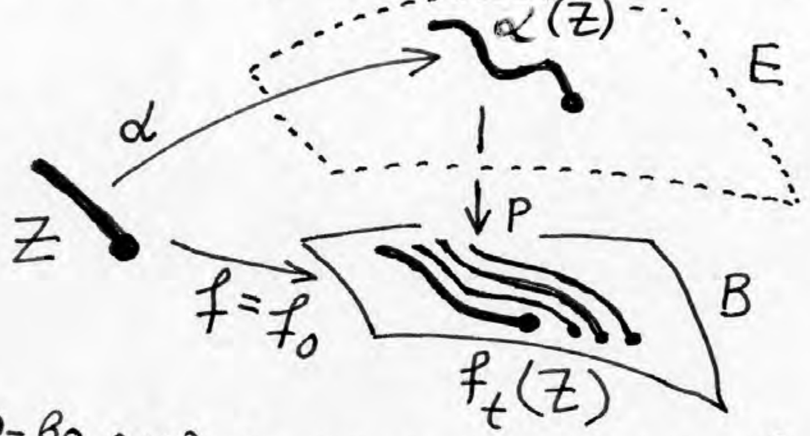
Лекция 9

Накрытия и $\pi_1(X)$.

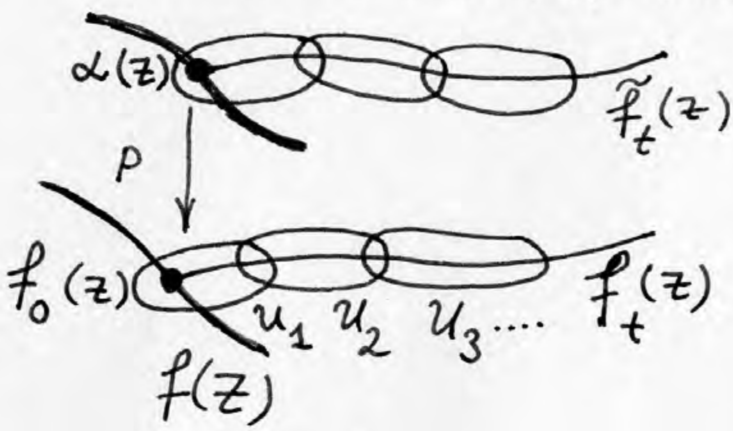
• Теор. о накрывающей гомотопии. Дано: накрытие $p: E \xrightarrow{F} B$ и клеточное пр-во Z:

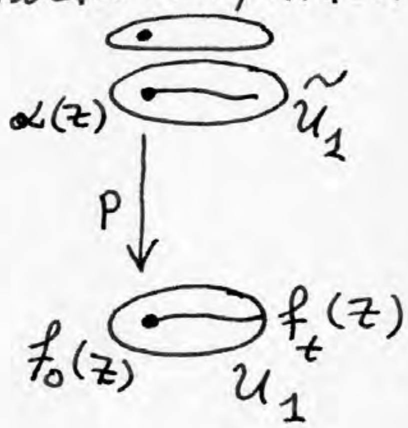


Дано: $f = p\circ\alpha$ и гомотопия $f_t: Z \to B$, причем $f_0 = f$.

Тогда гомотопию f_t можно "накрыть" гомотопией α_t "наверху", т.е. $\exists$ гомотопия $\alpha_t: Z \to E$ такая, что $f_t = p\circ\alpha_t$, $0 \le t \le 1$.

Д-во следует из локальной тривиальности накрытия.

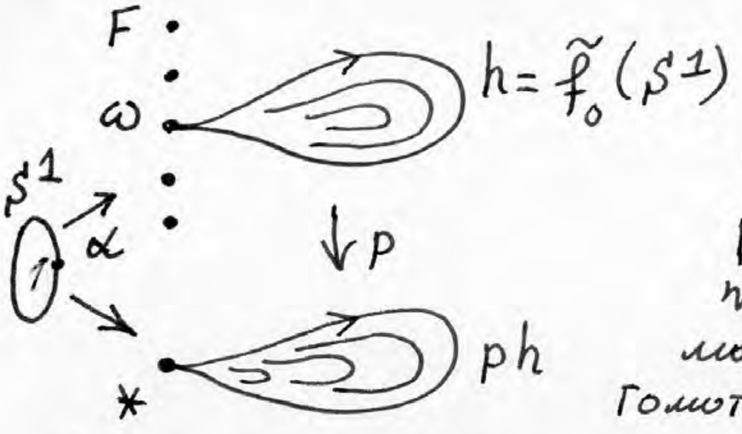




Если $z \in Z$, то $f(z) \in B$; рассм. малую окрестн. U_1, содерж. $f(z)$ и "включим" гомотопию $f_t(z)$, $0 \le t \le \varepsilon$. Тогда точка $f_0(z)$ прочертит путь в U_1. так как $f = p\alpha$, то в слое F выделяется точка $\alpha(z)$ и можно рассм. окрестность $\tilde U_1 = p^{-1} U_1$, т.к. p — локал. гомеоморфизм. Возникает путь $\tilde f_t(z)$ в $\tilde U_1$ — прообраз пути $f_t(z)$. Мы "накрыли" f_t в U_1 путем в $\tilde U_1$. Берем следующую окрестн. U_2 и повторяем процесс. Теор. док.

• Следствия. Теор. Пусть $p: E \xrightarrow{F} B$ накрытие. Тогда гомоморф. $p_*: \pi_1(E) \to \pi_1(B)$ явл. мономорфизмом.

