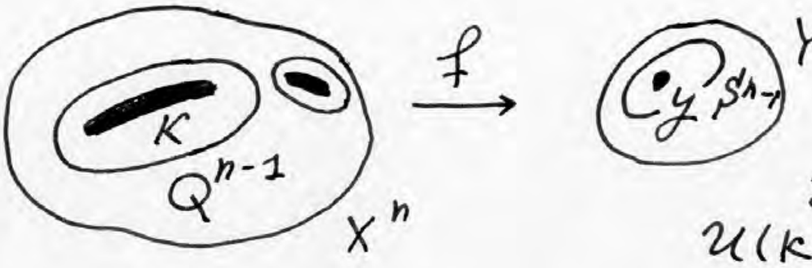
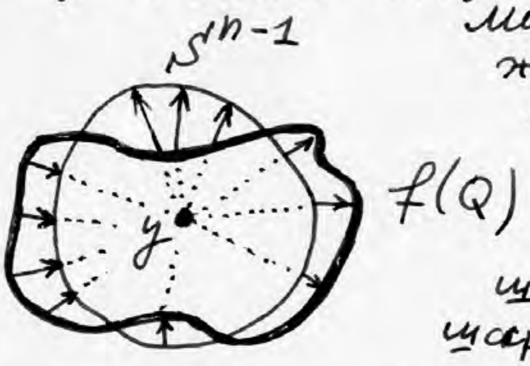
• Дополнение. Еще одно определ. степени $\deg f$ — по индукции. Пусть $f: X^n \to Y^n$ — гладк. отобр. Пусть $y \in X^n$ — произв. точка (не обязат. регулярн. знач. для f). Пусть $K = f^{-1}(y)$ — полн. прообраз в X (вообще говоря, K — несвязно).



Пусть $U(K)$ — "малая" открытая окрестность K. Тогда нетрудно доказать, что границу $U(K)$ можно считать (при подходящем $U(K)$) гладким $(n-1)$-подмног. в X^n. Рассмотрим образ $f(Q)$ в Y. Так как $U(K)$ выбрано "близким" к K, то $f(Q)$ — "близко" к точке y, но $y \notin f(Q)$. Рассм. достаточно малую сферу $S^{n-1}(y)$ с центром в y:

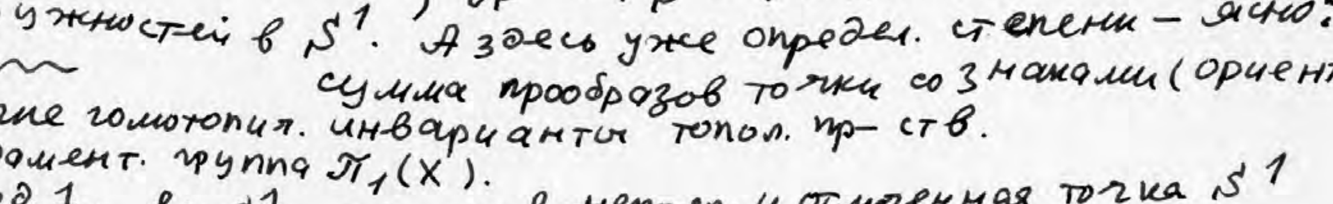


Можно считать, что $f(Q)$ расположено в окрестности шара $D^n(y)$, ограниченного сферой $S^{n-1}(y)$. Тогда $f(Q)$ можно гладко спроектировать вдоль радиусов шара на сферу $S^{n-1}(y)$. Центр шара не лежит на $f(Q)$.

Получили отображ. $g: Q^{n-1} \to S^{n-1}$. Продолжаем процесс. Получаем $s: P^{n-2} \to S^{n-2}$. И т.д. пока не дойдем до отображ. $\rho: \cup S^1 \to S^1$, т.е. объединения окружностей в S^1. А здесь уже определ. степени — ясно: сумма прообразов точки со знаками (ориент.)

• Другие гомотопич. инварианты топол. пр-ств. Фундамент. группа $\pi_1(X)$.

Опред. 1. $f: S^1 \to X$, где f — непрер. и отмеченная точка S^1 переходит в отмечен. точку $x \in X$. Пусть $[f]$ — все отображ., гомотопные f и не смещающие отмечен. точки. Мн-во всех $[f]$ и есть $\pi_1(X, x)$. Умножение:

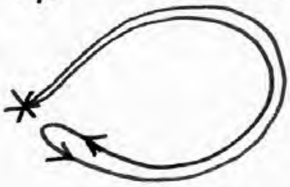


$f, g \to f\cdot g$ как показано на рис. Положим $[f]\cdot[g]=[f\cdot g]$.
Положим $[f]^{-1} = [f(-\varphi)]$, т.е. замена ориент. на окруж.

