ЛЕКЦИЯ 1

Здравствуйте, коллеги!

Меня зовут Фоменко Анатолий Тимофеевич.

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений.

Аудитория 16-19 Главного Здания МГУ, 16 этаж. Сайт кафедры: dfgm.math.msu.su.

Я буду читать Вам полугодовой курс под названием

«Дифференциальная геометрия и топология»

в осеннем семестре, для математиков 3 курса.

Рекомендую следующие книги по нашему курсу:

1.А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко. «Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии». Было несколько изданий.

2.А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко. «Курс дифференциальной геометрии и топологии». Было несколько изданий. Рекомендую издание 2020 года. Это новое переработанное издание и изд-ве УРСС.

3.А.С. Мищенко, Ю.П.Соловьев, А.Т.Фоменко. «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии». Было несколько изданий.

4.Для более подробного изучения рекомендую книгу: Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко. «Современная геометрия». Несколько изданий. А также книгу: А.Т.Фоменко «Дополнительные главы дифференциальной геометрии и топологии». Несколько изданий.

На сайте кафедры дифференциальной геометрии и приложений много информации по этому курсу лекций.

Задавайте вопросы сразу, по ходу лекции. Я сразу объясню, чтобы не оставалось неясностей.

Тензорный анализ и риманова геометрия

1. Общее понятие тензорного поля на многообразии

Рассмотрим гладкое многообразие M^n; пусть $P \in M^n$, и $x^1, \ldots, x^n$ — локальная регулярная система координат в некоторой окрестности P. Существует бесконечное множество других регулярных систем координат в окрестности P; наша цель — изучить объекты, инвариантные относительно всевозможных замен координат. Будем обозначать новые координаты знаком «штрих» — $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$. Если в каком-то выражении один и тот же индекс встречается два раза — вверху и внизу, то по нему предполагается суммирование.

1) Пусть $\mathbf{a} \in T_P(M^n)$ — касательный вектор к M^n в точке P. Ранее мы приводили несколько определений касательного вектора, среди них были такие, которые определяли вектор независимо от выбора локальных координат, т. е. как объект, инвариантный относительно регулярных замен (например, определение с помощью пучка соприкасающихся кривых). Однако как только мы захотим сопоставить касательному вектору его координаты, т. е. записать его аналитически, нам потребуется ввести систему координат, в которой вектор и приобретает координаты. При выборе другой системы, эти координаты изменятся. Найдем связь между координатами вектора, подсчитанными в разных системах. Так как $\mathbf{a} = a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} = a^{i'} \dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}$, то $a^{i'} \dfrac{\partial}{\partial x^{i'}} = a^i \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}$, и так как $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^{i'}} \right\}$ образуют базис в $T_P(M^n)$, то $a^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} a^i$. Мы нашли закон изменения координат вектора при замене системы: координаты $a^1, \ldots, a^n$ преобразуются с помощью матрицы Якоби $\left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right) = J$. Это условие получено нами из требования инвариантности вектора как геометрического объекта при замене координат.

Можно, наоборот, определить вектор как объект, задаваемый в каждой системе координат $x^1, \ldots, x^n$ набором чисел $a^1, \ldots, a^n$, преобразующихся при переходе от системы $x^1, \ldots, x^n$ к системе $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ по правилу

$a^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} a^i$. Ясно, что определенный таким образом объект будет инвариантным.

2) Пусть $f(x)$ — гладкая функция на M^n. Рассмотрим $\operatorname{grad} f = \left\{ \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \right\}$. Этот набор чисел (функций точки P) определен в каждой системе координат; найдем закон преобразования. По правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$\xi_{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \xi_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}},$$

где

$$\operatorname{grad} f = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}, \quad \xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right) = (J^\top)^{-1},$$

т. е. этот набор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ преобразуется по другому закону, чем набор компонент вектора; а именно $\operatorname{grad} f$ преобразуется с помощью матрицы $(J^{-1})^\top$, где J — матрица Якоби $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$. Этот закон также можно получить, исходя из требования инвариантности (относительно замен координат) некоторого геометрического объекта, а именно производной функции f по направлению какого-либо вектора $\mathbf{a} \in T_P(M^n)$. В самом деле, эта производная не зависит от выбора локальных координат, а потому

$$\frac{df}{d\mathbf{a}} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(\gamma(\epsilon)) - f(\gamma(0))}{\epsilon},$$