Д-во. Доп. против. Пусть $\exists\ h \in \pi_1(E)$, $h \neq 0$, но $p_* h = 0$ в $\pi_1(B)$, т.е. петля ph гомотопна нулю, стяг. в точку. Тогда $\exists$ гомотоп. $f_t: ph \to *$. По теор. о накрыв. гомотопии $\exists$ гомотоп. $\tilde f_t: S^1 \to E$, где $\tilde f_0(S^1) = h$ и $p\tilde f_1(S^1) = *$ в B.



Т.е. S^1 отобр. в E, где $\alpha(1)=\omega\in E$ (отмеченная точка в E), $\alpha: S^1\to E$ и $p\alpha\sim 0$ в B. Отобр. α — это представитель h, т.е. условно можно написать: $\alpha=h$. Гомотопия $\tilde f_t$ стягивает h в прообраз $p^{-1}(*)$ точки $*\in B$, т.е. — в точку $\omega\in F$. Значит петля h стянулась в точку по E. Противореч. Чтрд.

• Опред. Подгруппа $p_*\pi_1(E)$ в $\pi_1(B)$ (изоморфная $\pi_1(E)$) назыв. группой накрытия $p: E\to B$. Накрытие назыв. регулярным, если $p_*\pi_1(E)$ — нормал. делит. в $\pi_1(B)$.

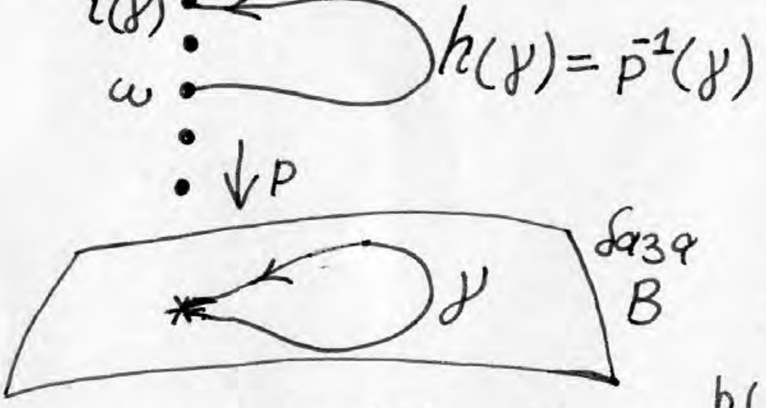
• Теор. $\exists$ канонич. взаимно-одн. соответствие:

$$\pi_1(B)/p_*\pi_1(E) \xleftrightarrow{\approx} F.$$

Слева — мн-во классов смежности группы $\pi_1(E)$ по подгруппе $p_*\pi_1(E)$, а справа — слой.

• Если накрытие регул., то слой F естеств. приобретает структуру группы.

Д-во. Построим отобр. $i: \pi_1(B)\longrightarrow$ слой F. Выберем отмеченн. точки $*\in B$ и $\omega\in F$. Пусть γ — петля в базе.



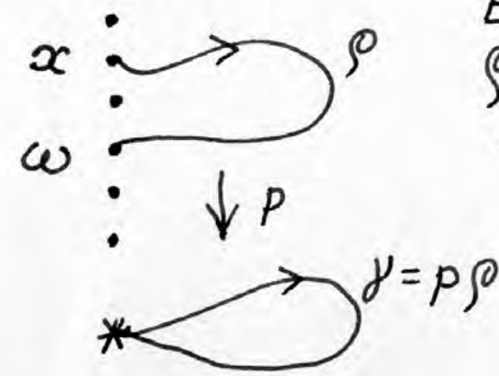
Т.к. накрытие локал. тривиал., то петлю γ можно однозначно накрыть путем в E, выходящим из точки ω и приходящим в некоторую точку слоя $F=p^{-1}(*)$; $h(\gamma)=p^{-1}(\gamma)$. Конец пути $h(\gamma)$ и возьмем за $i(\gamma)$.

Получим $i: \pi_1(B)\to F$. В самом деле, при гомотопии γ по базе конец $i(\gamma)$ неподвижен, т.к. по теор. о накрыв. гомот. гомотопия пути γ накрыв. гомотоп. $h(\gamma)$, а в силу дискретности слоя F при непрер. деформ. конец пути $h(\gamma)$ не может "перескочить" в другую точку слоя:

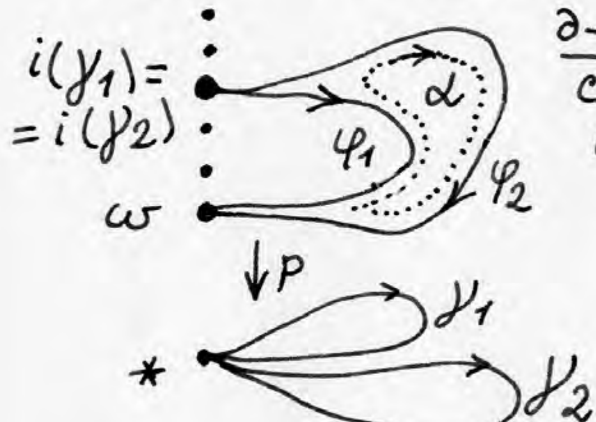
Поэтому $i(\gamma)$ корректно определено.

• Теперь докажем, что образ $i(\pi_1(B))$ "накрывает" весь слой F.

Пусть $x \in F$ — произв. точка слоя. Рассм. путь ρ, соедин. x с отмечен. точкой $\omega \in F$. Мы считаем, что E — связно, а потому ρ $\exists$. Спроектируем ρ на базу: $p(\rho) = \gamma$. Тогда γ — это петля, $\gamma \in \pi_1(B)$. Ясно, что $i(\gamma) = x$, т.е. "подняв" петлю γ в E, мы из точки ω попадем в x. Чтд.



