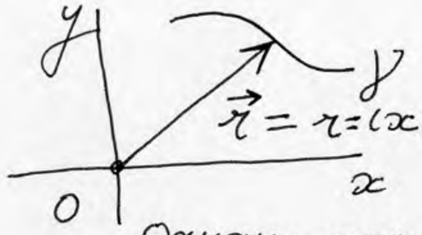
Лекция 1

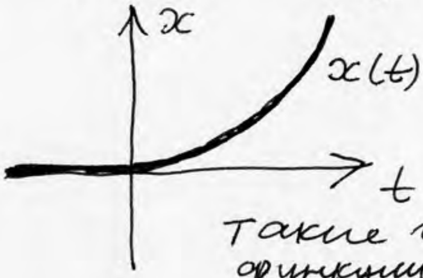
- Этот курс – дополнение к обязат. курсу "Дифф. геом. и топология" (на 2, 3 курсах).
- Понятие поверхности (многообразия) M^k в $\mathbb{R}^n$.
- Шаг 1. Кривые на плоскости $\mathbb{R}^2$. Гладкая кривая.



$\vec{r} = r = (x(t), y(t))$, где $a \le t \le b$, а функции $x(t)$ и $y(t)$ – гладкие, $\in C^\infty$.

Однако такая кривая может иметь изломы.

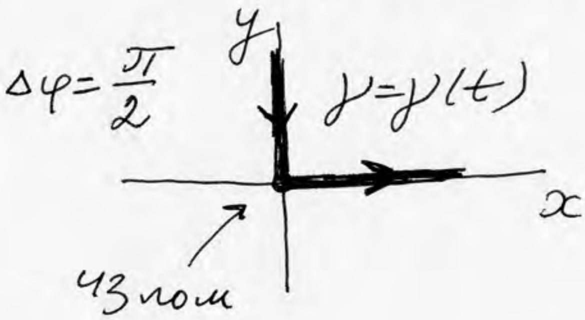
Пример "гладкого излома".



$(x(t), y(t)) = r(t) = \gamma(t)$ такая кривая имеет излом (см.)

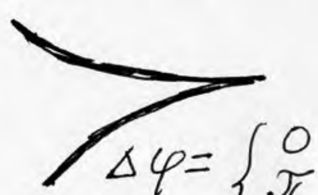
такие гладкие функции $\exists$ (задача)

Можно сгладить с помощью функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$.



здесь – "поворот" на $\pi/2$.

- Задача. Построить пример аналитич. кривой $r(t)$ с "клювом", т. е. ($x(t)$ и $y(t)$ – аналит. ф-ции) →



- Задача. может ли аналит. кривая иметь излом с $\Delta\varphi \neq 0$ или π? например, "повернуть" на $\pi/2$?

  Ответ: Нет. Доказать.

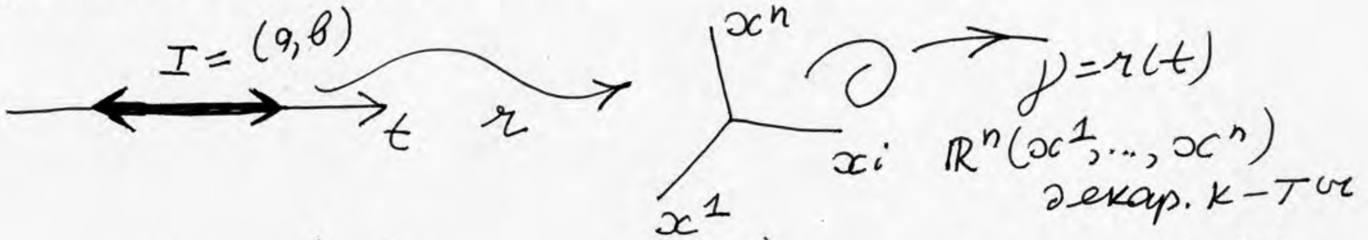
- Замечание. Гладкая кривая с изломом $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ (см. выше) очевидно не аналитическая.

- Итак, в чем дело? Почему излом?

  Пусть $\dot{r} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = v$ – касател. в-р к кривой γ.

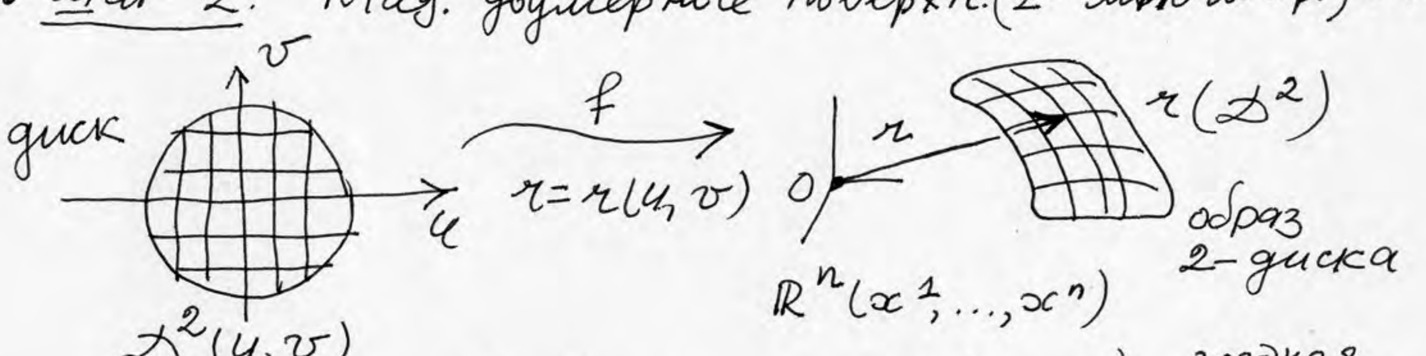
В примере выше $\llcorner$ в точке O в-р $\dot r = 0$,
и в это мгновение кривая резко повернула.

