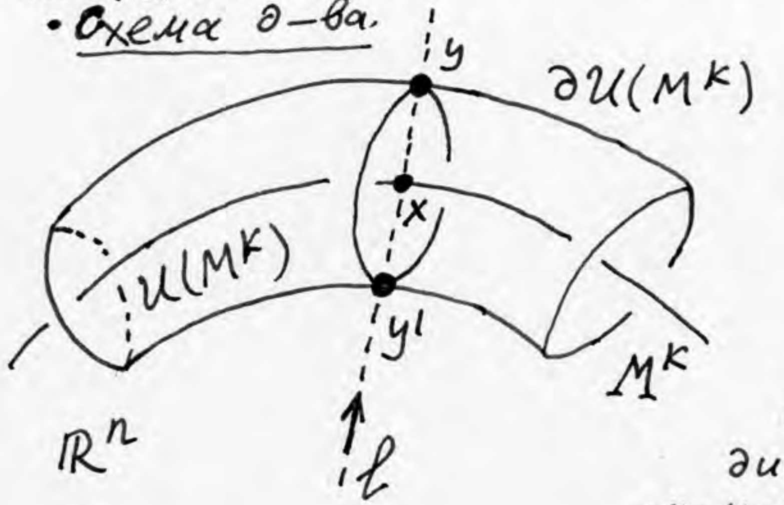
- Выше мы доказали $\exists$ ф-ции Морса на $\forall$ гиперповерх. в $\mathbb{R}^n$, указав такую ф-ю в классе ф-ций высоты. Аналогично можно доказ. теорему для подмног. $M^k \subset \mathbb{R}^n$ любой коразмерности.
- Теор. Пусть $M^k \subset \mathbb{R}^n$ – гладк. подмн. Тогда почти все ф-ции высоты на M^k явл. ф-ями Морса.
- Схема д-ва.



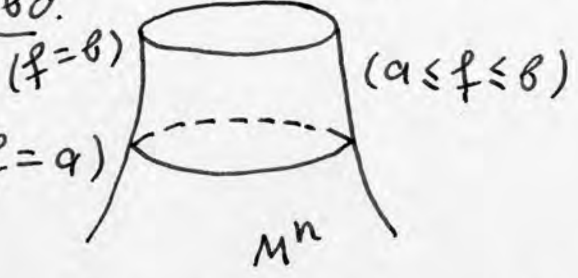
Рассм. трубчатую окрестн. $\mathcal{U}(M^k)$ малого радиуса ε, т.е. в $\forall$ точке $x \in M^k$ возьмем диск D^{n-k} радиуса ε, ортогон. к касат. пл-ти $T_x M^k$. Граница $\partial\mathcal{U}(M^k)$ явл. гладк. подмног. $\dim = n-1$ в $\mathbb{R}^n$. Граница диска $D_\varepsilon^{n-k}(x)$ – это сфера $S^{n-k-1} \subset \partial\mathcal{U}(M^k)$. Тогда $\forall$ крит. точке $x \in M^k$ для функции высоты g_ℓ на M^k соответст. две критич. точки y и y' для функции высоты h_ℓ на $V^{n-1} = \partial\mathcal{U}(M^k)$. Если $\operatorname{ind}(x) = \lambda$, то
$\operatorname{ind}(y) = \lambda + (n-k-1)$, а $\operatorname{ind}(y') = \lambda = \operatorname{ind}(x)$.
Причем крит. т. x невырожд. для $g_\ell \longleftrightarrow$ обе крит. точки y и y' невырожд. для h_ℓ. Поэтому для почти всех ℓ ф-я g_ℓ явл. ф-ей Морса на M^k (так как для почти всех ℓ ф-я h_ℓ явл. ф-ей Морса на V^{n-1}). Чтд.

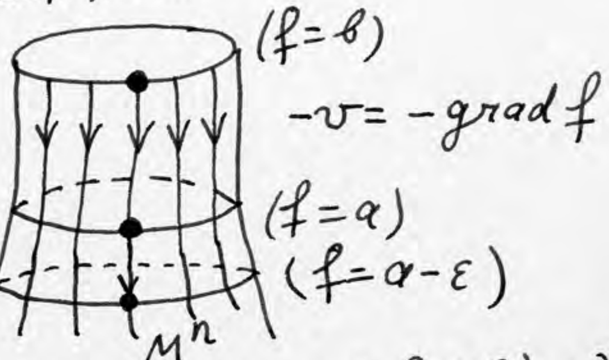
! [А так как по теор. Уитни $\forall$ гладк. мног. M^k можно вложить в некоторое конечном. $\mathbb{R}^n$ в виде гладк. поверхн. (подмног.), то мы доказали $\exists$ ф-ции Морса на $\forall$ гладком M^k.

