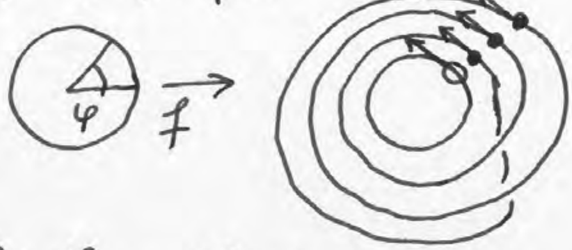
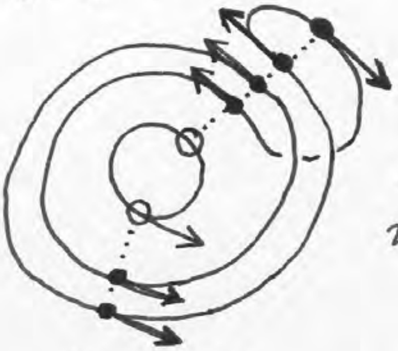
• Примеры вычисл. степени.

$f: S^1 \to S^1$, $f(e^{i\varphi}) = e^{in\varphi}$. Тогда $\deg f = n$.

$f^{-1}(1) = \{e^{2\pi q i/n}\}$ — $n$ корней из единицы. Все знаки $+$.




$f(S^1)$



Видно, что степень не меняется при гомотопии.

• $f: S^2 \to S^2$, $f(z) = z^n$, $z = x+iy$.

Пусть $w_0 \neq 0$, $w_0 = f(z) = z^n$, тогда $z = \sqrt[n]{w_0}$, т.е. $n$ прообразов ($n$ корней). Теперь надо найти знаки прообразов.

• Общий факт. Пусть $f: S^2 \to S^2$, $w = f(z)$, где $f$ — комплекс.-аналит. ф-я.

Утв. $\det(df) > 0$, если $df \neq 0$. Поэтому знаки всех прообразов — положительны.

Д-во. $f(z) = f(x+iy) = a(x,y) + i b(x,y)$, где в силу услов. Коши-Римана: $a_x = b_y$ и $a_y = -b_x$.

$(df)^{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $df(z) = \frac{df}{dz} \cdot dz$. Тогда $(df)^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix}$

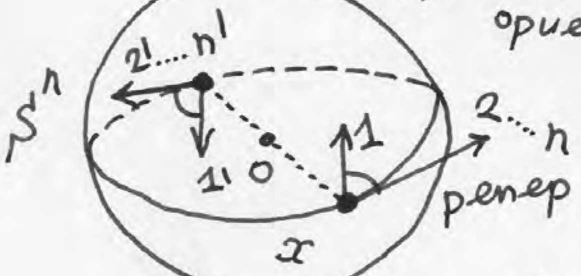
$\det(df)^{\mathbb{R}} = a_x b_y - a_y b_x = a_x^2 + a_y^2 > 0$ в неособых точках.

т.е. $\deg f(z) = \sum(+1)$ по всем $n$ прообразам, т.е. $= n$.

• Опред. В случае неориент. мног. степень определяется по $\mathrm{mod}\, 2$.

• Теор. Проект. пр-во $\mathbb{RP}^n$ ориент. при $n$ — нечет. и неориент. при $n$ — четном.

Д-во. Фактически уже дано выше. $\mathbb{RP}^n = S^n / \mathbb{Z}_2$.




Отражение относ. точки $O$. Надо сравнить ориент. реперов $(1, 2, \dots, n)$ и $(1', 2', \dots, n')$. Выше мы показали, что всё определ. знаком $(-1)^{n-1}$. Теор. доказана.

• Утв. Пусть $f: S^n \to S^n$, $f(x) = -x$. Тогда $\deg f = 2$ при нечетном $n$ и $= 0$ при четн. $n$.

Д-во следует из предыдущ. теоремы.

