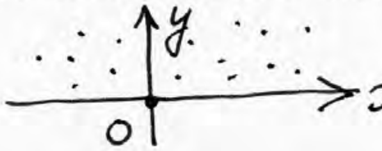
• Еще один важн. пример накрытия. Рассм. реализацию метрики Лобачевского на верхней полуплоскости: $ds^2 = \dfrac{dz\,d\bar z}{-(z-\bar z)^2}$,



где $z = x+iy$; или же, эквивалентно: $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2}{y^2}$.

Рассм. изометрии: $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}$ и $ad-bc=+1$.

Тогда группа изометрий, сохран. ориентацию L^2, есть $SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, где $SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix};\ a,b,c,d\in\mathbb{R} \text{ и } ad-bc=1 \right\}$.

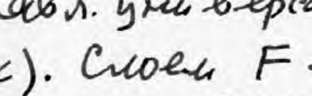
Рассм. матрицы $A_1, \dots, A_{2g}$ из $SL(2,\mathbb{R})$, где: $g \geq 2$ и

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^{-k+1} \begin{pmatrix} \dfrac{\cos\beta+\sqrt{\cos 2\beta}}{\sin\beta} & 0 \\ 0 & \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta+\sqrt{\cos 2\beta}}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^{k-1},$$

где $\alpha = \dfrac{\pi(2g-1)}{4g}$, $\beta = \dfrac{\pi}{4g}$; $k = 1, 2, \dots, 2g$. Тогда:

$A_1\cdot\ldots\cdot A_{2g}\cdot A_1^{-1}\cdot\ldots\cdot A_{2g}^{-1} = 1\,(id)$. можно доказать, что группа с образующими $A_1, \dots, A_{2g}$ и указанным соотношением, изоморфна группе с образ. $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ и соотношением $(g\geq 2)$:

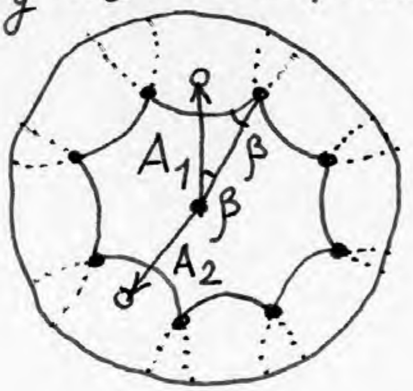
$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}\cdot\ldots\cdot a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1$, т.е. фундам. группе $\pi_1(M_g^2)$ сферы S^2 с g ручками:



; g – род поверхности.

• Теор. (без д-ва). Плоск. Лобачев. L^2 явл. универсальным накрытием над $M_g^2 = S^2 + g$(ручек). Слоем F является фундам. гр. $\pi_1(M_g^2)$. Она реализована как дискр. подгр. в группе изометрий плоск. Лобач. и она действует на L^2 свободно и эффективно. А потому $M_g^2 = L^2/\pi_1(M_g^2)$. В частности, на M_g^2 возникает риман. метр. постоянной отриц. кривизны.

В модели Пуанкаре на открытом диске, см. пример для действия изометрий $A_1, A_2 \dots$ при $g=2$.



Склейка сторон 8-угольника дает крендель $M_{g=2}^2$:

• Элементы теории Морса.

Рассм. гладк. ф-ю $f(x)$ на M^n. Идея: восстановить данные о топологии M, если известны св-ва функции f, например, ее критич. точки.

• Опред. Точка $x \in M$ назыв. критической, если $df(x)=0$, т.е. $\partial f/\partial x^i = 0$, $1 \le i \le n$, т.е. $\operatorname{grad} f(x) = 0$.

• Лемма. Понятие крит. точки не зависит от выбора локал. к-т. $(x) \to (x')$; $\dfrac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, т.е. снова $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x^{i'}}\right|_x = 0$.

• Рассм. $d^2 f \leftrightarrow \left(\partial^2 f / \partial x^i \partial x^j\right)$ в критич. точке. Пусть $(x) \to (x')$.

Тогда: $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \underbrace{\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^i}}_{=0} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}}_{=0 \text{ в крит. точке}},$$

т.е. $\begin{pmatrix} d^2 f \\ (x') \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} d^2 f \\ (x) \end{pmatrix} A^T$, где A – матр. Якоби.

• т.е. в крит. точке невырожд. гессиана $\begin{pmatrix} d^2 f \\ (x) \end{pmatrix}$ не зависит от выбора лок. к-т.

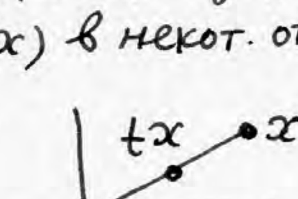
• Опред. Крит. точка $x \in M$ для ф-ции f назыв. невырожд., или точкой Морса, если $\det\left(f_{x^i x^j}\right) \ne 0$, т.е. $\det\begin{pmatrix} d^2 f \\ (x) \end{pmatrix} \ne 0$. Индексом λ крит. точки x назыв. кол-во отрицател. собств. чисел у симм. невыр. матр. $(d^2 f)$.