- Связь свойств ф-ции Морса с топол. мног. M^n.
- Шаг 1. Рассм. произв. риман. метр. на M^n. Например, реализовав M^n как подмног. в $\mathbb{R}^N$. Пусть $f(x)$ – ф-я Морса на M^n. Рассм. вект. поле $v = \operatorname{grad} f$. Тогда (см. выше) поле v ортогон. поверхностям уровня $f = \mathrm{const}$.
- Шаг 2. Пусть a и b – два регул. значения ф-ции f, т.е. на уровнях $(f=a) = f^{-1}(a)$ и $(f=b) = f^{-1}(b)$ нет критич. точек ф-ции f. По теор. о неявн. ф-ях, уровни $(f=a)$ и $(f=b)$ – это гладк. подмн. в M^n. Обозначим через $(f \le a)$ и $(f \le b)$ – "срезы" M, т.е. $(f \le a) = (x \in M$, где $f(x) \le a)$. Тогда $(f \le a)$ и $(f \le b)$ – мног. с краем и если $a < b$, то $(f \le a) \subset (f \le b)$.

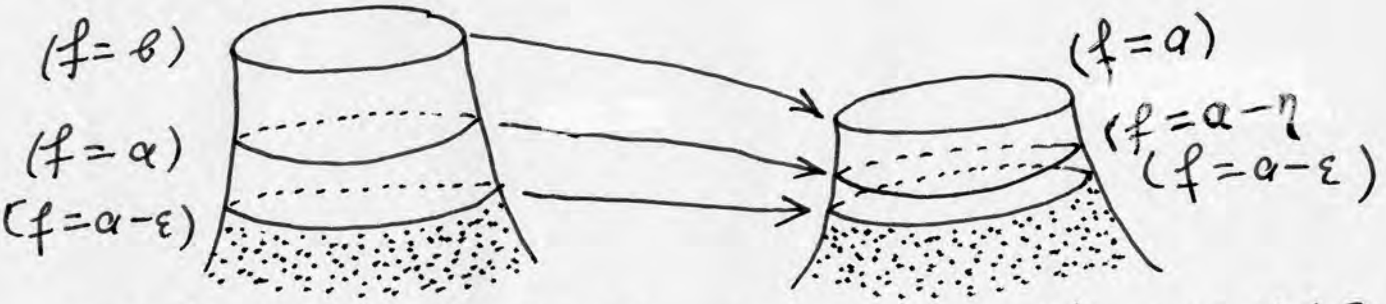
• **Шаг 3.** Лемма. Пусть в "слое" ($a \le f \le b$) нет крит. точек f, т.е. $\operatorname{grad} f \ne 0$ при $a \le f(x) \le b$. Тогда:
1) мног. ($f=a$) и ($f=b$) диффеоморфны,
2) мног. ($f \le a$) и ($f \le b$) диффеоморфны.

Д-во.





Рассм. вект. поле $-v = -\operatorname{grad} f$ на "слое" ($a-\varepsilon \le f \le b$), где ε — мало. Тогда $-v \ne 0$ на этом слое. Рассм. интеграл. траект. $\gamma(t)$ поля $-v$. Они начинаются на ($f=b$) и доходят до ($f=a-\varepsilon$). Они не пересекаются. Т.е. ($a-\varepsilon \le f \le b$) является прямым произвед. ($f=b$) на отрезок. Сдвигая ($f=b$) вдоль траект. $\gamma(t)$ "вниз", мы совмещаем это мног. с уровнем ($f=a$), а потом — с уровнем ($f=a-\varepsilon$). Ясно, что получили диффеоморфизм: $(f=b) \approx (f=a) \approx (f=a-\varepsilon)$. Следоват.: $(f \le b) \approx (f \le a)$:

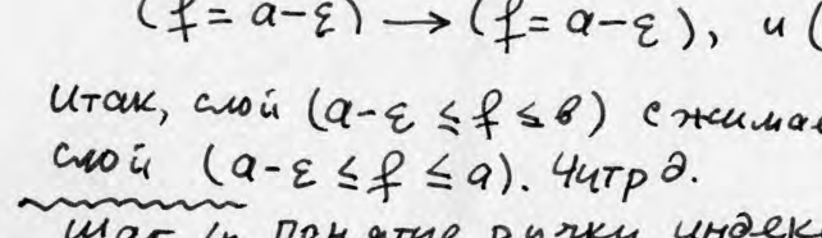


т.е. $(f=b) \to (f=a)$, $(f=a) \to (f=a-\eta)$, где $\eta < \varepsilon$,
$(f=a-\varepsilon) \to (f=a-\varepsilon)$, и $(f \le a-\varepsilon) \to (f \le a-\varepsilon)$.
тождественно

Итак, слой ($a-\varepsilon \le f \le b$) сжимается диффеоморфизмом на слой ($a-\varepsilon \le f \le a$). Чтд.

Шаг 4. Понятие ручки индекса λ.

Опред. Ручкой размерности n и индекса λ назыв. прямое произвед. $H^n_\lambda = D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ двух дисков (шаров):

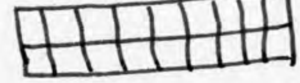


диск D^λ иногда назыв. "осью ручки". Топологически ручка, конечно, гомеом. шару D^n, но нам важна "координатная сетка" $D^\lambda \times D^{n-\lambda}$.

Шаг 5. Граница ручки. Примеры.

Для оператора границы прямого произвед. верна "формула

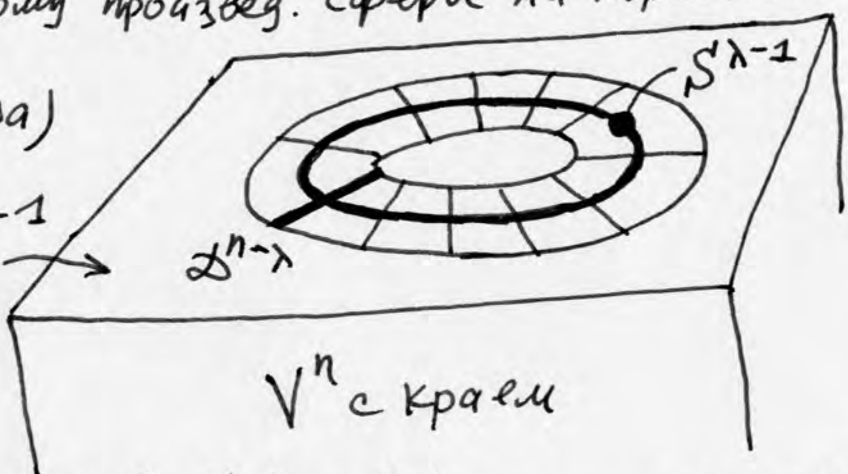
Лейбница": $\partial(X\times Y)=(\partial X)\times Y \cup X\times(\partial Y)$.
Для ручки имеем: $\partial H^n_\lambda=(\partial D^\lambda)\times D^{n-\lambda}+D^\lambda\times(\partial D^{n-\lambda})=$
$=(S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda})+(D^\lambda\times S^{n-\lambda-1})$. Примеры.
Пусть $n=2$. Тогда: $H^2_0=D^0\times D^2=$ диск $=$  D^2

$H^2_1=D^1\times D^1=$ прямоугольник $=$ 

$H^2_2=D^2\times D^0=$ диск $=$ 

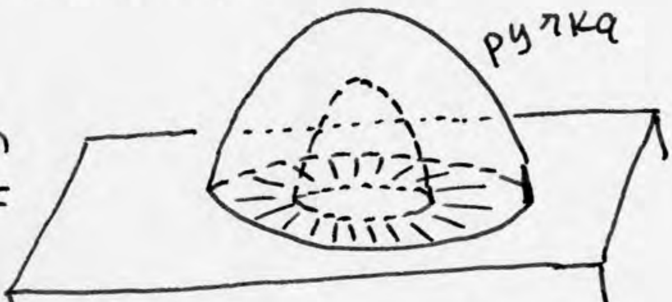
Шаг 6. Операция приклейки ручки.
Пусть V^n — мног. с краем ∂V разм. $=n-1$. Пусть в крае ∂V есть сфера $S^{\lambda-1}$ такая, что ее малая трубчатая окрестность $U(S^{\lambda-1})\simeq S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda}$, т.е. диффеоморфна прямому произвед. сферы на нормальный (ортогон.) диск.