где

$$\gamma(t) \in M^n, \quad \gamma(0) = P, \quad \dot\gamma(0) = \mathbf{a} \in T_P(M^n),$$

$$\frac{df}{d\mathbf{a}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = a^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = a^{i'}\frac{\partial f}{\partial x^{i'}};$$

отсюда

$$a^{i'}\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = a^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^{i'}},$$

т. е.

$$a^{i'}\xi_{i'} = a^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\xi_{i'} = a^i \xi_i, \quad \xi_i = \xi_{i'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \xi_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\xi_i,$$

что и требовалось.

3) Рассмотрим $T_P(M^n)$ и сопряженное к нему пространство $T_p^*(M^n)$ вещественных линейных функционалов $l(\mathbf{a})$, где $\mathbf{a} \in T_P(M^n)$. Найдем закон преобразования координат функционалов l при замене координат в окрестности точки; введем в $T_P^*(M^n)$ базис $e^1, \ldots, e^n$, состоящий из функционалов, определяемых условием $e^k(\mathbf{e}_\alpha) = \delta^k_\alpha$, где $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ —

базис в $T_P(M^n)$. Так как $l(\mathbf{a})$ — вещественное число и так как скаляр не зависит от выбора координат, то $l(\mathbf{a})_{(x)} = l'(\mathbf{a}')_{(x')}$; отсюда

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i; \quad l(\mathbf{a}) = (l_i e^i)(a^k\mathbf{e}_k) = l_k a^k = l_{k'} a^{k'} = l_{k'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} a^k.$$

Отсюда в силу произвольности $\mathbf{a}$ имеем $l_k = \dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} l_{k'}$, т. е. $l_{k'} = \dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} l_k$. Поэтому закон преобразования координат функционала l совпадает с законом преобразования координат $\operatorname{grad} f$. Элементы $T_P^*(M^n)$ называются ковекторами; итак, $\operatorname{grad} f$ — ковектор.

Мы ввели в T^* сопряженный базис, состоящий из ковекторов $e^1, \ldots, e^n$, а потому можно отождествить T с T^*, положив $\varphi\colon T \to T^*$, $\varphi(\mathbf{a}) = l$, где $\mathbf{a} = a^k\mathbf{e}_k$, $l = \sum\limits_{k=1}^{n} a^k e^k$, т. е. считая, что l, отвечающий $\mathbf{a}$ при изоморфизме φ, имеет относительно $e^1, \ldots, e^n$ те же координаты, что и вектор $\mathbf{a}$ относительно $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Этот линейный изоморфизм не инвариантен при замене координат $(x) \to (x')$, так как вектор и ковектор преобразуются по разным законам; вектор — матрицей J, а ковектор — матрицей $(J^{-1})^\top$. Итак, указанное отождествление T с T^* в системе (x) разрушится, если рассмотрим замену общего вида $(x) \to (x')$. Имеются, впрочем, такие замены, при которых соответствие $\varphi : T \to T^*$ сохраняется; это замены, где $J = (J^{-1})^\top$, т. е. задающиеся в данной точке P ортогональной матрицей Якоби. Замена общего вида имеет невырожденную матрицу Якоби, но отнюдь не ортогональную. Тем не менее T и T^* можно отождествить с помощью линейного изоморфизма, выдерживающего любые замены координат. Об этом ниже.

4) Пусть C — линейный однородный оператор, преобразующий в себя $T_P(M^n)$; пусть C — матрица оператора, записанная в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Делая замену $(x) \to (x')$, получаем $C' = JCJ^{-1}$, т. е. $c^{i'}_{j'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} c^i_j$. Закон преобразования матрицы оператора может быть получен исходя из требования, чтобы соотношение: $\mathbf{b} = C(\mathbf{a})$ ($\mathbf{a}$ — произвольный вектор $T_P(M^n)$), было инвариантно относительно замен координат. В самом деле, в этом соотношении все объекты допускают инвариантное, независимое от координатной записи определение. Проверку того, что отсюда следует нужный закон преобразования C, оставляем читателю как упражнение.

