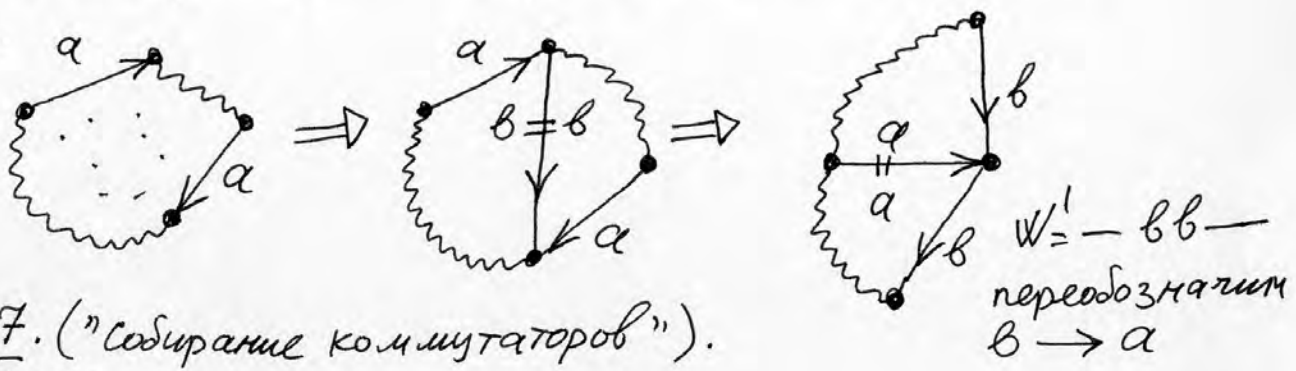


• Шаг 6. ("собираем квадраты"). лемма:

$$W = \text{---} a \text{---} a \text{---} \Rightarrow W' = \text{---} aa \text{---}$$

до-во.

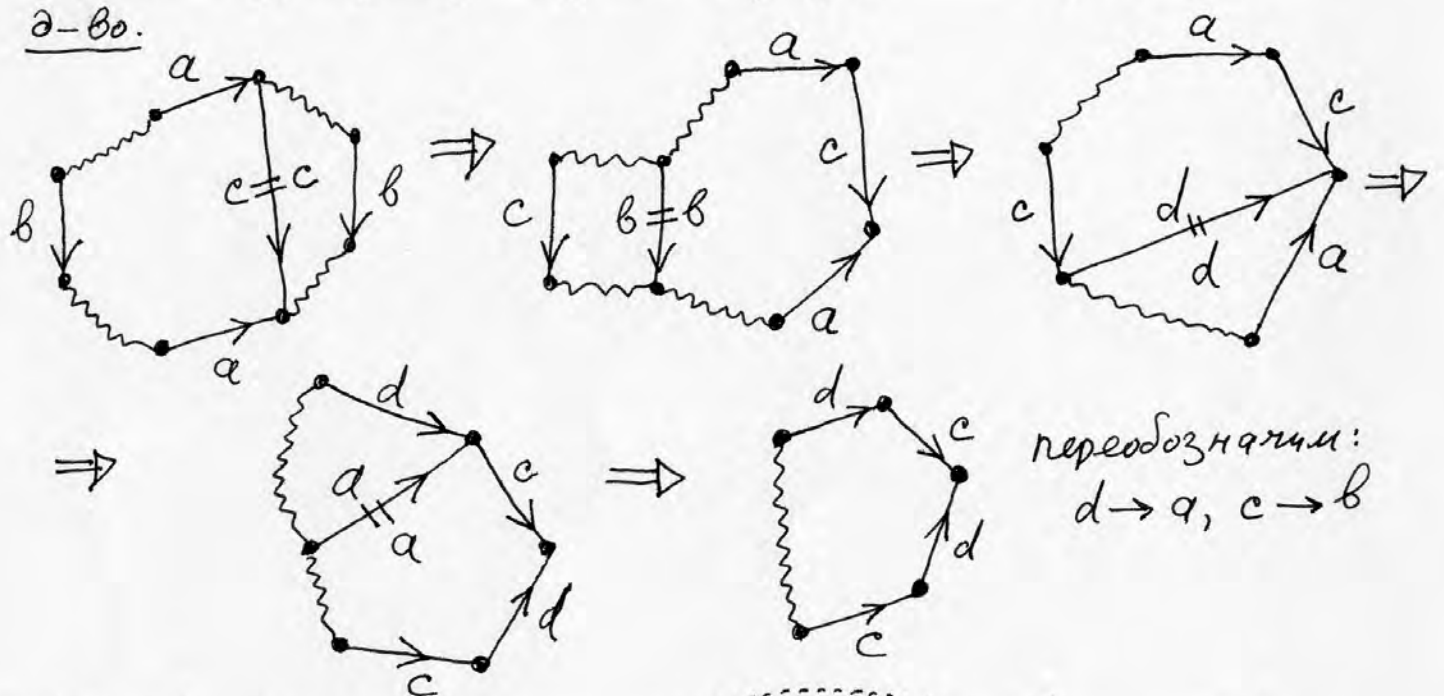


• Шаг 7. ("собираем коммутаторы").

лемма.

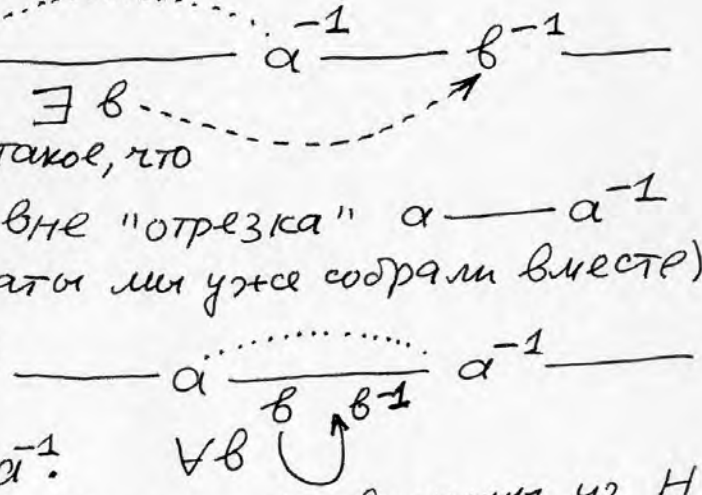
$$W = \text{---} a \text{---} b \text{---} a^{-1} \text{---} b^{-1} \text{---} \Rightarrow W' = \text{---} a b a^{-1} b^{-1} \text{---}$$

до-во.

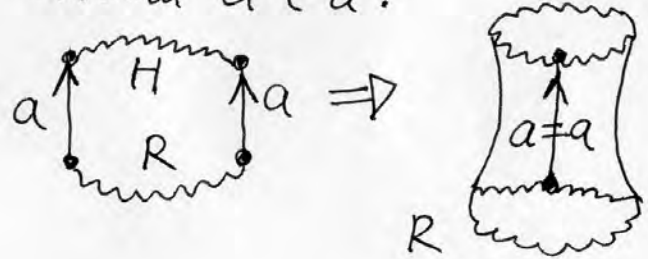


• Шаг 8. лемма. $W = \text{---} a \text{---} a^{-1} \text{---} \text{---} v^{-1} \text{---}$
 между $a \text{---} a^{-1}$
 $\exists v$ такое, что его
 дубликат v^{-1} расположен вне "отрезка" $a \text{---} a^{-1}$
 (именно v^{-1} , т.к. все квадраты мы уже собрали вместе).

до-во. Допуст. противное:



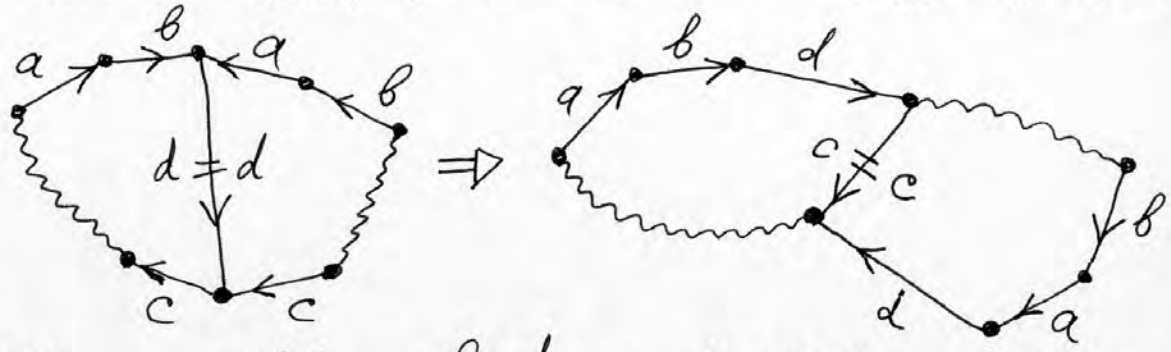
т.е. $\forall v$ между a и a^{-1} ,
 дубликат v^{-1} слова между a и a^{-1} .
 склеим a с a^{-1} :



Но тогда все вершины из H
 склеены с вершинами из H ,
 и все вершины из R склеены
 с вершинами из R . Т.е.
 возникают два класса разных
 вершин. А мы уже привели все
 к одной вершине. Противоречие.

Шаг 9. (нет сдвигающей сержи). В присутствии квадрата коммутатор превращается в 2 квадрата.

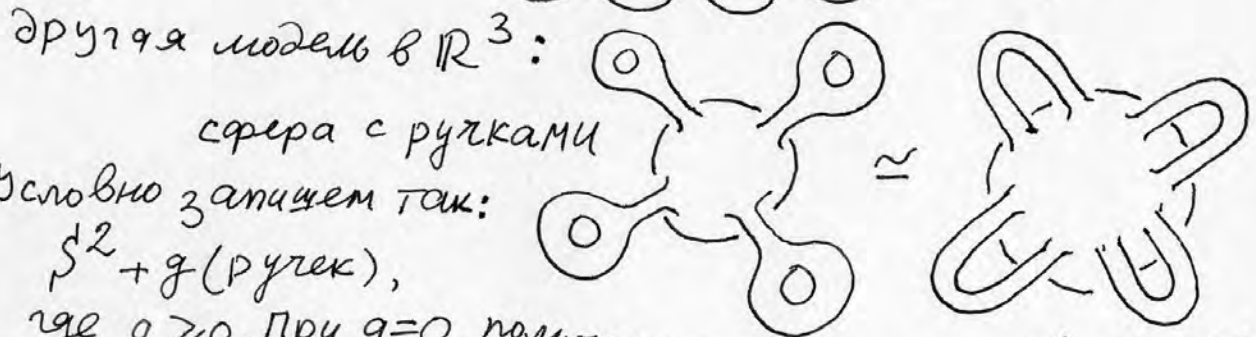
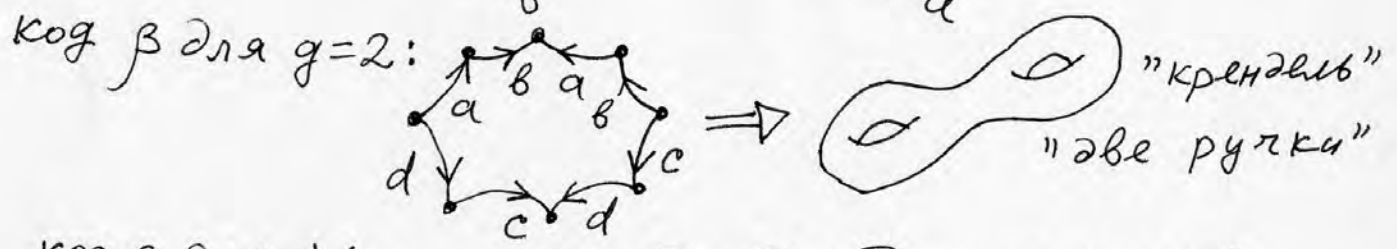
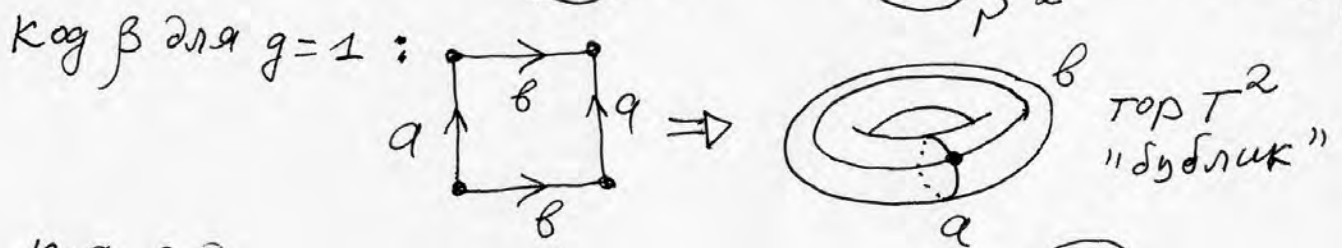
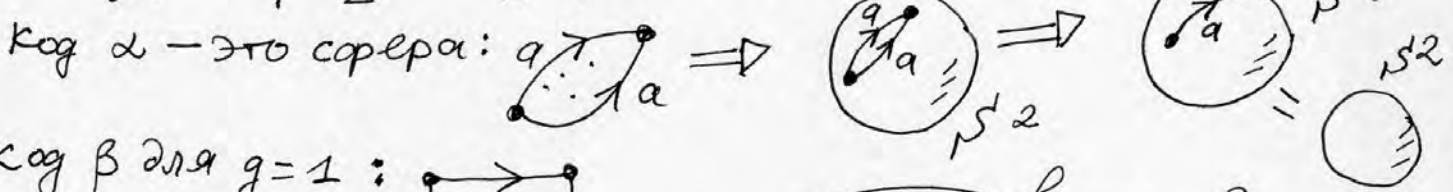
Лемма. $W = \text{---} a b a^{-1} b^{-1} \text{---} c c \text{---} \Rightarrow W' = \text{---} a^2 \text{---} b^2 \text{---} c^2 \text{---}$
 э-во.