• Теперь докажем, что если $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(B)$ и $i(\gamma_1) = i(\gamma_2)$, то $\exists$ $\alpha \in \pi_1(E)$ такой, что $\gamma_2 = \gamma_1 \cdot p_*(\alpha)$, т.е. γ_1 и γ_2 лежат в одном классе смежности, т.е. $\gamma_2 \equiv \gamma_1 \mod (p_* \pi_1(E))$.



<u>Д-во</u>. Поднимем петли γ_1 и γ_2 в E, стартуя из точки ω. Так как $i(\gamma_1) = i(\gamma_2)$, то эти поднятия: $\varphi_1 = p^{-1}\gamma_1$ и $\varphi_2 = p^{-1}\gamma_2$ заканчиваются в одной и той же точке. А потому в E возникает петля $\alpha = \varphi_2 \cdot \varphi_1^{-1}$ из $\pi_1(E)$. Но тогда

$$p\alpha = p(\varphi_2 \cdot \varphi_1^{-1}) = p(p^{-1}\gamma_2) \cdot p(p^{-1}\gamma_1^{-1}) = \gamma_2 \cdot \gamma_1^{-1},$$ откуда:

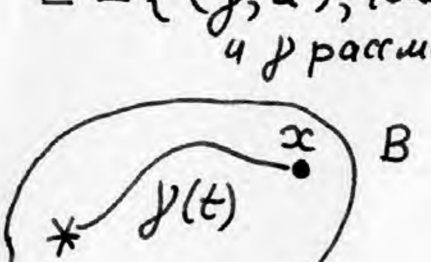
$\gamma_2 = \gamma_1 \cdot p\alpha$, где $p\alpha \in p_* \pi_1(E)$. Чтд.

• Пусть H — произв. подгруппа в $\pi_1(B)$.

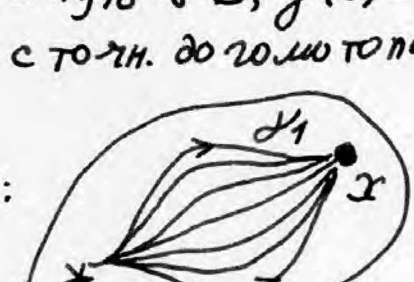
<u>Теор</u>. Тогда всегда $\exists$ накрытие $p: E \xrightarrow{F} B$ такое, что $H = p_*(\pi_1(E))$, т.е. $\pi_1(E) \simeq H$ (группа накрытия).

• докажем сначала для $H = 0$. Положим:

$E = \{(\gamma, x)$, где γ — путь в B, $\gamma(0) = *$, $\gamma(1) = x$; $x \in B$, и γ рассмат. с точн. до гомотопии, не смещающей концы пути.$\}$



и:



γ_1 гомотоп. γ_2 и считаются эквивалентн.

Положим $p(\gamma, x) = x$, т.е. $p: E \to B$. Отобр. p непрер. и его образ — вся база B. Ищем слой F. Слой F — это все пары (γ, x), где $p(\gamma) = x$, т.е. $\gamma(1) = x$, т.е. это — все классы гомотопных путей из точки $*$ в точку x. Но множество всех таких классов — это в точности $\pi_1(B)$. Достаточно соединить вместе точки $*$ и x, протянув точку x вдоль какого-то пути γ_0 в точку $*$. Итак, слой $F = \pi_1(B)$.

• по предыд. теор.: $\pi_1(B) / p_* \pi_1(E) = \pi_1(B)$, т.е. $p_* \pi_1(E) = 0$, а т.к. p_* — моном., то $\pi_1(E) = 0$. Чтд.

• <u>Опред</u>. Накрытие $p: E \to B$, где $\pi_1(E) = 0$, назыв. универсальным. Здесь слой F изоморфен $\pi_1(B)$, и является группой. Такое накрытие — регулярно.

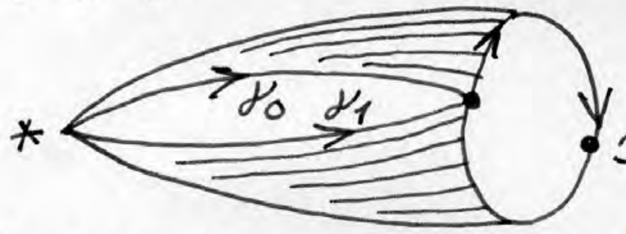
• <u>Теор.</u> (без д-ва). Универсальное накрыт. над B определено однозначно, с точн. до послойного гомеоморфизма: т.е.

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\approx", "h"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

∃ гомеоморф. $h: E_1 \to E_2$ такой, что $p_1 = hp_2$.

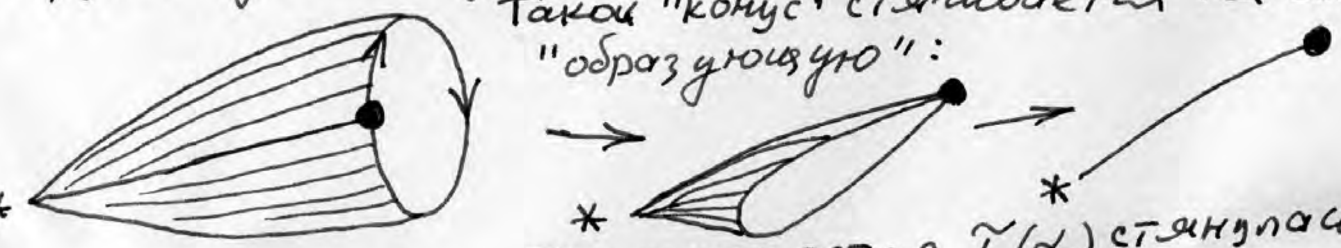
• Другое д-во ∃ универсал. накрытия. Определим пр-во E как и выше: $E = \{(\gamma, x), \gamma(0) = *, \gamma(1) = x \in B\}$, где γ рассматр. с точн. до гомотопии, не смещающ. концов пути.
Докажем, что $\pi_1(E) = 0$. Пусть $\tau \in \pi_1(E)$, тогда
$\tau(\alpha) = \{(\gamma_\alpha(t), x_\alpha), 0 \le \alpha \le 1, \gamma_\alpha(0) = *$ для $\forall \alpha\}$.

