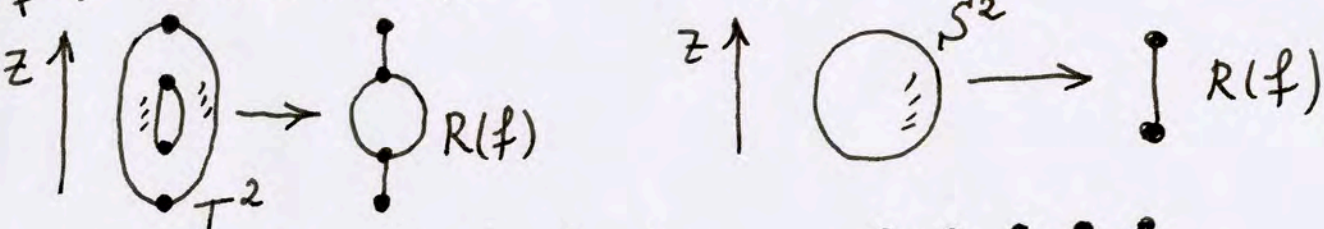
• Ф-ции Морса на 2-мерн. поверхн. "Атомы" как "перестройки".

Пусть f — ф-я Морса на M^2 (простая или сложная). Рассмотрим уровень $(f = a)$ — регул. или сингул. (т.е. критический). Вообще говоря, он несвязен. Изобразим каждую компон. связности — точкой. Меняя уровень a, получаем граф, назыв. "графом Риба" (Reeb) $R(f)$. Получаем непрер. отобр. $M^2 \to R(f)$. Примеры: f — ф-я высоты на торе T^2 в $\mathbb{R}^3$; или ф-я высоты на сфере:

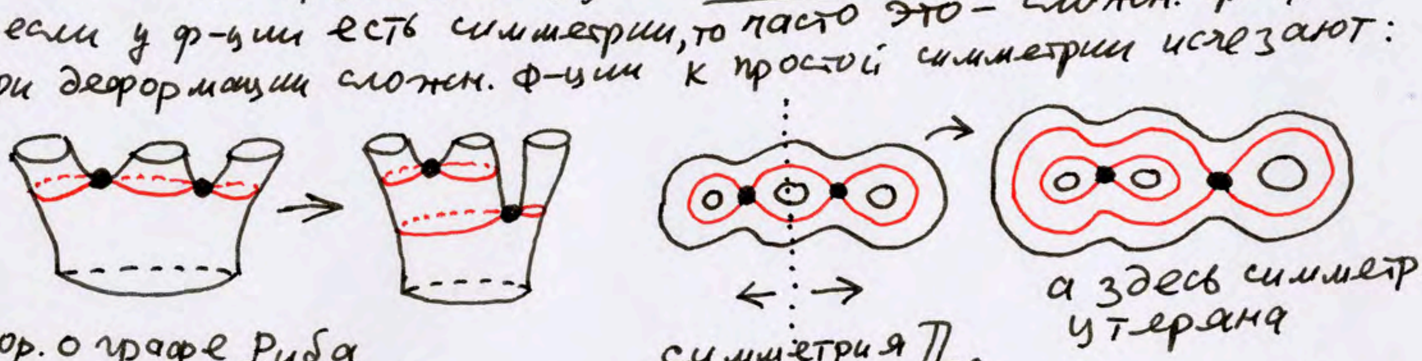


или:

сфера S^2 в $\mathbb{R}^3$

Но граф Риба — слишком грубое описание функции. Более точная характеристика — "молекула". Но об этом — ниже. Сначала — что такое "атомы".

• Выше мы говорили о простых и сложных ф-ях Морса. Простые — когда на $\forall$ критич. уровне — ровно 1 крит. точка, а сложные — когда есть критич. уровень, на котором — несколько крит. точек. Вопрос: зачем изучать слож. ф-ции Морса, когда малым возмущением их можно превратить в простые? Ответ: часто приходится изучать симметрии ф-й Морса; а если у ф-ции есть симметрии, то часто это — сложн. ф-я. При деформации сложн. ф-ции к простой симметрии исчезают:



симметрия $\mathbb{Z}_2$

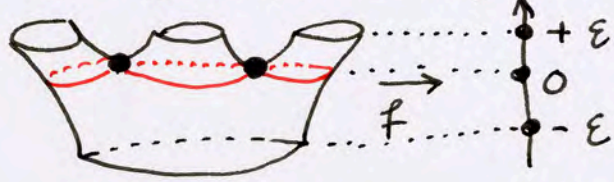
• Теор. о графе Риба простой ф-ции Морса.