• Утв. Пусть $f: S^n \to \mathbb{RP}^n$, где $f(x) = (x, -x)$, т.е. $\mathbb{RP}^n = S^n / \mathbb{Z}_2$. Тогда $\deg f = 2$ при $n$ — нечетн. и $\deg f = 0 \pmod 2$ при $n$ — четном.

Д-во вытек. из предыдущего.

• Теор. Пусть $f: M^n \to X^n$ и $g: N^m \to Y^m$ — гладк. отобр. и $f \times g: M \times N \to X \times Y$, где $(f \times g)(\alpha, \beta) = (f(\alpha), g(\beta))$. Тогда $\deg(f \times g) = \deg f \cdot \deg g$.

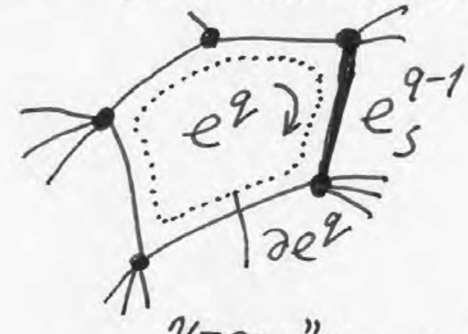
• Теор. Пусть $f: M^n \to X^n$ и $g: X^n \to Y^n$; тогда $g \circ f: M \to Y$ и $\deg(g \circ f) = \deg g \cdot \deg f$.

• докажите.

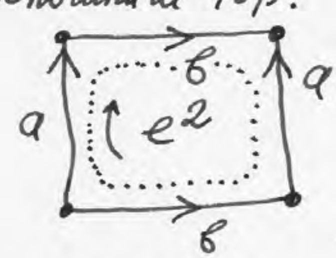
• Граничный оператор в клеточном пр-ве.
Как формально определить $\partial e^q$ по отношению к клеткам $\dim \leq q-1$? Обозначим $X^{(\alpha)} = \bigcup\limits_{i \leq \alpha} e^i$.

Опред. $X^{(\alpha)}$ назыв. $\alpha$-мерным остовом $X$.
Тогда $X = X^{(0)} \cup X^{(1)} \cup \ldots \cup X^{(n)}$, где $n = \dim X$. При этом:
$X = X^{(n)} \supset X^{(n-1)} \supset \ldots \supset X^{(q)} \supset X^{(q-1)} \supset \ldots \supset X^{(0)}$.

• Берем две клетки: $e^q$ и $e^{q-1}_s$, где $s$ — номер $(q-1)$-клетки. Как граница $\partial e^q$ клетки $e^q$ „проходит" по клетке $e^{q-1}_s$?



Вспомним тор:

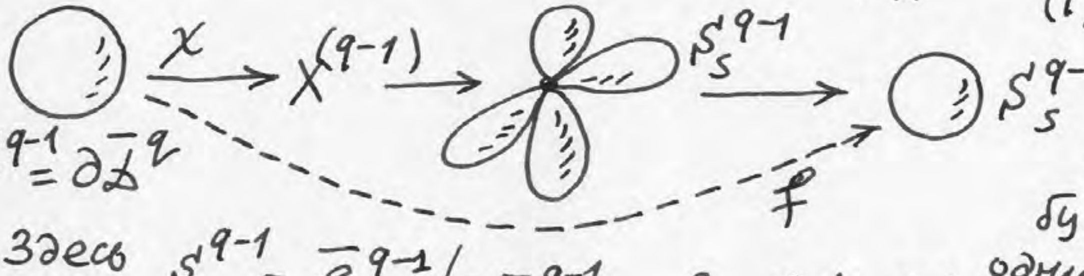


$\partial e^2 = a + b - a - b$
здесь граница $e^2$ проходит два раза по кажд. клетке $a, b$: в прямом и обратном направ.

Итак: "сколько раз" $\partial e^q$ проходит по какой-то клетке $e^{q-1}_s$?