Изобразим "движение" $\tau(\alpha)$ по базе B: путь $\gamma_\alpha(t)$ скользит по B, его конец x_α чертит петлю; она выходит из $\gamma_0(1)$ и возвращается в $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.



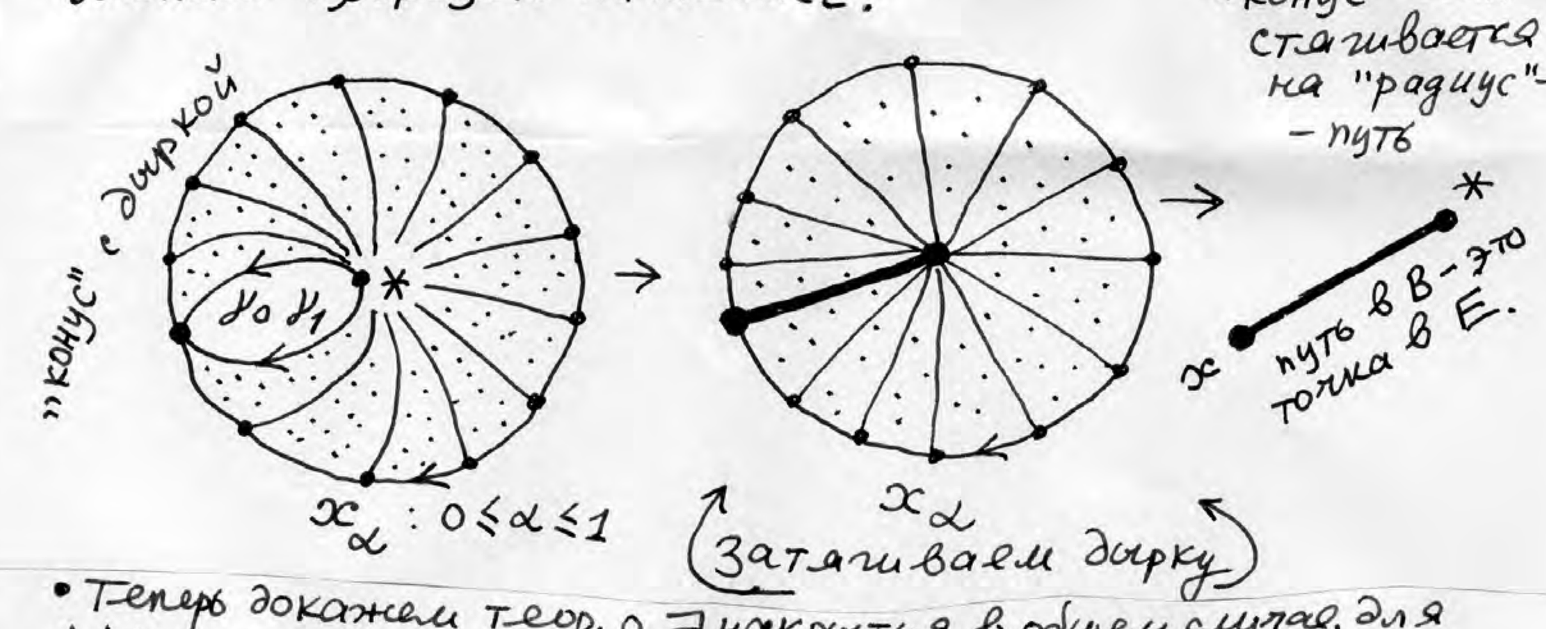
Получается "конус с дыркой", образованный путями γ_0 и γ_1, т.е. $\gamma_{\alpha=0}(t)$ и $\gamma_{\alpha=1}(t)$. Но так как $\tau(0) = \tau(1)$, то два пути $\gamma_0(t)$ и $\gamma_1(t)$ гомотопны (при неподв. концах). Продеформируем их друг в друга и получим "конус без дырки":

Такой "конус" стягивается на свою "образующую":



Тем самым, петля $\tau(\alpha)$ стянулась в точку по пр-ву E. Т.е. $\pi_1(E) = 0$. Чтд.

Можно изобразить нагляднее:



• Теперь докажем теор. о ∃ накрытия в общем случае, для $\forall H \subset \pi_1(B)$. Определим
$E_H = \{(\gamma, x)$, где γ — путь в B, $\gamma(0) = *$, $\gamma(1) = x$, $x \in B\}$,
и γ рассматр. "с точностью до H", т.е. два пути γ_1 и γ_2

идущие из $*$ в x, считаются эквивал., если $\gamma_1^{-1}\gamma_2 \in H$.
Тогда $\pi_1(E_H) = H$. Фактически повторим предыдущее д-во с "конусом". Пусть $\tau \in \pi_1(E_H)$, тогда петля $\tau(\alpha) = \{(\gamma_\alpha(t), x_\alpha),\ 0 \le \alpha \le 1,\ \gamma_\alpha(0) = * \text{ для } \forall \alpha\}$.
Тогда в B петля $\tau(\alpha)$ "заметает" "конус с дыркой":