Пусть f — глад. простая ф-я Морса на M^2, где заранее известно, что M^2 — либо ориентир., либо неориент. Тогда граф Риба $R(f)$ однозначно определяет тополог. тип M^2 с точн. до гомеоморфизма (диффеом.). Здесь M^2 — комп. глад. замкн.

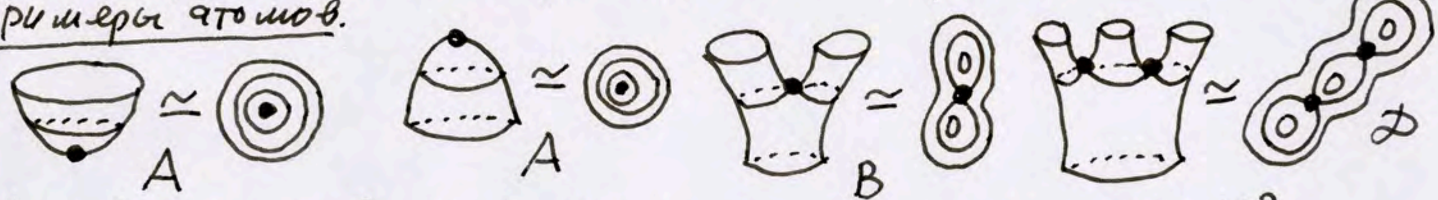
Д-во. Т. к. f — простая ф-я Морса, то вершины графа $R(f)$ могут быть только такими: max, min, седло. Зная $R(f)$, подсчитываем кол-во max, min и седел у ф-ции f. По теор. Морса мы знаем клеточное разб. M^2: $\bigcup_{i=1}^{p} e_i^0 + \bigcup_{j=1}^{q} e_j^1 + \bigcup_{k=1}^{s} e_k^2$, где $p = \#\max$; $s = \#\min$; $q = \#(\text{седел})$.

Отсюда находим эйлер. характ. $\chi(M^2)=p-q+s$. Так как тип ориентируемости M^2 (глад. комп. замкн. связ.) нам известен, получаем ответ: либо $M=M^2_g$ (ориент.), либо $M=M^2_t$ (неориент.). Чтд.

- Если f — сложн. ф-я на M^2, то граф Риба тополог. тип M^2, вообще говоря, не определяет.
- Пусть f — ф-я Морса на M^2 и 0 — критич. значение, т.е. на уровне $f^{-1}(0)$ есть критич. точки. Пусть $\varepsilon>0$ мало, и рассмот. поверхность $f^{-1}[-\varepsilon,+\varepsilon]$:

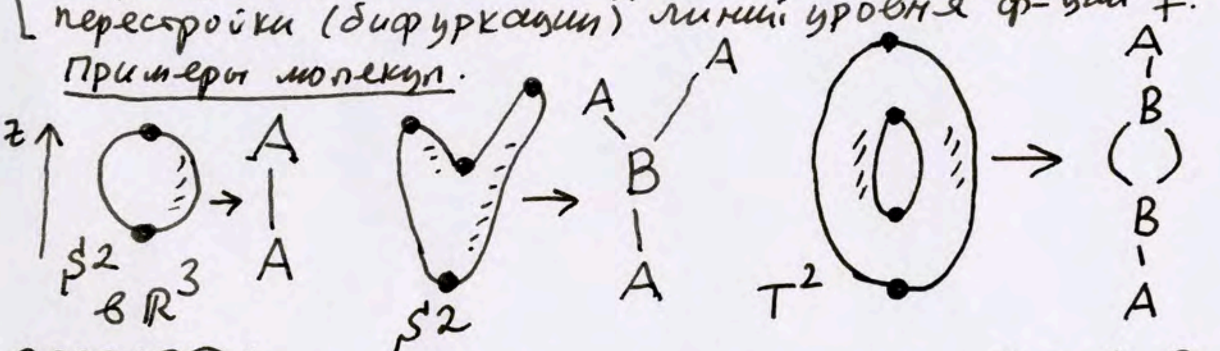


- <u>Опред.</u> "Атомом" называв. поверхн. $f^{-1}[-\varepsilon,+\varepsilon]$, расслоен. на линии уровня ф-ции f, и с фиксиров. направл. роста ф-ции f. Два "атома" считаем эквивал., если $\exists$ диффеом. атома P на атом Q, перевод. связные компон. уровня ф-ции f на P в связные компон. уровня ф-ции g на Q и сохран. направл. роста ф-ий f и g. Точнее — "атомом" будем называть такой класс эквивалент. Сложностью атома назовем кол-во критич. точек на крит. уровне $f=0$. Атом ориентируем (неориен.), если поверхн. P^2 ориент. (неориен.).
- <u>Примеры атомов.</u>



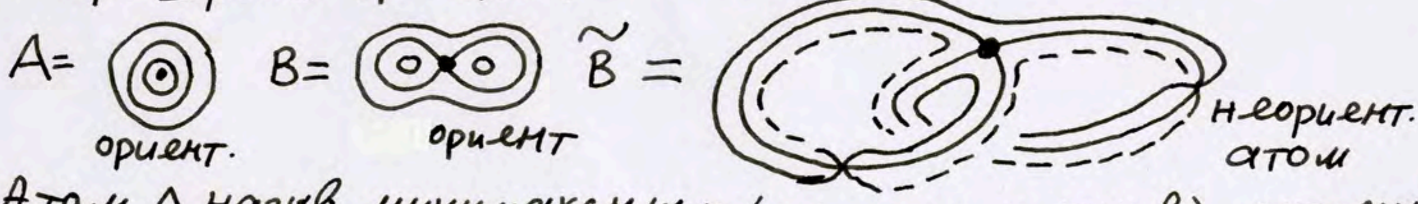
- <u>Опред.</u> Пусть f — ф-я Морса на глад. комп. замкн. M^2. "Молекулой" $W(f)$ называв. граф Риба, у которого в качестве вершин рассмат. атомы. Точки на ребрах молекулы изображ. связные компон. линий уровня ф-ции f. Атомы показывают перестройки (бифуркации) линий уровня ф-ции f.

<u>Примеры молекул.</u>



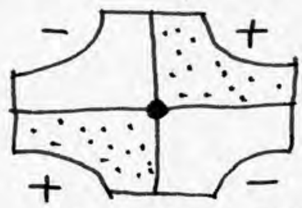
это — функции высоты в $\mathbb{R}^3$.

- Теор. $\exists$ ровно три атома сложности 1: A, B, $\widetilde{B}$. См. рис.:

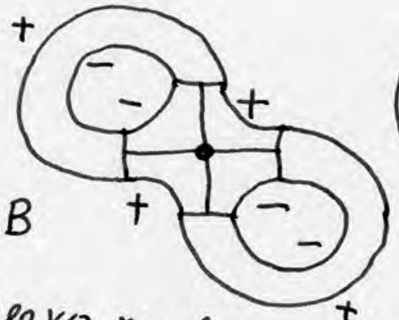


- Атом A назыв. минимаксным (min, max ф-ции f), остальные атомы назыв. седловыми (седла ф-ции f).
- <u>Д-во теор.</u> Ясно, что минимакс. атом только один, это A.

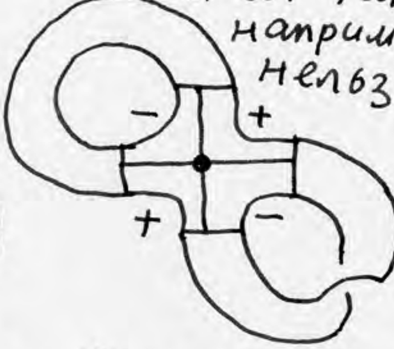
У атома седлового сложн. 1 есть ровно 1 вершина и ее окрестн. – это "коорд. крест":

