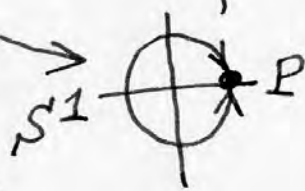
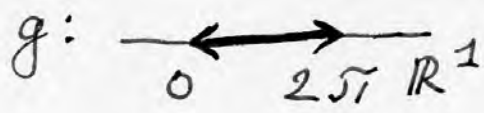
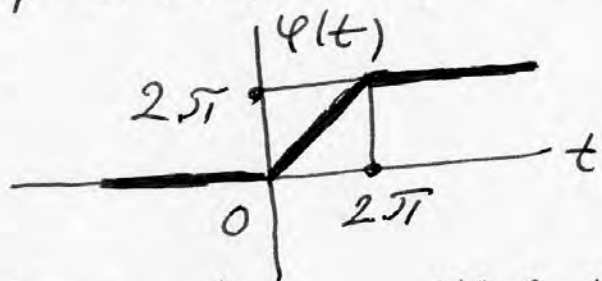


• Теор. (Уитни). Любое гладкое связное многообразие, заданное с помощью гладкого атласа (т.е. "абстрактно") допускает гладкое вложение в некоторое конечномерное \mathbb{R}^N , $N < \infty$ (т.е. реализ. как гладк. поверхн. в \mathbb{R}^N).

• З-во. Докажем для компактного M^n (для простоты). Сначала — технич. лемма.

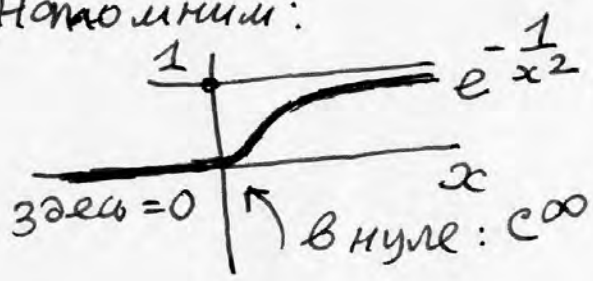
Пусть $D^n \subset \mathbb{R}^n$ — станд. шар (диск). Э гладк. отображ. $h: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$, при котором $h: D^n \rightarrow S^n \setminus P$ является диффеом. (где P — точка, напр. северн. полюс сферы); а $h: \mathbb{R}^n \setminus D^n \rightarrow P$, т.е. все дополн. к шару отобр. в точку P .
З-во. Пусть $n=1$. Строим $h: \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$. Сначала:

$$g: \begin{cases} x = \cos \varphi(t) \\ y = \sin \varphi(t) \end{cases} \text{ где:}$$



Но g не гладко в точках 0 и 2π . Здесь излом. Надо сгладить.

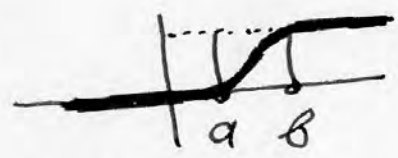
Напомним:



$$e^{\left(\frac{-1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2} \right)}$$

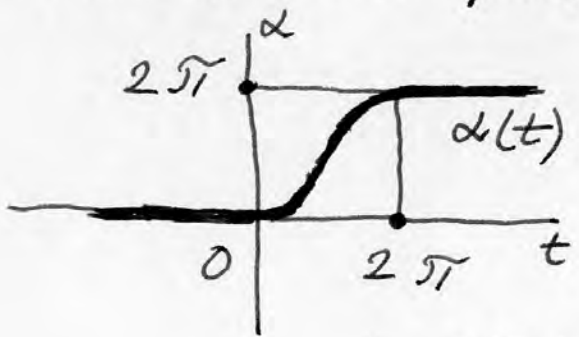


$$\lambda(x) = \int_0^x \rho(x) dx :$$



гладкая функ-я "склеивает" две постоянные.

• Аналогично строим гладкую функцию $\alpha(t)$:



Тогда искомое $h: \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ имеет вид:


$$h: \begin{cases} x = \cos \alpha(t) \\ y = \sin \alpha(t) \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

• лемма доказана.