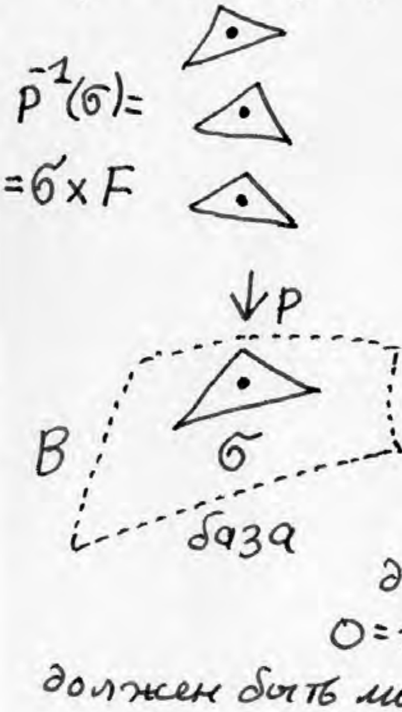
Так как $\tau(0) = \tau(1)$, то $\gamma_0^{-1}\gamma_1 \in H$ (см. определ.). поэтому петля $\tau(\alpha)$ стягивается на петлю $h = \gamma_0^{-1}\gamma_1 \in H$:

т.е. $\forall$ петля $\tau(\alpha)$ из $\pi_1(E_H)$ взаимно-однозн. задается петлей $h \in H$; т.е. $\pi_1(E_H) \simeq H$, чтд.

стягивание "конуса"

• Следствия. Теор. Пусть $p: E \xrightarrow{F} B$ накрытие кратности k, т.е. F состоит из k точек. Тогда $\chi(E) = k \cdot \chi(B)$.

Д-во. Пусть, для простоты, E и B — симплиц. комплексы. Так как эйлерова характ. не зависит от симплиц. разбиения, можно считать, что симплексы в B достаточно мелкие и что симплексы в E получаются как прообразы симплексов из B при проекции p:



Пусть $\mu_p = $ (кол-во симпл. σ^p, $\dim = p$, в B).
Как доказано выше, $\chi(B) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \mu_p$.
В силу локал. тривиал. накрытия над каждым симплексом σ^p "висит" ровно p симплексов из E, т.к. $p^{-1}\sigma = \sigma \times F$. Но тогда $\mu_p(E) = $ (кол-во симпл. $\dim = p$ в E) $= k \cdot \mu_p(B)$, т.е. $\chi(E) = k \cdot \chi(B)$. Чтд.

Следствие 1. Тор T^2 не может накрывать сферу.
д-во. Если $\exists\ p: T^2 \to S^2$, то $\chi(T^2) = k \cdot \chi(S^2)$, т.е. $0 = k \cdot 2$; противоречие. Или так: $p_*: \pi_1(T^2) \to \pi_1(S^2)$ должен быть мономорф., но $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, а $\pi_1(S^2) = 0$. Чтд.

Следствие 2. Сфера S^2 не может накрывать тор.
Д-во. Если $p: S^2 \to T^2$, то $\chi(S^2) = k\cdot\chi(T^2) = 0$, т.к. $\chi(T^2) = 0$, а $\chi(S^2) = 2 \neq 0$. Противоречие.

Следствие 3. Сфера S^2 не может накрывать сферу с $g > 1$ ручками. Д-во. Если $p: S^2 \to M^2_g$, то $2 = \chi(S^2) = k\cdot 2(1-g)$, но $1 < g$, т.е. $1 - g < 0$. Противоречие.

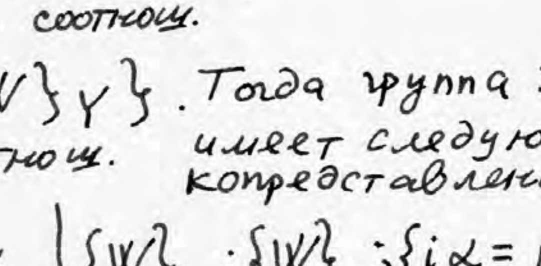
• Еще примеры накрытий.

Пусть G – группа матриц (напр. $GL(n,\mathbb{R}), SO(n), U(n) \dots$); и F – дискретная подгруппа в G. Пусть $B = G/F$ – "однородное пр-во", т.е. мн-во классов смежности G по подгруппе F. Тогда $p: G \to G/F$ – это накрытие со слоем F. Причем это накрытие регулярно.

• Пусть дискрет. группа F действ. на гладк. многообр. E свободно и эффективно, т.е. для $\forall$ точки $x \in E$ ее орбита $F(x) = \{f(x),\ \text{где } f \in F\}$ гомеоморфна F. Тогда $p: E \to E/G$ явл. накрытием. Здесь $E/G = \{\text{мн-во всех орбит}\}$.

• Вернемся к фундам. группе.

Теор. ван Кампена. Пусть клеточн. пр-во P имеет вид $P = X \cup Y$, где $X \cap Y = Z$, и X, Y, Z – связны. Пусть $i: Z \to X$ и $j: Z \to Y$ – два вложения:



Тогда $i_*: \pi_1(Z) \to \pi_1(X)$ и $j_*: \pi_1(Z) \to \pi_1(Y)$ – соотв. гомоморфизмы.

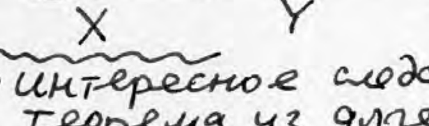
Пусть $\pi_1(X) = \{\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{образующие}} \mid \underbrace{\{W\}_X}_{\text{соотнош.}}\}$

$\pi_1(Y) = \{\underbrace{y_1, \dots, y_m}_{\text{образующ.}} \mid \underbrace{\{W\}_Y}_{\text{соотнош.}}\}$. Тогда группа $\pi_1(X \cup Y)$ имеет следующее копредставление:

$$\pi_1(X \cup Y) = \left\{ x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m \;\middle|\; \{W\}_X; \{W\}_Y; \{i_*\alpha = j_*\alpha\},\ \text{где } \alpha \in \pi_1(Z) \right\}$$

(без д-ва)

• Если $Z = *$ (точка), то $P = X \vee Y$ (т.н. букет) и



$\pi_1(X \vee Y) = \pi_1(X) * \pi_1(Y)$, т.е. – свободное произведение двух групп.