• Рассм. композицию непр. отобр.:

$$S^{q-1} = \partial \bar{D}^q \xrightarrow{\chi} \partial \bar{e}^q \subset X^{(q-1)} \longrightarrow X^{(q-1)} / X^{(q-2)} = \bigvee_{(i)} S^{q-1}_i \xrightarrow{p_s} S^{q-1}_s$$



Здесь $p_s$ — проекция букета сфер на одну сферу $S^{q-1}_s$

Здесь $S^{q-1}_s = \bar{e}^{q-1}_s / \partial \bar{e}^{q-1}_s$; $f: S^{q-1} \to S^{q-1}_s$.

• Опред. $\deg f$ назыв. коэфф. инцидентности двух клеток: $e^q$ и $e^{q-1}_s$ и обозначается $[e^q : e^{q-1}_s]$.

• Опред. Границей клетки $e^q$ назыв. формальная сумма:

$$\partial e^q = \sum_s [e^q : e^{q-1}_s] e^{q-1}_s.$$

Замеч. На каждом диске $D^q$ задана и фиксир. ориент. Она задает ориент. клеток $e^q$ при гомеоморф. $\chi$ (характерист. отобр.)

• **Опред.** Пусть $X$ — клеточ. комплекс. Клеточной цепью (или просто цепью) размерн. $q$ назыв. формальная линейн. комбинация $q$-мерн. клеток с коэфф. из группы $\mathbb{Z}$:

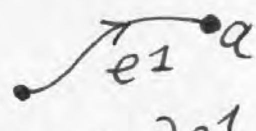
$$c=\sum_i a_i e_i^q,\quad a_i\in\mathbb{Z}.$$ Цепи образуют группу $C_q(X)$, назыв. группой $q$-мерн. цепей. Суммы — конечные.

• **Опред.** Эквивалентно: цепи — это функции на множестве клеток $\{e^q\}$ со значен. в группе $\mathbb{Z}$ (или в какой-то абелевой группе $G$). Такие функции образуют абелеву группу (по сложению): $C_q(X, G)$. Если $G=\mathbb{Z}$, то будем писать $C_q(X,\mathbb{Z})$ или $C_q(X)$. Цепь — это когда на $\forall$ клетке $e^q$ "написан" элемент группы $G$.

• Граничн. оператор (гомоморфизм) $\partial_q: C_q(X)\to C_{q-1}(X)$ определ. так: $\partial_q\left(\sum a_i e_i^q\right)=\sum a_i\,\partial e_i^q$, где $\partial e_i^q$ был определен выше.

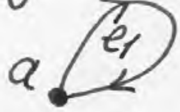
• **Теор.** $\partial^2\equiv 0$, т.е. $\partial_{q-1}\circ\partial_q\equiv 0$ для любого $q$. Формальное д-во давать не буду. "Наглядно" — понятно, т.к. граница диска — это сфера, а граница сферы "пуста", у сферы нет края (границы).

• Пример: $\partial_1: C_1(X)\to C_0(X)$.




$\partial e^1=a-b$

Если $a=b$, то получается петля и $\partial e^1=a-a=0$:




• **Опред.** Цепь из $C_q(X)$ назыв. циклом, если ее граница — ноль, т.е. $\partial z=0$. Ясно, что $q$-мерн. циклы образуют группу $Z_q$ и $Z_q=\operatorname{Ker}\partial_q\subset C_q(X)$. Цепь $b\in C_q(X)$ назыв. границей, если $b=\partial_{q+1}h$, где $h\in C_{q+1}$. Все $q$-мерные границы образуют группу $B_q=\operatorname{Im}(\partial_{q+1})\subset C_q$.

• **Теор.** $B_q\subseteq Z_q$. Д-во — из тождества: $\partial^2=0$.
т.е. любая граница — это цикл.

