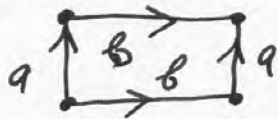


• Примеры вычисления гомологий.

Гомологии 2-мерн. поверхн.

• Тор T^2 :



$T^2 \cong e^0 + (a+b) + e^2$; т.к. все вершины квадрата смежны в одну сторону, то $\partial a = \partial b = 0$, $\partial e^2 =$

$= a + b - a - b = 0. \Rightarrow H_0(T^2) = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}(a) \oplus \mathbb{Z}(b); B_1 = 0,$

$H_1 = \mathbb{Z}_1 / B_1 = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}; H_2 = \mathbb{Z}.$

• Рассм. ориент. $M_g^2 = S^2 + g(\text{ручек}) = e^0 + (a_1 + b_1 + \dots + a_g + b_g) + e^2,$

где $\partial e^0 = 0, \partial a_i = \partial b_i = 0$, т.е. a_i и b_i - 1-циклы;

$\partial e^2 = a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \dots + a_g + b_g - a_g - b_g = 0.$ отсюда:

$H_0 = \mathbb{Z}; H_1 = \mathbb{Z}_1 / B_1 = \mathbb{Z}^{2g} = \mathbb{Z}(a_1) \oplus \mathbb{Z}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(a_g) \oplus \mathbb{Z}(b_g)$

$H_2 = \mathbb{Z}.$

• Если $G = \mathbb{Z}_2$, то $H_1(M_g^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{2g}, H_2(M_g^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$

Вообще: $H_1(M_g^2, G) = G \oplus \dots \oplus G$ (2g раз); $H_2 = G.$

• Рассм. неориент. $M_k^2 = S^2 + k\mu = e^0 + (c_1 + c_1 + \dots + c_k + c_k) + e^2,$

$W = c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2$; тогда $\partial e^0 = 0, \partial c_i = 0,$

$\partial e^2 = c_1 + c_1 + \dots + c_k + c_k = 2(c_1 + \dots + c_k) \neq 0$ над \mathbb{Z} и $\equiv 0$ над \mathbb{Z}_2 .

Цепи: $C_1 = \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}(c_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(c_k).$

Заменяем образующие в группе 1-цепей. А именно:

$(c_1, \dots, c_k) \rightarrow (c_1, \dots, c_{k-1}, \alpha = c_1 + \dots + c_k).$

Ясно, что старые образ. выраж. через новые:

$c_k = \alpha - (c_1 + \dots + c_{k-1}).$ Итак, цепи:

$C_1 = \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}(c_1) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(c_{k-1}) \oplus \mathbb{Z}(\alpha).$ Границы:

$\partial c_i = 0, 1 \leq i \leq k-1, \partial \alpha = 0; \partial e^2 = 2(c_1 + \dots + c_k) = 2\alpha.$

$\Rightarrow H_1 = \underbrace{\mathbb{Z} + \dots + \mathbb{Z}}_{k-1} + \mathbb{Z}_2(\alpha) = \mathbb{Z}^{k-1} + \mathbb{Z}_2.$

$H_2 = 0$ над \mathbb{Z} , т.к. $\partial e^2 = 2\alpha \neq 0$ над \mathbb{Z} , т.е. 2-мерных циклов нет (ненулевых). Итак:

• Задача: $\begin{cases} H_0(M_k^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \\ H_1(M_k^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^k, \\ H_2(M_k^2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0(M_k^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \\ H_1(M_k^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{k-1} + \mathbb{Z}_2, \\ H_2(M_k^2, \mathbb{Z}) = 0. \end{cases}$

• Задача. $H_0(M_k^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}; H_1(M_k^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{k-1}; H_2(M_k^2, \mathbb{R}) = 0.$
 (неориент.) $H_0(M_k^2, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p; H_1(M_k^2, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{k-1}; H_2(M_k^2, \mathbb{Z}_p) = 0.$
 p - нечет. простое

• Важное следствие. (Завершение ∂ -ва теор. классиф. 2-многог.).

Если $g_1 \neq g_2$, то $S^2 + g_1$ (рулек) и $S^2 + g_2$ (рулек) гомотопны?
 не эквивал. (а потому не гомотопны)

Если $k_1 \neq k_2$, то $S^2 + k_1 \mu$ и $S^2 + k_2 \mu$ гомотопны? эквивал.
 (→ не гомотопны.)

• ∂ -во. $H_1(M_g^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g}$, а при разных g эти абел. группы не изом. (курс алгебры).