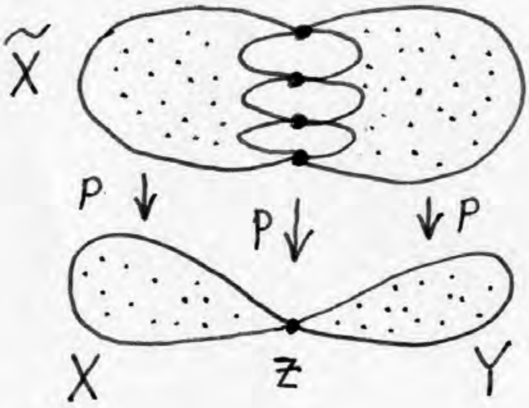
• Интересное следствие из теор. ван Кампена и теории накрыт.

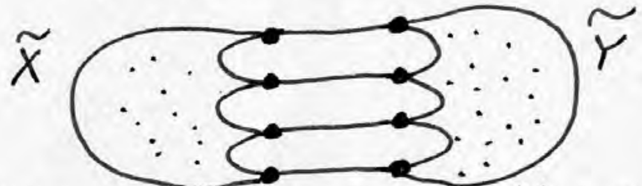
Теорема из алгебры. Пусть A и B – две конечно-порожден. группы (т.е. конечн. число образующ. и соотнош.) и пусть $A * B$ – их свободное произведение. Пусть G – произвольная подгруппа в $A * B$. Тогда $G = A_1 * B_1 * F_r$, где $A_1 \subset A$ и

$B_1 \subset B$ — некотор. подгруппа, а F_r — свободная группа некоторого ранга r.

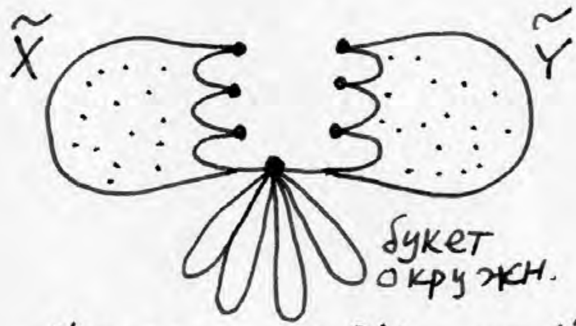
Д-во. Лемма. Пусть A — конечно-порожд. группа: $A=(a_1,\dots,a_n \mid W_1,\dots,W_p)$. Тогда $\exists$ конечн. клеточн. компл. X такой, что $\pi_1(X)=A$. Д-во вытекает из теор. о фундам. груп. клеточ. компл. В качестве X возьмем букет окружн. в числе n штук, к которому по словам-соотнош. $\{W_i\}$ приклеим 2-клетки.

- Теперь по группе B построим аналогич. компл. Y такой, что $\pi_1(Y)=B$. Далее, в силу теор. ван Кампена: $\pi_1(X\vee Y)=\pi_1(X)*\pi_1(Y)=A*B$. Далее, по подгруппе $G\subset A*B=\pi_1(X\vee Y)$ строим накрытие $p:\tilde M\to X\vee Y$, где $\pi_1(\tilde M)\cong G$; $p_*\pi_1(\tilde M)=G$. Пусть z — точка в $X\vee Y$ — "вершина" букета. Тогда $\tilde M$ имеет вид как на рис. Тогда $\tilde M=\tilde X\cup\tilde Y$, где $\tilde X\cap\tilde Y=p^{-1}(z)=$ $=$ (r точек), где r — кратность накрытия. Ясно, что $\tilde M$ гомотоп. эквивалентно:





и далее:



Здесь $p:\tilde X\to X$ и $p:\tilde Y\to Y$ — накрытия, а потому
$p_*\pi_1(\tilde X)=A_1\subset\pi_1(X)=A$ и
$p_*\pi_1(\tilde Y)=B_1\subset\pi_1(Y)=B$.

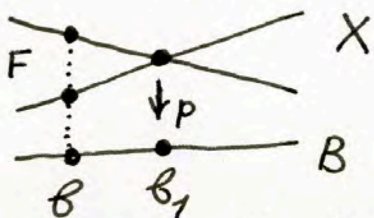
Далее: $\pi_1(\tilde M)=\pi_1(\tilde X\vee\tilde Y\vee(\text{букет } r\ S^1))=$
$=\pi_1(\tilde X)*\pi_1(\tilde Y)*\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^{r} S^1_i\right)=A_1*B_1*F_r$, а так как $\pi_1(\tilde M)=G$, то $G=A_1*B_1*F_r$, где $A_1\subset A$, $B_1\subset B$. Что тр. д. Напомним, что p_* — мономорф.

- Задача. Док., что любое 2-листн. накр. — регулярно.
- Задача. Как сформул. теор. ван Кампена, если $Z=X\cap Y$ — несвязно.

- Разветвл. накрытия. Опред. Пусть $p:X\to B$ — непрер. отобр. клеточ. компл. (топол. пр-ств), где в базе B выделен конечный набор точек $b_1,\dots,b_m$, назыв. "точками ветвления"; причем отобр. p над $B\setminus(b_1\cup\dots\cup b_m)$ явл. обычным (неразветвл.) накрытием со слоем F; прообраз $p^{-1}(b_i)$ — дискретен, и если точка b по базе B стремится к b_i (т.е. условно:

$\lim b = b_i$), то слой F над b стремится к слою $p^{-1}(b_i)$ (т.е. условно: $\lim\limits_{b \to b_i} p^{-1}(b) = p^{-1}(b_i)$).