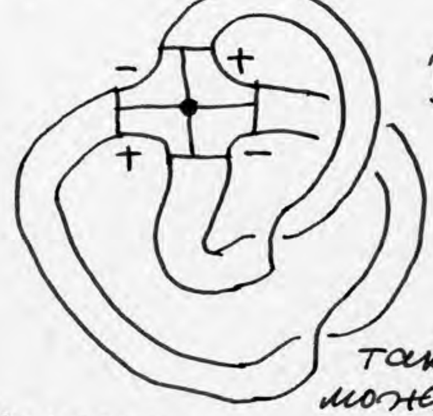


Чтобы восстановить весь атом, надо соединить концы креста лентами (прямоугол.). Важно при этом следить, чтобы "положител." линии уровня склеивались с "положител." (тогда "отрицат." – с "отрицат."). Перебираем все варианты:



а вот так, например, нельзя!





так можно

Легко проверить, что все остальные варианты соединения концов креста – запрещенные. Ч.т.д.

• Рассм. (M^2, f) и (N^2, g), где f и g – ф-ции Морса. Назовем эти пары послойно эквивал., если $\exists$ диффеом. $\lambda: M^2 \to N^2$, переводящ. связн. компон. линий уровня f в связн. компон. линий уровня g.

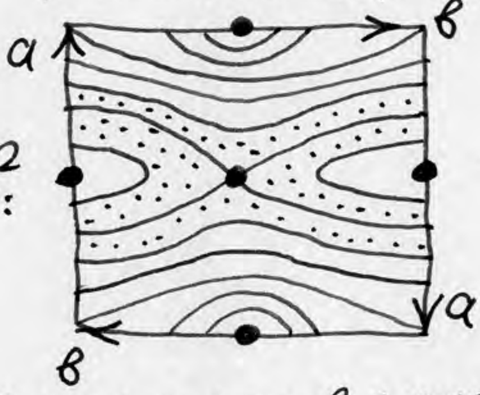
• **Теор.** (M^2, f) и (N^2, g) послойно эквивал. $\Longleftrightarrow$ их соответст. молекулы $W(f)$ и $W(g)$ совпадают (изоморфны).

Молекулы называ. изомор., если $\exists$ гомеоморф. $W(f)$ на $W(g)$, перевод. ребра в ребра и атомы в атомы.

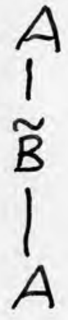
• Д-во простое и предоставл. слушателям.

• В каких молекулах встреч. атомы $A, B, \tilde{B}$? Для A и B см. примеры выше. Покажем для $\tilde{B}$. Зададим ф-ю Морса на проект. плоск. $\mathbb{R}P^2$ ее линиями уровня:

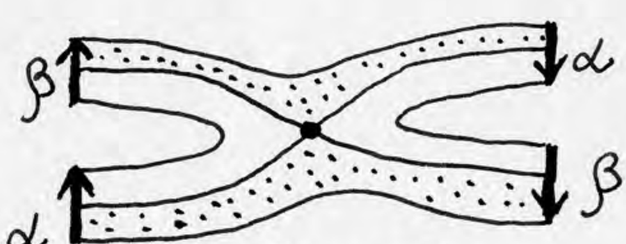
$\mathbb{R}P^2$:



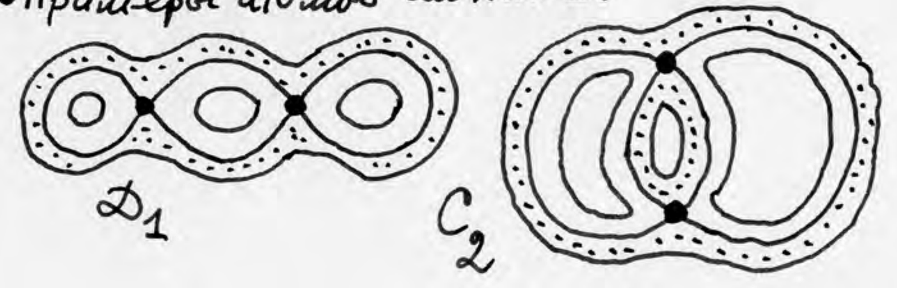
$\to$



Здесь атом $\tilde{B}$ имеет вид:



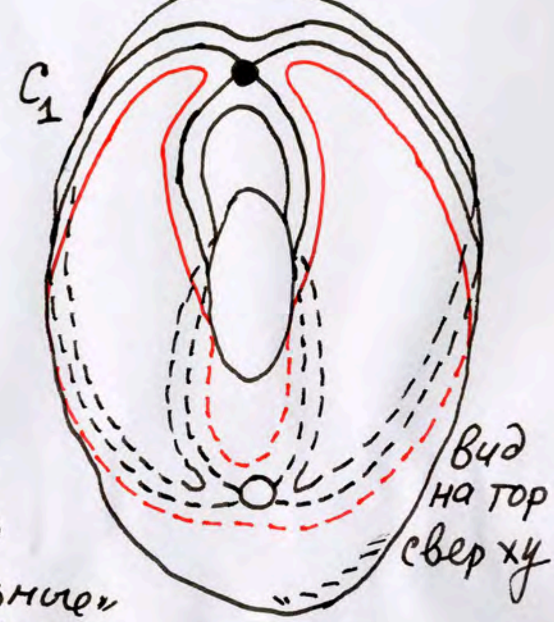
• Примеры атомов сложн. 2:



• Атом — это 2-поверхн. с границей (одна или несколько окружностей). Заклеим все граничн. окружн. дисками. Получим замкн. 2-многообр. (ориент. или неориент.).

[• **Опред.** Родом атома назыв. род этой поверхности (т. е. число ручек или листов Мебиуса).

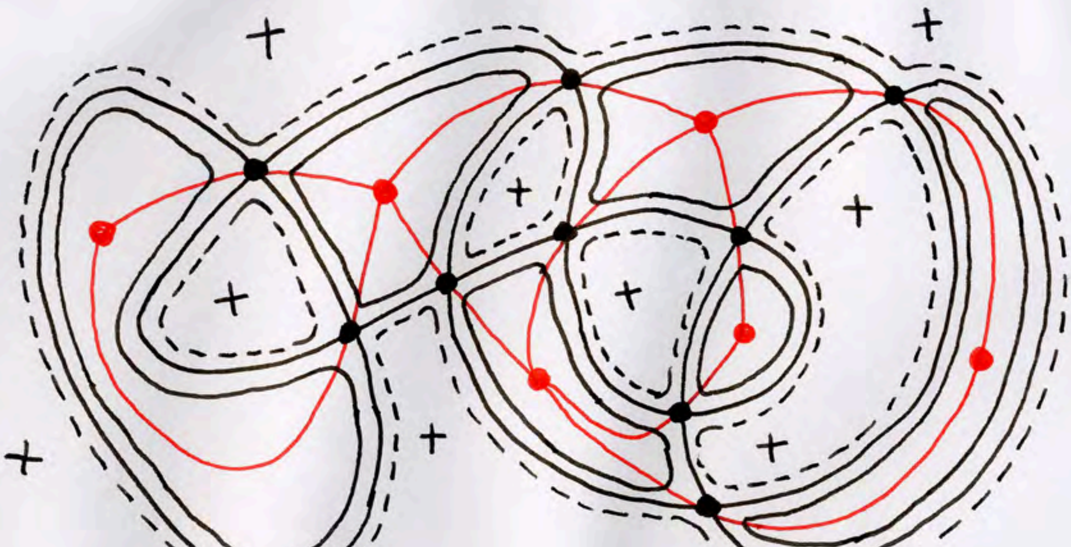
Примеры. Атомы A, B, C_2 имеют род 0 (сфера). Атом C_1 имеет род 1, т. е. "живет" на торе T^2. См. рис.:



• Оказывается, 2-атомы имеют другую наглядную интерпрет. (реализацию). Рассм. клеточн. разбиения 2-поверхностей, т. е. разбиение на многоугольники с гладкими ребрами.