получим: $\text{---} a b d \text{---} b a d \text{---}$ и теперь собираем вместе 3 квадрата: $\text{---} a^2 \text{---} b^2 \text{---} d^2 \text{---}$

Шаг 10. Мы доказали, что \exists три канонических кода:

- α) $a a^{-1}$
- β) $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, g > 0$
- γ) $c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2, k > 0.$



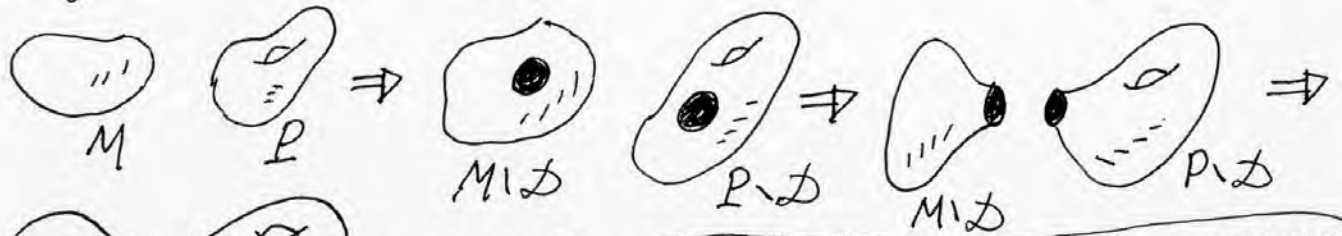
условно запишем так:
 $S^2 + g(\text{ручек}),$

где $g \geq 0$. При $g=0$ получится 2-сфера S^2 . Тем самым, мы объединяем в запись $S^2 + g(\text{ручек})$ оба кода: α и β.

Эту ∞ серию назовем "серией I". Как увидим далее, это - ориентируемые 2-многообразия.

• Другой подход к построению M^2 .

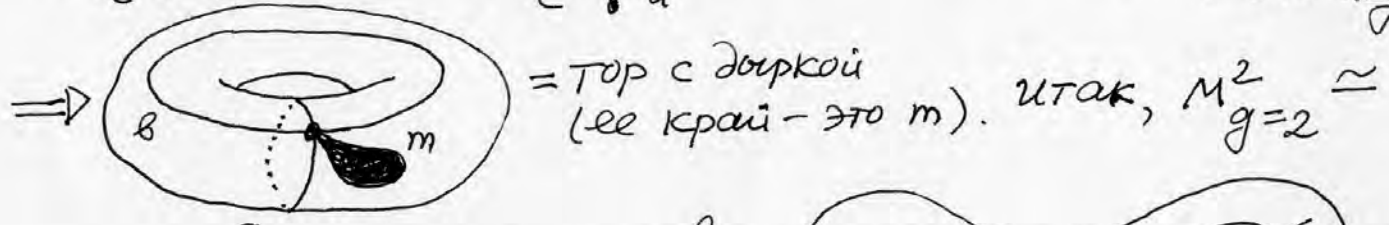
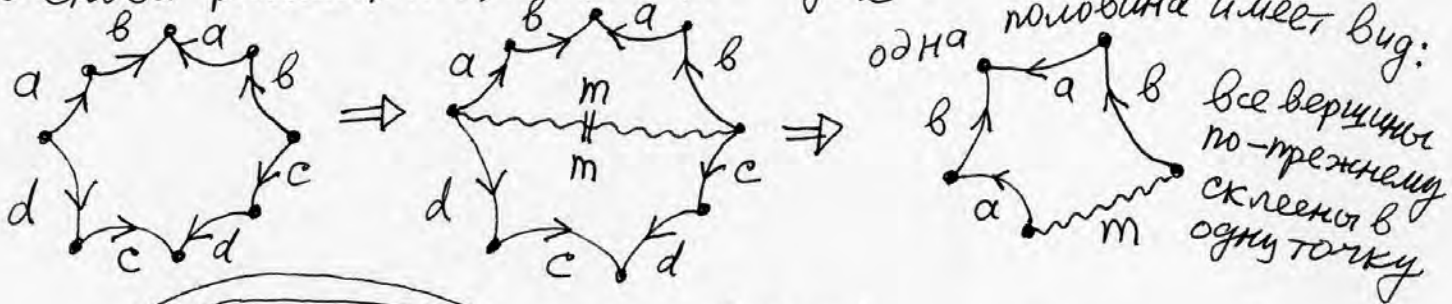
опред. (связная сумма). Пусть M и P — два ^{связных} многообр. рассм. $M \setminus D$ и $P \setminus D$, т.е. выберем из M и P по диску (шару). Получим два мног. с краем сфера. отождествим эти две граничные сферы при помощи гомеоморфизма. Полученное мног. назыв. связной суммой: $Q = M \# P$.



Утв. (связная сумма корректно определена)

• Утв. Если M и P — гладкие мног., то и $M \# P$ можно считать гладким.

• снова рассмотрим, например, $M^2_{g=2}$, т.е. крендель.



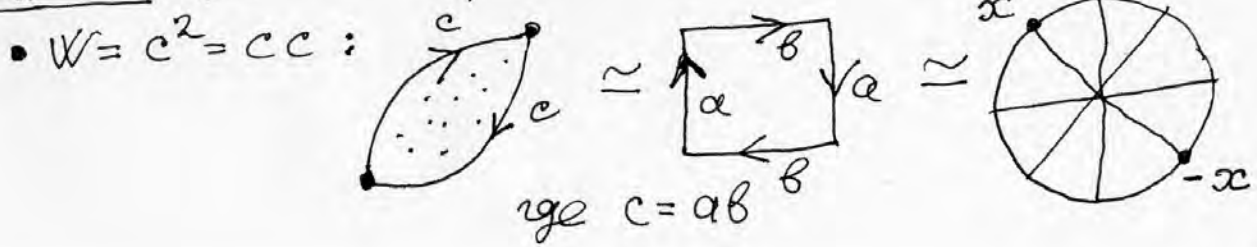
$\cong W = aba^{-1}b^{-1}cd^{-1}c^{-1}d^{-1}$ имеет вид:

\Rightarrow = крендель = $T^2 \# T^2$. т.е. $M^2_{g=2} = T^2 \# T^2$ (связн. сумма). А потому:

Теор. Многообразия M^2_g серии I имеют вид (при $g \geq 1$): $M^2_g = T^2 \# \dots \# T^2$ (g раз). Число $g \geq 1$ называется родом. Считаем, что при $g=0$ $M^2_{g=0}$ гомеом. сфере.

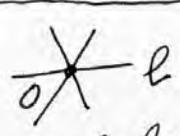
Утв. Все многообр. серии I можно гладко вложить в \mathbb{R}^3 . д-во фактил. уже дано выше. Это — сферы с ручками.

Шаг 11. (2-многоб. серии II). Начнем с примеров.



т.е. $W = S^2$ - это диск D^2 , на границе которого отождествлены точки по правилу: $x \sim (-x)$, т.е. диаметрально противоположные.
 А это есть проективная плоскость RP^2 .

• опред. RP^n . В R^{n+1} рассм. пучок прямых l через точку O .

 $RP^n = \{l\}$, т.е. точки RP^n - это прямые этого пучка.

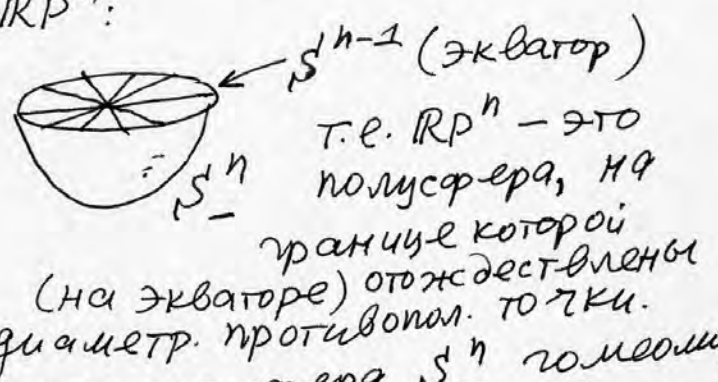
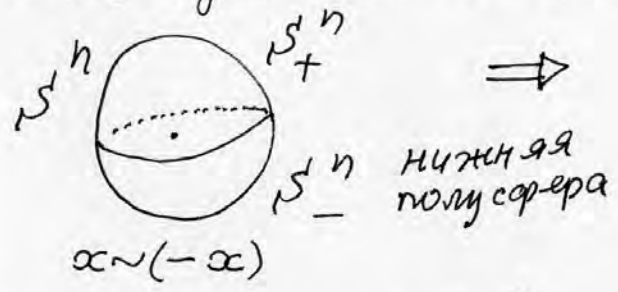
• эквивал. опред. RP^n :  $l \leftrightarrow (x, -x)$, где $x \in S^n$.

т.е. $RP^n = S^n / Z_2$ Поэтому $RP^n = \{(x, -x), \text{ где } x \in S^n\}$.

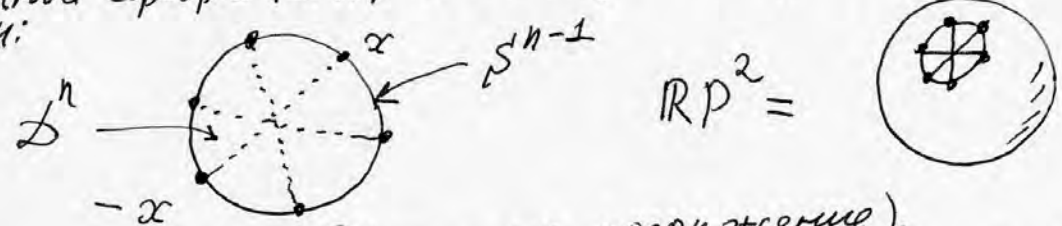
получается отождествлением диамет. противополож. точек на сфере S^n . $\sigma: x \rightarrow -x$ инволюция на сфере.