5) Рассмотрим билинейную симметричную форму Q на $T_P(M^n)$: $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = q_{ij}a^i b^j$. Из алгебры известно, что при замене координат матрица Q формы превратится в матрицу Q' такую, что $Q' = JQJ^\top$, т. е. $q_{i'j'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} q_{ij}$. Как и выше, этот закон преобразования Q можно получить из требования сохранения скаляра $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_P(M^n)$ при

произвольных заменах. В самом деле,

$$Q(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = q_{ij} a^i b^j \equiv q_{i'j'} a^{i'} b^{j'} = q_{ij} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} a^i b^j,$$

т. е.

$$q_{ij} = q_{i'j'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}, \quad \text{или} \quad q_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} q_{ij}.$$

Мы привели простейшие примеры законов преобразования; их различия мы указывали различным расположением индексов у компонент объектов: a^i, l_j, c^i_j, q_{ij}. Верхние индексы называются *контравариантными*, нижние — *ковариантными*. Удобно сопоставлять каждому объекту из перечисленных выше пару (p, q), где q — число ковариантных, p — число контравариантных индексов. Итак, набор координат вектора $\mathbf{a} \in T_P(M^n)$ имеет тип $(1, 0)$, ковектора — $(0, 1)$, оператора — $(1, 1)$, билинейной формы на векторах — $(0, 2)$. Наряду с такой формой существует и форма $B(l, m)$ на ковекторах $l, m \in T^*_P(M^n)$. Вычисление (по аналогии с $Q(\mathbf{a}, \mathbf{b})$) дает, что если $Q(l,m) = b^{ij} l_i m_j$, то $b^{i'j'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} b^{ij}$, т. е. $B' = (J^{-1})^\top B (J^{-1})$.

Перечисленные объекты допускают инвариантное определение, независимое от конкретной координатной записи в конкретной системе координат, и закон преобразования компонент объектов получается как следствие этой инвариантности. Таким образом, если в каждой системе координат задан набор чисел (функций), преобразующихся друг в друга по указанным правилам, то мы можем сделать вывод, что эти наборы определяют некоторый инвариантный объект, который мы изучаем с помощью координатной записи в различных системах координат. Это обстоятельство кладется в основу общего определения тензорного поля на многообразии, являющегося геометрическим объектом, инвариантно определенным, т. е. не зависящим от выбора локальной системы координат. От координатной системы зависит конкретная запись компонент объекта.

Определение 1. Тензором типа (p, q) ранга $p+q$ (соответственно, тензорным полем типа (p, q) ранга $p+q$) называется объект, задаваемый в каждой системе координат $(x) = (x^1, \ldots, x^n)$ набором чисел $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ (соответственно функций $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)$, которые будем считать гладкими), преобразующихся при замене систем координат $(x) \to (x')$ по закону

$$T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.$$

Это определение отвечает требованию, что вводимый объект может быть определен инвариантно, безотносительно к его конкретной координатной записи. В самом деле, как известно из курса алгебры, тензор (тензорное поле) можно определить как полилинейное отображение

$$T : \underbrace{T_P \times \ldots \times T_P}_{q} \times \underbrace{T^*_P \times \ldots T^*_P}_{p} \to \mathbf{R},$$

задаваемое формулой

$$T(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q; l^1, \ldots, l^p) = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} a_1^{j_1} \ldots a_q^{j_q} l^1_{i_1} \ldots l^p_{i_p},$$

где $\mathbf{a}_k = a_k^{j_k} \mathbf{e}_{j_k}$; $l^k = l^k_{i_k} e^{i_k}$; $\{a_k^{j_k}\}$ — координаты вектора $\mathbf{a}_k \in T_P(M^n)$ (k-й сомножитель); $\{l^k_{i_k}\}$ — координаты ковектора $l^k \in T^*_P(M^n)$ (k-й сомножитель).