- Отсюда видно: нужно запретить $\dot r(t_0) = 0$.
  Итак:
- Определ. Гладкая кривая назыв. <u>регулярной</u>, если $\dot r(t) \neq 0 \ \forall t$.
- По теор. о неявной функции $\Rightarrow$ на такой кривой нет изломов. В-р скорости (касат. в-р) поворачивается гладко.
- В дальнейшем считаем глад. кривые — регулярными.
- Аналогичное определение для кривой в $\mathbb{R}^n$.



$$\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)), \text{ где } \dot r(t) \neq 0 \ \forall t.$$

- <u>Шаг 2</u>. Глад. двумерные поверхн. (2-многообр.) в $\mathbb{R}^n$.

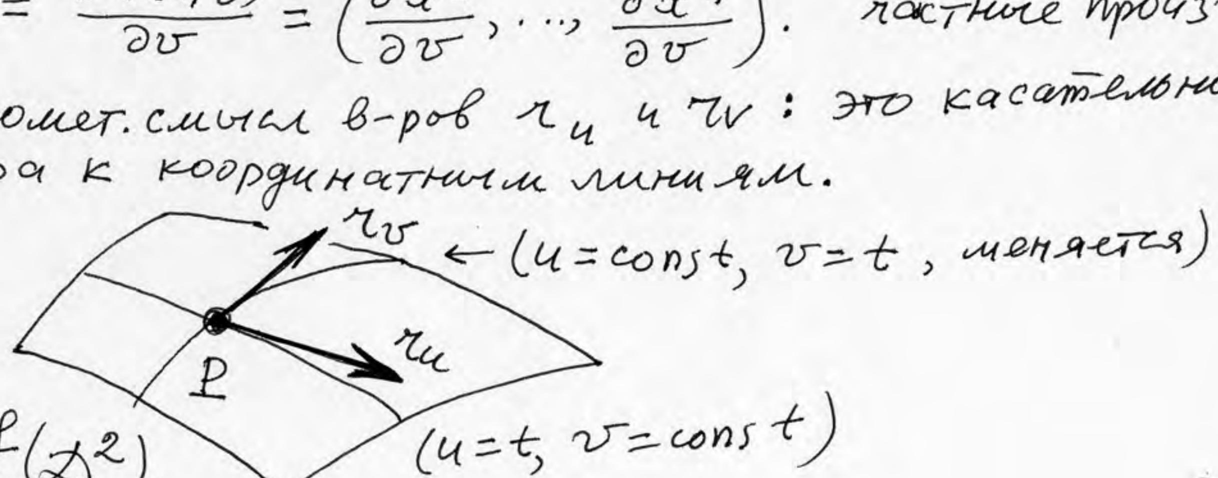


$$r = (x^1(u,v), \dots, x^n(u,v))$$ гладкая в-р функция

Рассм. в-ры: $r_u = \dfrac{\partial r(u,v)}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial x^1}{\partial u}, \dots, \dfrac{\partial x^n}{\partial u}\right)$ и

$r_v = \dfrac{\partial r(u,v)}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial x^1}{\partial v}, \dots, \dfrac{\partial x^n}{\partial v}\right)$. частные производные.

- Геомет. смысл в-ров r_u и r_v: это касательные в-ра к координатным линиям.



• Касат. плоскость $T_P(r_u, r_v)$ — натянута на векторы r_u и r_v, если они лин. независимы.

• По теор. о неявной функции (см. анализ), если в-ры r_u и r_v лин. незав. в точке P, то локально, около точки P образ $r(D^2)$ явл. гладкой 2-поверхн. в $\mathbb{R}^n$, в том смысле, что касат. плоскость гладко меняется от точки к точке.

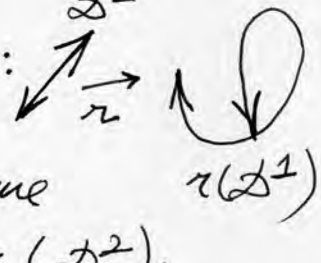
• На этом основании дадим формал. определение.

→ **Опред.** Локальной гладкой 2-мерной поверхностью (или локальным 2-мерным многообразием) M^2 в $\mathbb{R}^n$ назыв. мн-во точек в $\mathbb{R}^n$, допускающее представление в виде:

1) $M^2 = \{ r = r(u,v)$, где r_u и r_v лин. незав. всюду на $D^2(u,v)$, здесь $r: D^2(u,v) \to \mathbb{R}^n \}$, $r \in C^\infty$, (в частности, $r_u \neq 0$ и $r_v \neq 0$ всюду на D^2).

2) $r: D^2 \to r(D^2)$ гомеоморфно образу, т.е. r — это гомеомор. D^2 и $r(D^2)$.