• легко показать, что $\pi_1(X, x)$ — это группа (вообще говоря, некомм.)

• единица группы: $e=[f]$, где $f: S^1 \to X$ гомотопно нулю, т.е. отображению в точку $*$.

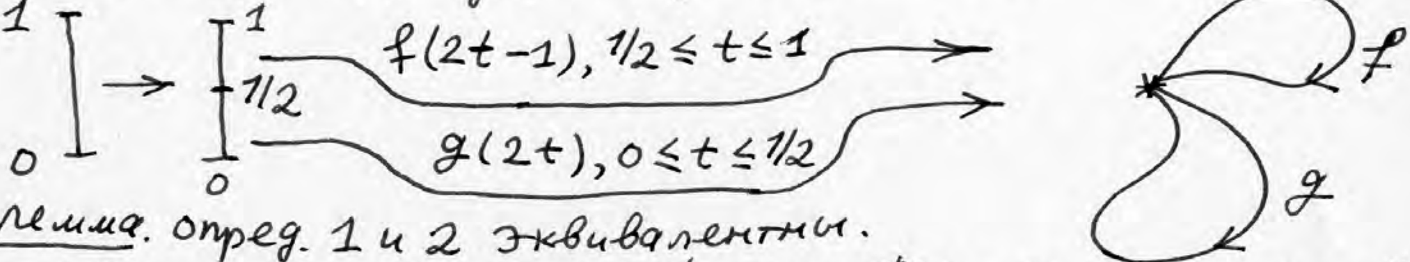
• Ясно, что $[f]\cdot[f]^{-1}=e$, т.к.



такая петля гомотопна нулю.

• Опред. 2. $f:[0,1]\to X$, где $f(0)=f(1)=*$ и $[f]\in\pi_1(X)$ есть класс всех g, гомотопных f.

• Умножение: $[f]\cdot[g]=[f\cdot g]$, где: $f\cdot g$ есть композиция:



• Лемма. опред. 1 и 2 эквивалентны.

  • докажите! См. книгу Фоменко-Фукс "Гомотоп. топол."

• Теор. $\pi_1(X,*)$ не зависит от точки. А именно, для связного пр-ва X группы $\pi_1(X,x)$ и $\pi_1(X,y)$ изоморфны для $\forall x,y$.

  • д-во. Построим гомоморф. $i:\pi_1(X,x)\to\pi_1(X,y)$ и встречное $j:\pi_1(X,y)\to\pi_1(X,x)$, которые взаимно обратны.

Соединим x и y путем γ.

$i:\alpha\longrightarrow\gamma^{-1}\alpha\gamma$

$j:a\longrightarrow\gamma a\gamma^{-1}$

$\gamma^{-1}(\gamma a\gamma^{-1})\sim$ $\sim a$, гомотопно a.

Путь γ действует как "сопряжение". Чтд.

• На этом основании будем писать просто $\pi_1(X)$, не указывая отмечен. точку. Т.е. $\pi_1(X)$ определен. с точн. до изоморф.

• Непрер. отобр. $f:X\to Y$ индуцирует гомоморфизм $f_*:\pi_1(X)\to\pi_1(Y)$. Если $f\sim g$ (гомотопны), то $f_*=g_*$.

• Отсюда: если X и Y гомотопич. эквивал., то $\pi_1(X)\simeq\pi_1(Y)$.

• Вычисление $\pi_1(X)$. Примеры.

  1) Если X – стягиваемо в $*$, то $\pi_1(X)=0$.

  2) Теор. $\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$.

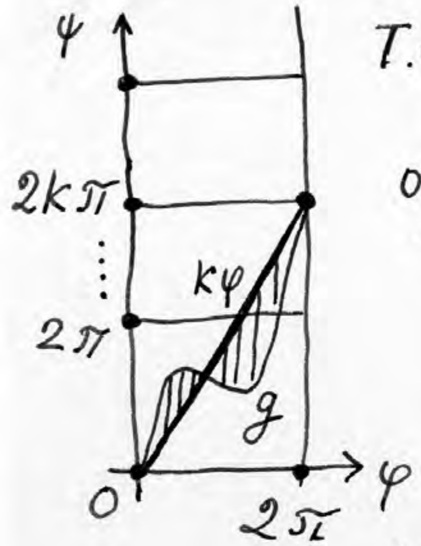
  д-во. $f: S^1\to S^1$; $\simeq f:[0,2\pi]\to \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}(2\pi)=S^1$

где $f(0)=f(2\pi)$.

