Лекция 5

• Гомотопия и гомотопическая эквивалентность.

<u>Опред.</u> 1. f и $g: X \to Y$ гомотоп. эквивал. (гомотопны), $f \sim g$, если $\exists$ семейство отобр. $\varphi_t : X \to Y$, $0 \le t \le 1$, непрер. по t и x одновременно, и так, что: $\varphi_0 = f$ и $\varphi_1 = g$.

<u>Опред. 2.</u> f и $g: X \to Y$ гомотопны, если $\exists$ отобр.

$F: X \times I \to Y$, непрер. на "цилиндре" $X \times I$ и такое, что: $F(x,0) = f(x)$ и $F(x,1) = g(x)$.

<u>Утв.</u> Опред. 1 и 2 эквивалентны.

Д-во: положим $\varphi_t(x) = F(x,t)$.

• Гомотопия — это непрерывн. деформация.

• Гомотопич. эквивал. пр-ств.

<u>Опред.</u> Два топол. пр-ва X и Y назыв. гомотопически эквивал., если $\exists f: X \to Y$ и $g: Y \to X$, оба непрерывн. и так, что: gf гомотопно id_X (тожд. отоб. X на себя), а fg гомотопно id_Y.

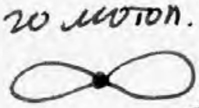
• <u>Примеры</u> гомотопич. эквивален. пр-ств.

(1) $\mathbb{R}^n \sim *$, $D^n \sim *$ (эквивал. точке $*$).

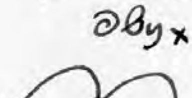
(2) Кольцо $S^1 \times D^1$  $\sim S^1$ (окружность).

(3) Лист Мебиуса μ гомотоп. эквив. окружн. S^1: 

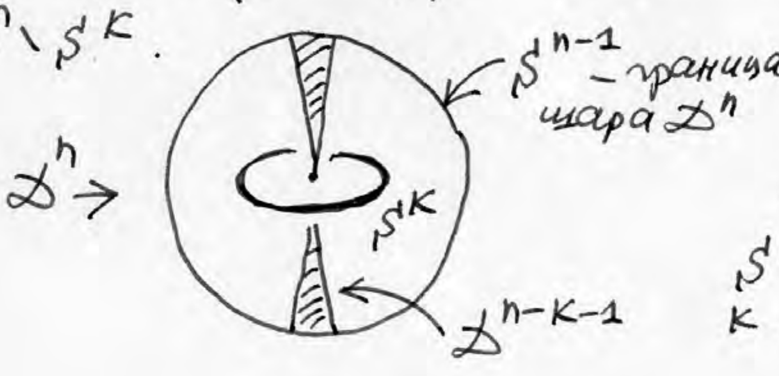
<u>Вывод</u>: размерность и ориентир. (неориент.) не являются гомотопическими инвариантами. Могут "меняться".

(4) Тор T^2 с дыркой гомотоп. эквив. "букету окружн.": $S^1 \vee S^1$, т.е. 

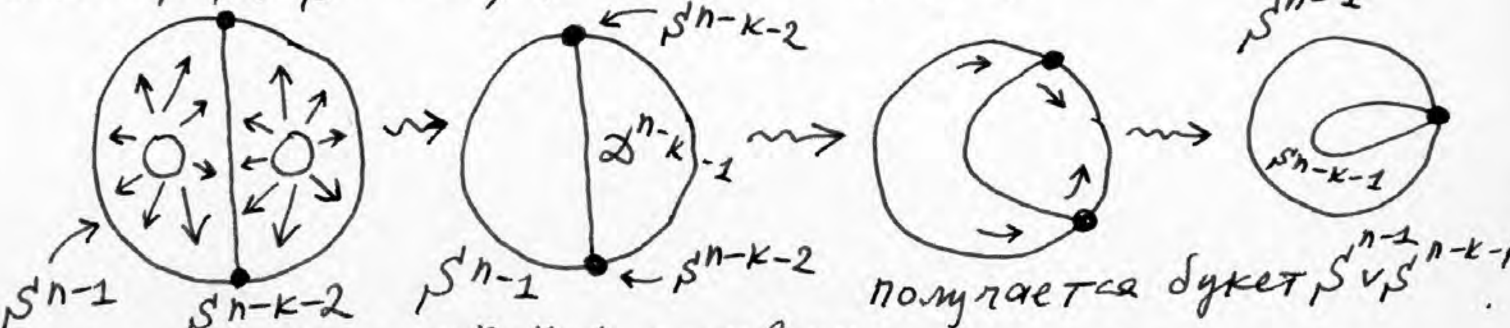
<u>Опред.</u> "Букет" $X \vee Y$ получается склейкой двух точек: $x \in X$ и $y \in Y$.