Функции $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ являются коэффициентами отображения T. Из курса алгебры известно, что полилинейное отображение всегда можно записать в таком виде. Если фиксированы базисы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $e^1, \ldots, e^n$, то для $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ возникает полезная формула

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T(\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_q}; e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}).$$

В самом деле

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_{j_1},\ldots,\mathbf{e}_{j_q};e^{i_1},\ldots,e^{i_p}) &= T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\rho_1 \ldots \rho_q} (\mathbf{e}_{j_1})^{\rho_1} \ldots (\mathbf{e}_{j_q})^{\rho_q} (e^{i_1})_{\alpha_1} \ldots (e^{i_p})_{\alpha_p} = \\ &= T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\rho_1 \ldots \rho_q} \delta^{\rho_1}_{j_1} \ldots \delta^{\rho_q}_{j_q} \delta^{i_1}_{\alpha_1} \ldots \delta^{i_p}_{\alpha_p} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}. \end{aligned}$$

Далее, T можно определить в инвариантных терминах, так как все объекты, входящие в формулу $T : (T_P)^q \otimes (T^*_P)^p \to \mathbf{R}$, а также свойство полилинейности, инвариантны. От выбора координат зависит конкретная запись коэффициентов $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$.

Хотя пользоваться полилинейными отображениями удобнее в их инвариантном виде, мы будем почти всегда работать с координатной записью, так как она весьма полезна при конкретных вычислениях. Для удобства введем специальное обозначение — так называемые мультииндексы $(i) = (i_1 \ldots i_p)$, заменяя целую строку индексов одним индексом. Например, тензорный закон запишется так:

$$T^{(i')}_{(j')} = \frac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}} \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(j')}} T^{(i)}_{(j)}, \quad \text{где} \quad \frac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}.$$

Изучим простейшие свойства тензорных полей.

Лемма 1. *Пусть* $(x) \to (x')$ — *регулярная замена. Тогда из соотношения* $T^{(i')}_{(j')} = \dfrac{\partial x^{(i')}}{\partial x^{(i)}} \dfrac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(j')}} T^{(i)}_{(j)}$ *(тензорный закон) следует, что*

$$T^{(i)}_{(j)} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} T^{(i')}_{(j')}.$$

Доказательство следует из тождества $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$, означающего, что $J\,J^{-1} = E$, где $J = \left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ — матрица Якоби. □

Лемма 2. *Пусть дано тензорное поле, записанное в системе* (x) *и пусть выполнены замены координат* $(x) \to (z) \to (y)$, $(x) \to (v) \to (y)$, *т. е. мы двумя способами перешли от* (x) *к* (y) — *через* (z) *и через* (v). *Тогда запись поля* T *в системе* (y) *не зависит от способа перехода от* (x) *к* (y).

Доказательство следует из формулы дифференцирования сложных функций:

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^k} = \frac{\partial y^i}{\partial z^q} \frac{\partial z^q}{\partial x^k} = \frac{\partial y^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^k}. \qquad \square$$

Напомним свойства тензоров, известные из курса алгебры.

а) Тензоры ранга $p+q$ типа (p, q) (тензоры рассматриваются в точке) образуют линейное пространство H, причем $\dim H = n^{p+q}$. Доказательство следует из представления тензора как полилинейного отображения: линейная комбинация таких отображений снова полилинейна.

б) В пространстве H всех тензоров ранга $p+q$ типа (p, q) можно выбрать аддитивный базис, элементы которого (полилинейные отображения) обозначаются так:

$$\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}.$$

Число их равно n^{p+q}. Каждое отображение

$$\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$$

задается формулами

$$\mathbf{e}_{i_\alpha}(l) = l_{i_\alpha}, \text{ где } l \in T_P^*(M^n); \quad e^{j_\alpha}(\mathbf{a}) = a^{j_\alpha}, \text{ где } \mathbf{a} \in T_P M^n;$$

$$(\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q})(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q, l^1, \ldots, l^p) =$$
$$= \mathbf{e}_{i_1}(l^1) \ldots \mathbf{e}_{i_p}(l^p) e^{j_1}(\mathbf{a}_1) \ldots e^{j_q}(\mathbf{a}_q) = l^1_{i_1} \ldots l^p_{i_p} a_1^{j_1} \ldots a_q^{j_q}.$$