Тогда: $f: e^{i\varphi}\to e^{ig(\varphi)}$, где $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^1(\psi)$, $\psi=g(\varphi)$, и $g(0)=0$, $g(2\pi)=2k\pi$ для некоторого целого k.

Рассмотрим график $\psi=g(\varphi)$ на отрезке $[0,2\pi]$.

Очевидно, что $\exists$ непрер. гомотопия графика к линейной функции $\psi=k\varphi$, см. рис.



Т.е. $\forall$ непрер. $f: S^1 \to S^1$ гомотопно отобр. $e^{i\varphi} \to e^{ik\varphi}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$.

Обратно: для $\forall k \in \mathbb{Z}$ есть отобр. $e^{i\varphi} \to e^{ik\varphi}$.

Итак, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. чтд.

③ $\pi_1(S^n) = 0$ при $n > 1$.

Д-во. любая петля стягивается по сфере в точку.

• Опр. пространство X назыв. односвязным, если $\pi_1(X) = 0$.

• Теор. = общий алгоритм вычисл. $\pi_1(X)$ для $\forall$ конечного связного клеточн. пр-ва X. (без д-ва).

Лемма. У любого связн. конечн. клеточн. пр-ва X всегда $\exists$ клеточн. разбиение с одной клеткой e^0.

• рассм. такое разбиение X:

$$X = e^0 + \underbrace{(e^1_1 + \dots + e^1_m)}_{\dim = 1} + \underbrace{(e^2_1 + \dots + e^2_p)}_{\dim = 2} + \underbrace{(e^3_1 + \dots)}_{\text{"хвост" } \dim \geq 3}.$$

Сопоставим: $e^1_i \longleftrightarrow a_i$; $e^2_j \longleftrightarrow W_j$. Для $\forall$ клетки e^2_j рассм. характер. отобр.: $\chi: \partial D^2 \to X^{(1)}$ = 1-остов X.

Тогда $\partial e^2_j = \bigcup_k \varepsilon_k e^1_k$, где $\varepsilon_k = [e^2_j : e^1_k] \in \mathbb{Z}$.

См. выше опред. граничн. операт. Условно запишем:

$\partial e^2_j = (e^1_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots (e^1_{i_s})^{\varepsilon_s}$, т.е. разложение ∂e^2_j по 1-мерным клеткам; и $\varepsilon_\alpha \neq 0$.

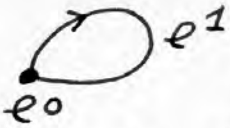
• Теперь запишем "слово" W_j в "алфавите" $a_1, \dots, a_m$:

$$W_j = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_s}^{\varepsilon_s}.$$

• Теор. $\pi_1(X) = (a_1, \dots, a_m \mid W_1, \dots, W_p)$, т.е. задается образующими $a_1, \dots, a_m$ с соотношениями $W_1, \dots, W_p$. Это — т.н. копредставление группы $\pi_1(X)$.

Т.е. $\pi_1(X) = F_m / N(W)$, т.е. — фактор-группа свободной группы F_m (ранга m) по нормальному делителю, порожденному элементами (словами) $\{W_j\}$ группы F_m. Т.е. это — наименьший нормал. делитель, содерж. $\{W_j\}$.

• Примеры.

① $X = S^1 = e^0 + e^1$: 

т.к. клеток $\dim = 2$ нет, то соотношений W_j нет.

$\Rightarrow \pi_1(S^1) = F_1(a_1) = \mathbb{Z}$ (своб. группа ранга 1).

② $X = \mathbb{R}^2 \setminus$ (набор из k точек), т.е. $\mathbb{R}^2$ с k проколами:

 $\simeq$  $= \bigvee_{i=1}^{k} S^1_i$ (букет k окружностей).

$\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^{k} S^1_i\right) = F_k(a_1, \dots, a_k) =$ некоммутат.
= свободная группа ранга k.

③ Задача. $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \oplus \pi_1(Y)$.

④ $\pi_1(M^2_g) = F(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g) / (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1)$,
ориен.

$\pi_1(M^2_k) = F(c_1, \dots, c_k) / (c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2 = 1)$.
неориен

Частные случаи:

• тор: $\pi_1(T^2) = F_2(a, b) / (a b a^{-1} b^{-1} = 1) = F(a, b) / (ab = ba) =$
$= \mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b)$.

• $\mathbb{R}P^2$. $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = F_1(c) / (c^2 = 1) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$.

• бутылка Клейна: $\pi_1(KL) = F(a, b) / (a b a^{-1} b = 1)$. некомм.

