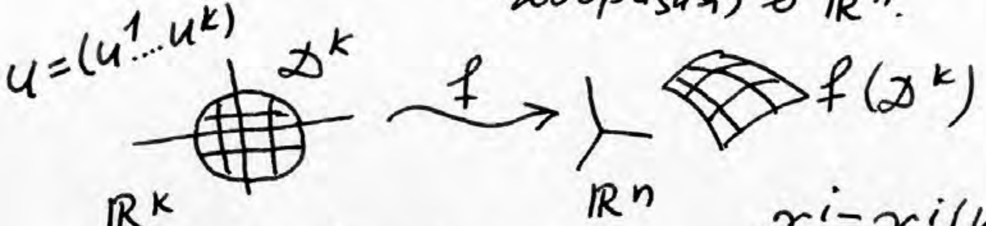
• Следующ. шаг. Многомерные k-мерн. поверхн. (мног.) $M^k \subset \mathbb{R}^n$. а) локальные k-мерн. многооб. (подмногообразия) в $\mathbb{R}^n$.



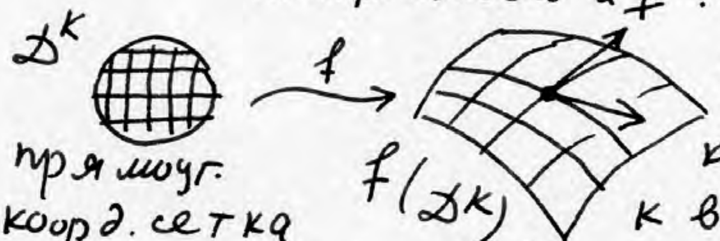
$f: D^k(u^1, \dots, u^k) \to (x^1, \dots, x^n)$, т.е.

$x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$, $1 \le i \le n$

1) f – гладко (C^∞) и задает гомеоморфизм D^k на образ $f(D^k)$

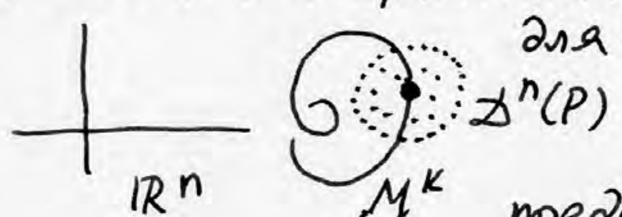
2) ранг $(df) = k$ ($=\max$), т.е. ранг $\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right) = k$

матр. Якоби df: $k \times n$ (размер)



криволин. коорд. сетка.
координат. линии
k векторов скоростей: $a_1, \dots, a_k$
все они линей. незав. т.к. ранг $= k$

б) Глобал. k-мерн. мног. (поверхн.) в $\mathbb{R}^n$.



для $\forall$ точки $P \in M$ $\exists$ шар (окрест.) $D^n(P)$ в $\mathbb{R}^n$ такой, что: $D^n(P) \cap M^k$ = допускает представление в виде локальн. мног. (см. выше).

• Как и в $\dim = 2$ определено вложение и погружение многообразий.

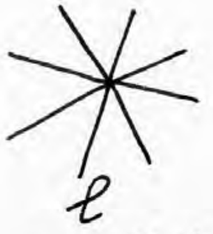
• Аналогич. опред. и k-мерное мног. с краем:

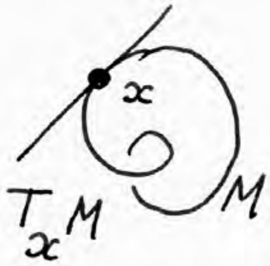
• Теор. (Уитни). "слабая".
пусть дано вложен. M^n в $\mathbb{R}^N$, $N < \infty$.
Тогда $\exists$ погружение $M^n \to \mathbb{R}^{2n}$ и
$\exists$ вложение $M^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$.

• Теор. (Уитни). "Сильная". Пусть M^n вложено в $\mathbb{R}^N$.
тогда $\exists$ погружение $M^n \to \mathbb{R}^{2n-1}$ и
(без д-ва). $\exists$ вложение $M^n \to \mathbb{R}^{2n}$, при $n > 1$.

• Докажем слабую теор. Уитни. Согласно нашему опред. мног. M^n, оно уже вложено в некоторое $\mathbb{R}^N$. Хотим понизить размерность вложения и погружения.

• Начнем с погружения.





<u>Идея</u>: берем прямую l в $\mathbb{R}^N$, берем ортогональную ей гиперплоскость $\mathbb{R}^{N-1}(l)$ и проектируем M^n вдоль направления l на $\mathbb{R}^{N-1}(l)$.

проекция: $P_l : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{N-1}(l)$.