• Пример. У функции $y = x^2$ точка 0 – крит. невыр. $\operatorname{ind} = \lambda = 0$. У функции $y = x^3$ точка $x=0$ – крит. и вырождена.

• Лемма Морса. Пусть P – крит. невыр. точка $\operatorname{ind} = \lambda$ для ф-ции f на M^n, и $f(P)=0$. Тогда $\exists$ локал. регул. система к-т $x_1, \dots, x_n$, что:
$$f(x) = -x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$
в некоторой откр. окр. U точки P. Считаем, что $P = (x_i = 0)$. Такое представление ф-ции f явл. точным в U, а не приближен.

• Д-во. Итак: $f(x)$, $f(0)=0$ и $\operatorname{grad} f(0) = 0$, $\det(d^2 f) \ne 0$.

Лемма 1. $\exists$ гладк. ф-ции $g_1(x), \dots, g_n(x)$, что: $f(x) = x_1 g_1(x) + \dots + x_n g_n(x)$ в некот. откр. окр. O и $g_i(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$, $1 \le i \le n$.



$0 \le t \le 1$

Д-во. рассм. отрезок:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt = \int_0^1 \sum \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} x_i\, dt = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i} dt =$$

$= \sum_i x_i g_i(x)$, где $g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_i}\, dt$. Ясно, что $g_i(0) = \partial f/\partial x_i|_0$. Чтрд.

• Применим лемму два раза, т.е. теперь $g_i(x) = \sum_j x_j h_{ij}(x)$, где $h_{ij}(0) = \frac{\partial g_i(0)}{\partial x_j}$. Итак: $f(x) = \sum_{ij} x_i x_j h_{ij}(x)$, где $h_{ij}(0) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}\Big|_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_0$. А так как $x=0$ невырожд. крит. точка, то

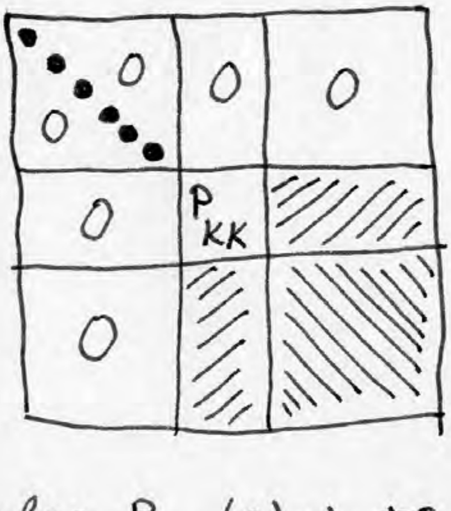
$\det(h_{ij}(0)) \neq 0$.

• <u>Шаг 2</u>. Лемма 2. Для $\forall k$ $\exists$ ф-ции P_{ij} и такие локал. рег. к-ты $y_1 \dots y_n$ в некот. откр. окр. точки 0, что:

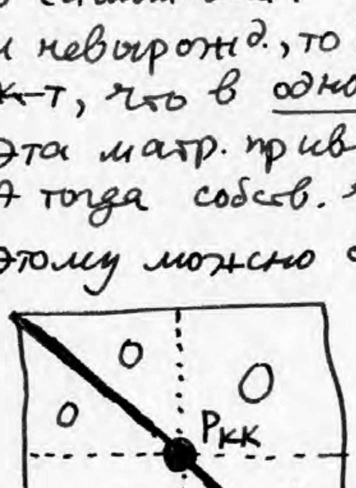
$$f(y) = \pm y_1^2 \dots \pm y_{k-1}^2 + \sum_{i,j \geq k} y_i y_j P_{ij}(y),$$ где матрица $(P_{ij}(y))$ – симмет. и невыр., т.е. $\det(P_{ij}(0)) \neq 0$.

<u>Д-во</u>. По индукции. При $k=1$ мы на шаге 1 получили: $f(x) = \sum x_i x_j h_{ij}$, удовл. требован. леммы 2. Пусть лемма 2 уже доказана для k. Сделаем шаг к следующ. $k+1$. Имеем:

$$f(y) = \pm y_1^2 \dots \pm y_{k-1}^2 + y_k^2 P_{kk} + \sum_{\substack{i,j \geq k \\ i \neq j}} y_i y_j P_{ij}. \quad (*)$$



Утвер., что можно сделать такую замену (регул.) к-т $y_k, \dots, y_n$ в окрестн. 0, что новое $P_{kk}(0)$ будет отлично от 0. В самом деле. Т.к. матр. (P_{ij}) симмет. и невырожд., то $\exists$ локал. регул. замена к-т, что в <u>одной точке</u>, т.е. в нуле, эта матр. приведется к диагон. виду. А тогда собств. число $\lambda_k \neq 0$. Это и есть новое $P_{kk}(0) = \lambda_k \neq 0$. Поэтому можно считать, что матрица (P_{ij}) в нуле имеет вид: т.е. диагонал. и невырожденна. Отметим, что $P_{ik}(0) = 0$ при $i \neq k$. Это нам ниже потребуется.