Если $T : (T_P M^n)^q \times (T_P^* M^n)^p \to \mathbf{R}$ — произвольное полилинейное отображение ранга (p, q), то

$$T(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q; l^1, \ldots, l^p) = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} a_1^{j_1} \ldots a_q^{j_q} l^1_{i_1} \ldots l^p_{i_p} =$$
$$= T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} (\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q})(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q; l^1, \ldots, l^p),$$

т. е.

$$T = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} (\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}).$$

Итак, отображения $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$ образуют аддитивный базис в пространстве всех тензоров типа (p, q). С помощью мультииндексов это разложение произвольного тензора T по базисным тензорам записывается так: $T = T^{(i)}_{(j)} \mathbf{e}_{(i)} \otimes e^{(j)}$.

Напомним закон преобразования базисных тензоров $\mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$ при замене координат:

$$\mathbf{e}_{(i')} \otimes e^{(j')} = \frac{\partial x^{(i)}}{\partial x^{(i')}} \frac{\partial x^{(j')}}{\partial x^{(j)}} \mathbf{e}_{(i)} \otimes e^{(j)}.$$

Все эти свойства и определения переносятся на случай гладких тензорных полей на многообразии; отличие в том, что нужно рассматривать тензорные поля как линейные комбинации базисных полей типа (p, q) с переменными коэффициентами, что превращает пространство тензорных полей в бесконечномерное пространство.

Частный случай: любое тензорное поле типа $(1, 0)$ допускает локально представление вида $\mathbf{T} = T^i(x)\mathbf{e}_i(x)$; аналогично, любое поле типа $(0, 1)$ допускает представление вида $l = l_i e^i(x)$.

2. Простейшие примеры тензорных полей

1) Пусть на M^n дано гладкое векторное поле $\mathbf{T}(x)$. Тогда оно является тензорным полем типа $(1, 0)$; пространство всех гладких полей типа $(1, 0)$ отождествляется с бесконечномерным пространством всех гладких векторных полей на M^n.

2) Пусть на M^n дано гладкое ковекторное поле, т. е. в каждой точке $x \in M^n$ отмечен линейный функционал $l(x) \in T_x^* M^n$, гладко зависящий

от точки. Это поле — элемент бесконечномерного пространства тензорных полей типа $(0,1)$. В этом пространстве лежит линейное бесконечномерное подпространство, составленное из полей $\operatorname{grad} f(x)$, где f — гладкая функция на M^n.

3) Пусть на M^n задана риманова метрика $g_{ij}(x)$. Так как $g_{i'j'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}$, то набор $g_{ij}(x)$ определяет тензорное поле типа $(0,2)$, т. е. гладкое поле билинейных форм. Этот тензор называется *метрическим тензором*.

4) Комплексно аналитическое многообразие M^{2n} характеризуется тем свойством, что в каждом $T_x M^{2n}$ определен оператор I — «умножение на мнимую единицу», $I^2 = -E$. Так как этот оператор гладко зависит от точки, то получаем тензорное поле типа $(1,1)$.

5) *Тензор моментов инерции*. Пусть дано твердое тело с одной закрепленной точкой 0 в $\mathbf{R}^3$; тело вращается вокруг точки 0. Будем считать, что оно состоит из конечного числа N материальных точек, жестко скрепленных между собою (в процессе движения их взаимное расположение не меняется). Будем рассматривать только ортогональные системы координат в $\mathbf{R}^3$. Обозначим массы точек через $m_1, m_2, \ldots, m_N$, а их координаты в фиксированный момент времени t — через $x^i_{(1)}, \ldots, x^i_{(N)}$, $i = 1, 2, 3$. Построим матрицу

$$a^{ij} = -\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha x^i_{(\alpha)} x^j_{(\alpha)} + \delta^{ij} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha |\mathbf{x}_{(\alpha)}|^2.$$

Получили тензор ранга 2 типа $(0,2)$, причем матрица a^{ij} симметрична. Этот симметричный тензор a^{ij} называется тензором моментов инерции твердого тела (различные тела имеют различные тензоры моментов инерции).