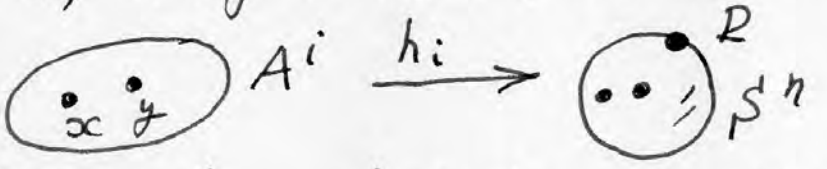
- В силу компактности M^n можно взять его конечное открытое покрытие: $M^n = \bigcup_{i=1}^k A_i$, где A_i гомеом. \mathcal{D}^n .
- Для $\forall A_i$ строим такую отображ. $h_i: M^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где $h_i: A_i \rightarrow \mathcal{D}^n$ явл. диффеоморфизмом, а все дополнит. к A_i отображ. в северн. полюс P сферы S^n :
 $h_i: M^n \setminus A_i \rightarrow P \in S^n$.
- Каждое h_i можно задать как вектор-ф-ю в \mathbb{R}^{n+1} :
 $h_i(x) = (y_i^1(x), \dots, y_i^{n+1}(x))$, где y_i^i - декарт. к-ты в \mathbb{R}^{n+1} .

• Теперь строим окончательное $h: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$:

$h(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x)) \in \mathbb{R}^{k(n+1)}$, т.е. $N = k(n+1)$.

- Утв. Отобр. h явл. погружением M^n в \mathbb{R}^N .
до-во. матр. Якоби (дифференциал) dh имеет вид:
 $dh = (dh_1, \dots, dh_k)$, где $dh_i(x)$ - матр. Якоби h_i .
 Тогда $\text{rang } dh(x) = n (= \max)$, т.к. точка x попадает в какую-то карту A_i :  A_i а тогда $h_i: x \rightarrow S^n \setminus P$ и явл. диффеом. локально около x , а тогда $\text{rang } dh_i(x) = n$, а тогда и $\text{rang } dh(x) = n$, т.к. $dh_i(x)$ - это "часть" матрицы $dh(x)$.

- Утв. Если $x \neq y$, то $h(x) \neq h(y)$, т.е. h -вложение.



$h(x) = (\dots h_i(x) \dots)$ но: $h_i(x) \neq h_i(y)$, т.к.
 $h(y) = (\dots h_i(y) \dots)$ обе эти точки $\in S^n \setminus P$,
 где h_i - диффеом.

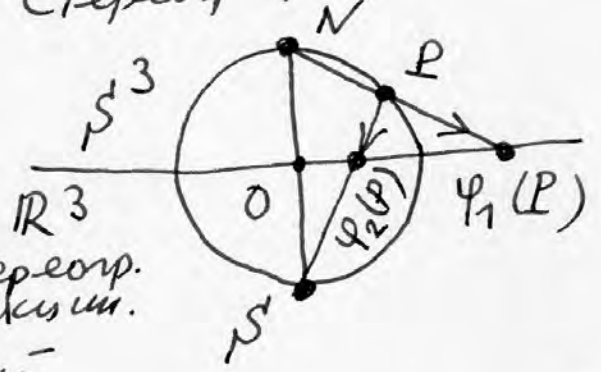
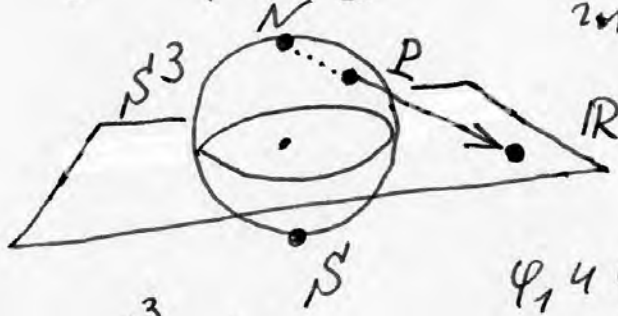
- б) точки x и y "далеки", т.е. \exists карта A_i , так что:
 $x \in A_i, y \notin A_i$, т.е. $y \in M \setminus A_i$. Тогда:
 $h(x) = (\dots h_i(x) \dots)$ здесь $h_i(x) \neq P$, т.к.
 $h(y) = (\dots P \dots)$ $h_i(y) \in S^n \setminus P$.

• Теор. Уитни доказана.