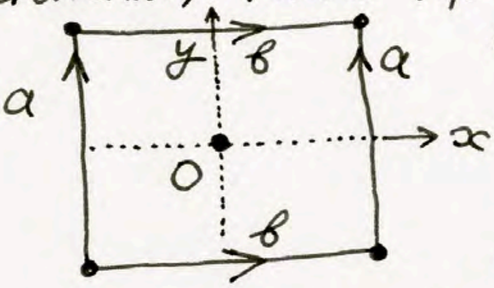
• Пример разветвлен. накр.:



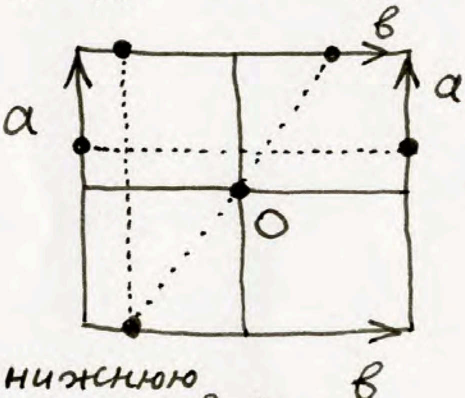
b_1 – точка ветвления.

• Более содержат. пример разветвл. накр. это специал. отобр. $p: T^2 \to S^2$.

Напомним, что T^2 не может накрыть S^2 в обычном смысле (т.е. неразветвленно). Рассм. тор как квадрат со склейками $aba^{-1}b^{-1}$:

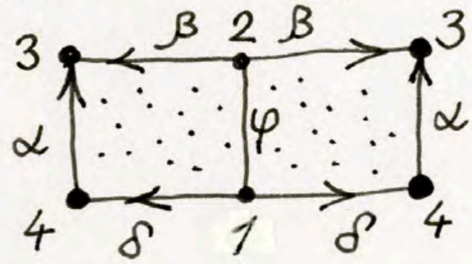


и рассм. инволюц. σ на квадрате: $\sigma(x, y) = (-x, -y)$. Отражение в центре. Рассм. проекцию $p: T^2 \to T^2/\sigma$, т.е. отождествим точки (x, y) и $(-x, -y)$. Утв.: фактор пр-во T^2/σ есть сфера S^2. Д-во см. на рис.