неориент. → $H_1(M_k^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{k-1} + \mathbb{Z}_2$, - не изом. при разных k .

• Общая структура: $H_i(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\beta_i} + T_{0,2}$, где $T_{0,2}$ - подгруппа конечн. порядков.
 (по теор. об абел. конечнопорожд. группах).

• Опред. число $\beta_i = \text{ранг } H_i(X, \mathbb{Z})$ назыв. i -м числом Бетти.

Эйлерова характеристика $\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i$, где $n = \dim X$.

• Ясно, что $\beta_i = \dim H_i(X, \mathbb{R})$, где $H_i(X, \mathbb{R})$ - вектор. пр-во над \mathbb{R} .
 здесь X - ориент. или неориент.

• Пример: $\chi(M_g^2) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$.

• Если X - неориент., то $H_i(X, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^{\alpha_i}$, т.к. H_1 - вект. пр-во над полем \mathbb{Z}_2 .
 Тогда $\chi(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i$.

Пример: $\chi(M_k^2) = 1 - k + 1 = 2 - k$, где k - число плечок Мебиуса.

• Важное св-во $\chi(X)$ - ее можно вычислить без гомологии, зная только клеточное разбиение X (кол-во клеток в \forall размерн.).

Теорема. Пусть $X = \cup_{i,q} e_i^q$, и α_q = кол-во q -мерн. клеток.
 Тогда $\chi(X) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \alpha_q$, где $n = \dim X$. (т.е. группы гомологии знать не надо).

• ∂ -во. Рассм. в качестве группы коэфф. G какое-нибудь аб поле ($\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_p$, где p - нечет. и прост. и т.п.).

Рассм. комплекс цепей пр-ва X :

$$\dots \rightarrow C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \rightarrow \dots$$

Тогда $\dim C_i = \alpha_i$ (размерн. рассм. над полем G). Все C_i - это векторн. пр-ва над полем. Из линей. алгебры мы знаем, что

$$\dim C_i = \dim(\text{Ker } \partial_i) + \dim(\text{Coker } \partial_i) = \dim(\text{Ker } \partial_i) + \dim(\text{Im } \partial_i) = \dim Z_i + \dim B_{i-1}, \text{ где } Z_i - \text{циклы в } C_i, \text{ а } B_{i-1} - \text{грань в } C_{i-1}.$$

ясно, что $C_i / \text{Ker } \partial_i = C_i / Z_i = B_{i-1}$. отсюда:

$$\dim C_i = \dim Z_i + \dim B_{i-1}. \text{ рассм. альтернирован. суммы:}$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \dim C_i = \dots - (\underbrace{\dim Z_{i+1}}_{- \dim H_{i+1}} + \underbrace{\dim B_i}_{+ \dim H_i}) + (\underbrace{\dim Z_i}_{- \dim H_{i-1}} + \underbrace{\dim B_{i-1}}_{+ \dim H_i}) - (\dots)$$

т.е. раскроем скобки и перегруппируем слагаемые.

Получаем: $\sum (-1)^i \dim C_i = \sum (-1)^i \dim H_i = \sum (-1)^i \beta_i = \chi(X)$.

чтвр. Примеры.

$\chi(M_g^2) = 2 - 2g = 2 - 2g = 2 - 2g$

ориент. //	по клеткам	по $H_*(; \mathbb{Z})$	по $H_*(; \mathbb{Z}_2)$
$e^0 + (a_1 + b_1 \dots a_g + b_g) + e^2$	$H_0 \ H_1 \ H_2$	$H_0 \ H_1 \ H_2$	$H_0 \ H_1 \ H_2$
$1 - 2g + 1 = 2 - 2g$	1 2g 1	1 2g 1	1 2g 1
	1 - 2g + 1		1 - 2g + 1

$\chi(M_k^2) = 2 - k = 2 - k = 2 - k$

неориент.	по клеткам	по $H_*(; \mathbb{Z})$	по $H_*(; \mathbb{Z}_2)$
$e^0 + (c_1 + \dots + c_k) + e^2$	$H_0 = \mathbb{Z}$	$H_0 = \mathbb{Z}$	$H_0 = \mathbb{Z}$
$1 - k + 1 = 2 - k$	$H_1 = \mathbb{Z}^{k-1} + \mathbb{Z}_2$	$H_1 = \mathbb{Z}^{k-1} + \mathbb{Z}_2$	$H_1 = \mathbb{Z}_2^k$
	$H_2 = 0$		$H_2 = \mathbb{Z}_2$
	1 - (k-1) + 0		1 - k + 1

• Применения гомологии.