Теперь в сумме (*) выделим "полный квадрат".

$$f(y) = \pm y_1^2 \dots \pm y_{k-1}^2 \pm \left(y_k \sqrt{|P_{kk}|}\right)^2 + 2 y_k \sum_{i > k} y_i P_{ik} + \sum_{i,j \geq k+1} y_i y_j P_{ij} =$$

$$= \pm y_1^2 \ldots \pm y_{k-1}^2 \pm \left(y_k\sqrt{|P_{kk}|}\right)^2 \pm 2y_k\sqrt{|P_{kk}|}\sum_{i>k} y_i \frac{P_{ik}}{\sqrt{|P_{kk}|}} +$$

$$+\left(\sum_{i>k} y_i \frac{P_{ik}}{\sqrt{|P_{kk}|}}\right)^2 - \left(\sum_{i>k} y_i \frac{P_{ik}}{\sqrt{|P_{kk}|}}\right)^2 + \sum_{i,j\geqslant k+1} y_i y_j P_{ij} =$$

$$= \pm y_1^2 \ldots \pm y_{k-1}^2 \pm \left(y_k\sqrt{|P_{kk}|} \pm \sum_{i\geqslant k+1} y_i \frac{P_{ik}}{\sqrt{|P_{kk}|}}\right)^2 + \sum_{i,j\geqslant k+1} y_i y_j \left(P_{ij} - \frac{P_{ik}P_{jk}}{|P_{kk}|}\right).$$

Сделаем замену переменных: $y_i \to z_i$, где:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ \vdots \\ z_{k-1} = y_{k-1} \\ z_k = y_k\sqrt{|P_{kk}|} \pm \sum\limits_{j\geqslant k+1} y_j \dfrac{P_{jk}}{\sqrt{|P_{kk}|}} \\ z_{k+1} = y_{k+1} \\ \vdots \\ z_n = y_n \end{cases}$$

Эта замена регулярна (невырожд.) в окрестности нуля.

Докажем.

Надо проверить, что матрица $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ невырожд. в нуле.

А тогда она невырожд. и в некотор. окрест. нуля.

$\frac{\partial z_p}{\partial y_q} = \delta_q^p$ при $p, q \leqslant k-1$ и $p, q \geqslant k+1$. Ищем $\frac{\partial z_k}{\partial y_q}$.

$$\left.\frac{\partial z_k}{\partial y_k}\right|_0 = \underbrace{\sqrt{|P_{kk}(0)|}}_{\neq 0} + \underbrace{y_k}_{\to 0}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\sqrt{|P_{kk}|}\right) \pm \sum_{j\geqslant k+1} \underbrace{y_j}_{\to 0} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{P_{jk}}{\sqrt{|P_{kk}|}}\right) =$$

$$= \sqrt{|P_{kk}(0)|} \neq 0.$$

$$\underset{i\neq k}{\frac{\partial z_k}{\partial y_i}} = \underbrace{y_k}_{\to 0} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sqrt{|P_{kk}|}\right) \pm \sum_{j\geqslant k+1} \underbrace{y_j}_{\to 0} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{P_{jk}}{\sqrt{|P_{kk}|}}\right) \pm \frac{P_{ik}}{\sqrt{|P_{kk}|}} \pm$$

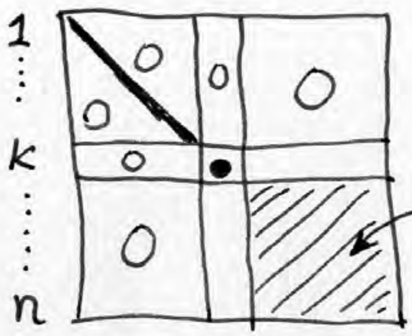
$$\pm \underbrace{y_j}_{\to 0 \text{ при } i\neq j} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{P_{jk}}{\sqrt{|P_{kk}|}}\right) = \pm \frac{P_{ik}(0)}{\sqrt{|P_{kk}(0)|}} = 0, \text{ т.к.}$$

в выбранной выше сист. к-т $P_{ik}(0) = 0$ при $i \neq k$.

Итак: $\left.\frac{\partial z_k}{\partial y_k}\right|_0 \neq 0$, а $\frac{\partial z_k}{\partial y_i} = 0$ при $k \neq i$.

