкой функции $f(x)$ ее дифференциал df есть элемент пространства, сопряженного к T_*, т. е. линейный функционал на T_*. В самом деле, если $\mathbf{a} \in T_*$, то

$$\frac{df}{d\mathbf{a}} = \frac{df(\gamma(t))}{dt}\bigg|_{t=0},$$

где $\gamma(0) = P$, $\dot\gamma(0) = \mathbf{a}$, т. е.

$$\frac{df}{d\mathbf{a}} = \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^k}a^k. \quad \text{Итак:} \quad \frac{df}{d\mathbf{a}} = \frac{\partial f}{\partial x^k}a^k,$$

т. е. если $f = x^i$, то $\dfrac{dx^i}{d\mathbf{a}} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^k}a^k = \delta^i_k a^k = a^i$; $dx^k = a^k dt$.

Итак, dx^k можно считать функционалами на T_*, т. е. — элементами T^*. Считая dt малой величиной, можно рассматривать его как коэффициент пропорциональности, который в дальнейшем будем опускать. Если $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in T_*$ — базис в T_*, то в качестве базиса в T^* возьмем $dx^1, \ldots, dx^n$, считая, что $dx^k(\mathbf{e}_\alpha) = \delta^k_\alpha$, т. е. $dx^k(\mathbf{a}) = a^k$. Определим внешнюю алгебру $\Lambda(dx^1, \ldots, dx^n)$ с образующими $dx^1, \ldots, dx^n$, между которыми заданы соотношения: $dx^i \wedge dx^j + dx^j \wedge dx^i = 0$; операция $\wedge$ билинейна, алгебра Λ порождена (в аддитивном смысле) мономами: $dx^1, \ldots, dx^n$; $dx^i \wedge dx^j$, $i < j$; $\ldots$; $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $i_1 < \ldots < i_k$; $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Как известно из курса алгебры, между этими мономами нет линейных соотношений с постоянными коэффициентами; мультипликативными образующими алгебры $\Lambda(dx^1, \ldots, dx^k)$ являются $dx^1, \ldots, dx^k$ — базис T^*. Алгебра Λ может быть разложена в прямую сумму линейных подпространств Λ^k; $\Lambda = \bigoplus\limits_{k=0}^{n} \Lambda^k$, где Λ^k, $1 \leqslant k \leqslant n$, порождено мономами: $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $i_1 < \ldots < i_k$; $\Lambda^0 \cong \mathbf{R}$, порождено единицей 1. Размерность алгебры Λ равна 2^n.

5. Внешние дифференциальные формы

Рассмотрим новую алгебру $\Lambda(M^n)$, элементами которой являются линейные комбинации $\omega^{(k)} = T_{i_1\ldots i_k}dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ и всевозможные линейные комбинации $\sum\limits_{k=0}^{n} \omega^{(k)}$, где $T_{i_1\ldots i_k}(x)$ — кососимметричное тензорное поле ранга k и индексы $i_1 \ldots i_k$ упорядочены в порядке возрастания. Умножение в $\Lambda(M^n)$ определено ниже.

Мы определили элемент $\omega^{(k)}$ в данной системе координат: $x^1, \ldots, x^n$, причем $0 \leqslant k \leqslant n$. Что происходит с этим объектом при замене $(x) \to (x')$?

Лемма 1. *Элементы* $\omega^{(k)} = T_{i_1\ldots i_k}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ *определены инвариантно, в том смысле, что при замене* $(x) \to (x')$ *имеем:*

$$T_{i'_1\ldots i'_2} dx^{i'_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i'_k} \equiv T_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Доказательство. Достаточно выполнить замену $(x) \to (x')$ и воспользоваться законами преобразования $T_{i_1\ldots i_k}(x)$ и dx^i. □

Определение 1. Элементы $\omega^{(k)}$ алгебры $\Lambda(M^n)$ называются *внешними дифференциальными формами.*

Размерность $\Lambda(M^n)$ бесконечна. Каждая внешняя форма $\omega^{(k)}$ однозначно определяет набор компонент $T_{i_1\ldots i_k}(x)$ кососимметричного тензора; верно и обратное: любой кососимметричный тензор (точнее — тензорное поле) однозначно определяет внешнюю форму. Язык внешних форм — это один из языков описания кососимметричных полей.