Теор. Евклидовы пр-ва \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m не гомеоморфны при $n \neq m$. (Этот факт, вообще говоря, не очевиден).

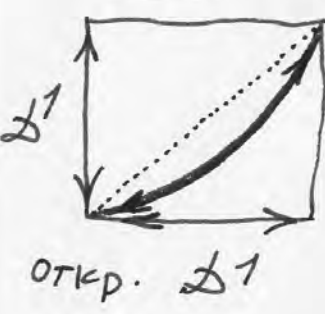
д-во. Допуст. противное, т.е. пусть \exists гомеоморф. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Выберем по точке из \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m , причем: $\mathbb{R}^n \setminus x$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m \setminus y$, где $y = f(x)$. Тогда, очевидно,

$f: \mathbb{R}^n \setminus x \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m \setminus y$ тоже гомеоморфизм:



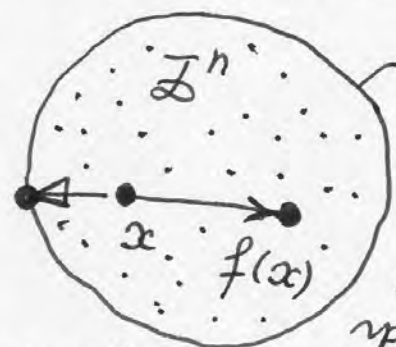
Поэтому отображ. $f: \mathbb{R}^n \setminus x \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^m \setminus y$ индуцирует отображ. $g: S^{n-1} \rightarrow S^{m-1}$, являющийся гомотопич. эквивалентностью. Но $H_{n-1}(S^{n-1}) = \mathbb{Z}$, $H_{m-1}(S^{n-1}) = 0$ и $H_{m-1}(S^{m-1}) = \mathbb{Z}$, $H_{n-1}(S^{m-1}) = 0$, т.е. группы гомол. этих сфер не изоморф. А потому S^{n-1} и S^{m-1} гомотоп. не эквивал. (см. выше). Теор. доказ.

• Теор. Брауэра о неподв. точке: любое непрерыв. отображ. $f: \bar{D}^n \rightarrow \bar{D}^n$ всегда имеет неподв. точку.



картинка $f: D^1 \rightarrow D^1$ неподв. тог. в D^1 нет.

Допуст. противн. Пусть $\exists f: \bar{D}^n \rightarrow \bar{D}^n$, не имеющее неподв. точек, т.е. $f(x) \neq x$ для $\forall x \in \bar{D}^n$.



соединим x и $f(x)$ отрезком и продолжим его назад, до пересечен. с граничн. сферой S^{n-1} .

Получаем непрер. отображ. $g: \bar{D}^n \rightarrow S^{n-1}$, причем если $x \in S^{n-1}$, то очевидно $g(x) = x$.

отображ. $g: \bar{D}^n \rightarrow S^{n-1}$

причем если $x \in S^{n-1}$, то очевидно $g(x) = x$.

Если $i: S^{n-1} \rightarrow \bar{D}^n$ - вложение, то рассмотрим композицию $S^{n-1} \xrightarrow{i} \bar{D}^n \xrightarrow{g} S^{n-1}$

Тогда $gi = id$ - тождеств. отображ. сферы на себя. Тогда:

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\bar{D}^n) \xrightarrow{g_*} H_{n-1}(S^{n-1})$$

Так как шар стягивается в точку, то $H_{n-1}(\bar{D}^n) = 0$, т.е.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{g_*} \mathbb{Z}$$

$(gi)_* = id$

с одной стороны получаем, что $g_* i_* : \mathbb{Z} \rightarrow 0$, а с другой стороны $g_* i_* = (gi)_* = id : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ изоморфно.

Противоречие. Теор. доказ.

Опред. Пусть $X \supset Y$ и непрер. $f: X \rightarrow Y$, причем $f = id$ на Y . Такой f назыв. ретракцией X на Y , а Y - ретрактом пр-ва X .
Выше мы доказали, что диск \bar{D}^n нельзя ретрагировать на его границу (сферу S^{n-1}). Верно более общее утв.
Теор. Пусть M^n компактно-многообр. с краем ∂M . Тогда не существует ретракции $f: M^n \rightarrow \partial M$.

т.е. нельзя непрер. отобр. M на его край, чтобы край был неподвижен.