Поясним роль этого тензора на примере. Пусть через 0 проведена прямая с единичным направляющим вектором $\mathbf{l} = (l^1, l^2, l^3)$. Найдем сумму $\sum\limits_{ij} a^{ij} l^i l^j = H(\mathbf{l})$. Так как a^{ij} и l^i — тензоры, то $H(\mathbf{l})$ — инвариант ортогональной замены координат, т. е. скаляр. Вычисления дают

$$\begin{aligned} H(\mathbf{l}) = \sum_{ij} a^{ij} l^i l^j = \\ &= -\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \sum_i x^i_{(\alpha)} l^i \sum_j x^j_{(\alpha)} l^j + \sum_{ij} \delta^{ij} l^i l^j \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha |\mathbf{x}_{(\alpha)}|^2 = \\ &= -\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \big(\langle \mathbf{x}_{(\alpha)}, \mathbf{l}\rangle\big)^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha |\mathbf{l}|^2 |\mathbf{x}_{(\alpha)}|^2 = \end{aligned}$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\big(|\mathbf{x}_{(\alpha)}|^2-\big(\langle\mathbf{x}_{(\alpha)},\mathbf{l}\rangle\big)^2\big).$$

Это выражение интерпретируется так: множитель $|\mathbf{x}_{(\alpha)}|^2 - \langle\mathbf{x}_{(\alpha)},\mathbf{l}\rangle^2$ есть квадрат расстояния точки с массой m_α до оси $\mathbf{l}$; т. е. мы получили известное выражение для момента инерции тела относительно оси. Собственные векторы матрицы a^{ij} параллельны так называемым главным осям инерции твердого тела.

6) *Тензор деформаций*. Рассмотрим сплошную среду, заполняющую некоторый объем в пространстве $\mathbf{R}^n$, отнесенном к декартовым координатам $x^1, \ldots, x^n$; точки этой области отождествлены с точками среды. Рассмотрим малую деформацию среды, например под действием каких-то сил, действующих на этот объем. Будем считать, что нам заданы смещения точек среды, т. е. гладкие функции $u^i(x^1, \ldots, x^n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, зависящие от точки и позволяющие вычислять координаты смещенной точки $\widetilde{P}$ через координаты исходной точки по формуле: $\widetilde{x}^i = x^i + u^i(x^1, \ldots, x^n)$. Обычно рассматривают малые смещения, т. е. функции $u^i(x)$ предполагаются достаточно малыми. Для аккуратной постановки задачи следовало бы рассмотреть бесконечно малые смещения точек, что эквивалентно заданию гладкого векторного поля в области. Однако в теории сплошной среды рассматривают иногда и конечные деформации, поэтому остановимся на предложенном выше формализме.

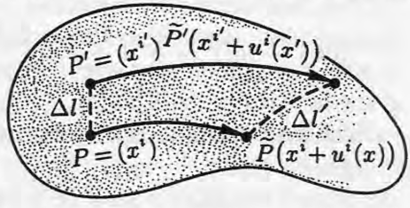

Рис. 1

Итак, точка $P = (x^1, \ldots, x^n)$ переместилась в точку $\widetilde{P} = (x^i + u^i(x^1, \ldots, x^n))$. Найдем изменение длин гладких кривых, возникающее при деформации среды. Рассмотрим две близкие точки: $P(x^1, \ldots, x^n)$ и $P'(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$. Пусть $(\Delta l)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x^{i'} - x^i)^2 = \sum_{i=1}^{N}(\Delta x^i)^2$ — квадрат длины евклидова отрезка, соединяющего P и P'. Найдем квадрат длины $(\Delta l')^2$ отрезка, соединяющего образы точек P и P' после их смещения под влиянием деформации среды в новые точки $\widetilde{P}$ и $\widetilde{P}'$ (рис. 1). Имеем

$$(\Delta l')^2 = \sum_{i=1}^{n}\big(x^{i'}+u^i(x')-x^i-u^i(x)\big)^2 =$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\big[(x^{i'}-x^i)+\big(u^i(x')-u^i(x)\big)\big]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\Delta x^i + \Delta u^i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\Delta x^i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\Delta x^i \Delta u^i + \sum_{i=1}^{n}(\Delta u^i)^2 =$$

$$= (\Delta l)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\Delta x^i \Delta u^i + \sum_{i=1}^{n}(\Delta u^i)^2.$$