Замечание. При определении внешних форм можно было бы рассматривать линейные комбинации вида $A_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, где $A_{i_1\ldots i_k}$ — произвольное тензорное поле (не обязательно кососимметричное), и суммирование ведется по всем наборам $i_1 \ldots i_k$ (не упорядоченным). В силу косой симметрии образующих $dx^1, \ldots, dx^n$ относительно внешнего умножения имеем:

$$A_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = A_{[i_1\ldots i_k]} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \quad i_1 < \ldots < i_k;$$

т. е. любая комбинация $A_{i_1\ldots i_k} \cdot dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ порождает некоторую внешнюю дифференциальную форму.

Зададим умножение в $\Lambda(M^n)$. Если $\omega^{(k)} = T_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $(i_1 < \ldots i_k)$, и $\omega^{(s)} = P_{j_1\ldots j_s} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_s}$, $(j_1 < \ldots < j_s)$, — две внешние формы, то их произведение $\omega^{(k+s)} = \omega^{(k)} \wedge \omega^{(s)}$ определим как форму вида:

$$\begin{aligned}
&\omega^{(k+s)} = (T_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) \wedge (P_{j_1\ldots j_s} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_s}) = \\
&= T_{i_1\ldots i_k} P_{j_1\ldots j_s}\, dx^{i_1} \underset{(i_1<\ldots<i_k)}{\wedge \ldots \wedge} dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \underset{(j_1<\ldots<j_s)}{\wedge \ldots \wedge} dx^{j_s} \\
&= T_{[i_1\ldots i_k} P_{j_1\ldots j_s]}\, dx^{i_1} \underset{(i_1<\ldots<j_s)}{\wedge \ldots \wedge} dx^{j_s}.
\end{aligned}$$

Ясно, что умножение форм совпадает с внешним умножением соответствующих им тензорных полей. Итак, $\Lambda(M^n)$ снабжается структурой алгебры с единицей; умножение ассоциативно (так как ассоциативно умножение в алгебре $\Lambda(dx^1, \ldots, dx^n)$, но не коммутативно. Алгебра $\Lambda(M^n)$

распадается в прямую сумму линейных подпространств $\Lambda^k(M^n) = \{T_{i_1\ldots i_k}dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}\}$. Число k называется степенью формы $\omega^{(k)}$. Элементы $\omega^{(k)}$ называются однородными элементами алгебры $\Lambda(M^n)$. Дифференциальные формы $\omega^{(k)}$ удобно трактовать как полилинейные кососимметрические отображения. Если $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in T_*M^n$, то, считая, что $dx^i(\mathbf{a}) = a^i$ (i-я координата), т. е. опуская множитель dt, получаем:

$$\begin{aligned}
&\omega^{(k)}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = (T_{i_1\ldots i_k}(x)dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k})(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = \\
&= T_{i_1\ldots i_k}(x)dx^{[i_1}(\mathbf{a}_1) \cdot \ldots \cdot dx^{i_k]}(\mathbf{a}_k) = T_{i_1\ldots i_k}(x)a_1^{[i_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{i_k]} = \\
&= T_{[i_1\ldots i_k]}a_1^{i_1} \ldots a_k^{i_k} = T_{i_1\ldots i_k}a_1^{i_1} \ldots a_k^{i_k}.
\end{aligned}$$

Итак:

$$\omega^{(k)} : \underbrace{T_x \times \ldots \times T_x}_{k} \to \mathbf{R}.$$

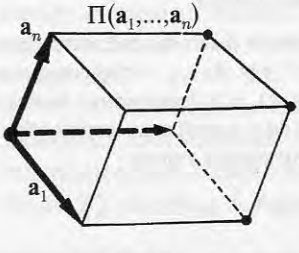

Рис. 3

Рассмотрим $\mathbf{R}^n$ и пусть $x^1, \ldots, x^n$ — декартовы координаты. Пусть $\omega^{(n)} = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ — внешняя форма максимального ранга; $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbf{R}^n$ — произвольный набор векторов-аргументов из $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $\operatorname{vol}\Pi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, n-мерный объем параллелепипеда $\Pi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, натянутого на $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ (рис. 3).