д-во. Допуст. противное: пусть такое $f \exists$. Тогда:



i -вложение. Композиция $f \circ i: \partial M \rightarrow \partial M$ будет тождественна.

Тогда
$$H_{n-1}(\partial M, G) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(M^n, G) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(\partial M, G)$$

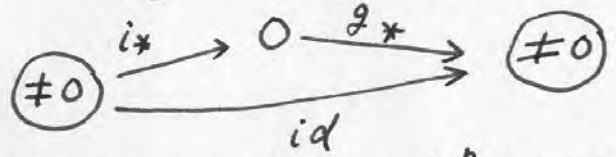
будет $= id$, так как $f_* i_* = (f \circ i)_* = id_* = id$.

Но цикл $i(\partial M)$ гомологичен нулю в M , т.к. ∂M -граница M .

Т.е. $i_*: H_{n-1}(\partial M, G) \rightarrow 0 \in H_{n-1}(M, G)$.

Если ∂M -ориентир., то $H_{n-1}(\partial M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \neq 0$.

Если ∂M -неориент., то $H_{n-1}(\partial M, \mathbb{Z}_2) \neq 0$. В обоих случаях получ. противоречие:



теор. доказ.

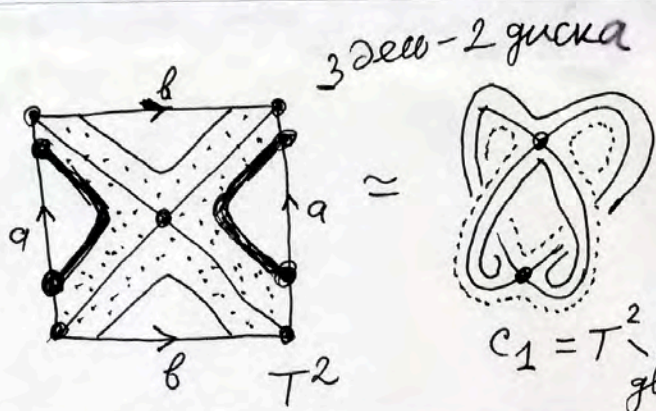
• Другое д-во теор. о \nexists ретракции диска D^n на граничную сферу S^{n-1} (аналог.: \nexists ретракции компакт. мн-я M^n на его границу ∂M).

Покажем на примере M^2 с тран. $\partial M^2 = S^1$. Допустим противн.: пусть \exists отобр. $f: M^2 \rightarrow \partial M^2 = S^1$, непрер. и кск' $f(x) = x \forall x \in \partial M^2$. Пусть $K = f^{-1}(x)$, $x \in \partial M^2$, K -связная компонента, содержащая x . Рассм. $K \subseteq f^{-1}(x)$, $x \in \partial M^2$, K -замкнуто в M^2 и \exists открытая окрестн. $U(K) \subset M^2$ с границей γ , где γ -шаговая кривая. Очевидно, что $\gamma \cap K = \emptyset$, $x \in K$. Пересечение $U(K) \cap \partial M = \text{отрезок } [\alpha, \beta]$, причем $x \in [\alpha, \beta]$. Рассм. образ $f(\gamma) \subset \partial M = S^1$. Ясно, что α и $\beta \in f(\gamma)$, т.к. $f(\alpha) = \alpha$ и $f(\beta) = \beta$. Очевидно, $f(\gamma) \supset [\alpha, \beta]$, т.к. $\alpha, \beta \in S^1$, γ -связно и $f(\gamma)$ расположено близко от $[\alpha, \beta]$, т.к. окрестн. $U(K)$ можно выбрать близкой к $K = f^{-1}(x)$, причем γ связно, гомеом. отрезку с концами α, β ; и $f(\gamma)$ связно в S^1 . Поэтому $x \in f(\gamma)$. Противоречие, т.к. $\gamma \cap K = \emptyset$. Чт и треб.



Задача (для желающих) на Эйлера характеристер.
 Рисуем "координатный крест" в торе T^2 и будем считать
 "концы креста" как положено на торе, но иногда добавляем
 "перекрутки" на лентах, ведущих в концы креста.
 Получим поверхность с краем (вообще говоря, несвязную)
 и заклеим все компоненты края 2-дисками. Вопрос:
 какое 2-многооб. получится? Вот решение задачи:

пошагово Эйлера характеристер (задачи):



здесь - 2 диска



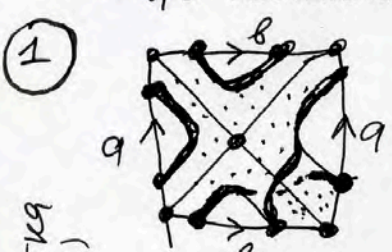
$S_1 = T^2 \setminus 2D^2$
 два диска.