Так как $\Delta u^i = \dfrac{\partial u^i}{\partial x^k}\Delta x^k$, то

$$\begin{aligned}(\Delta l')^2 - (\Delta l)^2 &= 2\sum_{i=1}^{n}\Delta x^i \Delta u^i + \sum_{i=1}^{n}(\Delta u^i)^2 = \\ &= 2\sum_{i,k}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\Delta x^i \Delta x^k + \sum_{i,k,p}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^i}{\partial x^p}\Delta x^k \Delta x^p = \\ &= \sum_{i<k}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)\Delta x^i \Delta x^k + \sum_{i,k,p}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^i}{\partial x^p}\Delta x^k \Delta x^p.\end{aligned}$$

Итак,

$$(dl')^2 - (dl)^2 = \sum_{i<k}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)dx^i\,dx^k + \sum_{i,k,p}\frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^i}{\partial x^p}\,dx^k\,dx^p.$$

Если деформации $u^i(x)$ малы, то можно считать, что

$$(dl')^2 - (dl)^2 \cong \sum_{i<k}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\right)dx^i\,dx^k.$$

Положим $\eta_{ik}(x) = \dfrac{\partial u^i}{\partial x^k} + \dfrac{\partial u^k}{\partial x^i}$; тогда $(dl')^2 - (dl)^2 \cong \eta_{ik}\,dx^i\,dx^k$. Набор функций η_{ik} образует тензор второго ранга типа $(0, 2)$, называемый тензором малых деформаций.

7) *Тензор напряжений*. Рассмотрим упругое тело, подвергнутое некоторой деформации. При этом в нем появляются «напряжения». Объясним этот термин, применяя стандартную модель, разработанную в классической теории упругости. Пусть $d\sigma$ — плоская малая площадка, расположенная в теле и проходящая через точку P; пусть $\mathbf{n}(P)$ — нормаль к $d\sigma$ в точке P; будем считать, что $d\sigma$ ориентирована и нормаль также снабжена ориентацией (рис. 2). Вблизи площадки упругое тело разбито этой площадкой на две части: одна расположена с положительной стороны площадки, другая — с отрицательной. Считается, что наличие в упругом теле напряжений означает, что первая из этих двух частей упругого тела действует на вторую через площадку $d\sigma$ с силой $\mathbf{F}$, обозначаемой вектором $\mathbf{F}$, приложенным в P. Под термином «описать напряжения в теле» обычно понимается следующее: установить силу напряжения для любой

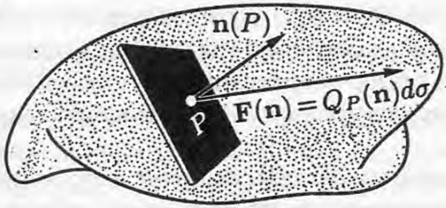

Рис. 2

ориентированной площадки, предполагаемой бесконечно малой; формой ее пренебрегают. Считается, что в точке P для данной нормали $\mathbf{n}(P)$ сила $\mathbf{F}$, действующая на $d\sigma$, пропорциональна ее площади, которую также обозначим через $d\sigma$. Итак, получаем соответствие, сопоставляющее каждой нормали $\mathbf{n}(P)$ в точке P вектор $\mathbf{F}(\mathbf{n})$; т. е. между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{F}$ имеется зависимость: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{n})$. Характер ее устанавливается в классической теории упругости, исходя из механических соображений; мы не будем в них вникать и сообщим только результат, к которому они приводят: оказывается (в хорошем приближении к реальности), для малых деформаций можно считать зависимость $\mathbf{F}(\mathbf{n})$ линейной, т. е. что в каждой точке P определен линейный оператор $\mathbf{n} \to Q(\mathbf{n})$; тогда $\mathbf{F}(\mathbf{n})$ можно записать так: $\mathbf{F}(\mathbf{n}) = Q_P(\mathbf{n})d\sigma$, где $F^i = Q^i_j n^j d\sigma$; $\{n^j\}$ — координаты $\mathbf{n}(P)$. Возникает тензорное поле типа $(1,1)$: в каждой точке P задан линейный оператор Q_P, гладко зависящий от точки. Это поле определяет тензор напряжений. Напряжения зависят от деформации среды; о характере этой зависимости мы будем говорить ниже.