• **Опред.** Абелева группа $H_q=Z_q/B_q$ назыв. группой $q$-мерной гомологии пр-ва $X$. Здесь $H_q(X,\mathbb{Z})=H_q(X)$. Для произвол. абелев. группы коэфф. $G$ получаем $H_q(X,G)$.

• Итак, $X\to\{H_0(X),\dots,H_n(X)\}$, где $n=\dim X$.

• Наглядно можно иногда представлять цикл как $q$-мерную замкн. поверхн. (многог.), т.е. без края.

цикл $z$, $\partial z = 0$ нет края

Что такое элемент $[z]$ группы гомологий $H_q(X)$?

$$[z] = z + \partial_{q+1} h, \ h \in C_{q+1}(X).$$

Два цикла $z_1$ и $z_2$ назыв. <u>гомологичными</u>, если $z_1 - z_2 = \partial h$.

Нагладн. изображение:

$[z]=0$ в $H_q(X) \Longleftrightarrow z = \partial h$:



т.е. цикл $z$ <u>гомологичен нулю</u>

• Общие св-ва групп гомологий $H_q(X, G)$

<u>Теор.</u> 1) Гр. гомологий $H_q(X)$ не зависят от клеточного разбиения пр-ва $X$. (Это — важное св-во: для подсчета гомологий можно выбирать <u>простое</u> клеточное разбиение).

2) Если $f: X \to Y$ непрер., то оно индуцирует гомоморфизм групп гомол.: $f_*: H_q(X) \to H_q(Y)$.

3) Если $f$ и $g: X \to Y$ гомотопны, то $f_* = g_*$.

4) Если $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, то $gf: X \to Z$ и $(gf)_* = g_* f_*$.

5) Если пр-ва $X$ и $Y$ гомотопически эквивал., то $H_q(X) \cong H_q(Y)$ для всех $q$. Следствие: если для какого-то $q$ $H_q(X) \neq H_q(Y)$, то $X$ и $Y$ гомотопич. не эквивал. (тем более не гомеом.). В этом смысле группы гомол. — это гомотопич. инварианты топол. пр-ств.

6) Если $f: X \to Y$ — непрер. отобр. клеточ. комплексов, то $f$ всегда гомотопно <u>клеточному</u> отображ., т.е. переводящему клетки из $X$ в клетки $Y$. (Это т.н. теор. о клеточной аппроксимации непрер. отобр.)

• См. д-во теор. в кн. Фоменко — Фукс, "Гомотопическая топология".

• Коммент. Если $H_q(X) \cong H_q(Y)$ для $\forall q$, отсюда, вообще говоря, не следует, что $X$ и $Y$ гомотопич. эквивалентны. Примеры см. в кн. Фоменко — Фукс.