$T^2 \setminus D^2 \sim$  $\sim$  $S^1 \vee S^1$

(5) $\mathbb{R}^n \setminus S^k \sim S^{n-1} \vee S^{n-k-1}$. <u>Д-во</u>. $\mathbb{R}^n \setminus S^k$ гомеоморф. $D^n \setminus S^k$.



Сфера S^k лежит в плоскости (шаре) D^{k+1}. Ему ортогонален шар D^{n-k-1}. Если S^k выбросить, то дополнение к ней в D^n стянется на сферу S^{n-1} (границу D^n) и диск D^{n-k-1}, граница которого (т.е. сфера S^{n-k-2}) приклеена к сфере S^{n-1}.



получается букет $S^{n-1} \vee S^{n-k-1}$.

Границу диск D^{n-k-1} стягиваем по сфере S^{n-1} в точку. Получается сфера S^{n-k-1}

• например, $\mathbb{R}^2 \setminus S^0 \sim S^1 \vee S^1$; $\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \sim S^2 \vee S^1$.

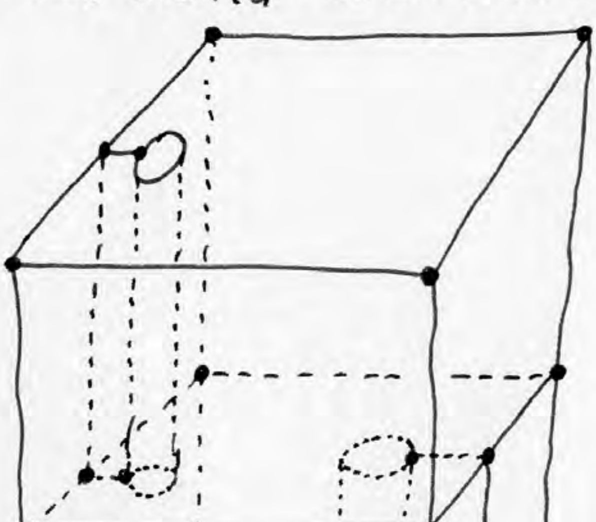
(6) $S^n \setminus S^k \sim S^{n-k-1}$. Вытекает из предыдущ. задачи.

(7) Сфера S^n с двумя отождеств. точками:

$=$ букет $S^n \vee S^1$

Вообще: если в связном тополог. пр-ве X (линейно связном) отождествить две точки, то получится букет X и окружности: $X \vee S^1$ (докажите).

(8) "Дом Бинга" гомотопич. эквивал. точке (т.е. стягиваем).