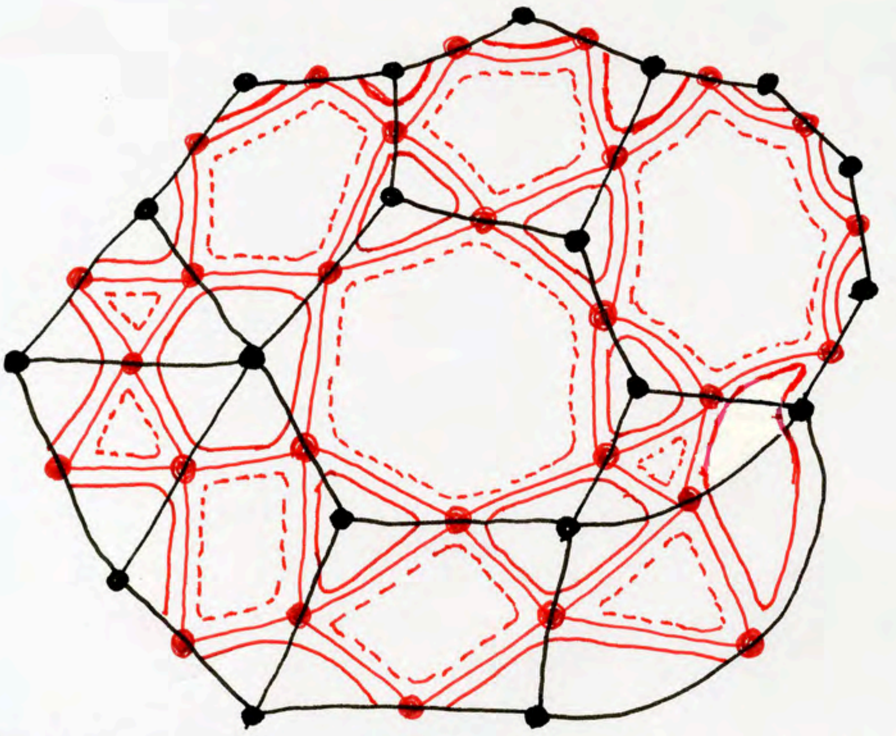
[• **Теор.** $\exists$ взаимно-однозн. соответствие между седловыми 2-атомами и клеточными разбиениями замкн. компакт. поверхн.

Д-во. 1. Рассм. седловой атом и заклеим его граничн. окружн. 2-дисками. Получим замкн. поверхн. с клеточным разбиением, которое построим так. Берем "отрицательные" области атома (где $f \leq 0$), отмечаем их центры и соединяем через вершины атома ребрами.



седловой атом ⟶ клеточное разбиение 2-поверхности.

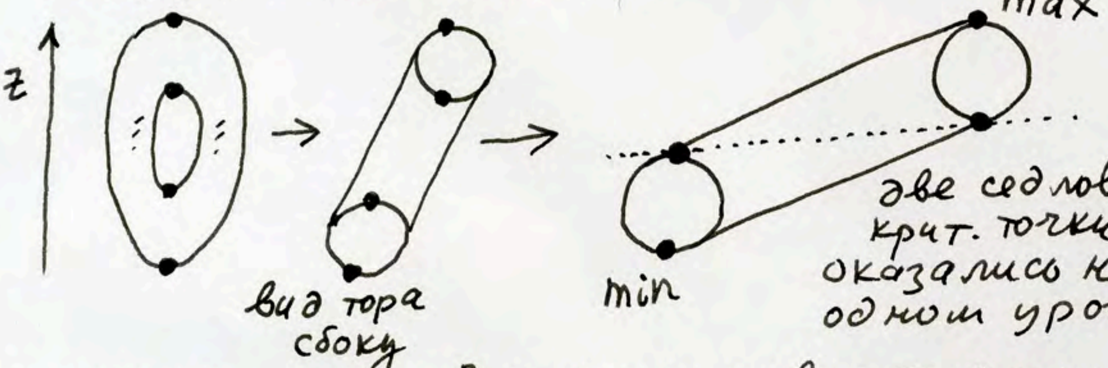
2. Обратно. Дано клеточн. разбиение поверхности. Надо построить атом. На середине каждого ребра клеточн. разб. поставим "белую" вершину. Это будут вершины атома. Соединим соседние белые вершины ребрами. Получаем атом. Из построения видно, что полученное соответ. седл. атом ⟷ клеточн. разб. взаимно однозначно. Каждая вершина седлового атома имеет кратн. = 4. Вершины клеточн. разб. могут иметь произвол. кратность.