т.е. $RP^n = S^n / \sigma$, факторизуем сферу по действию σ .

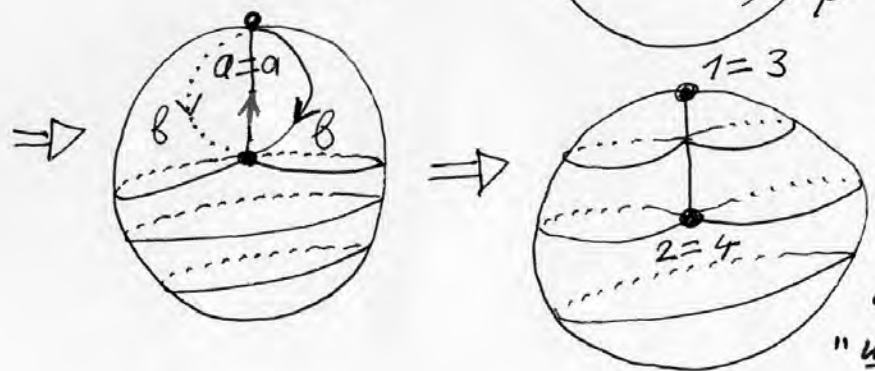
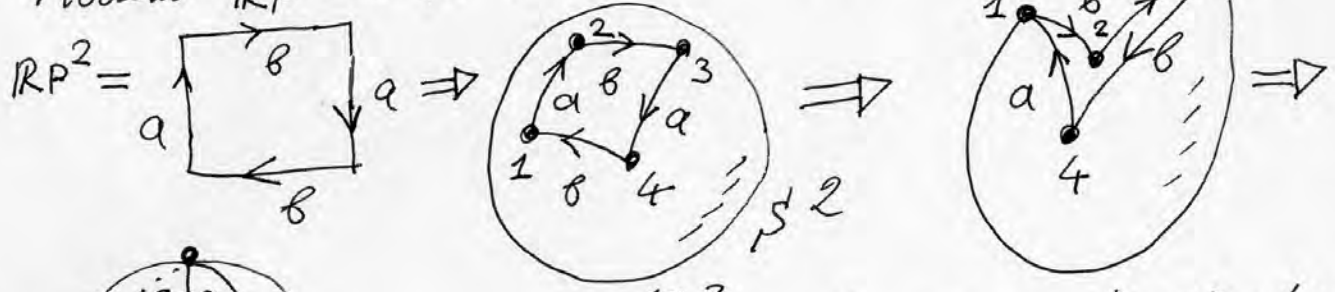
• еще одно эквивал. опред. RP^n :



• еще одно опред. RP^n : так как полусфера S_+^n гомеоморф. диску (шару) D^n , то RP^n - это шар (диск) D^n , на граничной сфере которой отождествл. диаметр. противополож. точки:

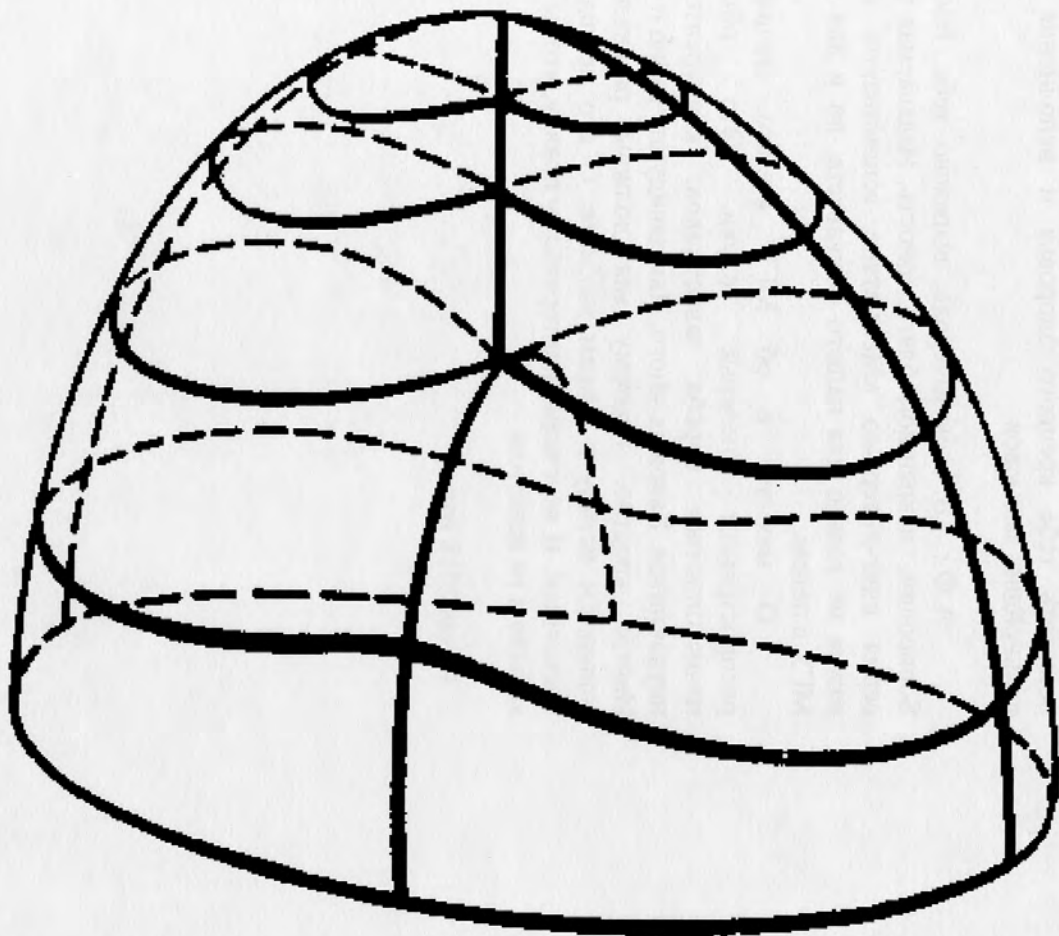


• Модель RP^2 в R^3 (это - не погружение).



В точках $(1=3)4$ $(2=4)$ погружения нет.
 В остальных точках - погружение.

Если снизу отрезать "шапочку", то останется лист Мёбиуса. см. рис.

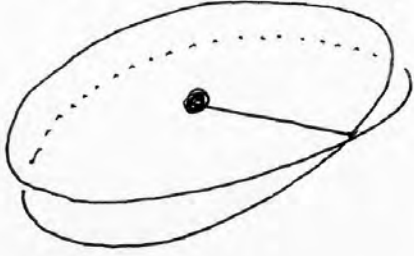


это — попухание
листа Мёбиуса в \mathbb{R}^3 , при котором его граница
(окружность) стала плоской. За это пришлось
"заплатить" тем, что у листа Мёбиуса появились
самопересечения.

Такую модель для μ называют
"скрещенный" колпак.

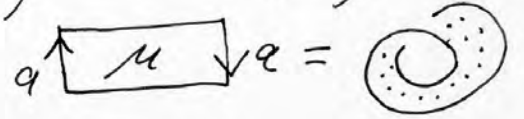
См. срез. сраницу: $\mu = \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{Z}^2$.

В толчках (1=3) и (2=4) - ветвление порядка 2:



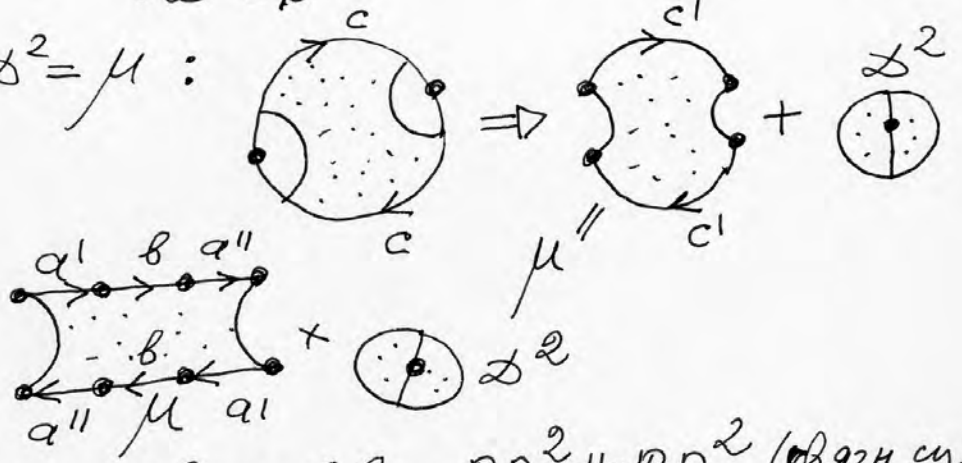
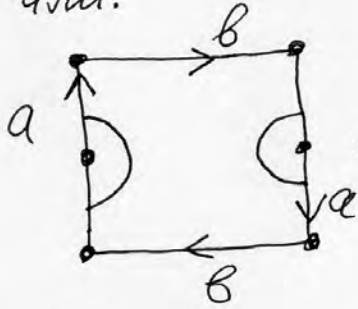
• Лемма. $\mathbb{R}P^2 = \mu + \mathbb{D}^2$, где μ - лист Мебиуса:

$\partial\mu = S^1$
 $\partial\mathbb{D}^2 = S^1$

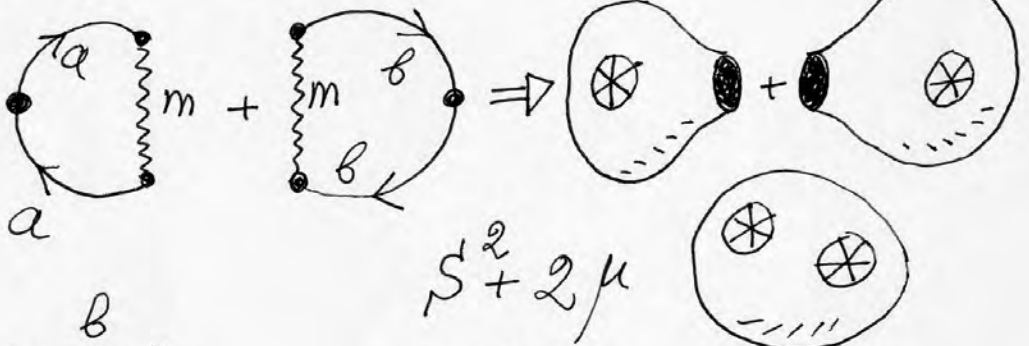
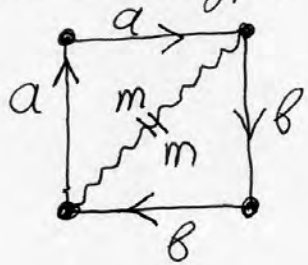


д-во. $\mathbb{R}P^2 - \mathbb{D}^2 = \mu$:

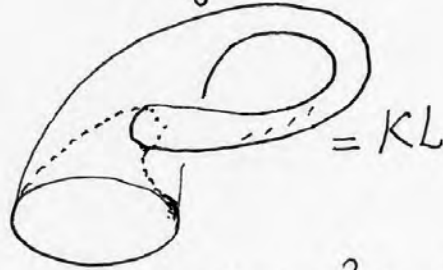
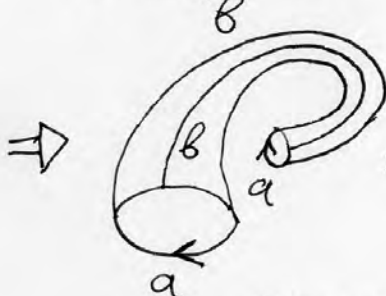
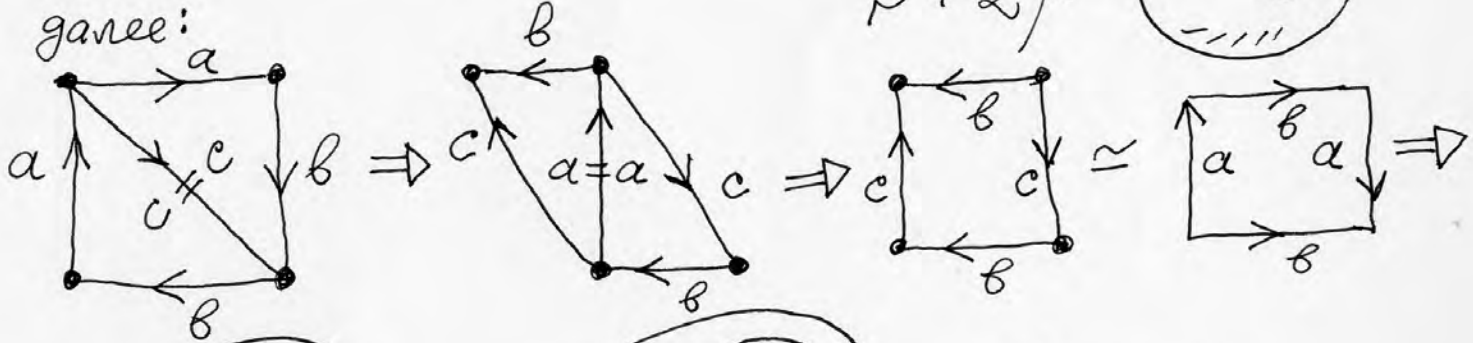
члм:



• Два квадрата: $\mathbb{V} = a^2 b^2 = a a b b = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ (вразн. сумм)



далее:

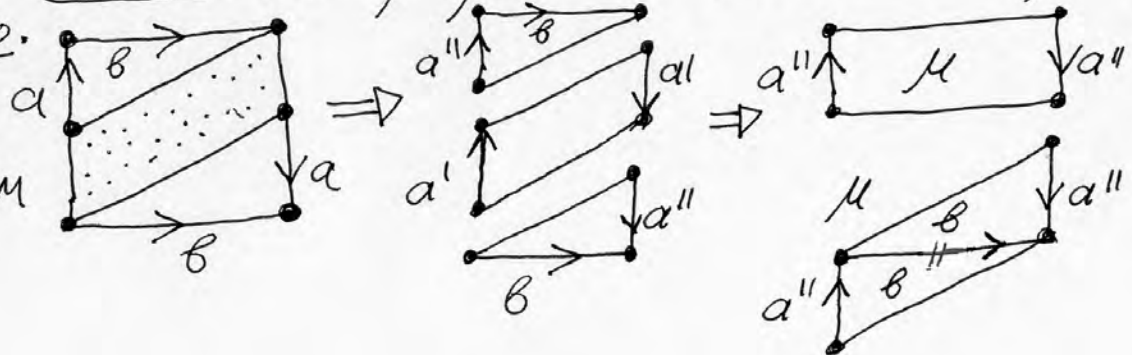


Сутьюшка Клейна

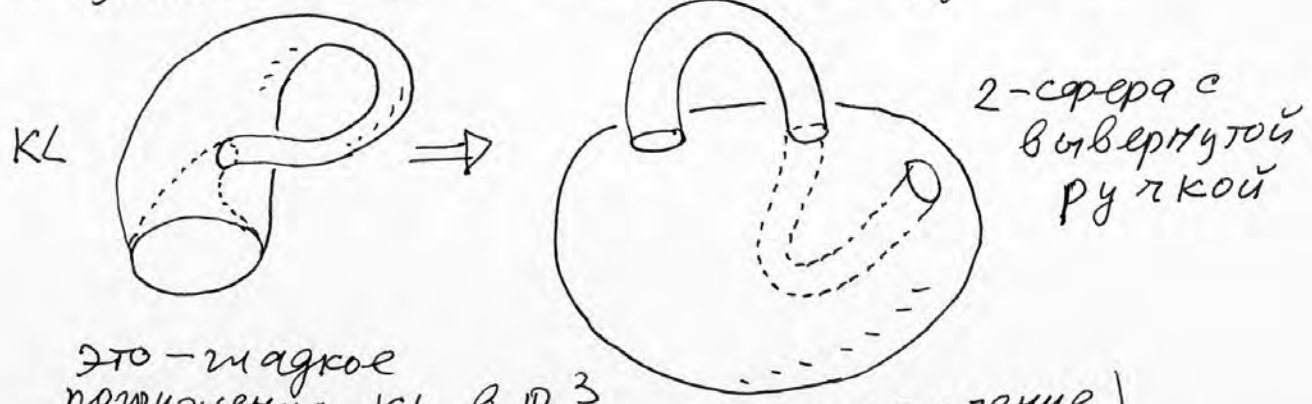
Лемма. $KL = \mu + \mu \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 = S^2 + 2\mu =$

д-во.

разрежем



• Бутылка Клейна = вывернутая ручка:



это — мажорное погружение KL в \mathbb{R}^3 .
но — не вложение (есть самопересечение)

• еще одно погружение KL в \mathbb{R}^3 :



склеить восьмерки с поворотом на π

Получается склеиванием восьмерки вдоль тонкой окружности так, чтобы после полного оборота окружность повернулась на 180° .

• Еще одно (мажорное) э-во, что нет сдвигающей серии M^2 :
 $W = -ava^{-1}v^{-1}ss \simeq W' = -a^2 - v^2 - c^2$



$ava^{-1}v^{-1}$
протащим одну сторону ручки вдоль петли γ , проходящей через лист Мебиуса

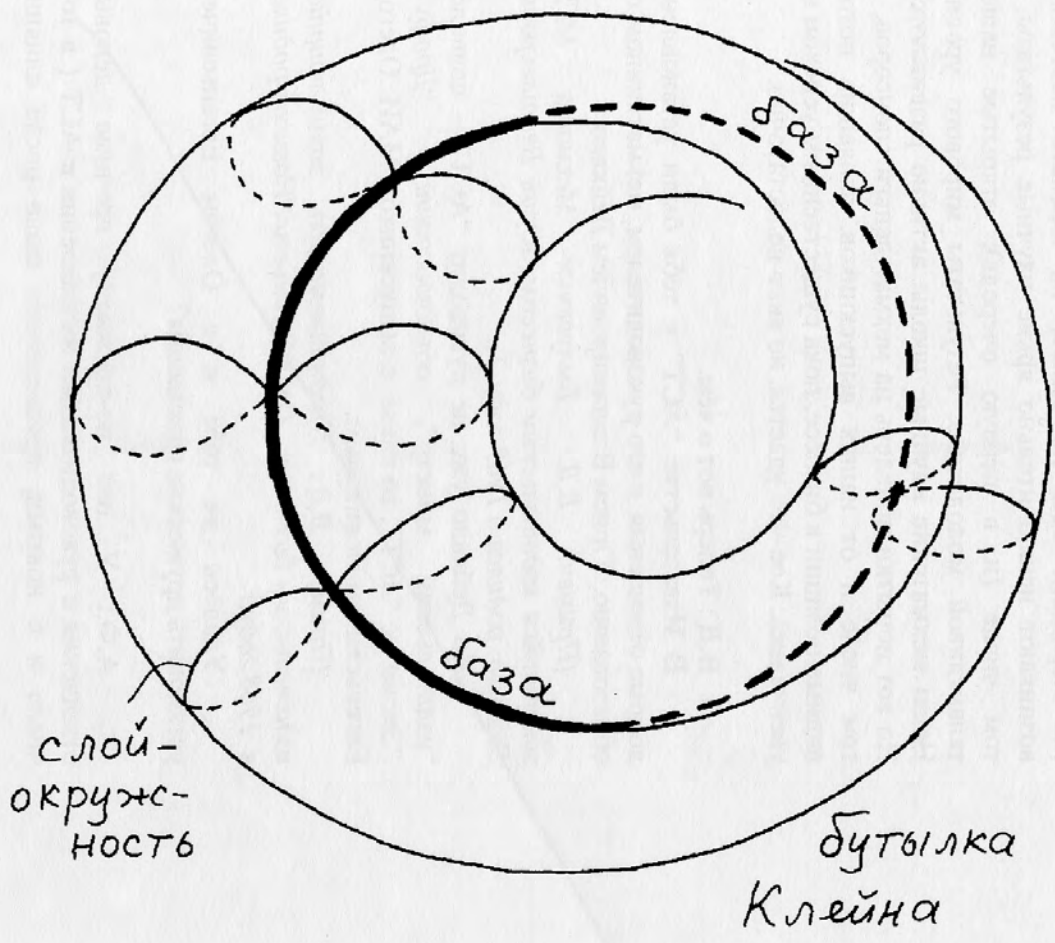
А это означает, что ручка вывернулась:

нормаль переворачивается: n

т.е. ручка превратилась в два листа Мебиуса

$= S^2 + 3M$

(также см. след. стр.)



погружение KL в \mathbb{R}^3 . линия самопересечения — это окружность



превращение ручки в вывернутую ручку, т.е. в два листа Мёбиуса (при наличии листа Мёбиуса)
 \mathbb{Z} -во отсутствия "смешанной серии".

Итог шага 11: Любое M^2 типа II гомеоморфно сфере с k тонкими ручками: $S^2 + k\mu$, т.е. связной сумме k экземпляров RP^2 :
 $M^2_k = S^2 + k\mu = RP^2 \# \dots \# RP^2$ (k раз).

• Ориентируемость и неориентируемость. Рассмотрим на M^2 всевозможные пути-петли γ , выходящие и возвращающиеся в точку x . В точке x рассмотрим касательный репер (из касательных векторов).

Опред. M^2 назыв. ориентируемым, если при любой непрерывной деформации (= скольжении) касательного репера вдоль любой петли, он возвращается в точку x с той же ориентацией.
 M^2 назыв. неориентируемым, если найдется петля γ , при скольжении вдоль которой ориентация репера поменяется.

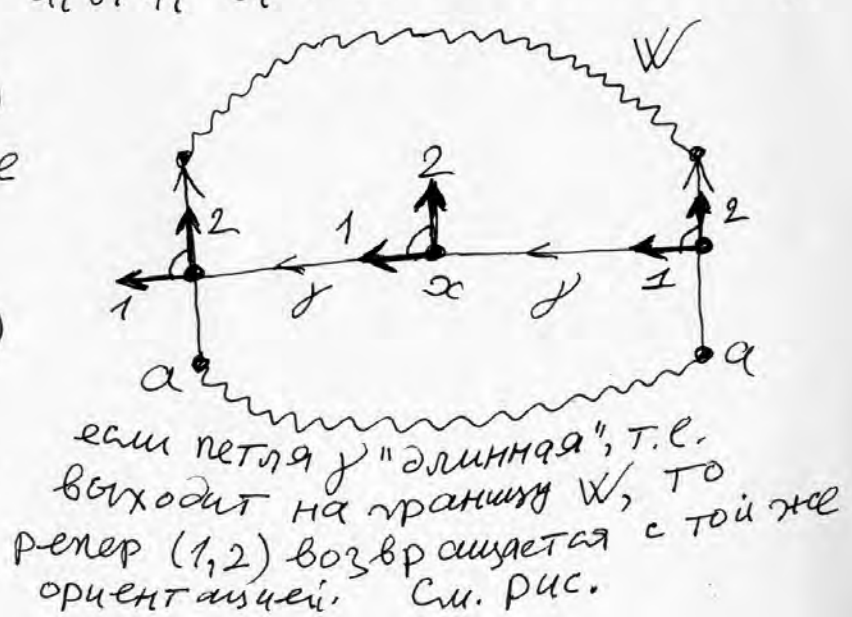
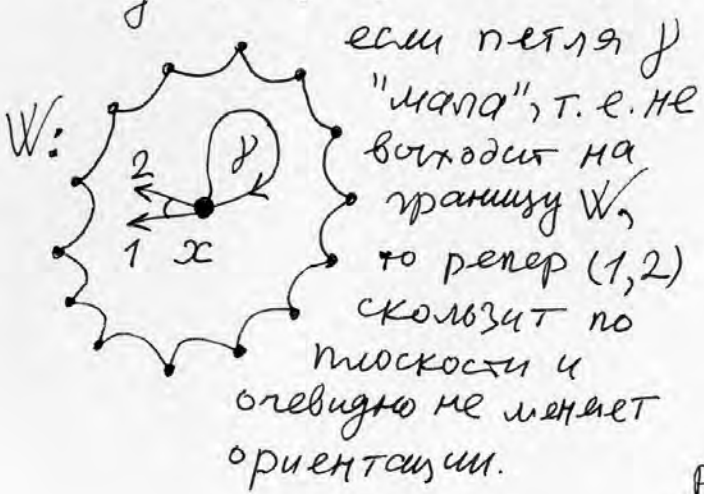
• Ориентируемость или неориентируемость — это инвариант гомеоморфизма.