• Коммент. Условие 2 запрещает, например:

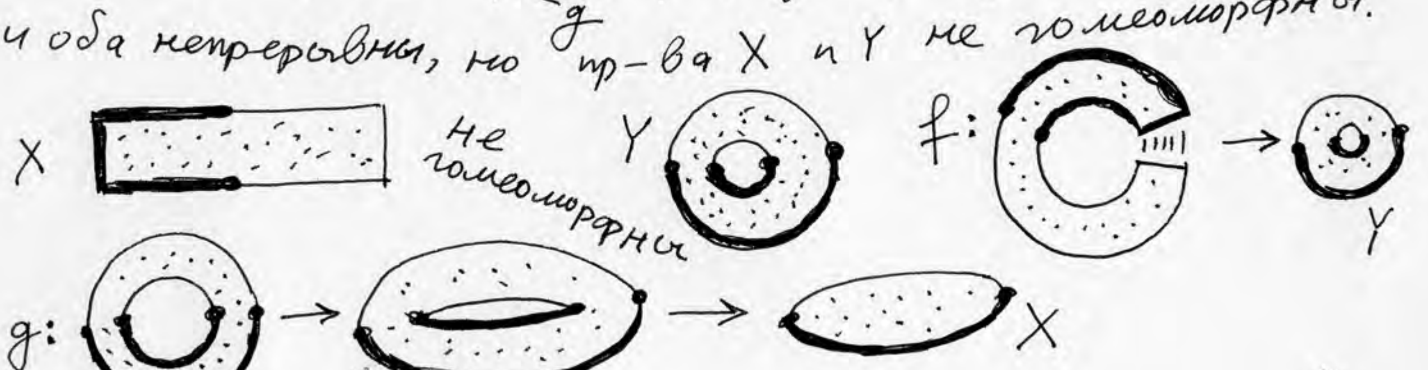


• Касат. плоскость $T_P M^2 \subset \mathbb{R}^n$ и натянута на в-ры r_u и r_v.

• По теор. о неявн. функциях такое отображение r задает гомеоморфизм между D^2 и $r(D^2)$, и более того, диффеоморфизм: $D^2 \approx r(D^2)$.

• Напоминание: $f: X \to Y$ назыв. гомеоморф., если f и f^{-1} оба взаимно-однозн., и оба непрерывны.

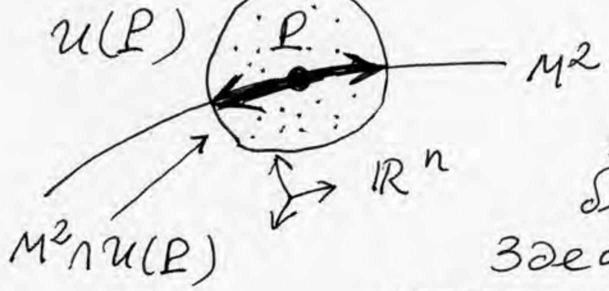
• Полезн. пример: $\exists \; X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$, где f и g оба взаимно-одн. и оба непрерывны, но пр-ва X и Y не гомеоморфны.



• Напоминание: отобр. $f: U \to V$ двух областей в $\mathbb{R}^n$ назыв. диффеоморфизмом, если f — гомеоморфизм и f, f^{-1} — оба гладкие (C^∞).

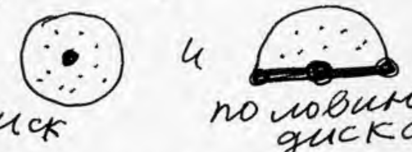
• В этом примере $\dim X = \dim Y = 2$. Задача: построить аналогичный пример в размерности 1, т.е. $\dim X = \dim Y = 1$.

• <u>Опред.</u> Глобальной гладкой 2-мерн. поверхностью M^2 в $\mathbb{R}^n$ (или глобал. 2-многообразием в $\mathbb{R}^n$) назовем мн-во в $\mathbb{R}^n$ такое, что для $\forall$ точки $P \in M^2$ $\exists$ откр. окрестн. (шар) $U(P)$ в $\mathbb{R}^n$: $U(P) \cap M^2$ допускает представление вида # (см. опред. выше). т.е. является локал. гладк. 2-поверхностью.



• Такие 2-поверхности назовем замкнутыми, = без края = без границы. Здесь $\forall$ точка $P \in M^2$ имеет откр. окрестн., гомеоморф. 2-диску D^2.

• <u>Опред.</u> Поверхн. (2-многоо.) имеет край (границу), если в ней есть точки двух типов:



(более подробное опред. см. в учебнике Мищенко, Фоменко).

• Далее слово "глобальная" будем опускать.

• Будем говорить, что такое M^2 <u>гладко вложено</u> в $\mathbb{R}^n$.