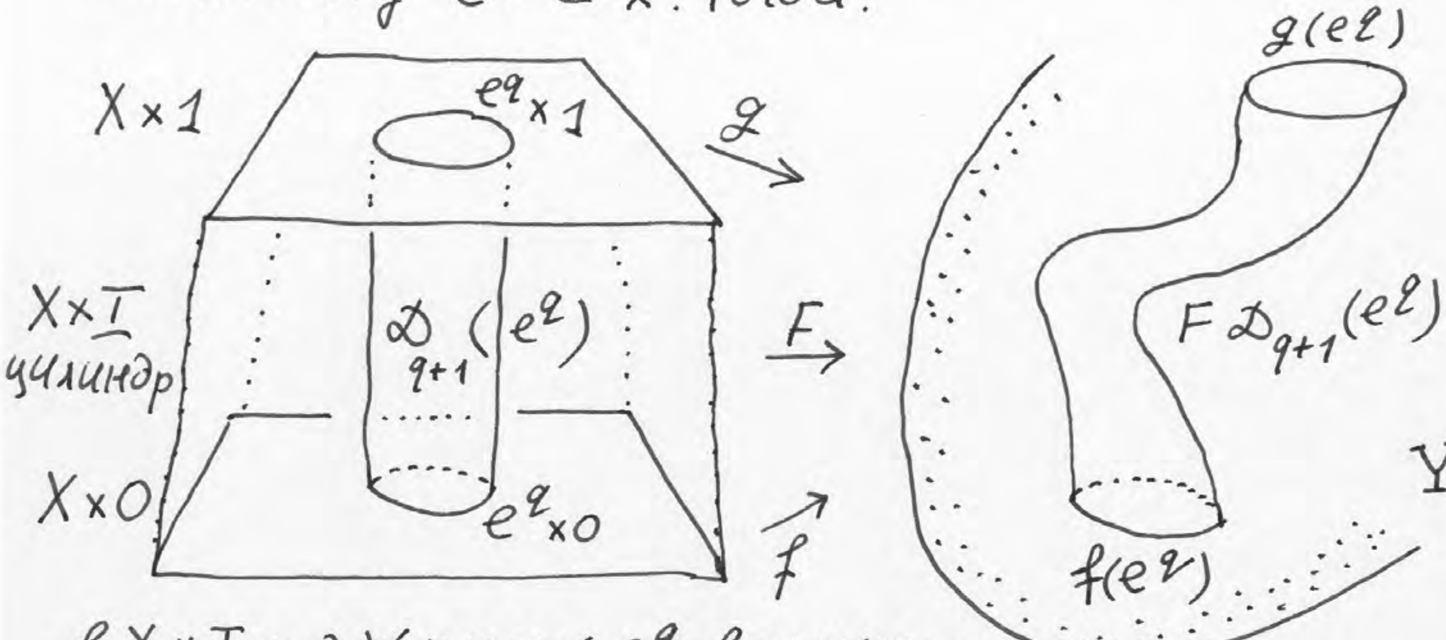
• <u>докажем</u> важное св-во 3 из теор.: пусть $f$ и $g: X \to Y$ два клеточных отображ., которые клеточно-гомотопны. Тогда $f_* = g_*: H_q(X) \to H_q(Y)$. Последовательность групп

$$\ldots C_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial} C_q(X) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(X) \to \ldots$$

назыв. "комплексом цепей" или "цепным комплексом" пр-ва $X$. Аналогично:

$$\ldots C_{q+1}(Y) \xrightarrow{\partial} C_q(Y) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(Y) \to \ldots$$

По определ. гомотопии, имеем: $F: X \times \underline{I} \to Y$, где $F$ – клеточное отобр. и $F(x,0) = f(x)$ и $F(x,1) = g(x)$.
Рассм. клетку $e^q \subset X$. Тогда:




в $X \times \underline{I}$ над $\forall$ клеткой $e^q$ возникает цилиндр $e^q \times \underline{I}$, являющийся $(q+1)$-клеткой. Обозначим его $\mathcal{D}_{q+1}(e^q)$. Оператор $\mathcal{D}_{q+1}$ сопоставляет $q$-мерн. клетке – $(q+1)$ клетку. При отображ. $F$ клетки отображ. в $Y$:

$$0 \times e^q \to f(e^q),\quad e^q \times 1 \to g(e^q),\quad \mathcal{D}_{q+1}(e^q) \to F\mathcal{D}_{q+1}(e^q).$$

Ясно, что граница цилиндра $\mathcal{D}_{q+1}(e^q)$ имеет вид:

$$\partial_{q+1}(\mathcal{D}_{q+1}(e^q)) = (e^q \times 0) - (e^q \times 1) + \mathcal{D}_q(\partial e^q).$$

Т.е. верхнее и нижнее основания "стакана" (с учетом ориент.) + боковая стенка стакана (цилиндр над границей клетки). Применяя $F$, получаем аналогичн. соотнош. в пр-ве $Y$:

$$\partial_{q+1} F(\mathcal{D}_{q+1}(e^q)) = f(e^q) - g(e^q) + F\mathcal{D}_q(\partial e^q).$$