$\mathbb{R}P^{N-1} = \{l\}$

пучок прямых l через точку O

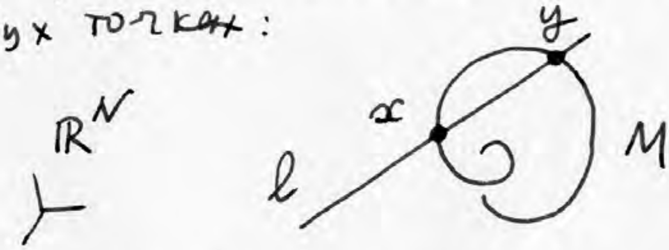
Хотим, чтобы P_l было погружением M^n в гиперплоскость. Т.е. чтобы матрица Якоби $d(P_l)$ не имела $\neq 0$ ядра на $\forall$ касат. плоскости T_xM. Т.е. чтобы $d(P_l)\,a \neq 0$ для $\forall$ $a \in T_xM$ и $a \neq 0$. Направление l можно менять. Надо выбрать "хорошую" прямую l.

- Для этого надо понять – какие прямые l – "плохие". Ясно, что направление (прямая) l является "плохим" $\Longleftrightarrow$ в некоторой точке $x \in M$ есть касательная прямая (из T_xM), параллельная l. А если рассматривать l с точн. до парал. сдвига, то, попросту, l касается M в точке $x \in M$. Итак, все "плохие" прямые l имеют вид: $(x, l(x))$, где $l(x) \in T_xM$. Все они образуют некоторое замкн. подмн-во L в $\mathbb{R}P^{N-1}$:

- Ясно, что $\dim L = 2n-1$, т.к. точка $x \in M$ задается n параметрами, а $l(x) \in T_xM$ задается $(n-1)$ параметр.
- По теор. Сарда если $\dim L < \dim \mathbb{R}P^{N-1}$, то мера L в $\mathbb{R}P^{N-1}$ равна нулю. Тогда дополнение к L в $\mathbb{R}P^{N-1}$ $\neq \varnothing$, т.е. найдется "хорошая" прямая l. Итак: если $\dim L = 2n-1 < N-1 = \dim \mathbb{R}P^{N-1}$, то берем любую "хорошую" l и проектируем M на гиперплоскость $\mathbb{R}^{N-1}(l)$, ортогон. l. Получаем погружение M^n в $\mathbb{R}^{N-1}$. Здесь ранг $dP_l = n$, т.е. $\operatorname{Ker}(dP_l) = 0$, а потому P_l явл. <u>локал.</u> диффеом. M^n на образ.
- Продолжаем такие проектирования, пока $2n-1 < q-1$. Последний шаг такой: $2n-1 < (2n+1)-1$.

На этом шаге M^n проектируется в $\mathbb{R}^{(2n+1)-1} = \mathbb{R}^{2n}$ и это — погружение. Мы построим погружение M^n в $\mathbb{R}^{2n}$.

- Первый пункт слаб. теор. Уитни доказан.
- Теперь — о вложении. Идея — та же. Однако к предыдущему надо добавить условие, что проекция P_ℓ не склеивает различные точки x и y из M. Значит к "плохим" прямым ℓ из предыдущ. пункта надо добавить все такие ℓ, что ℓ (рассматриваемая с точн. до паралл. переноса) протыкает M в двух точках:

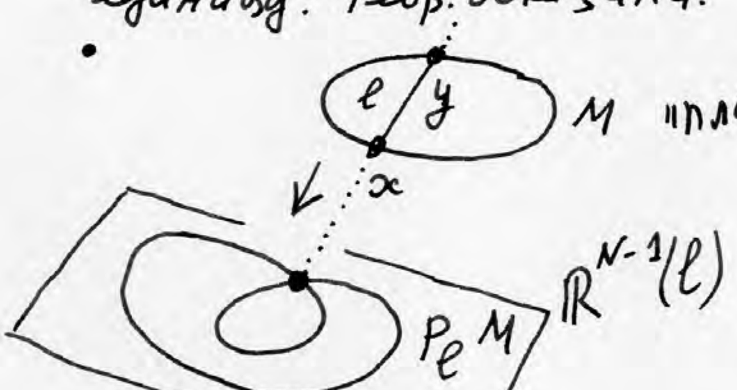


Такие "плохие" хорды образуют подмн-во $\mathcal{S}$ в $\mathbb{RP}^{N-1}$:

- Ясно, что $\dim \mathcal{S} = 2n$, т. к. каждая из точек $x, y \in M^n$ задается n параметрами (координатами).

Итак, пока $2n < N-1$, можно проектировать M^n в $\mathbb{R}^{N-1}$, и это будет вложением. Проектируем вдоль $\ell \in \mathbb{RP}^{N-1} \setminus (L \cup \mathcal{S})$, т.е. вдоль "хорошего" направл. ℓ.