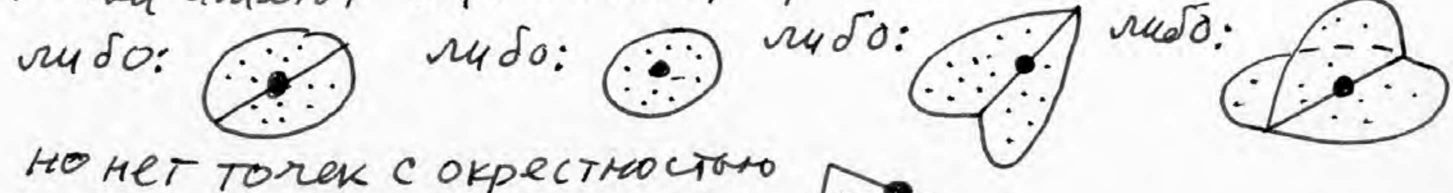
Это — 2-мерн. комплекс. Состоит из стенок куба и его плоского сечения (на половине высоты) с двумя дырками. В верхней грани куба сделана дырка, от ее границы идет цилиндр до дырки на сечении. Цилиндр соединен полоской со стенкой куба. То же самое — в нижней половине куба.

Т.е. в "доме" — две комнаты, вверху и внизу. В каждой комнате — цилиндр с полоской.

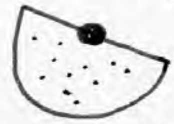
Утв. Дом Бинга гомотоп. эквив. точке. Д-во. В яблоко вгрызаются два червяка — сверху и снизу. Им запрещено "встречаться", т.е. касаться друг друга. Они съедают все яблоко и остается дом Бинга.

так сначала яблоко (3-шар) гомотоп. эквивал. точке, то все время его огрызок остается гомотоп. эквив. точке.

• В нем "пафос" дома Бинга. Дело в том, что все его точки имеют окрестности, перечисленные на рис.:

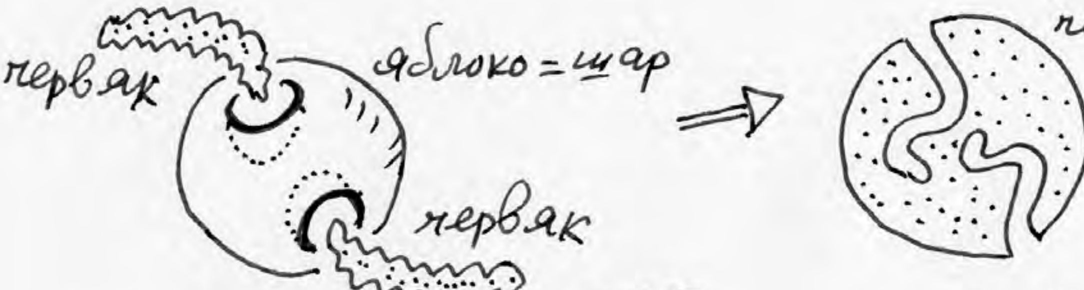


но нет точек с окрестностью



т.е. нет "граничных точек".

А потому как бы "нет начала стягивания". И тем не менее, дом Бинга стягивается в точку.



червяки грызут яблоко. Огрызок все время остается стягиваемым в точку.

• Мы познакомились с гладк. многообр. (поверхн.). Теперь новый, более широкий класс пространств: клеточные пр-ва (или клеточные комплексы, CW-комплексы).

• Многообр. были склеены из n-дисков (шаров). Клеточные пр-ва тоже склеены из дисков разных размерностей, но в отличие от многообр., на границе дисков допускаются склейки.

• Опред. Тополог. хаусдорфово пр-во X назыв. клеточным пр-вом (комплексом), если $X = \bigcup\limits_q \bigcup\limits_i e_i^q$, где e_i^q – подмн-ва в X, $\dim e_i^q = q$, i – это порядковый номер, причем e_i^q не обязаны быть замкнутыми или открытыми в X. Но они удовлетв. св-вам:

① клетки не пересекаются

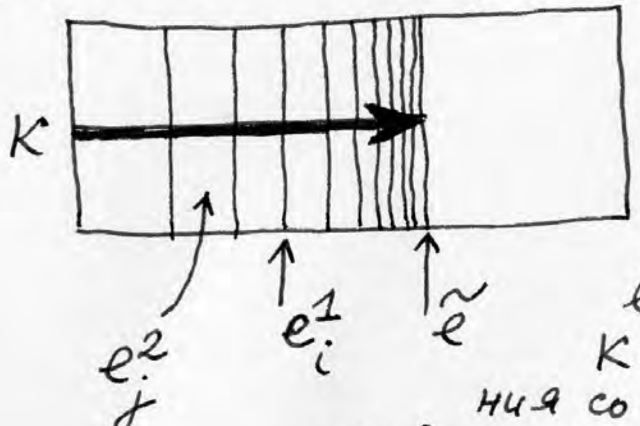
② для $\forall e^q$ $\exists$ непрер. отобр. $\chi : \bar{D}^q \to X$, где $\bar{D}^q$ – замкн. диск; отображ. χ назыв. характеристическим, $\chi : D^q \to e^q$ явл. гомеоморфизмом откр. диска на клетку; пусть $S^{q-1} = \partial \bar{D}^q$ есть граница диска, тогда $\chi : S^{q-1} \to \bigcup\limits_{\alpha \le q-1} e_i^\alpha$, т.е. граница клетки

$$\partial e^q = \bar{e}^q \setminus e^q = \chi(\partial D^q)$$ содержится в объединении клеток меньшей размерности.

т.е. $\partial e^q \subset \bigcup\limits_{\alpha \le q-1} e_i^\alpha$.

③ Множество $K \subset X$ замкнуто $\Longleftrightarrow$ замкнуты все мн-ва $\chi^{-1}(K \cap \bar{e}^q) \subset \bar{D}^q$, для всех клеток e^q.

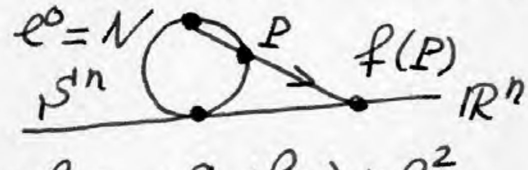
• Коммент. Зачем нужно условие 3? Пример "плохого" разбиения X в сумму "клеток", где ③ не выполнено:



X = прямоугольник; одномерные клетки e_i^1 накапливаются к клетке $\tilde{e}$. Ясно, что св-ва ① и ② здесь выполнены, а ③ — нет. Т.к. мн-во $K \subset X$ не замкнуто, но его пересечения со всеми клетками либо замкнуто, либо пусто; $K \cap \tilde{e} = \emptyset$. Таких "клеточных объектов" мы не хотим.

• Примеры CW-комплексов.

① $S^n = e^0 + e^n$ (знаком + условно обознач. объединение). Наприм. стереогр. проек.

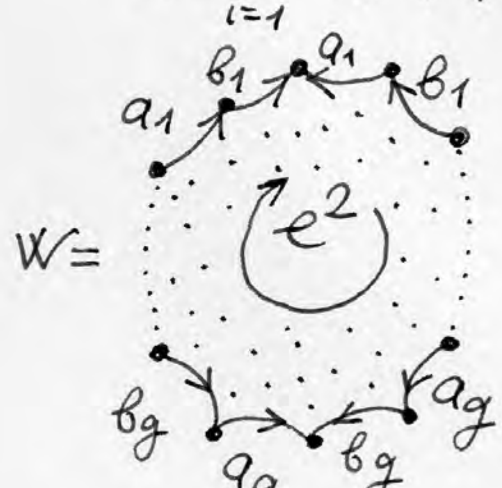


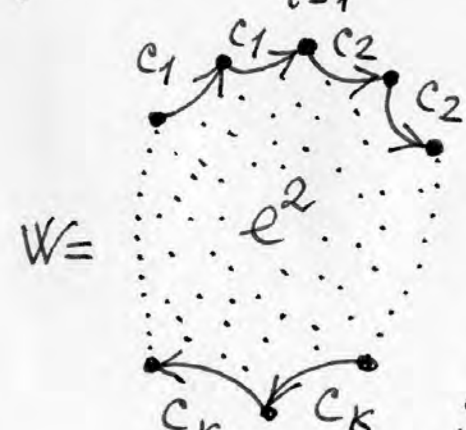
② ориент. 2-мног. $M_g^2 = e^0 + (a_1 + b_1 + \ldots + a_g + b_g) + e^2$,

а неориен. 2-мног. $M_k^2 = e^0 + (c_1 + c_1 + \ldots + c_k + c_k) + e^2$.