Возникает отображение цепных комплексов:

$$\begin{tikzcd}
\ldots\ C_{q+1}(X) \arrow[r, "\partial_{q+1}"] & C_q(X) \arrow[dl, "F_*\mathcal{D}_{q+1}"'] \arrow[d, shift right, "f_*"'] \arrow[d, shift left, "g_*"] \arrow[r, "\partial_q"] & C_{q-1}(X)\ \ldots \arrow[dl, "F_*\mathcal{D}_q"] \\
\ldots\ C_{q+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{q+1}"'] & C_q(Y) \arrow[r, "\partial_q"'] & C_{q-1}(Y)\ \ldots
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма коммутативна ↓

Т.е.:

$$\partial F_* \mathcal{D}_{q+1}(e^q) = f_*(e^q) - g_*(e^q) + F_* \mathcal{D}_q(\partial e^q).$$

Рассм. $q$-цикл $z \in Z_q(X)$. Тогда $z = \sum_i a_i e_i^q$, где $a_i \in \mathbb{Z}$, и $\partial_q z = 0$. В силу линейности операторов $\partial_q$ и $\mathcal{D}_{q+1}$, получаем:

$$\partial F_* \mathcal{D}_{q+1}(z) = f_* z - g_* z + F_* \mathcal{D}_q(\partial z).$$

Но т.к. $z$ – цикл, то $\partial z = 0$, а потому:

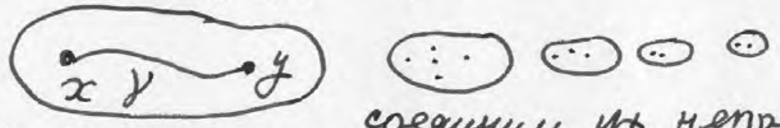
$$f_* z - g_* z = \partial\left(F_* \mathcal{D}_{q+1}(z)\right) = \partial h, \text{ где } h \in \operatorname{Im} \partial_{q+1},$$

т.е. $f_* z$ и $g_* z$ гомологичны $\simeq$ определяют один и тот же класс гомологий: $[f_* z] = [g_* z] \in H_q(Y)$. Итак, $f_* = g_*$, что и требов. доказ.

• Примеры вычисл. клеточных гомологий.

① Пусть $X$ состоит из $k$ компонент линейной связности. Тогда $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ ($k$ раз).

$H_0(X, G) = G \oplus \ldots \oplus G$ ($k$ раз).

$X$: 


Если $x, y$ лежат в одной компоненте, то соединим их непрер. путем $\gamma$ и продеформируем его в 1-мерн. остов $X$, т.е. в объединение 0-мер. и 1-мер. клеток.

$x, y$ – нульмерные клетки

Тогда $\partial \tilde{\gamma} = x - y$, т.е. $\forall$ две 0-мерн. клетки (0-цикла) в $X$ гомологичны: $x \sim y$, т.е. $[x] = [y] =$ образующая в $H_0(X)$.

• ② $S^n = e^0 + e^n$. Утв.

для $S^0$: $H_0 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_i = 0$, $i > 0$.

для $S^1$: $H_0 = H_1 = \mathbb{Z}$, $H_i = 0$, $i > 1$.

для $S^n$, $n > 1$: $H_0 = H_n = \mathbb{Z}$, $H_i = 0$ при $i \neq 0, n$.

• ③ $\mathbb{R}P^n = e^0 + e^1 + \ldots + e^n$ (см. выше). Далее:
$n > 1$

$$\partial e^p = \begin{cases} 2e^{p-1}, & \text{при } p \text{ – четн.} \\ 0, & \text{при } p \text{ – нечетн.} \end{cases} \quad \text{при } p > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} Z_{2k} = 0, \; p = 2k \\ Z_{2k-1} = \mathbb{Z}(e^{2k-1}). \end{array}$$

далее: $B_{2k-1} = 2\mathbb{Z}$, т.к. $2e^{p-1} = \partial e^p$, $p = 2k$.