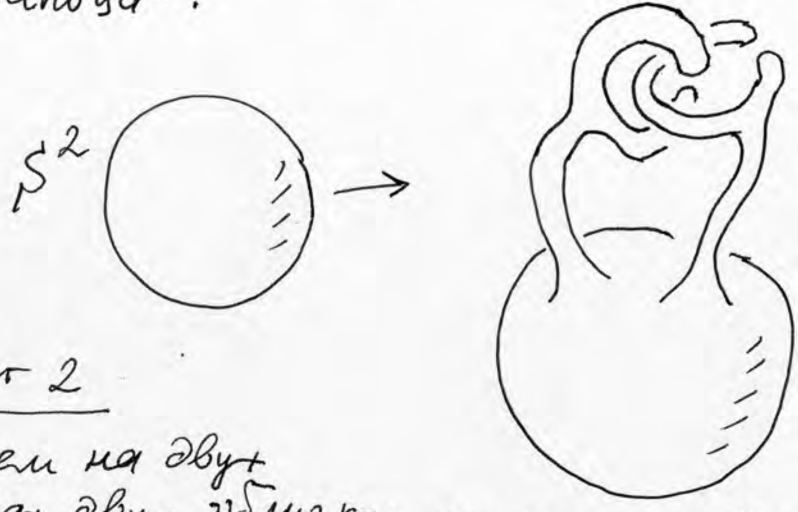
• Яркое отличие "гладкости" от "непрерывности".
Сфера Александера = "дикая сфера".

• Теор. (без д-ва). Гладкая 2-поверхность M, компактная и замкнутая (т.е. без границы), вложенная в $\mathbb{R}^3$, и гомеоморфная 2-сфере, разбивает $\mathbb{R}^3$ на два мн-ва A и B (т.е. $\mathbb{R}^3 \setminus M = A \cup B$) со свойствами: 1) $\bar{A}$ (т.е. замыкание A) гомеоморфно 3-шару D^3, 2) $\bar{B}$ (замыкание B) — односвязно, т.е. $\pi_1(\bar{B}) = 0$, т.е. любая "петля" γ в $\bar{B}$ непрерывно стягивается в точку по $\bar{B}$.

Оказывается, если рассмотреть всего лишь топологическое (непрерывное) вложение сферы S^2 в $\mathbb{R}^3$ (т.е. гомеоморфизм S^2 на образ), то картина может сильно изменится.

Построим специальный гомеоморф. $h: S^2 \to h(S^2)$ сферы S^2 на ее образ $h(S^2)$ в $\mathbb{R}^3$.

Шаг 1. Из стандартн. сферы S^2 в $\mathbb{R}^3$ "вырастают" два "пальца":



эти два "пальца" почти зацеплены, как показано на рис.

Шаг 2

Затем на двух концах двух "близких пальцев" повторяем процесс:

Шаг 3, … $\to \infty$

И так далее, до бесконечности. "Пальцы" все время уменьшаются в размерах.

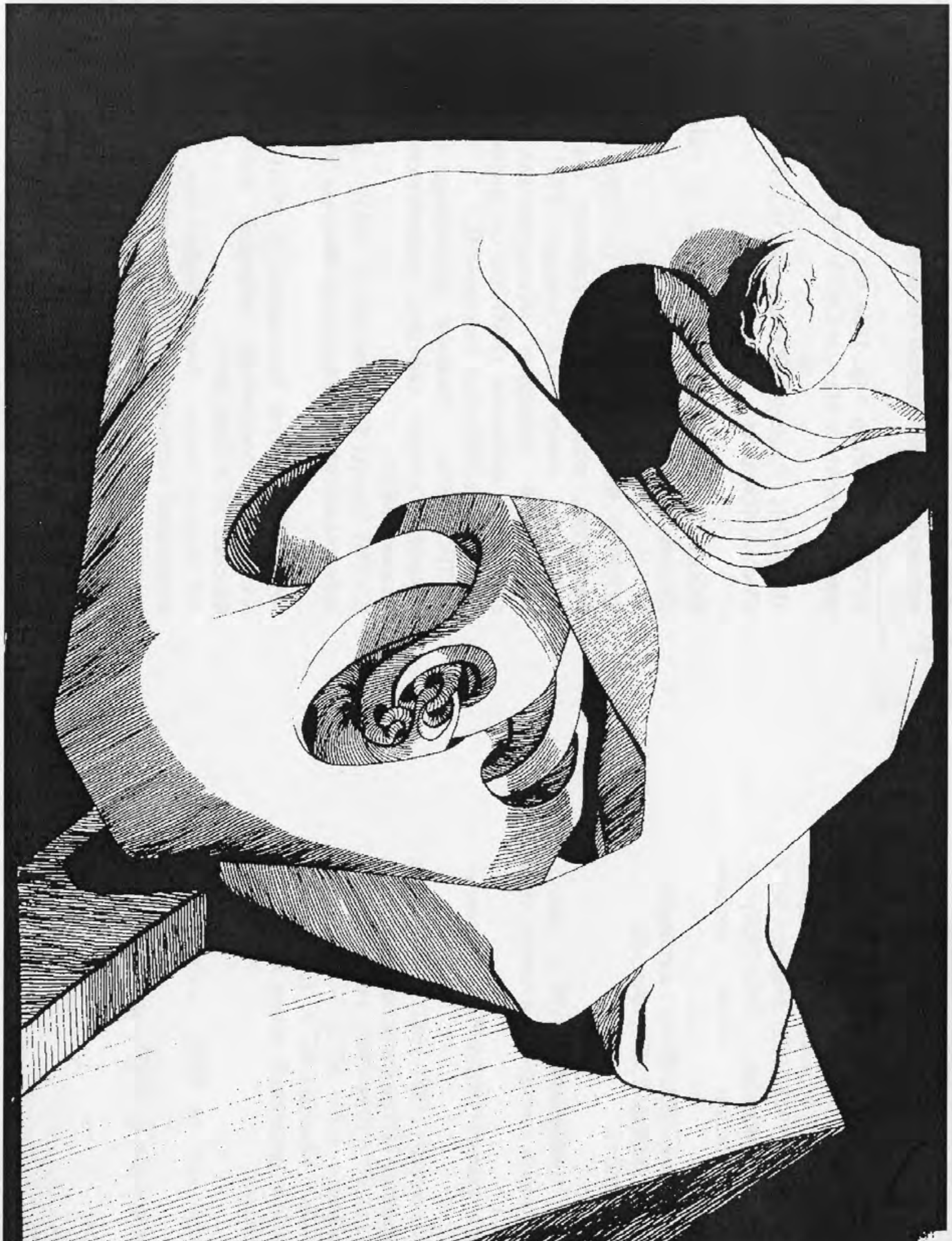
Можно доказать, что "в пределе" получится гомеоморфизм $h: S^2 \to h(S^2)$ сферы S^2 на ее образ $h(S^2)$.