• ∄ алгоритма распознавания тривиальной (нулевой) группы и алгоритма установления изоморф. двух групп.

• Связь фундам. группы с группой гомологий $H_1(X, \mathbb{Z})$.

Теор. $H_1(X, \mathbb{Z}) = \pi_1(X) / [\pi_1(X), \pi_1(X)]$, т.е. — фактор по коммутанту.

Д-во следует из определ. H_1. Надо объявить все петли коммутирующими, а это — фактор по коммутанту.

• Пример: $H_1(KL, \mathbb{Z}) = \tilde{F}(a, b) / (a + b - a + b = 0) =$
$= \tilde{F}(a, b) / (2b = 0) = \mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}_2(b)$.

Накрытия. Это — частн. случай локал. трив. рассл. с дискрет. слоем.

• Опред. Локал. трив. рассл. это:

$$\begin{array}{ll} E & \text{— пр-во расслоения} \\ \text{проекция — } p \downarrow & F \text{ — слой} \\ B & \text{— база} \end{array}$$

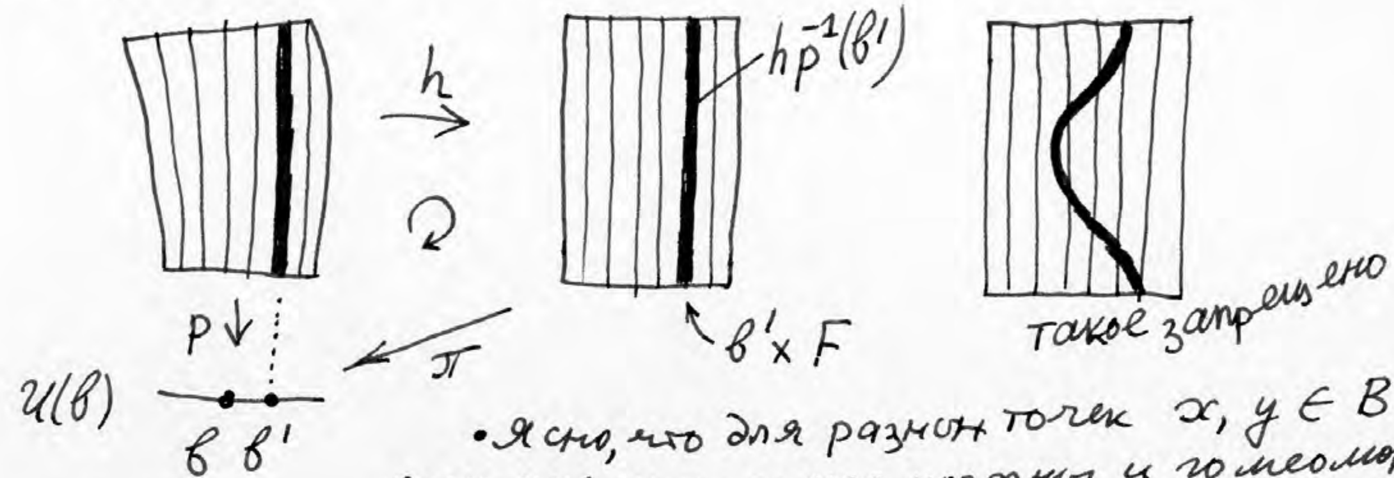
где для $\forall b \in B\ \exists$ открыт. окрестн. $U(b)$ точки b, что:

$p^{-1}(U(b)) \simeq U(b) \times F$, причем следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}U(b) \arrow[rr, "h\text{ — гомеоморф.}"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & U(b) \times F \arrow[dl, "\pi"] \\ & U(b) & \end{tikzcd}$$

т.е. $p = \pi \circ h$, где
$\pi : (b', f') = b'$; $b' \in U(b)$
и $f' \in F$ (слою). Ясно, что
$F \cong p^{-1}(b)$. Условие $p = \pi h$ означает, что h — послойный гомеоморфизм $p^{-1}U(b)$ на $U(b) \times F$, т.е.

$h : p^{-1}(b') \longrightarrow b' \times F$ для $\forall b' \in \mathcal{U}(b)$.



• Ясно, что для разных точек $x, y \in B$ слои над ними гомеоморфны и гомеоморфны одному и тому же F (слою рассл.): $p^{-1}(x) \simeq p^{-1}(y) \simeq F$.

• <u>Опред</u>. Накрытие — это локал. трив. рассл. с дискретным слоем F. (Базу B мы считаем связной). Если F — счетно, то накр. $p : E \longrightarrow B$ назыв. бесконечно-листным; если F состоит из $k < \infty$ точек, то накр. назыв. k-листным (конечно-кратным).