• Шаг 12. Заключительный. Теорема классификации M^2 .

- 1) Любое связное, комп., компактное, замкнутое (без края) M^2 гомеоморфно (и диффеоморфно) либо: I: $S^2 + g(\text{ручек})$, $g \geq 0$, либо: II: $S^2 + k\mu$, $k > 0$. Числа g и k назыв. родом.
- 2) Мног. серии I — ориент. Мног. серии II — неориент.
- 3) Мног. серии I и серии II не гомеоморфны.
- 4) Мног. серии I можно вкладыв. в R^3 .
- 5) Мног. серии II можно погруж. в R^3 , но не вкладываются.

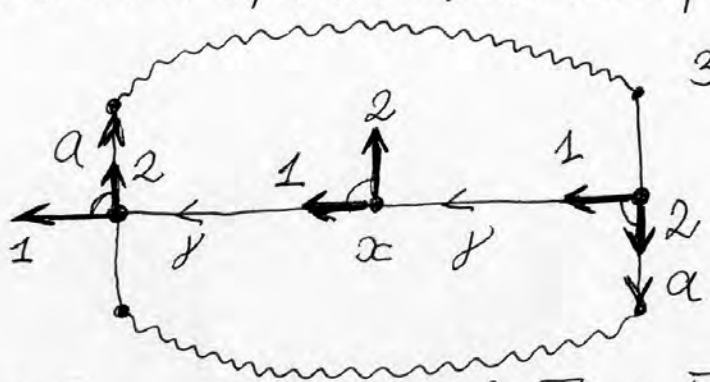
• Д-во. Пункт 1 уже доказан выше. Докажем 2.

$$M^2_g = S^2 + g(\text{ручек}) \cong \prod_{i=1}^g a_i v_i a_i^{-1} v_i^{-1}$$



• Теперь $M_K^2 = S^2 + K\mu$, $K > 0$. $W = \prod_{i=1}^K S_i^2$.

Как и в ориентир. случае скользящее (перенос) репера вдоль "малых" петель не меняет ориентации. Теперь рассмот. "длинные петли":



Здесь репер достигает ∂W и, очевидно, возвращается в точку x с противополож. ориентацией. Пункт 2 теор. доказан.

• Пункт 3. Многооб. I и II не гомотоп., т.к. I — ориент., а II — неориент. А вот не гомотоп. морф. многооб. разного рода внутри каждой серии — факт более сложн. мы его докажем потом, используя гомологии.

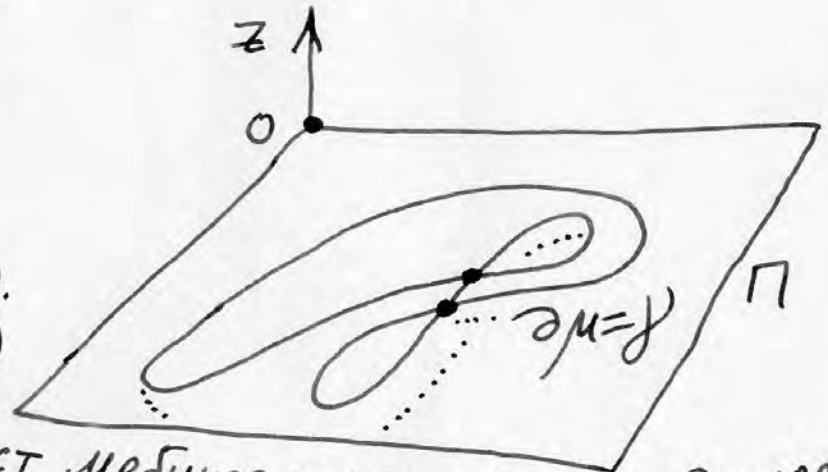
• Пункт 4 доказан выше.
• Докажем пункт 5. Неориент. случай.

Лемма. $\mathbb{R}P^2$ слабо погруж. в \mathbb{R}^3 .
 $\mathbb{R}P^2 = \mu + \mathbb{Z}^2$ (см. выше). Рассмотрим $KL = \mu + \mu$ и разрежем KL пополам плоскостью, см. рис.

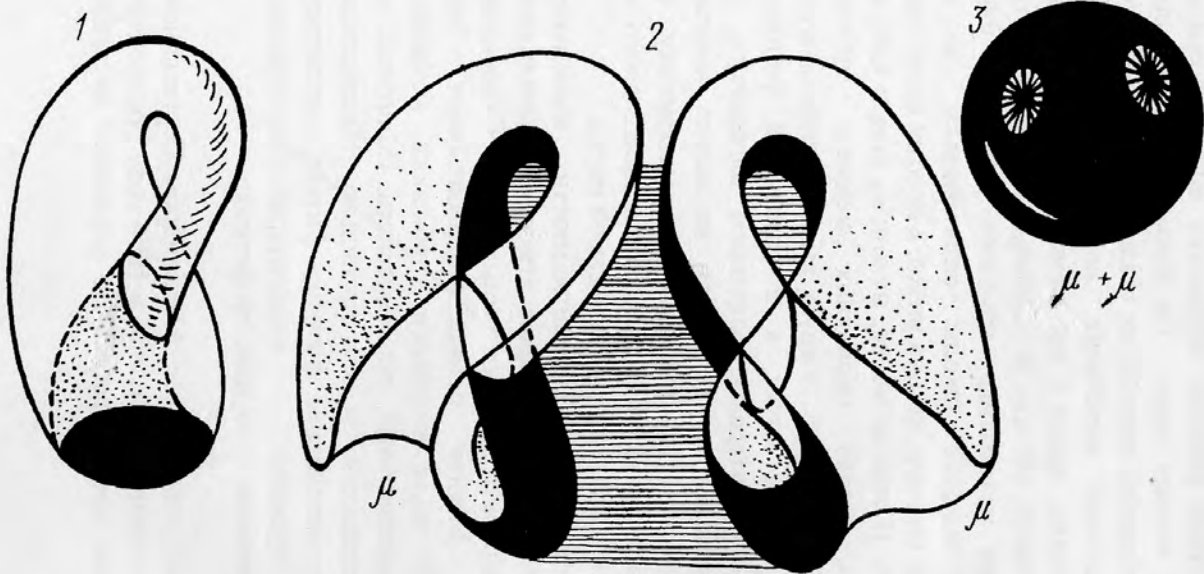


$\mu =$ пополам (см. след. стран.)

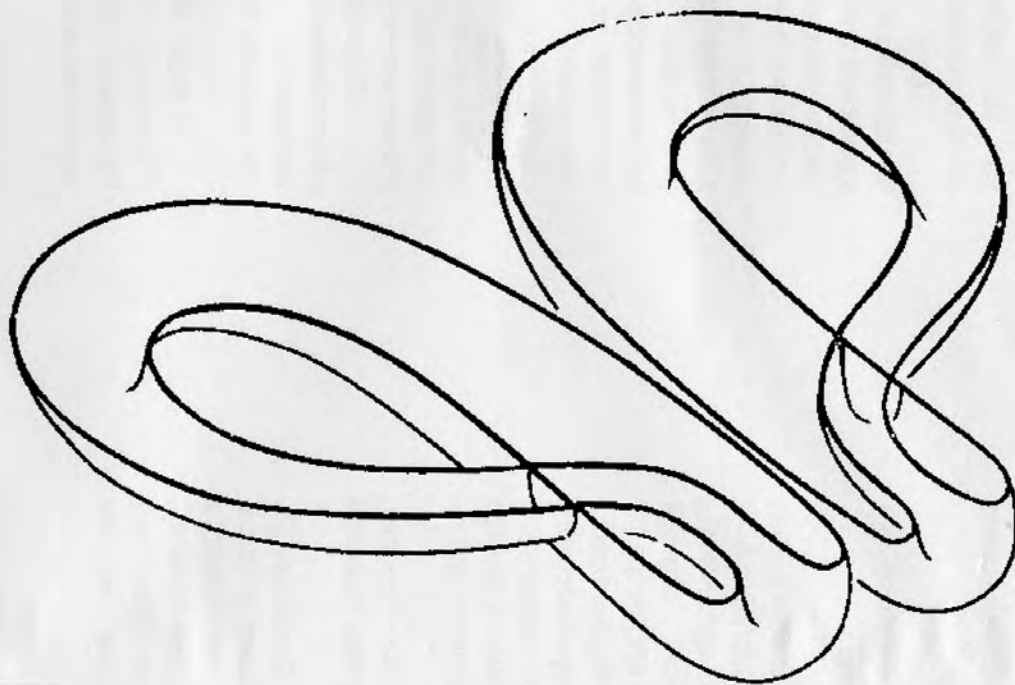
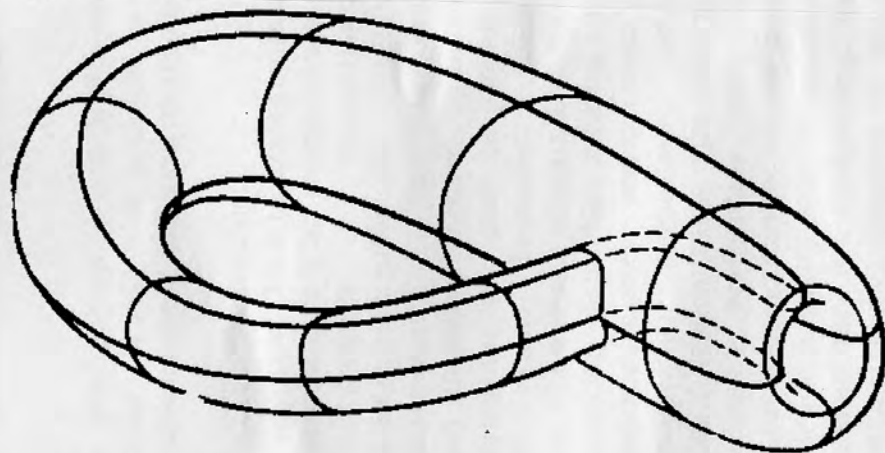
это — погружение μ в \mathbb{R}^3 .
Граница μ — это плоская кривая с самопересечением:



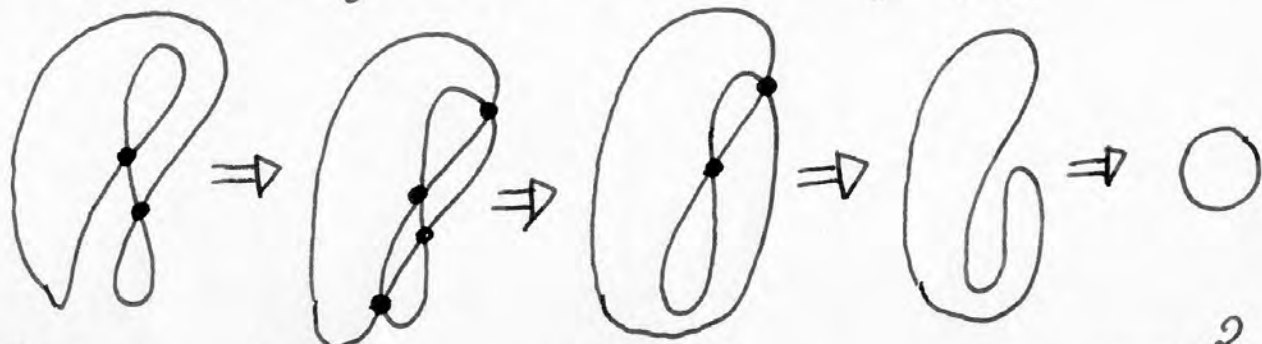
лист Мёбиуса расположен под плоскостью Π . Будем поднимать вверх плоскость Π , одновременно деформируя кривую γ как показано на рис. При этом γ будет "заметать" некоторую 2-поверхность, погруженную в \mathbb{R}^3 . Цель: продеформировать γ в станд. окружн. S^1 без самопересеч. в Π .