Этот образ, гомеоморфный 2-сфере, и называется сферой Александера или "дикой сферой". Этот "предел" существует.

- Теор. (без д-ва). 1) Замкнутое мн-во $h(S^2)$ гомеоморфно 2-сфере.

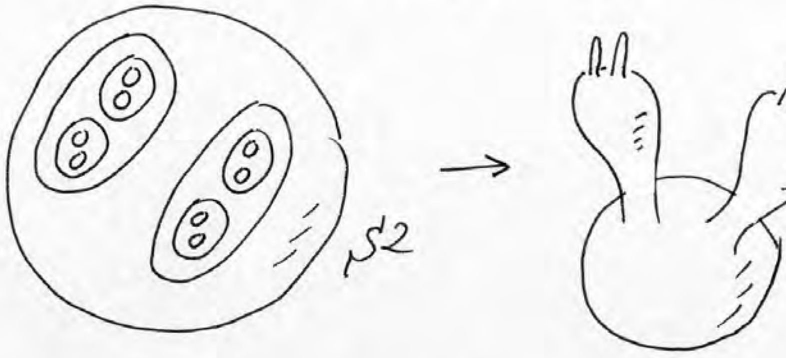
2) Этот гомеоморфизм h не является гладким вложением сферы в $\mathbb{R}^3$. Топологическая сфера $h(S^2)$ не является "локально плоской" в своих особых точках. Таких "плохих" точек очень много: они образуют канторово множество.

3) $\mathbb{R}^3 \setminus h(S^2) = A \cup B$, где $\bar{A}$ гомеоморфно 3-шару D^3 (это – "внутренность" сферы $h(S^2)$), а мн-во $\bar{B}$ – неодносвязно. Т.е. существуют петли $\gamma \subset \bar{B}$, не стягивающиеся в точку по $\bar{B}$.



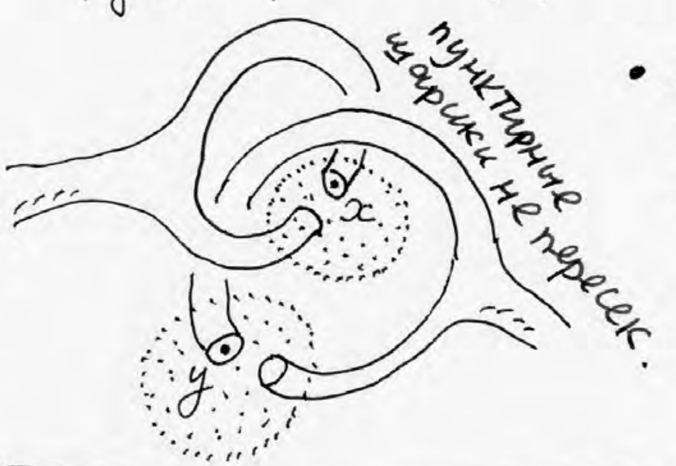
сфера Александера

• Вкратце: почему $\overline{A}$ гомеоморфно шару?
Потому что "пальцы" вырастают из пар дисков на S^2:



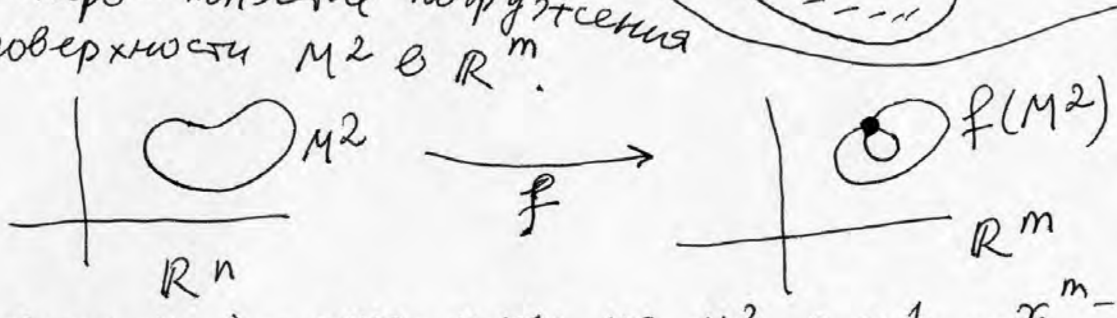
так что шар остается шаром (гомеоморфен D^3). А потому $\overline{A}$ как "предел" тоже гомеоморфно шару.