Лемма 2. *Пусть* $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}$ *— матрица, построенная из координат* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. *Тогда* $\det(A) = \operatorname{vol}\Pi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Доказательство. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть формула доказана для $k \leqslant n-1$. Рассмотрим $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$; так как $\operatorname{vol}\Pi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ не меняется при вращениях, то можно поместить $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ в плоскость, натянутую на $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$, где $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ — базис в $\mathbf{R}^n$. Тогда матрица A принимает вид:

B'	$*$
$0\ldots\ldots0$	${a'}_n^n$

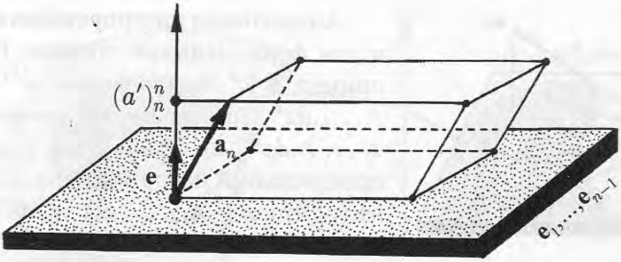

Рис. 4

Следовательно:

$$\det A = \det A' = (\det B') \cdot (a')^n_n =$$
$$= (\operatorname{vol}\Pi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{n-1})) \cdot (a')^n_n = \operatorname{vol}\Pi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$$

(рис. 4). Здесь $(a')^n_n$ — проекция $\mathbf{a}_n$ на $\mathbf{e}_n$. □

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{R}^n$ *отнесено к декартовым координатам* $x^1,\dots,x^n$, *и пусть* $\omega^{(n)} = dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ *— форма максимального ранга. Тогда* $\omega^{(n)}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = \operatorname{vol}\Pi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$.

Доказательство. Так как $dx^i(\mathbf{a}) = a^i$, то:

$$\omega^{(n)}(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) = (dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n)(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n) =$$
$$= dx^{[1}(\mathbf{a}_1)\cdot\ldots\cdot dx^{n]}(\mathbf{a}_n) = a_1^{[i_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{i_n]} = \det A,$$

где $a = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$, т. е. $\det A = \operatorname{vol}\Pi(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$. □

Итак, значение стандартной формы $dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ на любом наборе $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ равно евклидову объему параллелепипеда, натянутого на $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$. В частности, объем параллелепипеда (в такой трактовке) не скаляр; например, он меняет знак при нечетной перестановке $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ (это — «ориентированный объем»). Итак, мы представили $\omega = dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ как n-линейный функционал от $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$. Эта точка зрения на объем, как на значение внешней формы (от аргументов $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$), плодотворна; она лежит в основе многих геометрических фактов; например, из нее извлекается инвариантность кратного интеграла при замене переменных.

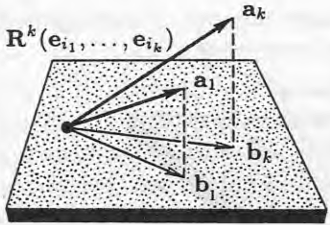

Рис. 5

Аналогичная интерпретация возможна и для форм меньшей степени. Пусть, например, в $\mathbf{R}^n$ задана форма $\omega^{(k)} = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$. Требуется найти значение $(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k})(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$, где $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ — произвольный набор векторов в $\mathbf{R}^n$. Докажите, что $\omega^{(k)}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = \operatorname{vol} \Pi(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k)$ — объем k-мерного параллелепипеда, расположенного в координатной плоскости $\mathbf{R}^k(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k})$ и натянутого на векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k \in \mathbf{R}^k$, являющиеся ортогональными проекциями векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ на плоскость $\mathbf{R}^k(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k})$ (рис. 5).

Если форма $\omega^{(k)}$ есть комбинация вида $\omega_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, то ее значение на $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ будет линейной комбинацией объемов $\operatorname{vol} \Pi(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k)$ с «весами» $\omega_{i_1 \ldots i_k}$.