Из механических соображений (которые мы опускаем) следует, что тензор напряжений Q_P должен быть симметричным (т. е. матрица оператора Q_P — симметрична). Тензор напряжений можно определить (и вычислить) не только в деформированном упругом теле. Например, он имеется и в идеальной жидкости. Считается, что в идеальной жидкости силы внутреннего трения отсутствуют, а потому сила напряжения $\mathbf{F}(\mathbf{n})$, действующая на $d\sigma$, может быть направлена только по нормали к $d\sigma$, т. е. — совпадать с силой нормального давления на $d\sigma$. Так как $\mathbf{F}(\mathbf{n}) = Q_P(\mathbf{n})d\sigma$ и оператор Q_P — диагонален, то

$$Q^i_j = q(P)\delta^i_j; \quad F^i = Q^i_j n^j d\sigma = q(P)\delta^i_j n^j d\sigma = q(P) n^i d\sigma;$$
$$F^i = q(P) n^i(P) d\sigma;$$

где $q(P)$ — скалярная функция точки P, называемая давлением в точке P. Давление $q(P)$ не зависит, следовательно, от направления $\mathbf{n}$ и определяется только самой точкой P (от точки к точке давление может меняться).

Если среда такова, что $Q_P = q(P) \cdot E$, то говорят, что в ней выполнен закон Паскаля. Закон Паскаля выполняется далеко не в каждой среде; например, в вязкой жидкости тензор напряжений может иметь более сложный вид, так как помимо нормального давления, существуют еще и силы, порожденные трением.

Между тензорами малой деформации и напряжения существует зависимость; ее изучение составляет один из важнейших разделов теории упругости. В первом приближении можно считать, что при малых деформациях тензор напряжений линейно зависит от тензора деформаций, т. е. имеет место соотношение: $Q^i_j = \alpha^{ikl}_j \eta_{kl}$, где функции α^{ikl}_j образуют тензор 4-го ранга (типа $(3, 1)$). В $\mathbf{R}^3$ тензор α^{ikl}_j имеет 81 компоненту. Указанное линейное соотношение называется *законом Гука*. Предположим, что в среде выполнены условия *однородности и изотропии*, т. е. вид зависимости $Q = Q(\eta)$, $Q^i_j = \alpha^{ikl}_j \eta_{kl}$, не меняется при ортогональных преобразованиях $\mathbf{R}^3$, т. е. тензор α^{ikl}_j инвариантен относительно $S\mathbf{O}(3)$. Можно показать (мы это опустим), что отсюда вытекает следующий вид зависимости $Q = Q(\eta) : Q^i_j = Q_{ij} = \mu \eta_{ij} + \lambda \operatorname{spur}(\eta) \cdot \delta_{ij}$, где числа μ и λ называются *коэффициентами Ламе* (они определяются средой). Символом spur мы обозначаем след матрицы. Функция $\Sigma \eta_{ii} = \operatorname{spur}(\eta)$ имеет простой смысл (мы не различаем верхних и нижних индексов, так как события происходят в $\mathbf{R}^3$). Рассмотрим перемещение частиц среды под действием малых деформаций; тогда функции u^i, определяющие перемещения точек, могут рассматриваться как компоненты векторного поля, задающего деформацию; обозначим это поле через $\mathbf{v}(P)$. Тогда $\operatorname{spur}(\eta) = \sum_i \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^i} + \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \right) = 2 \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = 2 \operatorname{div}(\mathbf{v})$, т. е. $\operatorname{spur}(\eta)$ — дивергенция поля перемещений. Коэффициент μ для жидкости называется *коэффициентом вязкости*.

Перейдем теперь к другому классу примеров тензорных полей — полям, которые можно конструировать, исходя из фиксированных полей путем применения к ним алгебраических операций. Тем самым, располагая некоторым набором тензоров, можем значительно его расширить.