• Вкратце: почему h — это гомеоморфизм.
т.е. если $x \neq y$ — две разные точки на сфере, то $h(x) \neq h(y)$. В самом деле, если $x \neq y$, то с некоторого момента (при построении h) эти точки окажутся в разных дисках, а потому — на разных "ручках", а потому уже никогда "не встретятся":



• Почему $\overline{B}$ — неодносвязно? См. например, нестягиваемую петлю на рис.

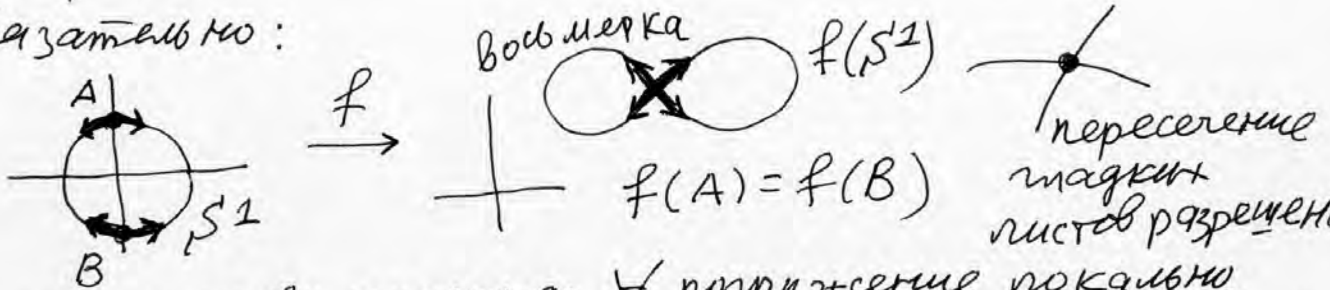
• Теперь — понятие погружения поверхности M^2 в $\mathbb{R}^m$.



Пусть (u,v) — локал. к-ты на M^2, а $x^1, \dots, x^m$ — декарт. к-ты в $\mathbb{R}^m$.
Тогда $f: (x^i = x^i(u,v), 1 \le i \le m)$. Рассмотрим функц. матрицу $df = \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1_u & \dots & x^m_u \\ \dots & \dots & \dots \\ x^1_v & \dots & x^m_v \end{pmatrix}$, где $x^i_u = \dfrac{\partial x^i}{\partial u}$, $x^i_v = \dfrac{\partial x^i}{\partial v}$.
Это — матрица Якоби.
Она задает дифференциал df отображения f.

• <u>Опред.</u> $f: M^2 \to \mathbb{R}^m$ назыв. погружением, если f — гладко (C^∞) и ранг $(df)=2$ в $\forall P\in M^2$.
т.е. векторы r_u и r_v лин. незав. в $\forall$ точке $P\in M^2$.

• Коммент. Не требуется гомеоморфизма M^2 с образом $f(M^2)$. $\forall$ вложение — это погружение. Обратно — не обязательно:



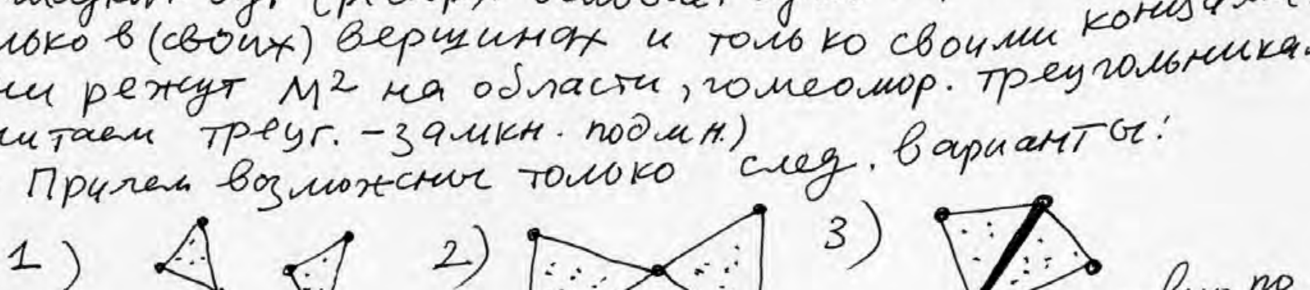
• По теор. о неявн. функциях $\forall$ погружение <u>локально</u> является вложением. Т.е. локально есть гомеоморфизм (и диффеоморф.) на образ.

• <u>Опред.</u> Две поверхн. (два 2-мног.) назыв. гомеом. (диффеом.), если $\exists\, f: M_1 \to M_2$, где f — гомеоморфизм (соотв. диффеоморфизм).

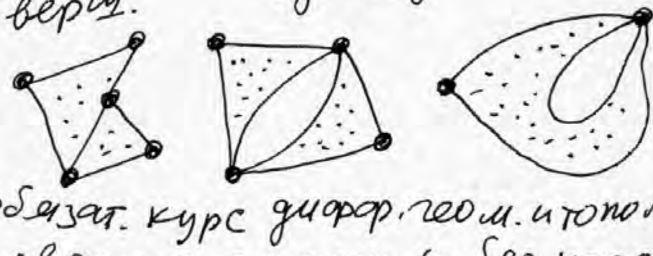
• Теор. классиф. 2-мерн. поверхн. Компактные, гладкие, связные, замкнутые (т.е. без края, без границы).
Цель: классифицировать такие M^2 с точн. до гомеоморф.
• Подробное д-во см. в: Мищенко, Фоменко, „Краткий курс дифф. геом. и топол.", стр. 180 – 191 (М., URSS, Леланд, 2016).