Д-во. Достат. рассм. фундамен. многоугол. (развертку) W:

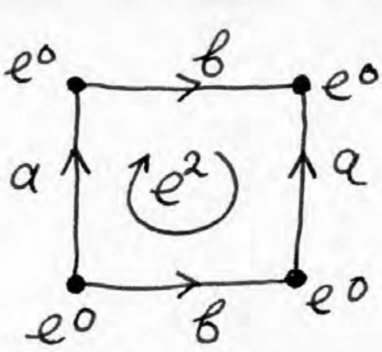
$W = \prod\limits_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ и $W = \prod\limits_{i=1}^{k} c_i^2$.



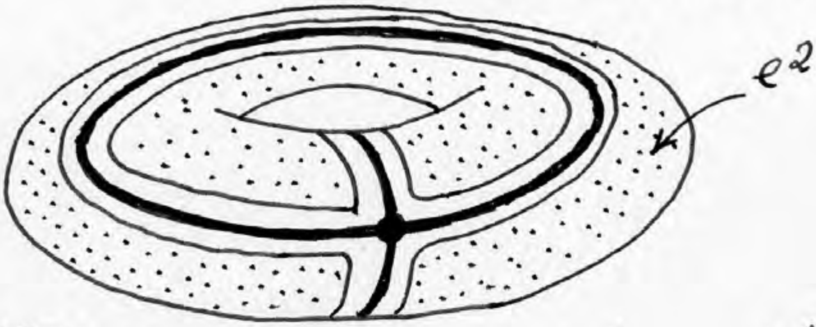


Все вершины W склеены в одну точку на M^2. Это и есть 0-мерная клетка e^0. Все 1-мерные клетки образуют "петли" на M^2. А сам многоугольник W и есть клетка e^2.

• Как приклеив. граница клетки e^2 к 1-мерным клеткам? Рассм., например, тор $T^2 \simeq aba^{-1}b^{-1}$.



Запишем условно обход границы клетки e^2 по 1-мерн. клеткам:
$\partial e^2 = a + \text{в} - a - \text{в}$. Знак указывает на согласование или рассогласование ориентаций. Вскоре мы придадим знакам $\pm$ топологический смысл.

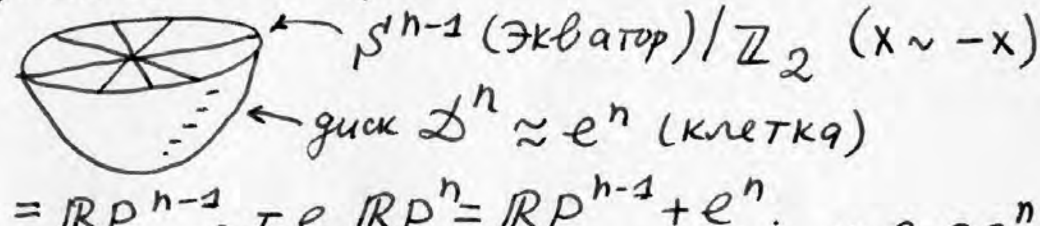


• <u>Теор.</u> $\mathbb{R}P^n = e^0 + e^1 + \dots + e^i + \dots + e^n$; $\mathbb{C}P^n = e^0 + e^2 + e^4 + \dots + e^{2n}$. в каждой размерности ровно по 1 клетке.