• Кратко о 3-мерн. мног. Классифик. 3-мерн. мног. - нерешенн. и популярн. проблема. "Список" кодов всех $\{M^3\}$ известен (см. ниже), но в нем каждое мног. M^3 представлено множеством "кодов". И алгоритмически различна - когда два "кода" задают одно и то же мног. (или - разные мног.) - пока не удастся.

• Примеры 3-мног.

• 1. Сфера S^3 : $x_1^2 + \dots + x_4^2 = 1$ в \mathbb{R}^4 . Тогда $S^3 = A_1 \cup A_2$, где $A_1 \approx A_2 \approx D^3$ и функция клейки этого атласа - таджая. Стереогр. проекция:



$A_1 = S^3 \setminus N$
 $A_2 = S^3 \setminus P$

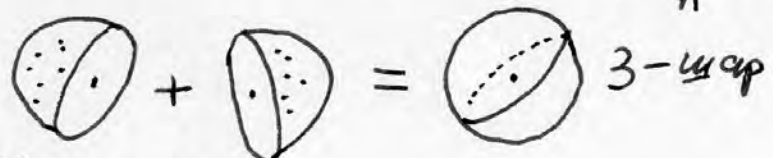
Ψ_1 и Ψ_2 - стереогр. проекции.
 ф-я перехода Ψ_{12} - таджая. (докажите).

- $\mathbb{R}P^3$ (проект. пр-во) - таджое. 2-во - позже. сразу $\mathbb{R}P^n$.
- $M^2 \times S^1$. Вообще, если M^m и N^n - таджк. мног., то $M \times N$ - таджк. мног. $\dim = m + n$.

• Теор. о строении произвол. компакт. таджк. связн. 3-мног. D -во дадим позже. Рассм. в \mathbb{R}^3 два экземпл.
 $M^2 = S^2 + g$ (ручек):



и рассм. их "заполнения", т.е. ориентируемые или в \mathbb{R}^3 3-мног. Π_1 и Π_2 , т.е. $\partial \Pi_1 = M_1$, $\partial \Pi_2 = M_2$. Пусть $h: M_1 \rightarrow M_2$ - произвол. диффеом. M_1 на M_2 . Склеим Π_1 и Π_2 по этому диффеом. их грани. Получим 3-мног. $Q^3 = \Pi_1 \cup_h \Pi_2$, таджк. компакт. без края.



две половинки шара

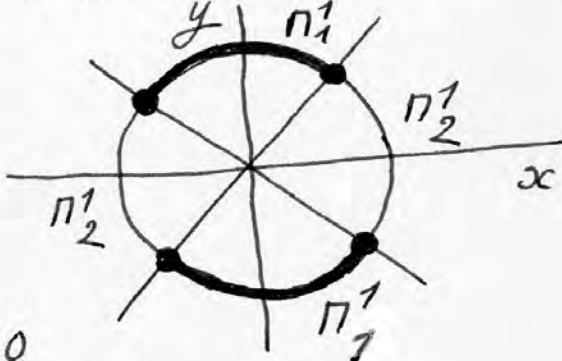
• Теор. (∂-во потоки). ∇ макс. комп. связн. замкн. 3-многог. Q^3 можно представить в виде $\pi_1 \cup_h \pi_2$ для некоторого $g \geq 0$ и дифф. $h: M_1 \rightarrow M_2$, где $M_1 \approx M_2 \approx S^2 + g$ (ручек).

• Важн. пример. Теор. сфера $S^3 = (\text{полноторие}) \cup_h (\text{полноторие})$. Полноторие — это заполн. тор T^2 в \mathbb{R}^3 , т.е.

$S^1 \times D^2$:



• Начнем с нашей аналогии:



$S^1 \subset \mathbb{R}^2(x, y)$. $S^1 = (x^2 + y^2 = 1)$.

Рассм. "конус": $|x| = |y|$ на \mathbb{R}^2 . Это — две прямые (биссект.)

• Пересечем этот конус K с S^1 :

$K \cap S^1 = \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ |x| = |y| \end{cases} = \bullet \bullet = S^0 \times S^0$.

Тогда $S^1 = \pi_1^1 \cup \pi_2^1 = \underbrace{(|x| \leq |y|)}_{S^0 \times D^1} \cup \underbrace{(|x| \geq |y|)}_{S^0 \times D^1} = (S^0 \times D^1) \cup (S^0 \times D^1)$.