• <u>Примеры накрытий</u>.

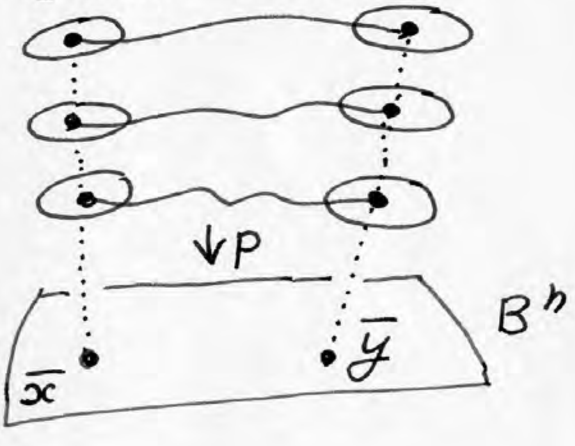
① $p : M^n \longrightarrow B^n$, — гладк. отобр. гладк. мног. (связн.), причем dp — всюду невырожденно, т.е. $\det(dp) \neq 0$ в $\forall x \in M^n$. Тогда p — накрытие.

• Д-во. Это — локал. трив. рассл. См. выше. Вытекает из теор. о неявной функ. Все точки $x \in M$ — регулярны.

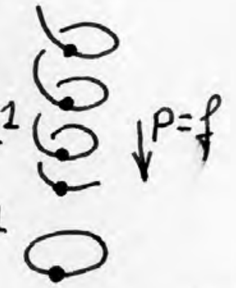
$p^{-1}(\bar{x}) \simeq p^{-1}(\bar{y})$, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in B^n$.

все слои гомеом.

$p^{-1}\mathcal{U}(b) \cong \mathcal{U}(b) \times F$



② $f : \mathbb{R}^1 \longrightarrow S^1$,
$f(\varphi) = e^{i\varphi}$



∞-листное накрытие

③ $f : S^1 \to S^1$, где $f(e^{i\varphi}) = e^{ik\varphi}$. Это — k-листное накрытие.

④ $f : S^n \to \mathbb{R}P^n$, где $f(x) = (x, -x) \in \mathbb{R}P^n$. 2-листное накрытие.

⑤ $f : T^2 \to T^2$, где $f(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) = (e^{ik\varphi}, e^{ip\psi})$. $(k \cdot p)$-листное накрытие

⑥ $f : T^2 \longrightarrow KL^2$, 2-листное накрытие:

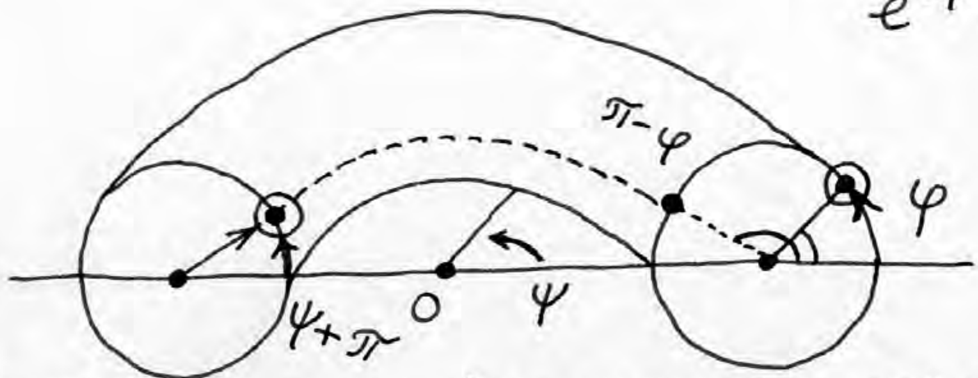
$$f(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) = (-e^{-i\varphi}, -e^{i\psi}) = (e^{i(\pi-\varphi)}, e^{i(\psi+\pi)}).$$

д-во. Опишем действие f на торе. Для наглядн. разрежем тор пополам:

т.е. $e^{i\varphi} \sim e^{i(\pi-\varphi)}$ и

$e^{i\psi} \sim e^{i(\psi+\pi)}$

см. рис.



т.е. надо склеить основания цилиндра как показано ↑. А это и есть бутылка Клейна. Описанное f порождено инволюцией σ на торе: $\sigma(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) = (e^{i(\pi-\varphi)}, e^{i(\psi+\pi)})$.

2-адический соленоид:

Накрытие тора тором

$(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) \to (e^{i\varphi}, e^{ik\psi}),\ k\in\mathbb{Z},\ k\to\infty$