• <u>Д-во.</u> <u>Лемма</u>: $\mathbb{R}P^n = e^n + \mathbb{R}P^{n-1}$. Отсюда, очевидно, следует теорема.

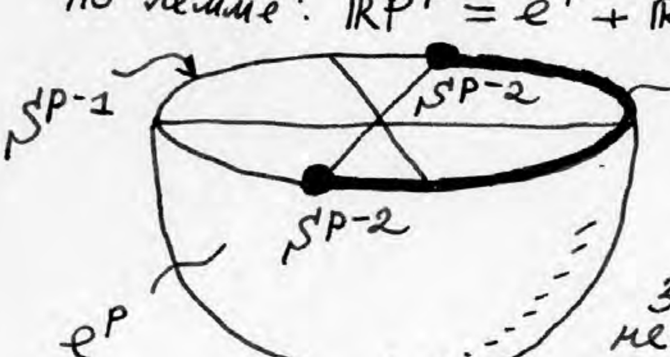
• $\mathbb{R}P^n = \{\lambda(x^0, x^1, \dots x^n), \lambda \neq 0, \exists x^i \neq 0\}$.
Рассм. уравнение $(X^n = 0)$. т.е. $\{\lambda(x^0, \dots, x^{n-1}, 0), \lambda \neq 0, \exists x^i \neq 0\}$
это, очевидно, $\mathbb{R}P^{n-1}$ (по определ.). Тогда:
$\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1} = \{\lambda(x^0, \dots, x^n), \lambda \neq 0, x^n \neq 0\}$ = карта A_n.
Выше мы доказали, что карта A_n гомеом. $\mathbb{R}^n$, т.е. откр. шару $D^n \approx e^n$ (клетка). Итак: $\mathbb{R}P^n \setminus \mathbb{R}P^{n-1} = e^n$.
Лемма (и теор.) доказана.

• Другое д-во, более геометрическое. Одна из моделей $\mathbb{R}P^n$ – это



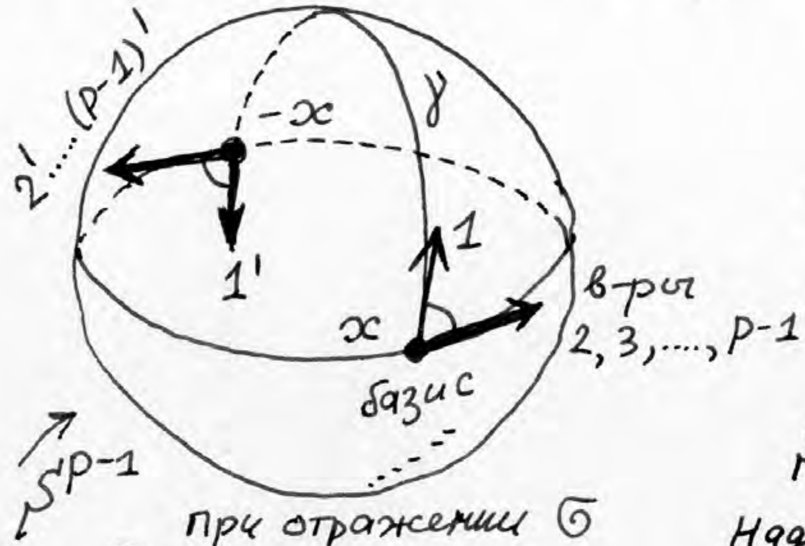
а $S^{n-1}/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^{n-1}$, т.е. $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} + e^n$.