А теперь рассм. $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Аналог.

• $S^3 \subset \mathbb{R}^4(x, y, u, v) = \mathbb{C}^2(z, w)$, где $z = x + iy, w = u + iv$.

$S^3 = (|z|^2 + |w|^2 = 1) = (x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1)$.

Рассм. конус K^3 в \mathbb{R}^4 : $K = (|z| = |w|): x^2 + y^2 = u^2 + v^2$.

Пересечем K со сферой S^3 :

$(|z|^2 + |w|^2 = 1; |z| = |w|) \Leftrightarrow |z| = |w| = 1/\sqrt{2}$. И так:

• $K \cap S^3 = (z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, w = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\psi}) = T^2 = S^1(\varphi) \times S^1(\psi)$. тор

Тогда S^3 есть объединение двух 3-многог. с краем:

$S^3 = (|z| \leq |w|) \cup (|z| \geq |w|) = \pi_1^3 \cup \pi_2^3$.

Здесь $\pi_1 = (|z|^2 + |w|^2 = 1; |z| \leq |w|)$;

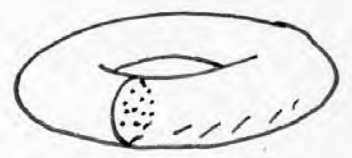
$\pi_2 = (|z|^2 + |w|^2 = 1; |z| \geq |w|)$.

• Тогда $\pi_1 \approx \pi_2 = \text{полноторие}$, т.е. $S^1 \times D^2$. В самом деле:

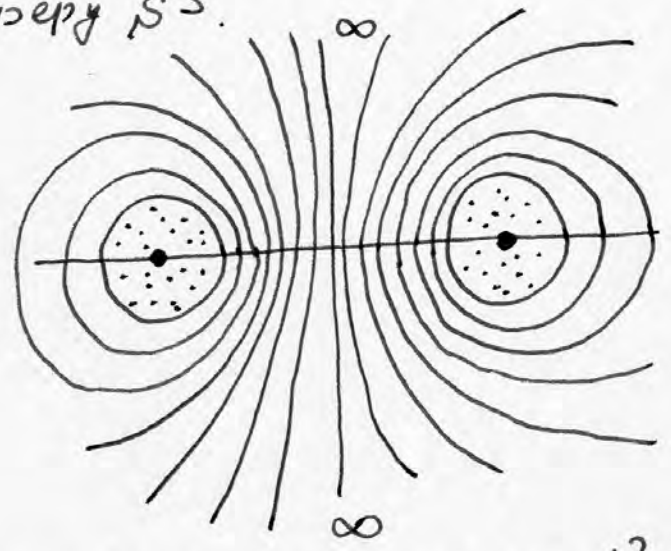
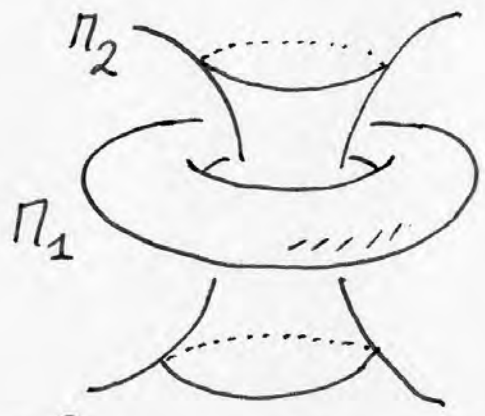
на сфере $z = r e^{i\varphi}, w = \sqrt{1-r^2} e^{i\psi}$; в многообр. π_1 :

$|z| \leq |w| \Leftrightarrow r^2 \leq 1-r^2$, т.е. $r \leq 1/\sqrt{2}$, а (φ, ψ) -произв.