Поэтому $H_{2k} = Z_{2k} / B_{2k} = 0$ при $k > 0$,

$H_{2k-1} = Z_{2k-1} / B_{2k-1} = \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ при $2k-1 < n$.

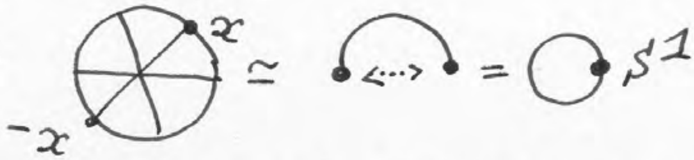
Отдельно рассмотрим $H_n(\mathbb{R}P^n)$. При $n$ четном $H_n = 0$, т.к. $\partial e^{2s} = 2e^{2s-1} \neq 0$, а потому нет циклов: $Z_{2s} = 0$.

При $n = 2s+1$ – нечетном: $H_n = \mathbb{Z}$, т.к. $\partial e^{2s+1} = 0$, а $B_{2s+1} = 0$ (нет границ), поэтому $H_n = Z_n / B_n = Z_{2s+1} = \mathbb{Z}$.

Итак, гомологии $\mathbb{R}P^n$ имеют вид:

$$H_q: \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z}_2 \quad 0 \quad \mathbb{Z}_2 \quad 0 \ldots\ldots \quad \begin{cases} \nearrow \mathbb{Z}, & n = 2s+1 \\ \searrow 0, & n = 2s \end{cases}$$
$$q = \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots\ldots$$

• $\mathbb{R}P^1 = S^1$ :




$\Rightarrow H_0(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$
$H_1(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$
остальные $= 0$.

• Выше мы считали, что $G = \mathbb{Z}$ (группа коэффициентов). Вычислим $H_q(\mathbb{R}P^n)$, если $G = \mathbb{Z}_2$, и если $G = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{Q}$).

<u>Теор.</u> $H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ для $0 \leq i \leq n$. Остальные $= 0$.
$H_0(\mathbb{R}P^{2s+1}, \mathbb{R}) = H_{2s+1} = \mathbb{R}$, все остальные $H_i = 0$.
$H_0(\mathbb{R}P^{2s}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, все остальные $H_i = 0$.

<u>Д-во.</u> Если $G = \mathbb{Z}_2$, то $\partial e^p \equiv 0 \pmod 2$ для всех $p$, т.е. граничн. оператор $\partial \equiv 0$ $\forall p$, а потому $Z_i = \mathbb{Z}_2(e^p)$, а все $B_i = 0$. Поэтому $H_i = \mathbb{Z}_2/0 = \mathbb{Z}_2$ для всех $i$.
А если $G = \mathbb{R}$, то $\partial e^{2s} = 2e^{2s-1}$, т.е. $e^{2s-1} = \partial\left(\frac{1}{2} e^{2s}\right)$, т.е. все четно-мерн. клетки не явл. циклами (а потому $H_{\text{четн.}} = 0$), а все нечетно-мер. клетки являются границами, т.е. $Z_{\text{нечет}} = B_{\text{нечет}}$, т.е. $H_{\text{нечет}} = Z/B = 0$.

• Задача. Вычислить $H_q(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_p)$, где $p$ — нечетн. простое.

• <u>Теор.</u> $H_i(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ при $i = 0, 2, 4, 6, \ldots, 2n$. Остальные $= 0$.
Д-ва. $\mathbb{C}P^n = e^0 + e^2 + e^4 + \ldots + e^{2n}$. Т.е. граничн. оператор $\partial \equiv 0$ во всех размерн.

• Ясно, что $H_{2k}(\mathbb{C}P^n, G) = G$, $H_{2k+1}(\mathbb{C}P^n, G) = 0$, для $\forall G$.
при $0 \leq 2k \leq 2n$; $H_{2k} = 0$ при $2k > 2n$.