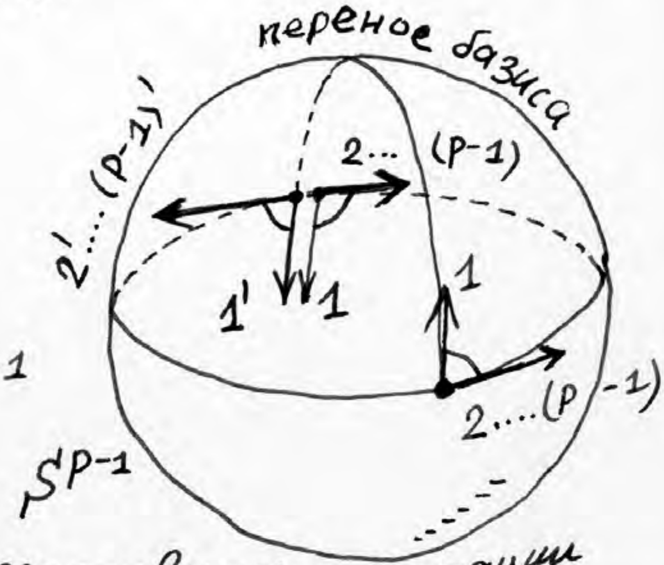
• Как устроен "граничный оператор" (граница) ∂e^p в $\mathbb{R}P^n$?
По лемме: $\mathbb{R}P^p = e^p + \mathbb{R}P^{p-1}$. Граница шара D^p, т.е. сфера S^{p-1} два раза проходит по клетке e^{p-1}.



Поэтому условно можно написать, что $\partial e^p = e^{p-1} \pm e^{p-1}$, где знак показывает совпадение или несовпадение ориентаций S^{p-1} и e^{p-1}.
Найдем знак.

Рассм. инволюцию $\sigma: S^{p-1} \to S^{p-1}$, где $\sigma(x) = -x$. Отражение относит. центра сферы.





при отражении σ базис $1, 2, \ldots (p-1)$ в точке x переходит в базис $1', 2', \ldots, (p-1)'$ в точке $-x$.

Надо сравнить ориентации базисов $1, 2 \ldots (p-1)$ и $1', 2', \ldots (p-1)'$ на сфере S^{p-1}. Для этого "протащим" базис $1, 2, \ldots (p-1)$ вдоль меридиана γ чтобы перенести его в точку $-x$. См. рис. справа. Видно:
$(1, 2, \ldots (p-1)) \to (1', -2', \ldots, -(p-1)')$. т.е. их ориентации определяются знаком $(-1)^{p-2} = (-1)^p$.

- итак: $\partial e^p = e^{p-1} + (-1)^p e^{p-1} = (1 + (-1)^p) e^{p-1}$.

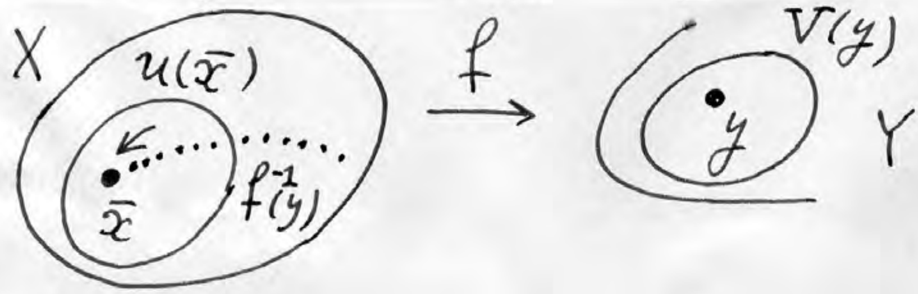
т.е. $\partial e^p = 2e^{p-1}$ при p четн. и $\partial e^p = 0$ при p нечетн.

- Вскоре мы формализуем понятие границы клетки и эти подсчеты приобретут алгебраический смысл. Для этого потребуется понятие степени отображения.