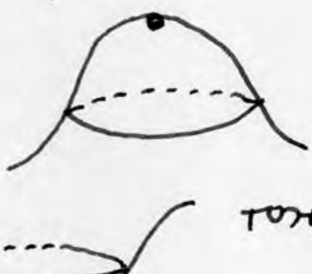
(граница) край $(\partial V)^{n-1}$



Ясно, что окрестн. $U(S^{\lambda-1})$ гомеоморф. одной из компонент границы ручки H^n_λ, а именно: $S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda}$. Приклеим ручку к V^n, отождествив $S^{\lambda-1}\times D^{n-\lambda}$ как часть границы ручки, с $U(S^{\lambda-1})$. Получим новое мног. с новым краем, т.е.
$\tilde V^n=V^n+H^n_\lambda$, см. рис.

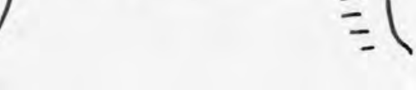
Вот мы и определили операцию приклейки ручки индекса λ. $\tilde V^n=$



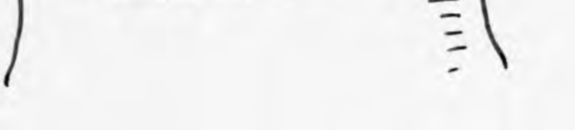
Шаг 7. Примеры.
Рассм. M^2 с краем S^1.
Тогда: $M^2+H^2_2$ есть:  т.е. "дырку" заклеили шапочкой (диском)

$M^2+H^2_0$ есть:  тоже дырку заклеили диском

$M^2+H^1_1$ есть:



или:



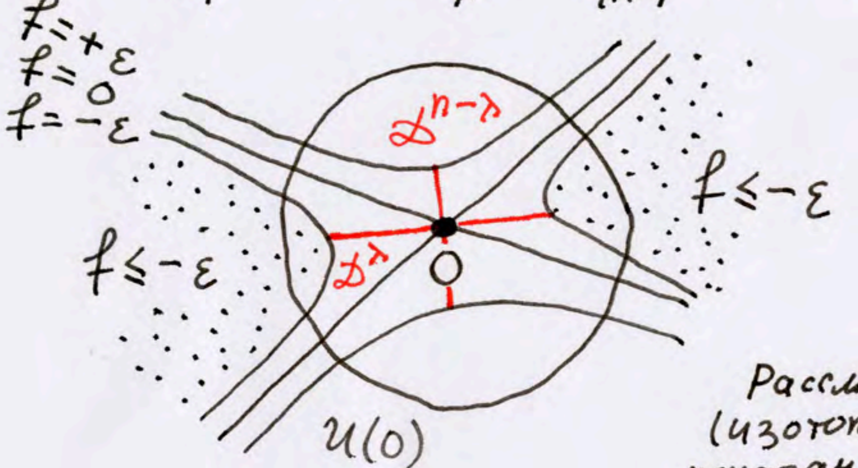
Отсюда видно, что приклейка ручки — операция "неоднозначная", так как в случае H^2_1 из, например, ориентируемого V^2 с краем S^1 может получиться как ориентир. $\tilde{V}^2 = V^2 + H^2_1$, так и неориентируемое.

• <u>Шаг 8</u>. Лемма. Пусть на M^n задана ф-я Морса f и пусть на критич. уровне $f=0$ есть ровно одна крит. точка $ind=\lambda$. Тогда $(f \leq \varepsilon) \cong (f \leq -\varepsilon) + H^n_\lambda$. Это — гомеоморфизм (и диффеоморфизм).

<u>Д-во</u>. Пусть $\mathcal{U}(0)$ — малая окрестн. крит. точки P, в которой заданы локал. к-ты $x_1, \dots, x_n$, построенные в лемме Морса, т.е. точка P — это начало координат, т.е. O, $f(0)=0$ и в $\mathcal{U}(0)$ имеем: $f(x) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$.