• <u>Шаг 1</u>. Триангуляция. Определение. Трианг. гладкой 2-поверхн. M^2 — это набор (конечный) вершин (точек) и гладких дуг (ребер). Условие: дуги пересекаются только в (своих) вершинах и только своими концами. Они режут M^2 на области, гомеомор. треугольникам. (считаем треуг. — замкн. подмн.)

• Примем возможны только след. варианты:



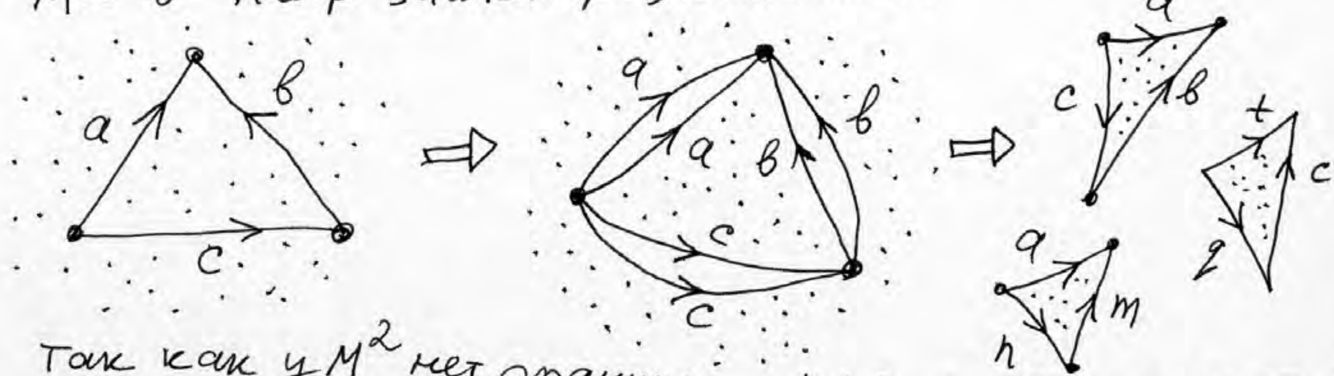
• Запрещено, например:



• Теор. (без д-ва. См. <u>наш</u> обязат. курс дифф. геом. и топол.) $\forall$ гладкое 2-мерн. комп. связное, замкн. (= без края) многообр. допускает гладкую <u>конечную</u> триангуляцию.

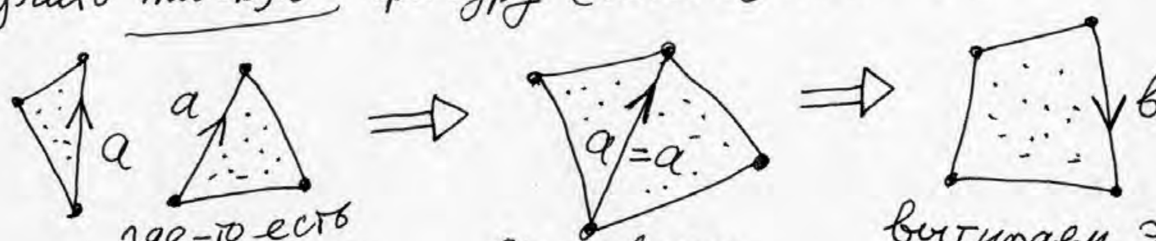
• Берем любую такую трианг. на M^2.

• <u>Шаг 2</u>. Метим ребра — ставим на них буквы (все разные!) и стрелки (ориентац.) произвольно. Затем режем M^2 по всем ребрам и "рассыпаем" M^2 в набор замкн. треугольников.



Так как у M^2 нет границы, то $\forall$ буква встречается в наборе Δ ровно два раза! Т.к. у каждого разреза есть два берега.

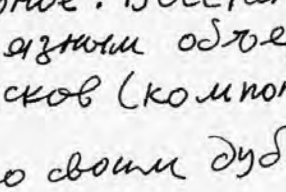
• <u>Шаг 3</u>. Склеиваем обратно треугольники, чтобы получить <u>плоскую</u> фигуру (многоугольник).



На границе получившегося плоского многоугол. обязат. $\exists$ хотя бы одна буква "в" такая, что ее дубликат "в" лежит на каком-то из оставшихся треугольников.

Д-во: допус. противное. Восстановим все склейки и M^2 окажется несвязным объединением по крайней мере 2-х непересек. кусков (компонент). Противоречит связности M^2.

Итак, $\exists$ "в" со своим дубликатом в оставшихся треугольниках:

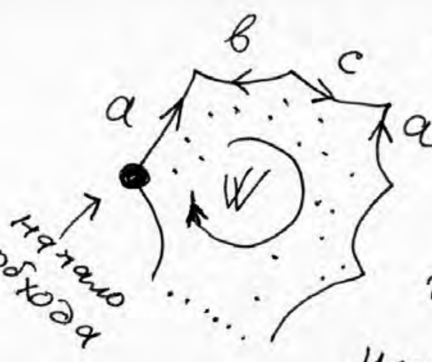


склеиваем по "в", вытираем этот разрез. И т.д.