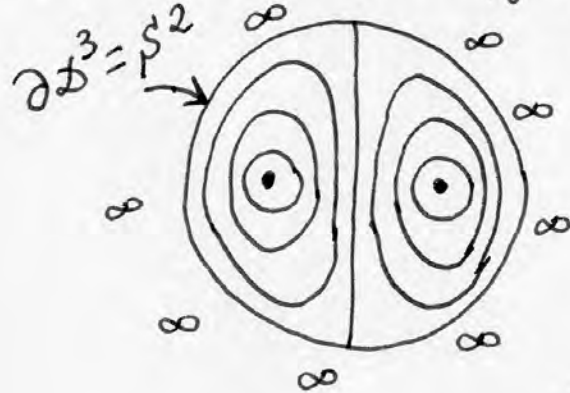
Это и есть полноторие:



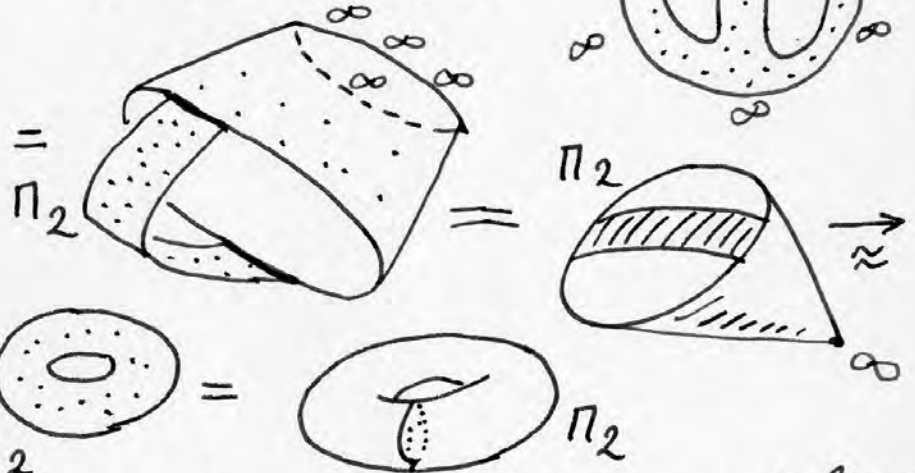
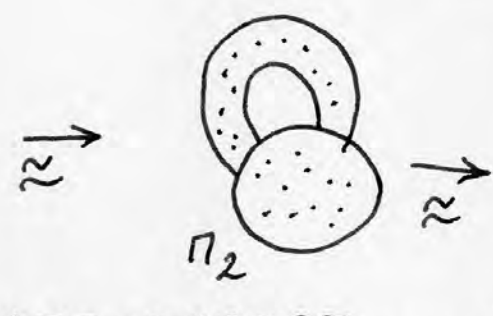
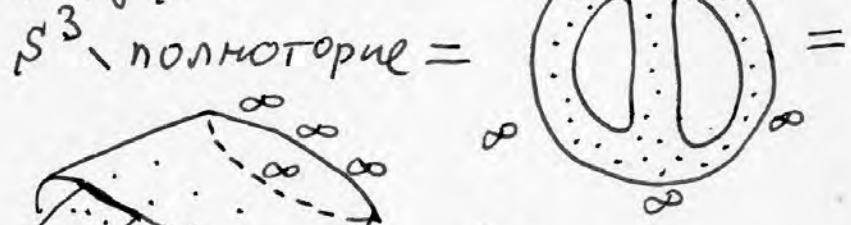
- И так: $S^3 = \Pi_1 \cup_h \Pi_2 =$ склейка двух полноторий. как они склеены по их границе? Рассм. инволюцию $\sigma: S^3 \rightarrow S^3$, где $\sigma(z, w) = (w, z)$. Тогда $\sigma \Pi_1 = \Pi_2$ и $\sigma \Pi_2 = \Pi_1$ т.е. полнотория Π_1 и Π_2 меняются местами. Т.е. на границе тора меняются местами параллель и меридиан.
 $\sigma: T^2 \rightarrow T^2$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: $\begin{cases} \text{паралл.} \rightarrow \text{мерид.} \\ \text{мерид.} \rightarrow -\text{паралл.} \end{cases}$
- Натянутое изображ. в \mathbb{R}^3 , пополненом ∞ , т.е. ∞ удаленной точкой, что и дает сферу S^3 .



- \mathbb{R}^3 полем. 3-шару D^3



отождествляя граничн. сферу S^2 в точку, получаем 4-шару D^4 сферу S^3 .