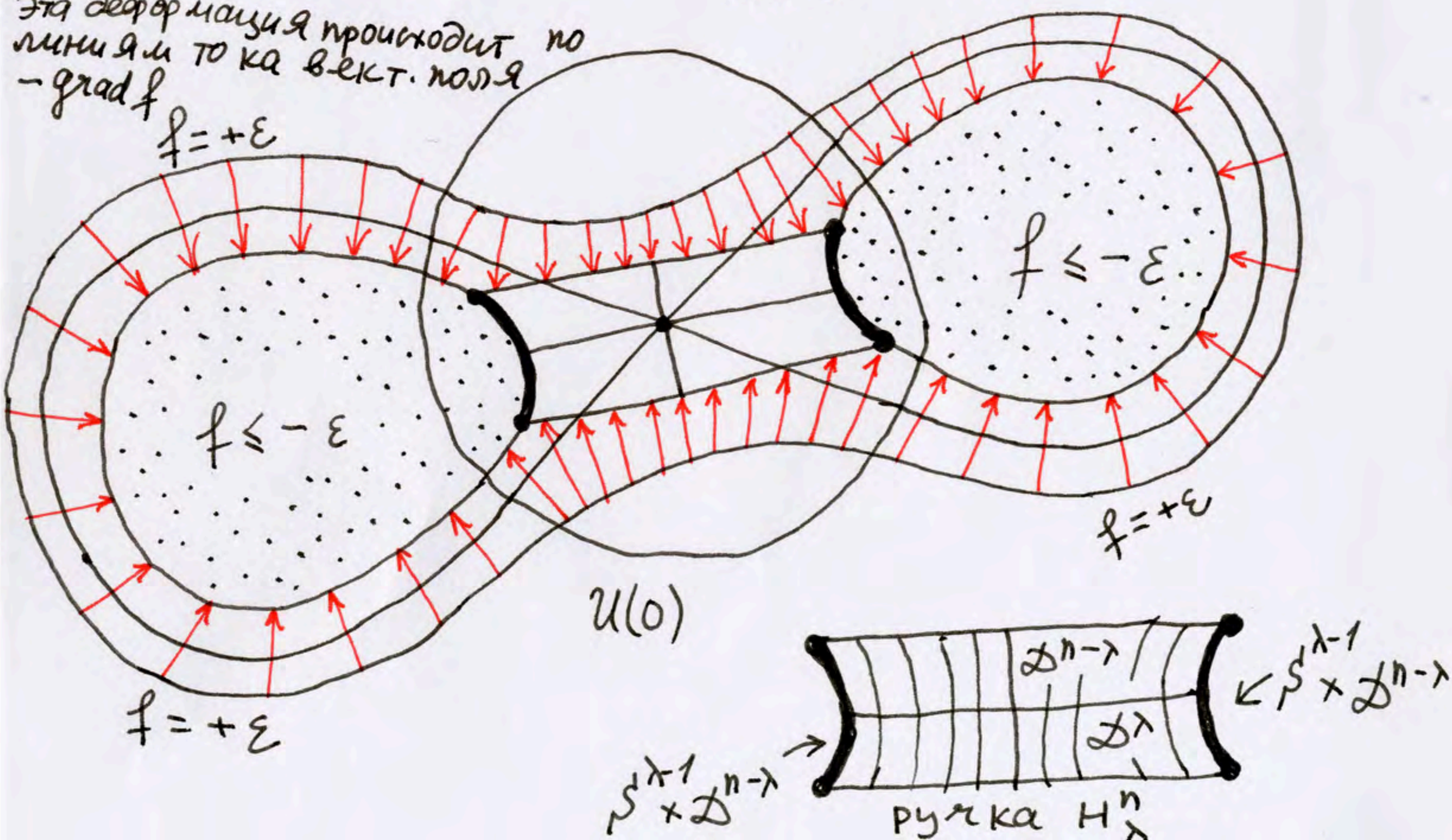
Рассм. три гиперповерхн. в $\mathcal{U}(0)$:

$$-x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 = \begin{cases} -\varepsilon & \text{— "гиперболоид"} \\ 0 & \text{— "конус"} \\ +\varepsilon & \text{— "гиперболоид"} \end{cases}$$

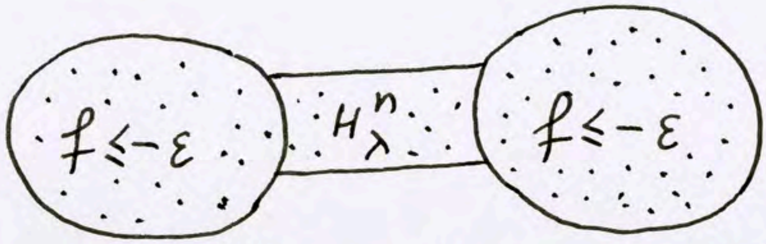


Рассмот. гладк. гомотопию (изотопию) множества $(f \leq +\varepsilon)$, показан. на рис.