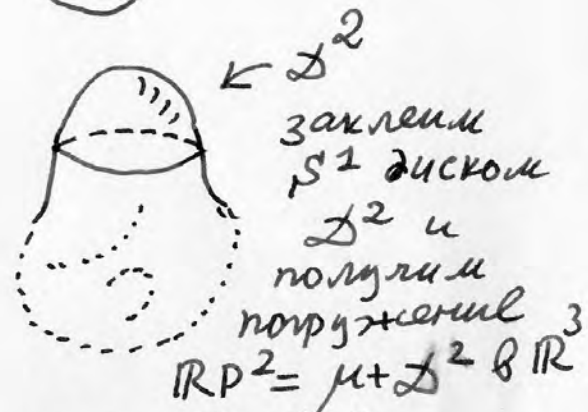
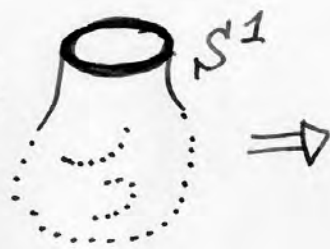
более наглядное изображение разреза KL
на два листа медузы.



деформация γ : (см. также след. стр.)

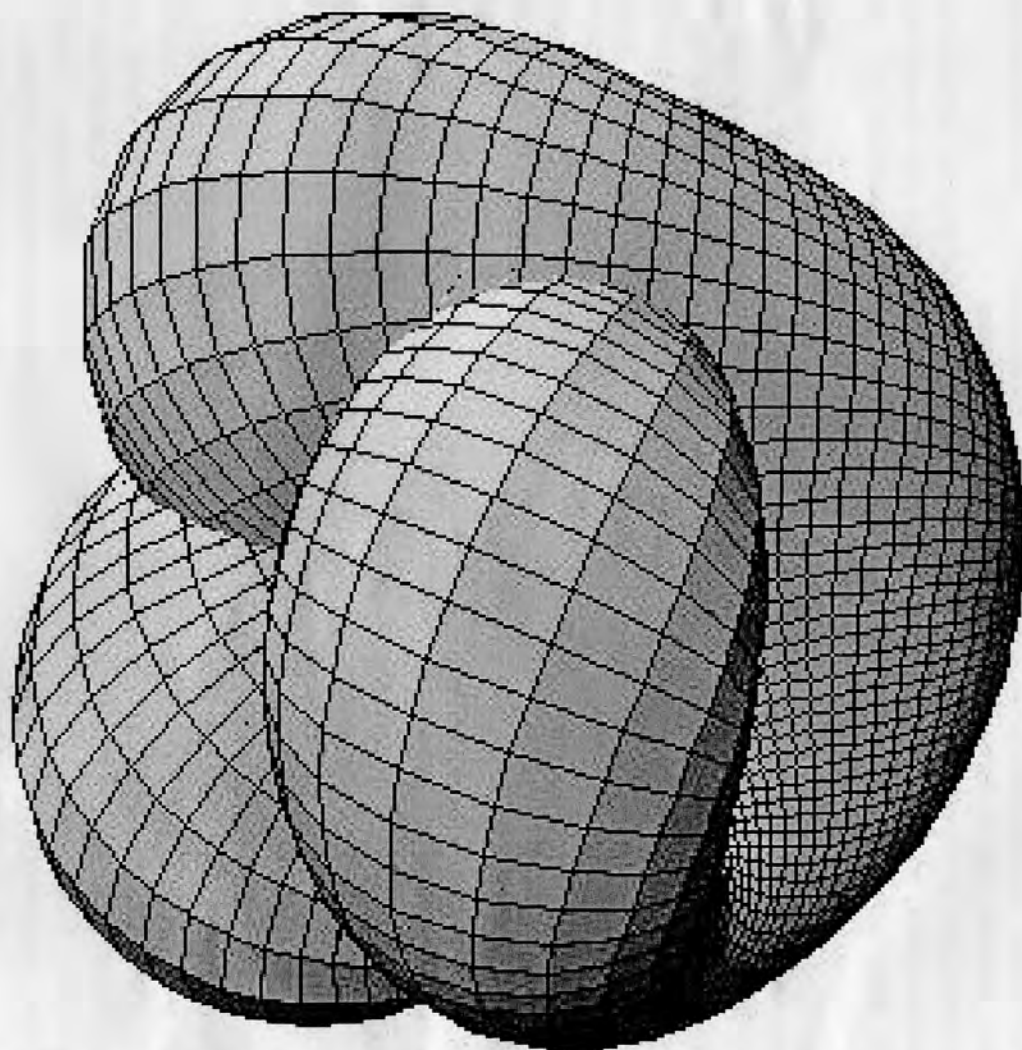


Получили в \mathbb{R}^3 :
 сложную поверхность,
 с границей S^1 ,
 являющуюся
 погружением μ
 в \mathbb{R}^3

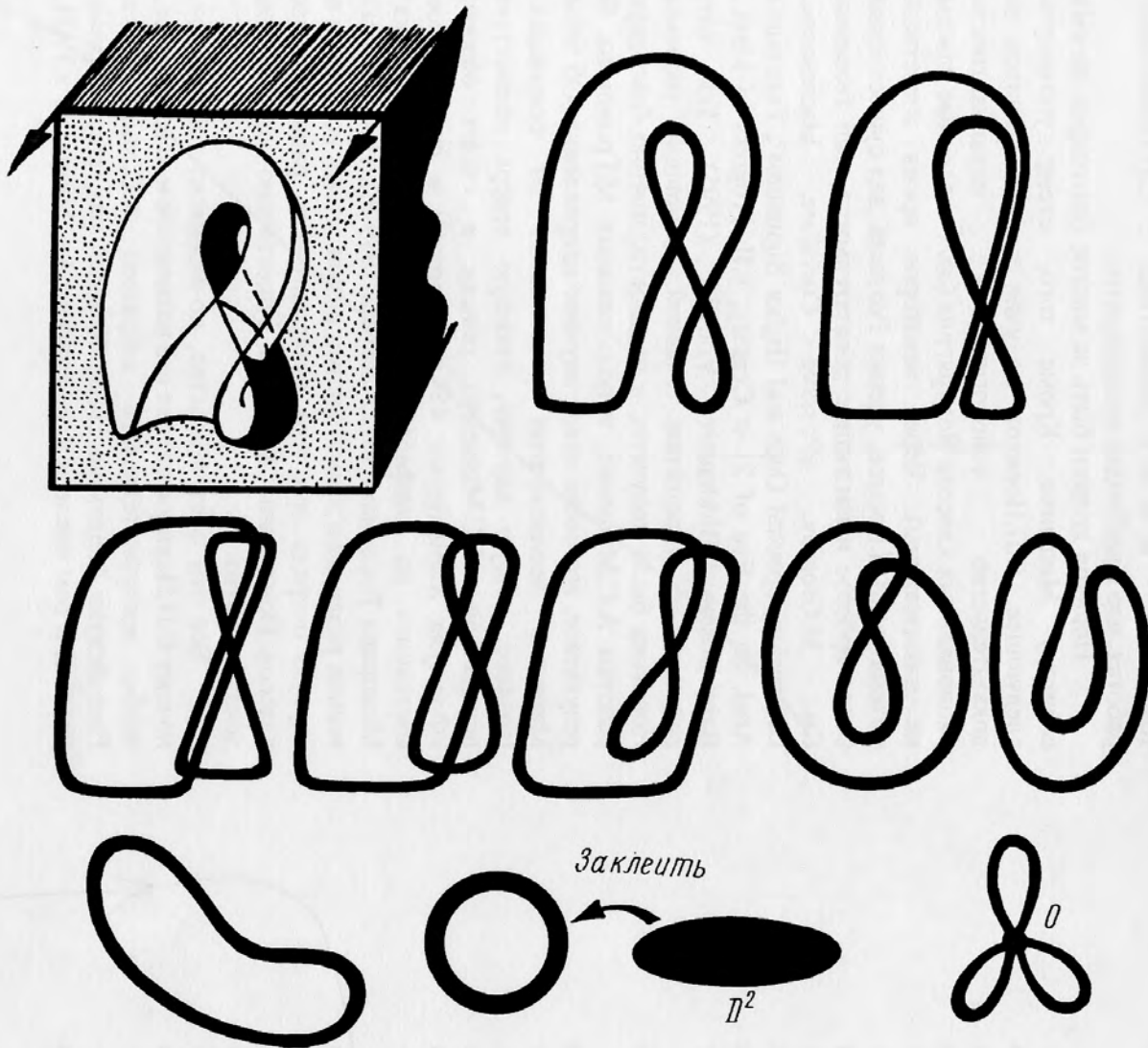


← D^2
 зафиксируем
 S^1 диском
 D^2 и
 получим
 погружение μ
 $\mathbb{R}P^2 = \mu + D^2$ в \mathbb{R}^3

эта поверхность
 называется "поверхностью Бойя".



А так как $M_k^2 = \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$ (k раз), то мы
 получаем погружение M_k^2 серии Π в \mathbb{R}^3 .



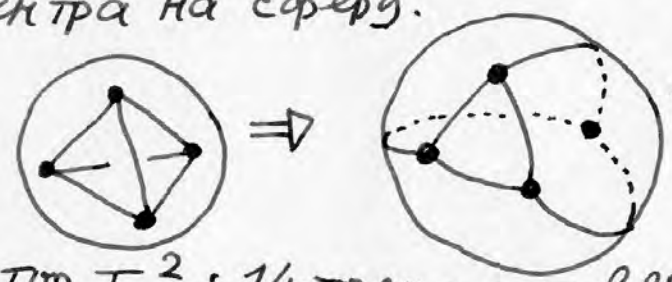
Еще одно изображение деформации границы листа Мебиуса в поднимающейся плоскости.

Почему M^2_K сериш Π нельзя вложить в \mathbb{R}^3 ?
 Легко доказать, что если M^2 — гладк. комп. замкн. попер. вложенная в \mathbb{R}^3 (без самопересек.), то она разбивает \mathbb{R}^3 на две части, а потому ориентируема.

Пункт 5 доказан.

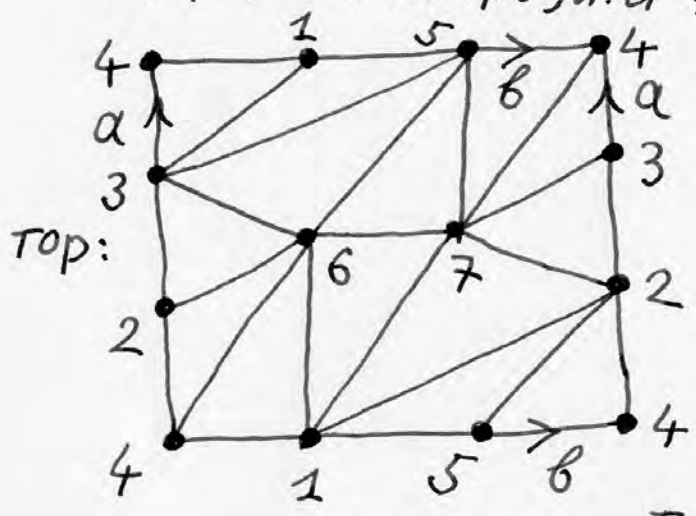
• Минимальные триангуляции $S^2, T^2, \mathbb{R}P^2$. т.е. с минимальным числом треугольников.