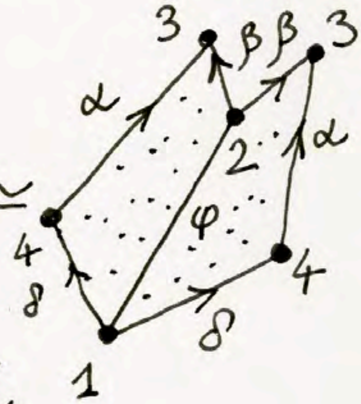


нижнюю часть квадрата можно удалить

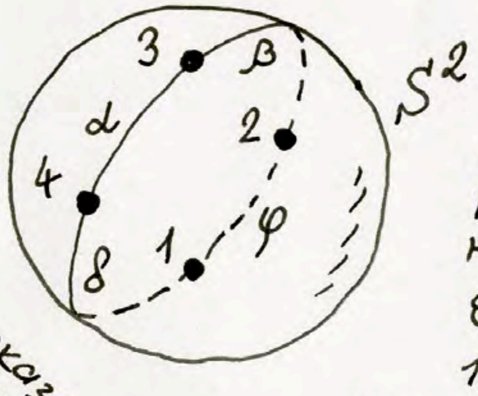
$\simeq$

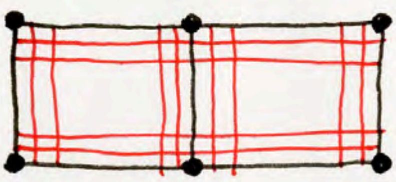


$\simeq$

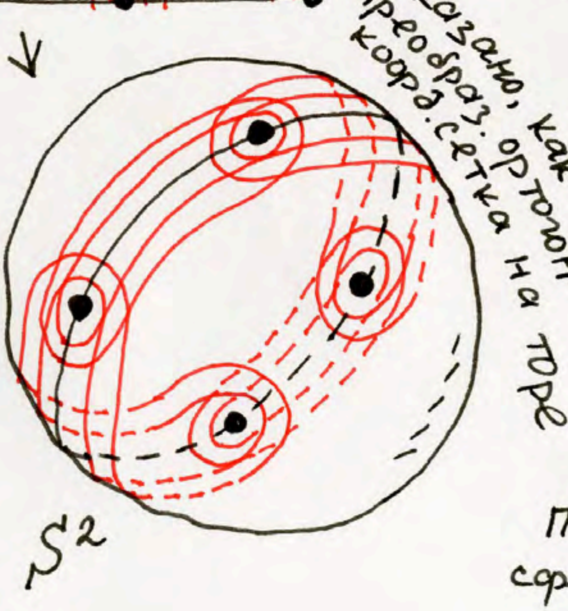


$\swarrow \simeq$





показано, как преобраз. ортогон. коорд. сетка на торе

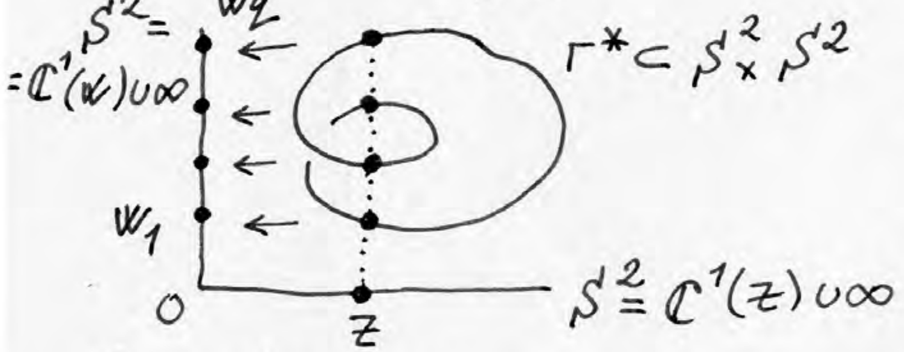


Мы построили разветвл. 2-листное накр. $p: T^2 \to S^2$. Есть 4 точки ветвл.: 1, 2, 3, 4. Слой над каждой из них – это одна точка. Оказыв., это отображ. задается функцией Вейерштрасса $W: \mathbb{R}^2 \to S^2$. Пусть $z = x + iy$; $\mathbb{R}^2(x, y) = \simeq \mathbb{C}^1(z)$. Рассм. на $\mathbb{R}^2$ целочислен. решетку $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и пусть ω – это узлы решетки (т.е. $\omega = m + in$, где $m, n \in \mathbb{Z}$). Пополняя $\mathbb{C}^1$ точкой ∞, получаем сферу S^2. Рассм. компл. ф-ю: (= ф-ю Вейерштрасса)

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\substack{\omega\in\Gamma\\ \omega\neq 0}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right),\ \text{где } \Gamma=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\ \text{решетка}.$$

Ф-я $\wp(z)$ отобр. $\mathbb{R}^2(x,y)=\mathbb{C}^1(z)\longrightarrow S^2(w)$ и $\wp(z)$ – двояко-периодич. ф-я, а потому на самом деле она отображ. тор $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\longrightarrow S^2$. В узлах решетки Γ ф-я $\wp(z)$ имеет полюса порядка 2. Это и есть описанное выше разветвл. накрытие $T^2\longrightarrow S^2$.

• Еще пример разветв. накр. Рассм. в $\mathbb{C}^2(z,w)$ ур-е $w^2-P_n(z)=0$, где P_n – полин. степ. n с простыми корнями. Тогда $\Gamma=\{(z,w):\ w^2-P_n(z)=0\}$ явл. гладким 2-подмног. в $\mathbb{C}^2$. Γ – риман. поверхн. для алгебр. ф-ции $w=\pm\sqrt{P_n(z)}$.
См. наш обязат. курс по дифф. геом. и топол. Тогда компактифицированная риман. пов. $\Gamma^*\subset S^2(z)\times S^2(w)$ явл. гладким комп. многоб. ориент., и $\Gamma^*=M^2_g=S^2+g$ (ручек), где $g=\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]$ – целая часть. Риман. пов. Γ^* проектир. на $S^2(z)$; $p:\Gamma^*\longrightarrow S^2$, т.к. Γ^* – это график алгебраич. ф-ции $w=\pm\sqrt{P_n(z)}$.

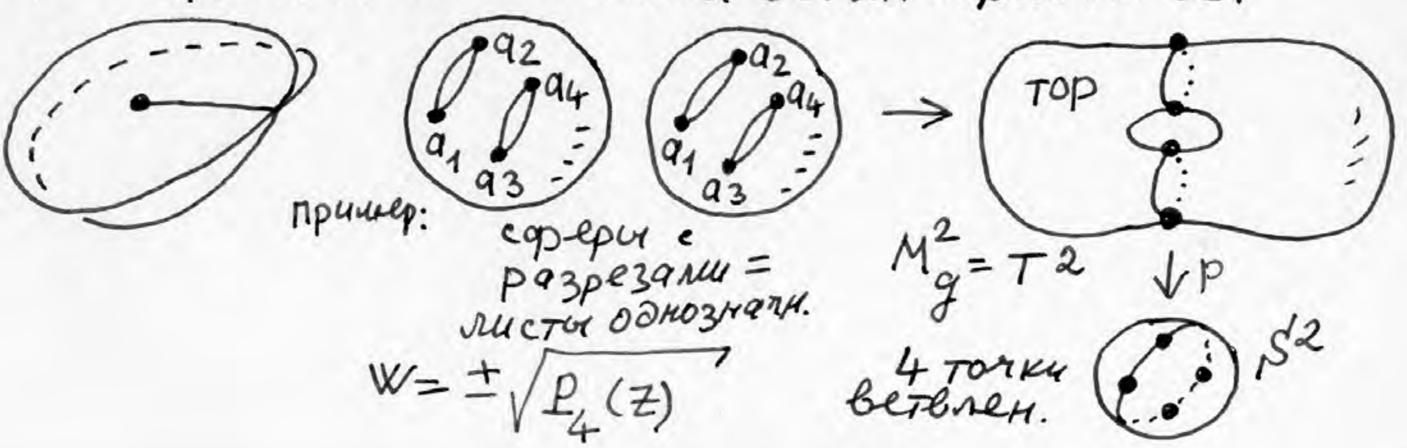


Проек. $p:\Gamma^*=M^2_g\longrightarrow S^2(z)$ явл. разветвл. накрыт. кратности 2, т.к. для z общего положения ур-е $w^2-P_n(z)=0$ имеет 2 разл. корня. На сфере $S^2(z)$ есть ровно n точек ветвл. – это корни $a_1,\dots,a_n$ полин. $P=\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)$. Алгебр. ф-я

Если $w^q-P_n(z)=0$, то накрытие p является q-листным разветвленным.

$$z\longrightarrow w\xrightarrow{\sim} g(z)=(w_1(z),w_2(z));\ \text{две ветви}$$

Корни $a_1,\dots,a_n$ явл. точками ветвл. порядка 2.



пример: сферы с разрезами = листы однознач. $w=\pm\sqrt{P_4(z)}$

$M^2_g=T^2$

4 точки ветвлен.