- Последняя проекция будет $P_\ell : M^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$. Получаем вложение. Предыдущая оценка ухудшилась на единицу. Теор. доказана.
-



"плохое" направление $\ell(x, y)$.

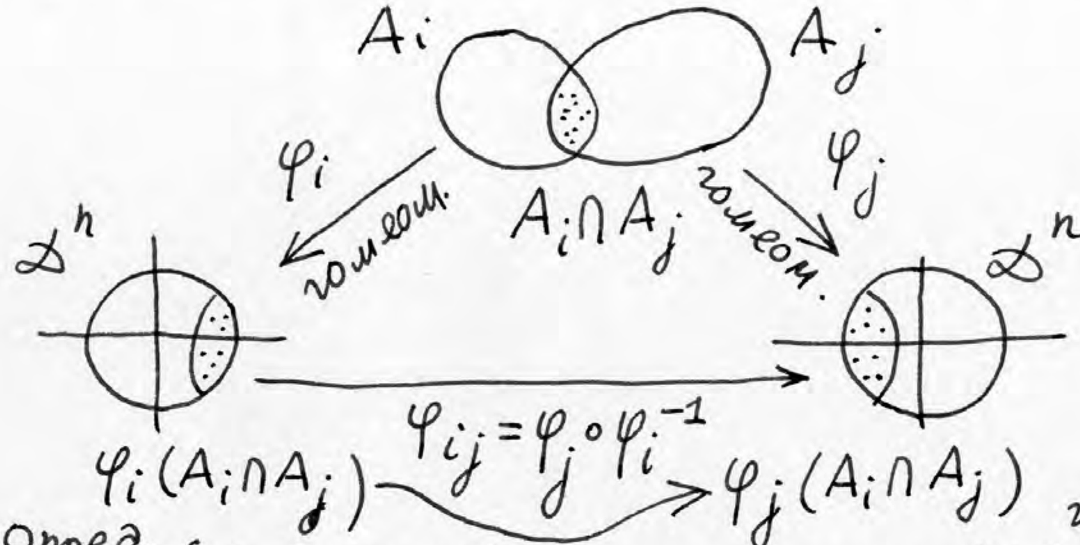
$\mathcal{S} = \{\ell(x,y),\ x, y \in M^n\}$.

$\dim \mathcal{S} = 2n$.

Точки x и y "бегают" по M^n независимо друг от друга.

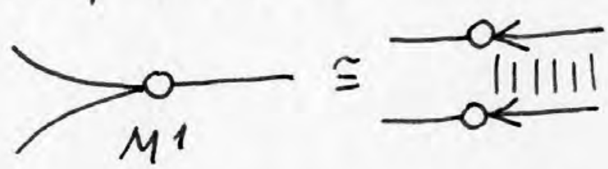
- Абстрактное опред. топологического и гладкого многоб. при помощи атласа. Без вложения в $\mathbb{R}^N$.
- Опред. Тополог. хаусдорфово пр-во X назыв. тополог. многообразием, если $X = \bigcup_i A_i$, где все A_i открыты в X и для каждого i задан гомеоморф. $\varphi_i : A_i \to D^n$, где D^n — диск (шар) в $\mathbb{R}^n$; n — одно и то же для всех i и назыв. размерностью X, $n = \dim X$.

- A_i назыв. локал. картами, φ_i – локал. координаты, а совокупность $\{(A_i, \varphi_i)\}$ – это атлас на X.
- Функции склейки или функции перехода данного атласа:



φ_{ij} – гомеом. как композиция гомеоморфизмов.

- Опред. $\{\varphi_{ij}\}$ назыв. функциями перехода (склейки) данного атласа.
- пример нехаусдорфова мног.



- Опред. Тополог. мног. назыв. гладким, если все функции перехода атласа явл. гладкими (C^∞). Аналогично определ. многообразия класса C^r, веществ.-аналит., компл.-аналит. (в терминах φ_{ij}).
- Теор. (без д-ва). Существуют тополог., но не гладкие мног. т.е. такие, на которых нельзя задать гладкого атласа.
- Теор. (без д-ва). $\exists$ гладкие мног-я, гомеоморфные, но не диффеоморфные. Пример: станд. сфера S^7 и мног. $M_k^7 \subset S^9$, которое задается так. $\mathbb{C}^5 = \mathbb{R}^{10} \supset S^9 = (|z_1|^2 + \ldots + |z_5|^2 = 1)$. Рассм. M_k^7 как пересечение сферы S^9 с поверхностью: $\{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0\}$. Здесь $k = 1, 2, \ldots, 28$. Получаются 28 гладких мног., среди которых есть и станд. сфера S^7. Все остальные 27 глад. мног. ей гомеоморфны, но не диффеоморфны (сферы Милнора).