- с этим разбиением сферы в сумму двух полноторий связано т.н. расслоение Хопфа: $p: S^3 \rightarrow S^2$ со слоем S^1 .

$$S^3 = \{ |z|^2 + |w|^2 = 1 \} \subset \mathbb{C}^2(z, w).$$

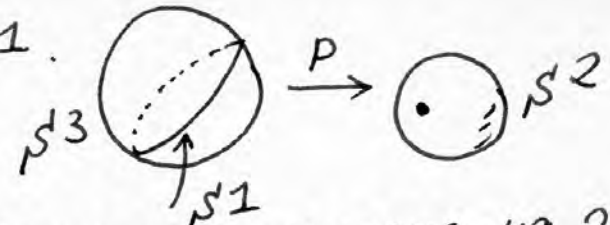
$$p(z, w) = z/w = \tilde{\gamma} \in \mathbb{C}^1 \cup \infty = \mathbb{R}^2 \cup \infty = S^2.$$

при проекции p в одну точку переходят точки вида:

$$(e^{i\psi} z, e^{i\psi} w) \rightarrow \tilde{\gamma} = z/w$$

т.е. точки окружности S^1 .

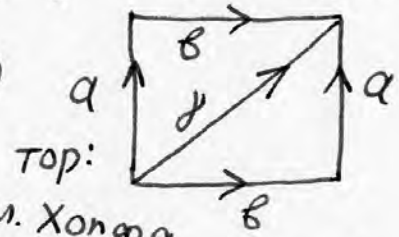
$$\bar{p}^{-1}(z) = (e^{i\varphi} z, e^{i\psi} w)$$



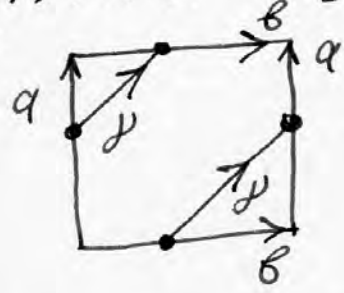
- $S^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$, где каждое полноторие расслоено на 2-тора, стягивающиеся на осьную окружность. Каждый из этих 2-торов расслоен на окружности, являющиеся слоями расслоения Хопфа. И эти окружности на 2-торе являются траекториями типа (1,1), т.е. 1 раз обходят параллель и 1 раз - меридиан тора:



γ -слой рассл. Хопфа



тор:



- Пример многомер. глад. мног. Теор. Проект. пр-ва $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ - гладк. многообразия.

о-во. $\mathbb{R}P^n = \bigstar_{\mathbb{R}^{n+1}} \ell \cong \ell = \{ \lambda(x^1, \dots, x^{n+1}) \mid \lambda \neq 0 \text{ и } \exists x^i \neq 0 \}$.

Атлас на $\mathbb{R}P^n$ имеет вид: $\mathbb{R}P^n = A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$, где локал. карта $A_i = \{ \ell : x^i \neq 0 \}$, координатн. отображ.

$\varphi_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет вид:

$$\varphi_i : \lambda(x^1, \dots, x^{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) \in \mathbb{R} \left(\hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \hat{\alpha}_{n+1} \right)$$

здесь: $\alpha_k = x^k / x^i$, при $k \neq i$. Ясно, что $\varphi_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм

- Функции склейки на $A_i \cap A_j = \{ \ell(x^i \neq 0, x^j \neq 0) \}$.

пусть $A_i(\alpha_k, k \neq i)$ и $A_j(\beta_k, k \neq j)$.

тогда на пересечении:

$$\beta_k = x^k / x^j, k \neq j \text{ и } \alpha_k = x^k / x^i, k \neq i, \text{ отсюда:}$$

$$\alpha_k = \frac{x^k / x^j}{x^i / x^j} = \frac{\beta_k}{\beta_i}; \quad \alpha_j = \frac{x^j / x^i}{x^j / x^j} = 1 / \beta_i$$