• S^2 : 4 треуг. и 4 вершины. Опшем вокруг симплекса (тетраэдра) сферу и спроект. его 43 центра на сферу.



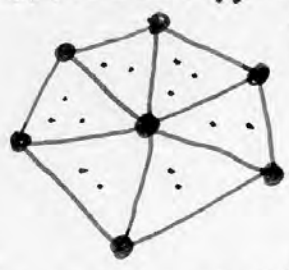
• докажите минимальность (кстати, это — полный граф: каждая вершина соединена с каждой)

• тор T^2 : 14 треуг. и 7 вершин:



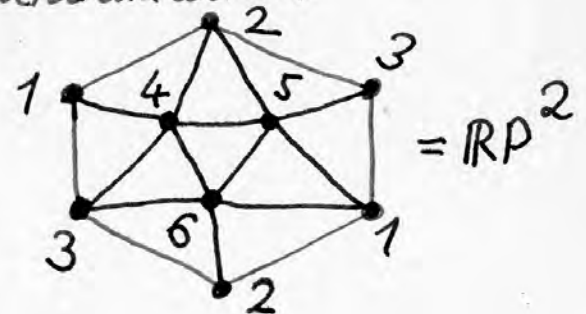
(это — тоже полный граф) д-во. Пусть n — число треуг. в триангул. тора. Тогда число ребер равно $3n/2$, т.к. к каждому ребру примыкают два Δ . А всех ребер у n треуг. — $3n$. В обязат. курсе есть теор.: Эйлерова характерист. тора $= 0$, т.е. $\# \text{вер.} - \# \text{ребер} + \# \text{треуг.} = 0$

т.е. $\# \text{вер.} - \frac{3n}{2} + n = 0 \Rightarrow \text{вершин} = n/2$. Всего вершин у n треуг. — $3n$, поэтому при склейке M^2 из n треуг. в одну вершину на T^2 "в среднем" попадает $(3n)/(n/2) = 6$ вершин. А потому \exists вершина на T^2 кратности ≥ 6 . Но тогда ей "звезда" имеет вид:



т.е. к ней примыкают по крайней мере 6 треуг. А тогда число вершин ≥ 7 . А мы предьявили триангул. с 7 верш. Потому она минимальна.

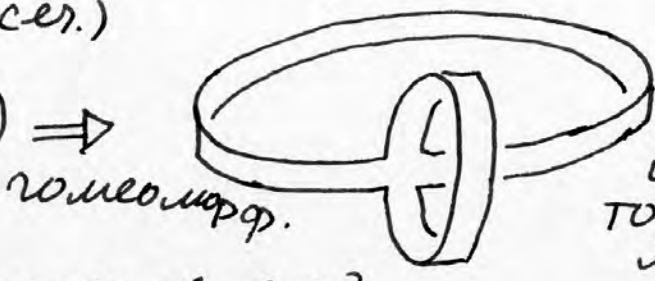
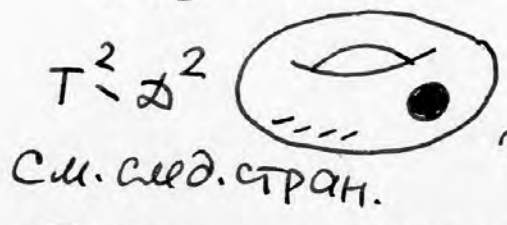
• Задача: миним. триангул. $\mathbb{R}P^2$ имеет 6 вершин и 10 краей. см. рис.



для $\mathbb{R}P^2$ - это тоже полн. граф. Но для других 2-поверхн. их минимал. триангул. не обязана быть полными графом.

• Несколько задач.

① Тор с дыркой можно вывернуть наизнанку в \mathbb{R}^3 (без самопересел.)



при выворачивании параллель и меридиан тора меняются местами.

② Расцепление пальцев в \mathbb{R}^3 :



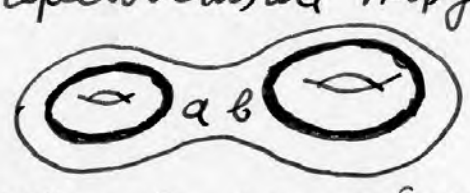
изотопией, т.е. гладкой деформацией без самопересечений "пальцы" можно расцепить



③ Разрезать лист Мебиуса по его "оси". см. следующую стр.

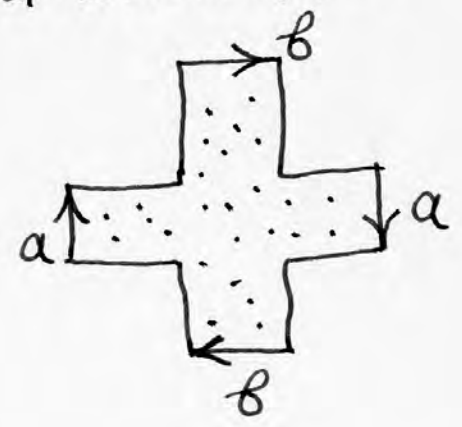
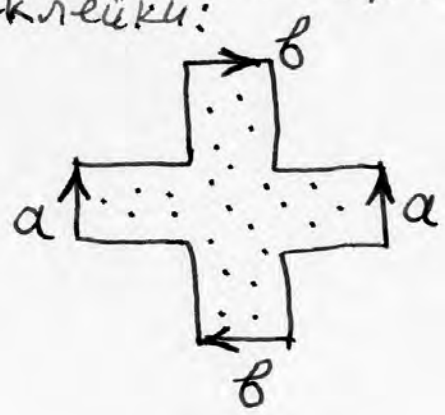
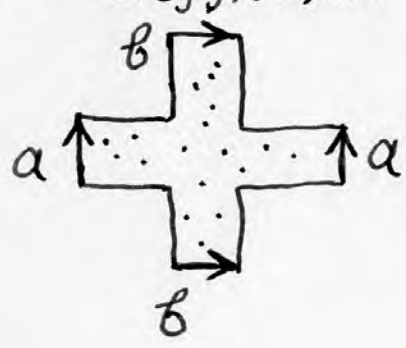
④ Чему гомеоморфно мн-во всех прямых на плоскости. Ответ: листу Мебиуса.

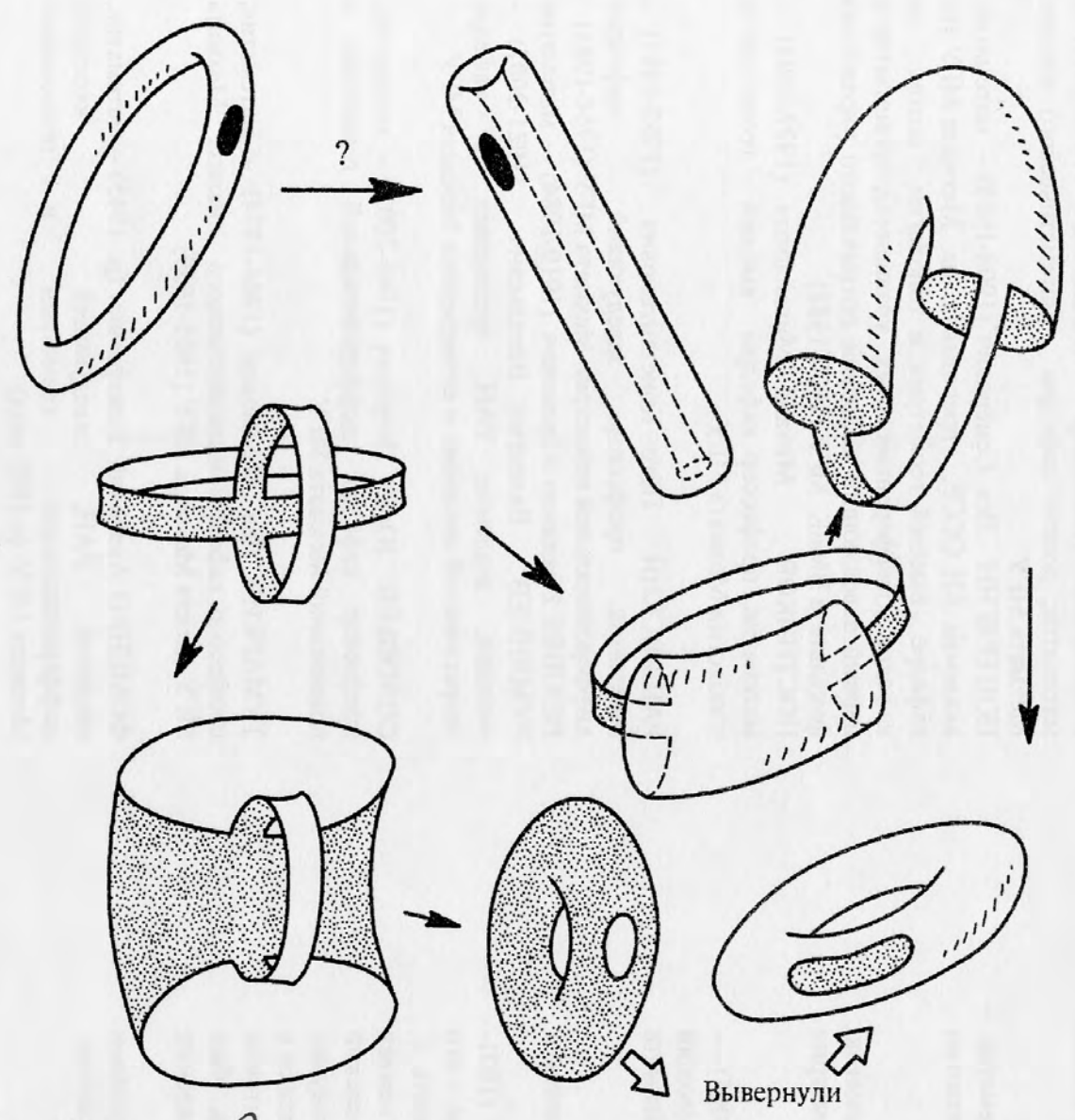
⑤ Построить гомеоморфизм кренделя на себя, переводящую пару циклов a, b в пару b, a.