• В итоге получим <u>плоский</u> связный многоугольник W. Мы исчерпаем (т.е. подклеим) <u>все</u> треугольники (иначе будет противоречие со связностью M^2).

• Итог: на границе ∂W многоугольника W каждая буква "a" встреч. ровно два раза. Построение W — неоднозначно.

• <u>Шаг 4</u>. По многоуг. W строим "слово" (код) W. Будем его упрощать и приведем к каноническому виду (это — конечная цель).



обходим ∂W и выписываем буквы, указывая их ориентации:

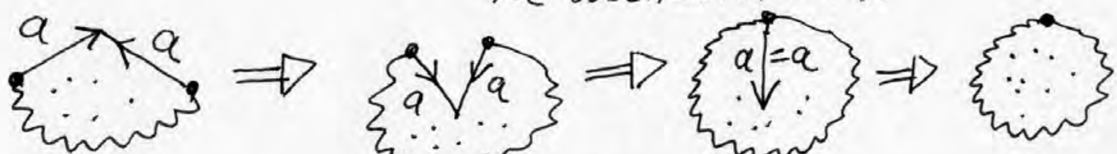
$$W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}\ ;\ \varepsilon_\alpha = \pm 1 .$$

итак: $M^2 \longrightarrow W(M^2)$ (= слово, код).

Неоднозначно. Это — не страшно. Сократим все стоящие рядом $a a^{-1}$.

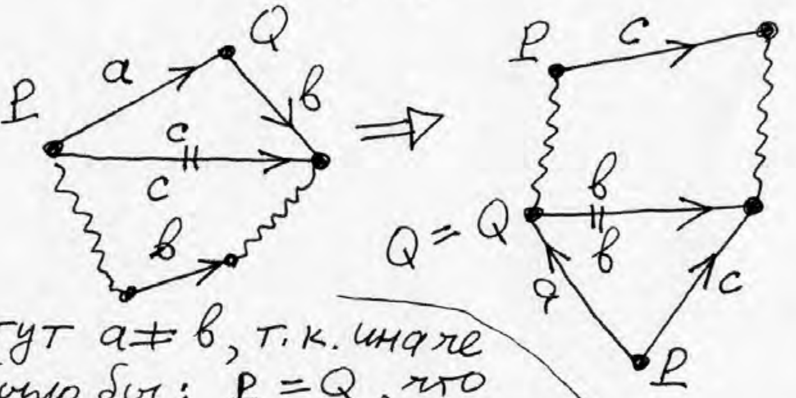
<u>лемма.</u> Если $W = \text{——}\, a a^{-1} \,\text{——}$ (прочерком обозначаем остальные буквы) то на том же M^2 $\exists$ новая система разрезов, что $W' = \text{——} \ \text{——}$ (т.е. aa^{-1} исчезает, а остальные — не меняются).

<u>д-во.</u>



<u>шаг 5.</u> Все вершины $\longrightarrow$ в одну вершину.

Рассмот. классы эквивалентных вершин (т.е. склеивающихся в одну точку на M^2): $\{P\}, \{Q\}, \dots, \{R\}$. Тогда (если их > чем один) $\exists$ два класса $\{P\}$ и $\{Q\}$ с парой их вершин на одном ребре:



итак: $\{Q\} - 1$

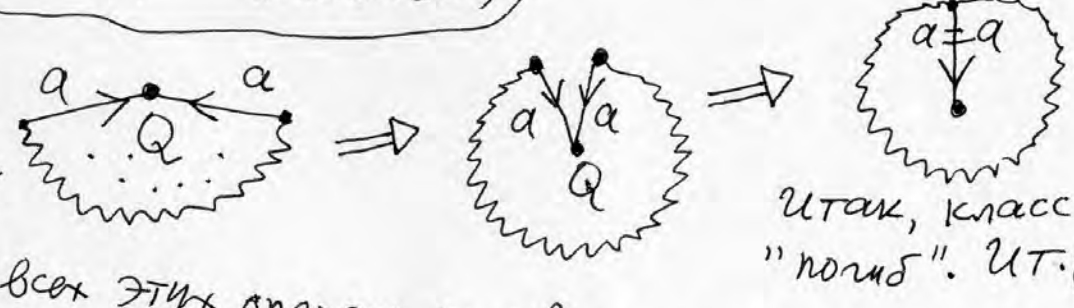
$\{P\} + 1$

Продолжая таким образом, "перекачиваем" весь класс $\{Q\}$ в другие классы вершин.

Последний шаг: когда в $\{Q\}$ осталась 1 вершина

тут $a \neq b$, т.к. иначе было бы: $P = Q$, что противоречит выбору $P \neq Q$.

А также $b \neq a^{-1}$ (см. выше)



Итак, класс $\{Q\}$ "погиб". И т.д.

• При всех этих операциях M^2 заменяется на гомеоморфное. Меняем лишь код $W \to W'$ (но не M^2!). Меняем систему разрезов.

т.е. выбираем ("рисуем") более экономичные, оптимальные разрезы. При упрощении W новые разрезы уже не являются триангуляцией. Но это уже неважно. Поверхность M^2 при этом вообще не меняется.

сферы с ручками, проективные плоскости, лист Мебиуса как "скрещенный колпак" и т.д.