Эта деформация происходит по линиям тока вект. поля $-\operatorname{grad} f$



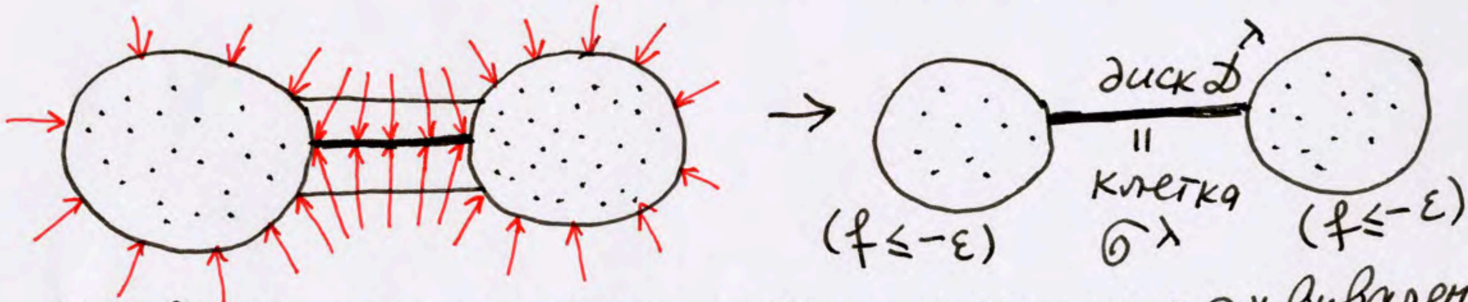
Эта гомотопия φ_t, $0 \le t \le 1$, для $\forall t$ является гомеоморф. (диффеом.), $\varphi_0 = id$, а результат φ_1 см. на рис.



т.е. $(f \le +\varepsilon)$ диффеоморфно $(f \le -\varepsilon) + H^n_\lambda$. Читрд.

- Итак, при переходе уровня через крит. точку $ind = \lambda$ к "срезу" $(f \le -\varepsilon)$ приклеивается ручка H^n_λ индекса λ.
- <u>Шаг 9.</u> Лемма. В предыдущих предполож., мн-во $(f \le +\varepsilon)$ гомотопически эквивалентно мн-ву $(f \le -\varepsilon) + \sigma^\lambda$, т.е. к "срезу" $(f \le -\varepsilon)$ приклеена клетка размерности λ.

<u>Д-во.</u> Достаточно продолжить деформацию (гомотопию), построенную выше. т.е. ручка H^n_λ стягивается на свою ось-диск D^λ, который и есть клетка σ^λ.



Читрд. Это уже не гомеоморфизм, а гомотопич. эквивалент.

- <u>Шаг 10.</u> <u>Теор.</u> (основн. теор. теории Морса).

Пусть M^n – глад. комп. замкн. мног. (т.е. без края) и f – ф-я Морса на M. Тогда: а) M^n гомотоп. экв. конечн. клеточному комплексу $\bigcup_i \sigma_i^{\lambda_i}$, где каждая клетка $\sigma_i^{\lambda_i}$ взаимно-однозн. соотв. крит. точке x_i ф-ции f индекса λ_i. На компак. мног. ф-я Морса имеет конечное число крит. точек.

б) M^n гомеоморфно объединен. (склейке, "сумме") ручек $M^n \simeq \bigcup_i H^n_{\lambda_i}$, где $\forall$ ручка взаимн.-одн. соотв. крит. точ. x_i индекса λ_i. т.е. ручки $\{H^n_{\lambda_i}\}$ – это "элемент. кирпичи", из которых склеено M^n.

<u>Замечание.</u> в пункте (б) сообщается о колич-ве и индексах ручек $\{H^n_{\lambda_i}\}$, но не о способе склейки ручек. См. пример выше.

- <u>Д-во теор.</u> рассм. ф-ю Морса f на M и малым возмущением ("шевелением") превратим ее в простую ф-ю Морса, т.е. имеющую на каждом крит. уровне ровно одну крит. точку. А затем применим лемму, доказ. выше. Читрд.
- Так как ф-й Морса на M "много", то и разложений M в сумму ручек тоже "много".