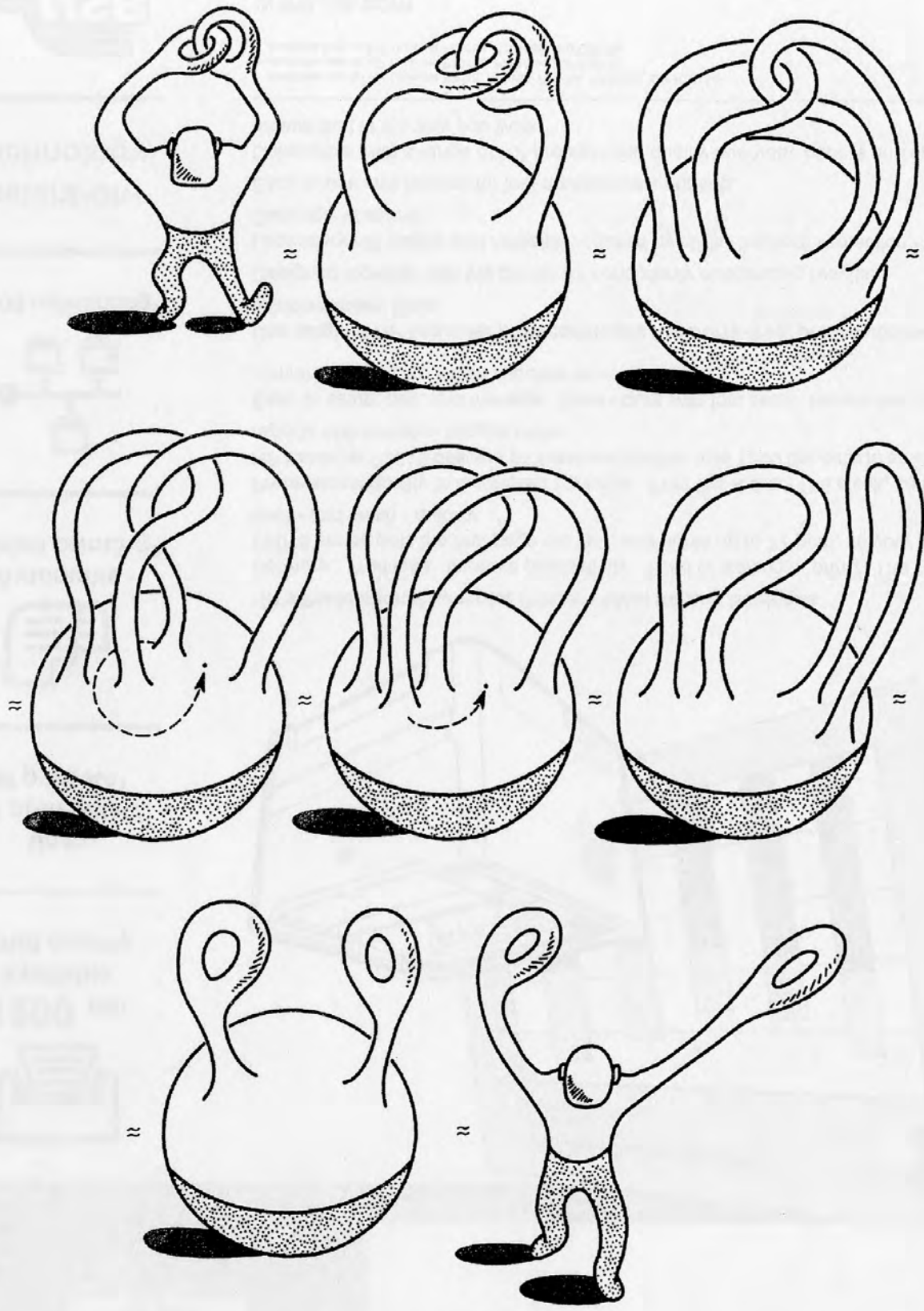
см. след. стран.

⑥ Какими 2-многообразиями с краем гомеоморфны следующие склейки:

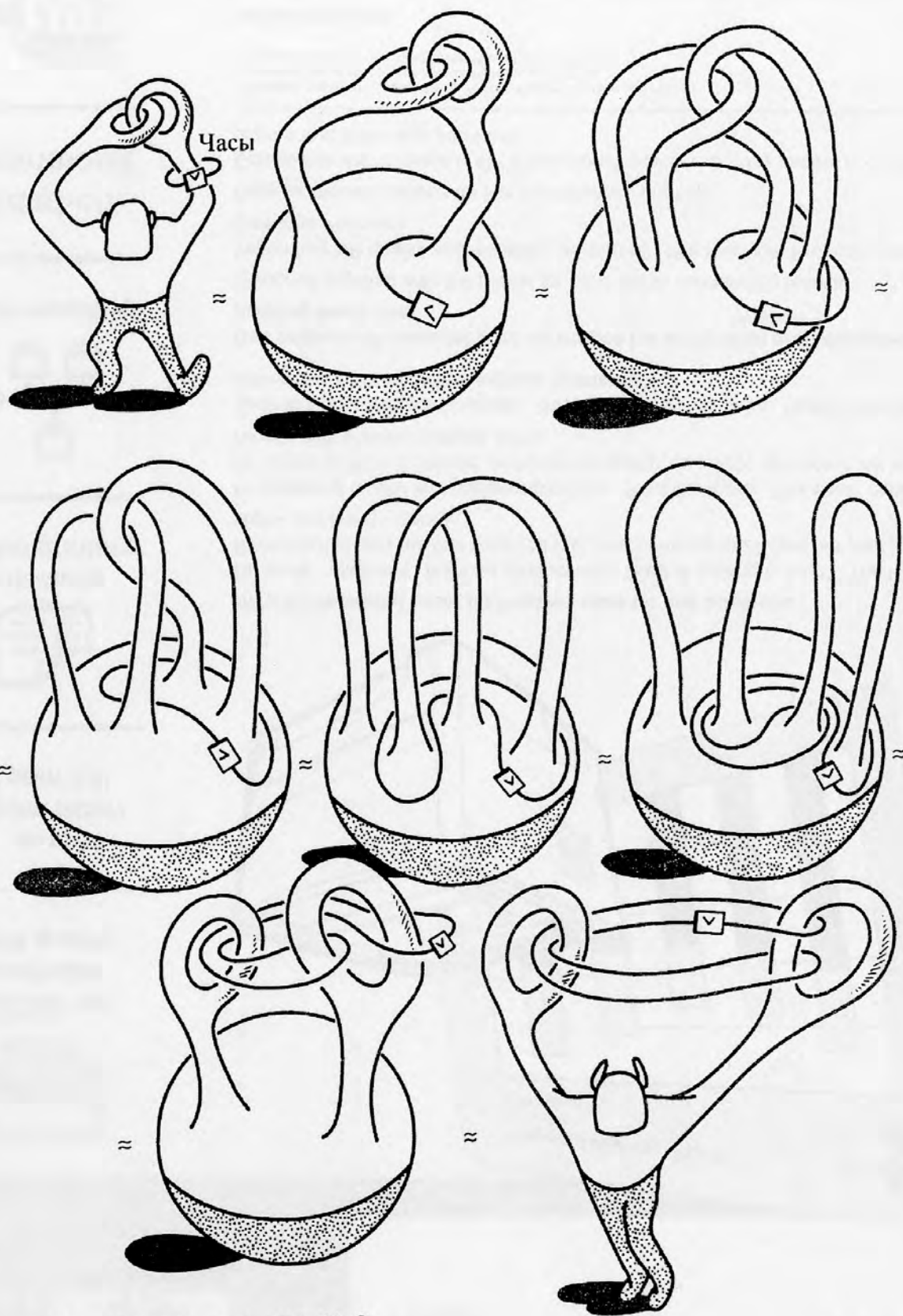




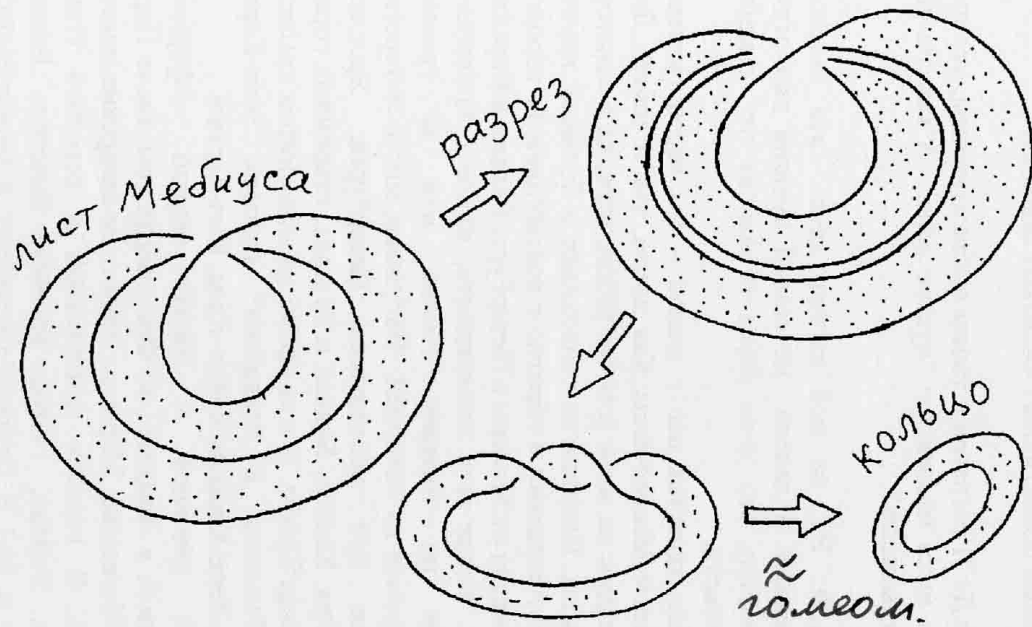
Выворачивание тора с ручкой наизнанку в \mathbb{R}^3 . параллель и меридиан меняются местами.



Расцепление петель
в \mathbb{R}^3

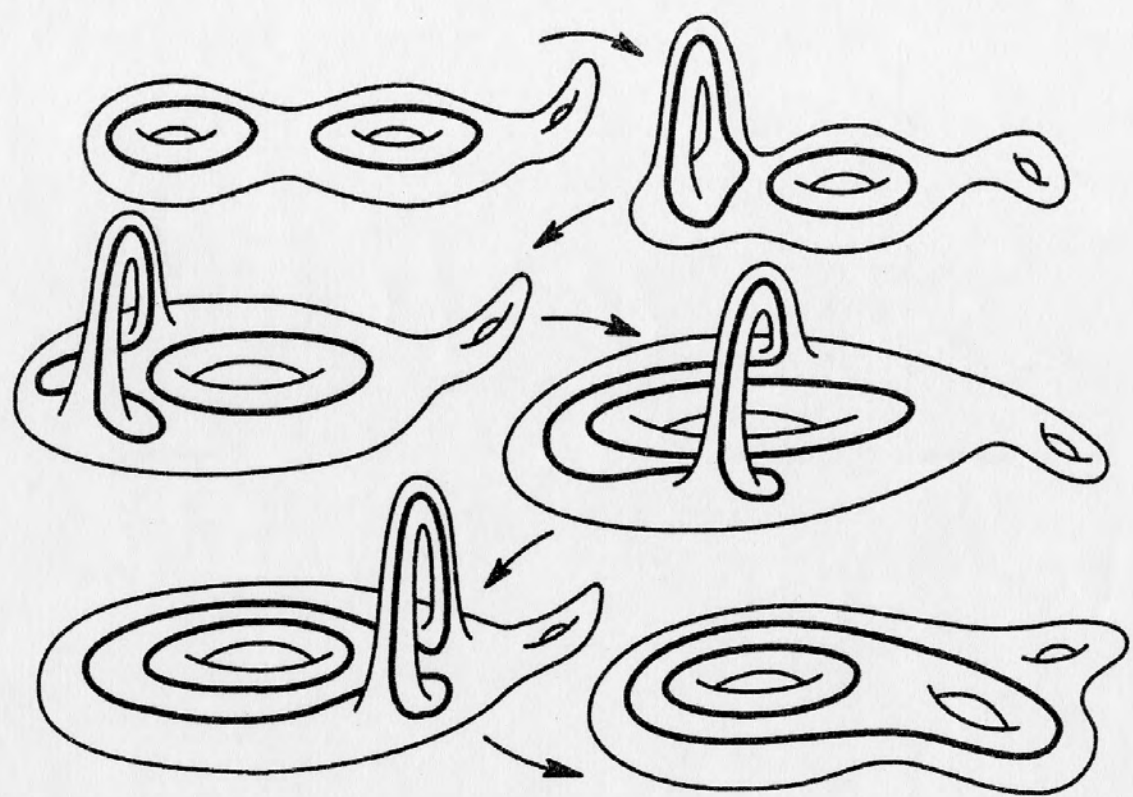


Но если на руке
есть часы (с ремешком), то пальцы конечно
можно расцепить, но ремешок завяжется,
как показано на рис.



Разрезав 1 раз по осц, получили ленту, закрут. на 4π . Разрезав еще раз по осц ленты, получили уже две такие же ленты (закручен. на 4π), причем эти ленты зацеплены в \mathbb{R}^3 . Докажите. Продолжить разрезания по осц. что получится?

(Каждое из закрученных на 4π колец будет зацеплено с каждым).



В алгебре такие операции иногда называются операциями Нильсена.