- Регулярные и критические точки (и значения) гладких отображений.
  $f: X^n \to Y^n$ — гладкое отобр. Тогда $df: T_x X \to T_y Y$, где $y = f(x)$. $df = (\partial y^i / \partial x^j)$ — матр. Якоби ($\equiv$ дифференциал).
- Опред. Точка $x \in X$ называв. регулярной (= правильной, "хорошей"), если ранг $(df) = n$, т.е. $\det(df(x)) \neq 0$. В противном случае, x — критическая ("плохая") точка.
- Опред. Точка $y \in Y$ называв. регулярным ("хорошим") значением для f, если все точки полного прообраза $f^{-1}(y)$ регулярны (в X), или если $f^{-1}(y) = \emptyset$ (пуст).
- По теореме Сарда регулярные значения заполняют мн-во полной меры в Y, т.е. почти все $y \in Y$ — регулярные значен.

• **Лемма**. Пусть X^n — глад. и компактно. Тогда полн. прообраз $f^{-1}(y)$ регуляр. значения $y \in Y^n$ состоит из конечного мн-ва точек.

Д-во. Допустим против. Тогда в компактном X $\exists$ точка $\bar{x}$ накопления ∞ числа точек из $f^{-1}(y)$. Но тогда в силу непрерыв. f имеем: $f(\bar{x}) = y$, т.е. $\bar{x} \in f^{-1}(y)$, а тогда $\bar{x}$ — регулярная точка. По теор. о неявн. ф-ях локально f около точки $\bar{x}$ — диффеоморфизм: $f: U(\bar{x}) \to V(y)$. Противоречие: т.к. сколь угодно близко от $\bar{x}$ есть точки из $f^{-1}(y)$. Лем. доказ.



• Определ. степени $\deg f$ для $f: X \to Y$. Пусть оба: X и Y — ориентируемы, связны, а X — компактно. Пусть y — регуляр. знач. для f в Y (такие $\exists$). Рассмот. положит. ориент. репер $e(y)$ в $T_y Y$. Пусть $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_N\}$, $N < \infty$ — полный прообраз. Тогда $df: T_{x_i} X \to T_y Y$ явл. линейным изоморфизмом, т.к. ранг $df|_{x_i} = n$. Пусть $e(x_i) = (df)^{-1} e(y)$ — индуциров. базис в точке x_i с ориентац., индуцир. ориент. базиса $e(y)$. Сравним ориент. $e(x_i)$ с ориентац. X. Пусть $\varepsilon_i = \pm 1$, где $\varepsilon_i = +1$, если эти ориент. совпали, и $\varepsilon_i = -1$, если не совпали.

• **Опред**. Степенью $\deg_y f$ гладк. отобр. f относит. регул. точки $y \in Y$ назыв. число: $\sum\limits_{\{x_i\}} \varepsilon_i$, где $\{x_i\} = f^{-1}(y)$.

Т.е. $\deg_y f = \sum\limits_{\{x_i\}} \operatorname{sign}(\det df|_{x_i}) \in \mathbb{Z}$.

• <u>Теор.</u> (д-во – в нашем обязат. курсе дифф. геом. и топол. См. также Мищен. Фомен. Краткий курс ...., стр. 272 (М., URSS, 2016).

1) $\deg_y f$ не зависит от выбора регуляр. знач. $y \in Y$.

2) Если $f, g : X \to Y$ гладко гомотопны, то $\deg f = \deg g$.

• Степень f можно опред. и для <u>непрерыв.</u> отобр. <u>гладких</u> $X \to Y$.

<u>Теор.</u> (без д-ва). $\forall$ непрер. отобр. f гладк. X в глад. Y можно сколь угодно близко аппроксим. гладким $\tilde{f} : X \to Y$. При этом, f и $\tilde{f}$ непрер. гомотопны.

Если $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ – две близкие к f его гладкие аппроксим., то $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ – <u>гладко</u> гомотопны.

<u>Опред.</u> За степень $\deg f$ непрер. отоб. $f : X \to Y$ возьмем $\deg \tilde{f}$ любой его близкой гладкой аппроксимации. Ясно, что это определ. корректно.

Перестройки двумер. торов, возникающие в симплектической геом. См. далее.