$\chi(T^2) = 0 = 2 - 4 + 2 = 0$

↑ верш. ↑ ребра ↑ диски
 $M^2 = T^2$

$\chi(\text{одног. осевая}) = 2 - 4 = -2$

Теперь начинаем перекручиваться всеми способами. Что получится?



перекручиваем - только дисков.

Общая формула: $\chi(M^2) =$

$= -2 + \text{число дисков}$

$\chi(\text{одног. осевая})$

который при перекрутках не меняется.

здесь - один диск и M^2 - неориент.

следоват. $\chi(M^2) = -2 + 1 = -1$. Но $\chi(\text{неориент. } M^2) =$

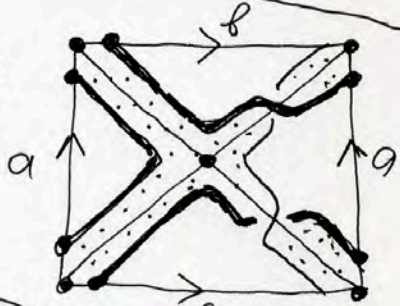
$= 2 - k$, где $k = \text{число точек медиуса}$.

т.е. $-1 = 2 - k$, $k = 3$

т.е. $M^2 = \text{дуг. Клейна} + \mu = S^2 \# 3\mu$.

одна перекрутка (неориент.)

две перекрутки (неориент.)

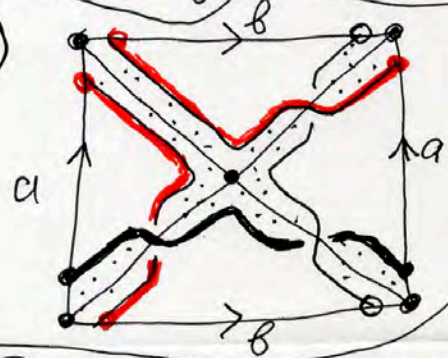


$\chi(M^2) = -2 + \#D^2 = -2 + 2 = 0$

здесь - 2 диска M^2 - неориент.

т.е. $0 = 2 - k$, $k = 2$, т.е. $M^2 = \mathbb{R}P^2 = KL$ Клейн.

три перекрутки (неориент.)



здесь - три диска. и M^2 - неориент.

т.е. $\chi(M^2) = -2 + 3 = 2 - k$, т.е.

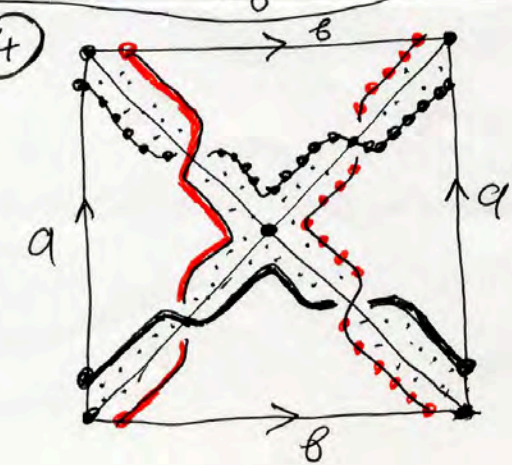
$k = 1$, т.е. $M^2 = \mathbb{R}P^2$

здесь - 4 диска (4 граничных окружн.) и M^2 - ориент., т.к. не касаются петле - 2 перекрутки (ориент. не меняется).

т.е. $\chi(M^2_{\text{ор.}}) = 2 - 2g = -2 + 4$

т.е. $g = 0$ и $M^2 = S^2$ сфера!

4 перекрутки (ориент.)



• Разные определ. гомологий: клеточные, симп-циальные, симпларные. Для "хороших" пространств все они изоморфны (соотв. группы гомол.). Например:

Теор. Если X — конечный полиэдр, то его гомологии: клет., симпл., симпл. изоморфны (без ∂ -ва).