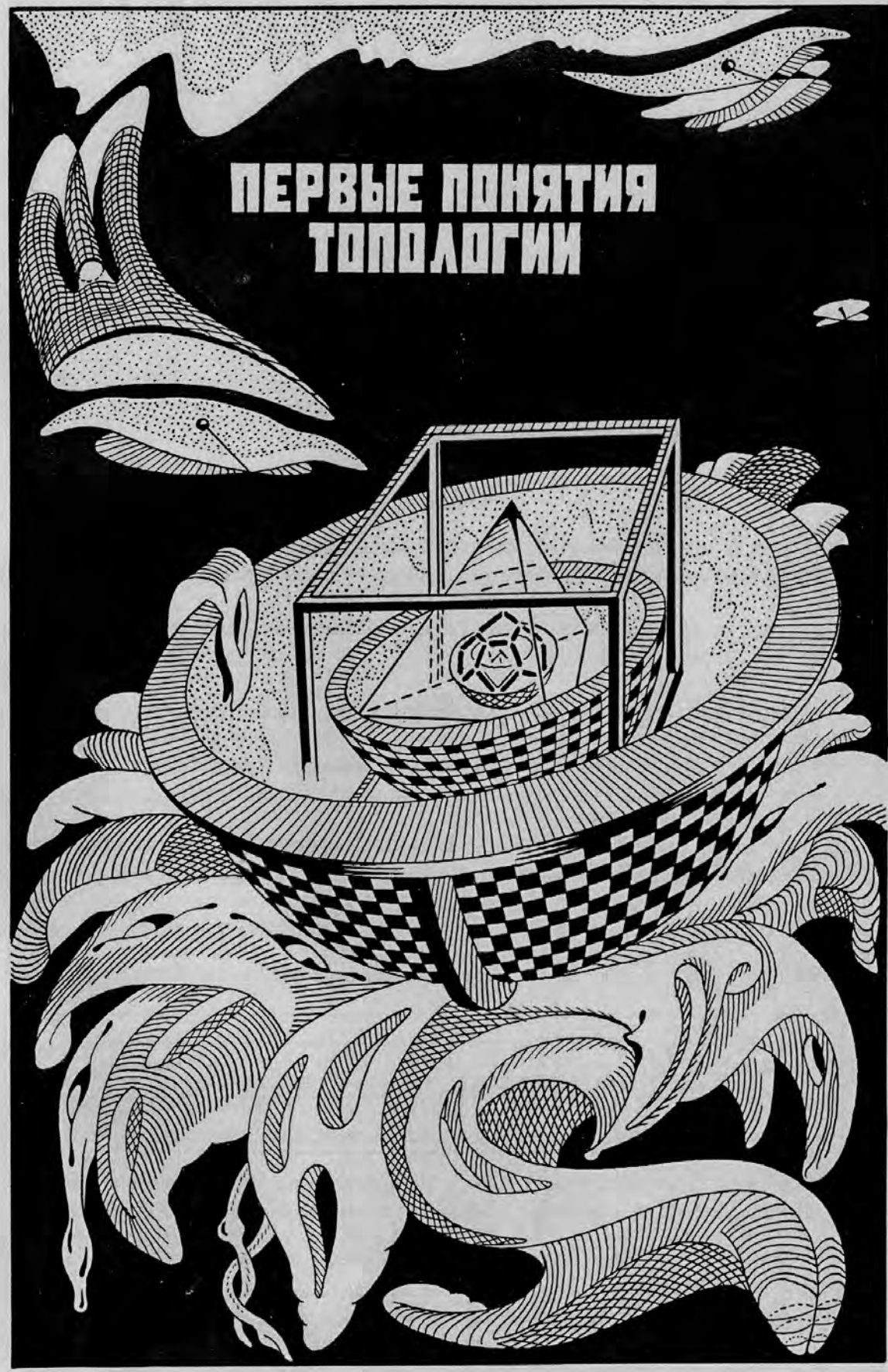
Все эти функции гладкие и даже веществ. аналитич.

- Аналогично - для $\mathbb{C}P^n$. При этом $\mathbb{C}P^n$ всегда ориентир., а $\mathbb{R}P^n$ - ориентир. при n -нечет. и неориент. при n -четнош. докажем далее.

- Проблема алгоритмиз. классиф. n -мерн. гладк. мног. (без о-ва). • При $n=1$ классиф. есть. При $n=2$ тоже есть: см. теорему выше. При $n=3$ - ? неизвестно.

Налимая с $n=4$ (и выше) проблема классиф. мажк. инот. M^n (с точн. до диффеом. или гомеомф.) алгоритмически неразрешима (А.А. Марков). И так:

n	1	2	3	4	5	6	7
	+	+	?	-	-	-	-



ПЕРВЫЕ ПОНЯТИЯ ТОПОЛОГИИ