клеточное разбиение 2-поверхности → → атом (седловой)

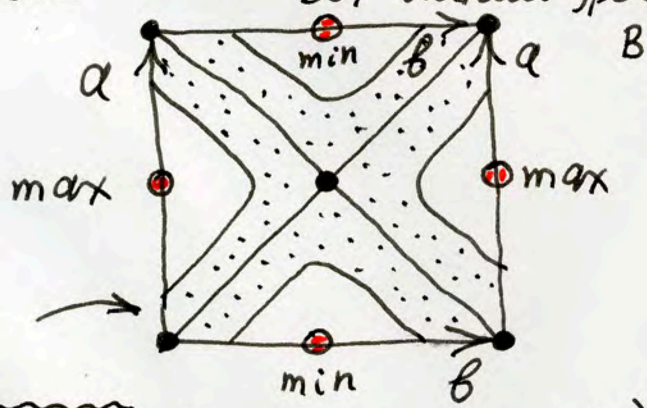
4итрд.

Атом C_1 (см. выше) можно реализовать в молекуле $W(f)$ для подходящей функции высоты на торе в $\mathbb{R}^3$. Надо взять обычное "вертикальное" вложение тора и затем "слегка положить его набок", наклонить.



$$W(f) = \begin{array}{c} A \\ | \\ C_1 \\ | \\ A \end{array}$$

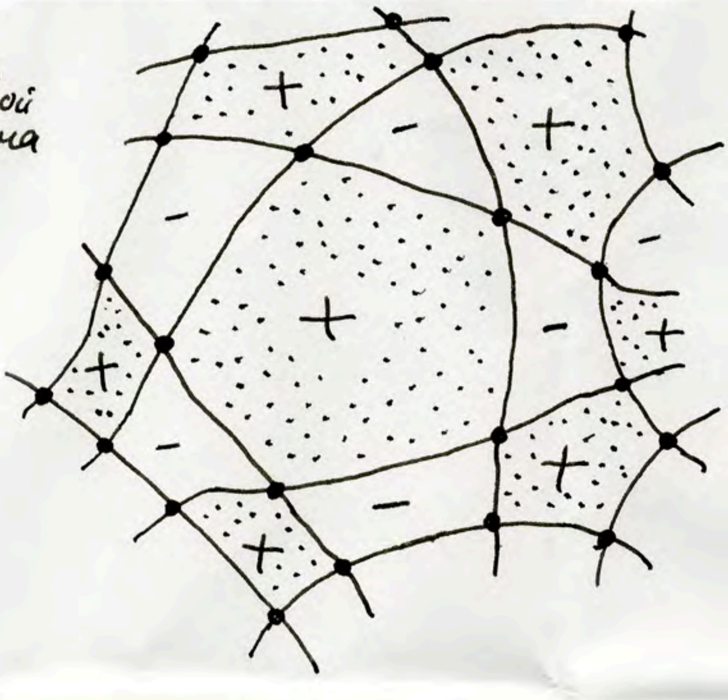
Вот линии уровня этой ф-ции на торе:



В центре — седло, и второе седло — в вершинах квадрата (все 4 вершины склеены в одну точку на торе).

• Вернемся к взаимно-одноз. соотв.: седловой атом ⟷ клеточное разбиение. Как мы видим, сам атом можно представить как специальное клеточное разбиение замкн. 2-поверхн. M^2. Заклеим граничн. окруж. атома дисками и получим замкн. M^2, в котором лежит граф — критич. уровень (слой) атома, т.е. ($f=0$). Так как атом — седловой, то все его вершины имеют кратность 4. Отметим те диски на M^2, где $f>0$ и те, где $f<0$. Получаем "шахматное" клеточное разбиение M^2. См. рис. Т.е. атомы (седлов.) — это "шахматные" клеточн. разбиения.

седловой атом на M^2



Таким образом, выше мы доказали $\exists$ взаимно-одноз. соотв. между шахматными клеточн. разбиениями замкн. M^2 и произвольными клеточн. разбиениями M^2.