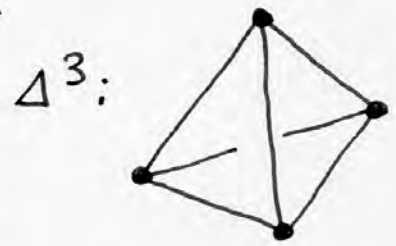
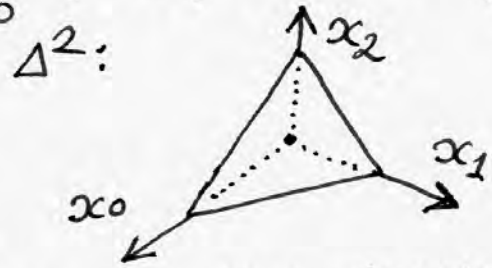
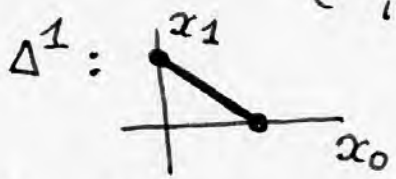
- Симплиц. гомол. мы сейчас определим. А определ. симпл. гомол. см. в книге: Фоменко, Фукс, "Гомотоп. топол."
- Полезно понимать следующее:

Симпл. гомол.	легко определяются	трудно вычислять
Симпл. гомол.	легко определяются	трудно вычислять
Клеточ. гомол.	сложнее определяются	легче вычислять

Поэтому во многих случаях удобно пользоваться клеточными гомологиями



• Определ. симплиц. гомологий. Сначала — симплекс.
 q -симплекс Δ^q — это мн-во, задаваемое в $\mathbb{R}^{q+1}(x_0, \dots, x_q)$ так: $\Delta^q = \{ \sum_{i=0}^q x_i = 1; x_i \geq 0 \forall i \}$.



• Опред. Топол. пр-во X назыв. симплиц. комплексом (полиэдром), если

- 1) $X = \cup_{i \in I} \Delta_i^q$, где Δ_i^q — гомеоморфны стандарт. евклидовым симплексам, и:
- 2) симпл. Δ_i^q "хорошо прилегают" друг к другу, а именно:
 $\Delta^q \cap \Delta^p = \text{целая грань, или } \emptyset$ (т.е. не пересек.)

• Зададим q -симпл. набором его вершин: $\Delta^q = (a_0, a_1, \dots, a_q)$.
 Определим границу $\partial \Delta^q = \sum_{i=0}^q (-1)^i (a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q)$, т.е. вершина a_i — пропущена. Альтернированная сумма $(q-1)$ -мерных граней. Т.е. — "границы со знаками \pm ".

- Примеры. Δ^1 : $\partial \Delta^1 = \partial(a_0, a_1) = a_1 - a_0$
- Δ^2 : $\partial \Delta^2 = \partial(a_0, a_1, a_2) = (a_1, a_2) - (a_0, a_2) + (a_0, a_1) = (a_1, a_2) + (a_2, a_0) + (a_0, a_1)$, т.е. обобщенная граница треугольника.

Теор: $\partial^2 \equiv 0$. $\partial \circ \partial = 0$. $\partial^2(a_0 \dots a_q) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (a_0 \dots \hat{a}_i \dots \hat{a}_j \dots a_q)$. (66)

Знак $(-1)^{i+j}$ определ. тем,

какую вершину выбрасываем первой: (пусть $i < j$):

— \hat{a}_i — \hat{a}_j — знак: $(-1)^i (-1)^{j-1}$
 (1) (2)

— \hat{a}_i — \hat{a}_j — знак: $(-1)^{j-1} (-1)^i$ ← отменяются
 (2) (1) знаком

поэтому в общей сумме эти слагаемые сокращаются. Цитрэд.

• Далее следуем схеме определ. клеточ. гомол.

Группа симплиц. q -цепей $C_q^{\text{сим.}} = \{ \sum_i a_i \Delta_i^q, a_i \in G \}$

где G — группа коэфф. Далее:

$Z_q^{\text{сим.}} = \text{Кер}(\partial_q)$; $B_q^{\text{сим.}} = \text{Im}(\partial_{q+1})$; $H_q^{\text{сим.}} = Z_q^{\text{сим.}} / B_q^{\text{сим.}}$

• Теор. Если X — конечн. симплиц. комплекс, то:

$H_q^{\text{клет.}}(X) \cong H_q^{\text{сим.}}(X) \cong H_q^{\text{синг.}}(X)$. (без ∂ -ва).

• Как и в случае клеточн. пр-ств, группы симп. гомол. не зависят от способа разбиения X в объедин. симплексов.



двумерный тор двуметно накрывает бутылку Клейна. См. далее теорию накрытий.