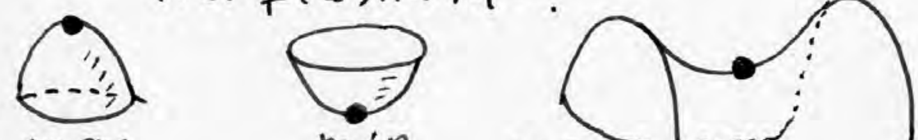
Осталось проверить симм. и невыр. "хвоста", т.е.

$$\sum_{i,j\geq k+1} y_i y_j \left(P_{ij} - \frac{P_{ik}P_{jk}}{|P_{kk}|}\right).$$ Симметрия очевидна. А невырожд. в новых координ. $z_1, \dots, z_n$ вытекает из того, что матрица имеет вид:



Полная матр. была и осталась невырож., на месте (k,k) стоит $\neq 0$ элемент, а потому и "хвост" невырожден. Чтд.

• Описание невыр. крит. точек в $\dim = 2$. Т.е. $f(x)$ на M^2:

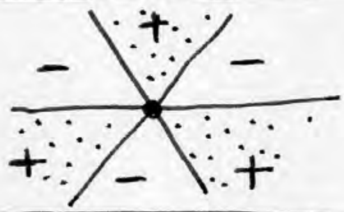


max $-x^2-y^2$ ind $= \lambda = 2$

min x^2+y^2 $\lambda = 0$

седло x^2-y^2 ; $\lambda = 1$

Пример вырожд. особенности: $f(x,y) = Re(z^3) = x^3 - 3xy^2$



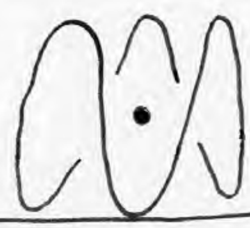


график $Re(z^3)$ т.н. "обезьянье седло".

Линии уровня $f(x,y)$ около морсовской особенн.:

• Общие св-ва ф-й Морса.

• Опред. Гладк. ф-я $f(x)$ на гладком M^n назыв. ф-ей Морса, если все ее крит. т. невырож.

• Теор. 1. На $\forall$ гладк. M^n (комп. или некомп.) всегда $\exists$ ф-я Морса.

2. Ф-ции Морса всюду плотны в пр-ве $C^\infty(M)$ всех глад. ф-й. Т.е. $\forall$ глад. ф-я на M путем сколь угодно малого гладк. возмущен. может быть сделана ф-ей Морса.

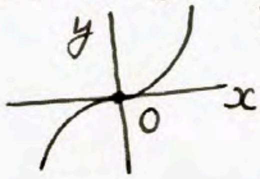
3. Малым возмущ. ф-ции Морса можно развести ее критич. точки на разные уровни так, что на каждом критич. уровне окажется ровно одна крит. точка. Такие ф-ции Морса назыв. простыми. Простые ф-ции Морса всюду плотны в пр-ве $C^\infty(M)$ всех гладк. ф-й на M.

4. Любую ф-ю Морса на M можно путем гладк. гомотопии в классе ф-й Морса превратить в такую ф-ю Морса, у которой все крит. точки одного индекса будут лежать на одном уровне; причем эти критич. уровни будут возрастать с ростом индекса. (Такие "правильные" ф-ции Морса уже не всюду плотны в $C^\infty(M)$).

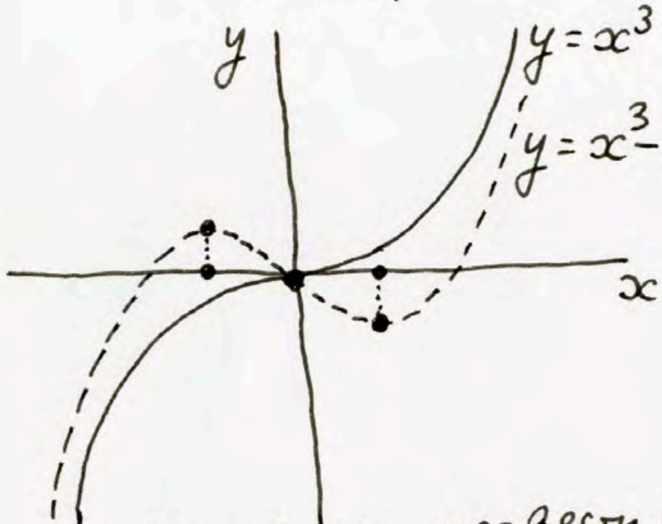
5. Если M — связно, то $\forall$ ф-ю Морса можно путем гладк. гомотопии в классе ф-ций с конечным числом крит. точек (некоторые из которых могут быть вырожденными) превратить в ф-ю Морса с ровно одним min и ровно одним max.

- В полном объеме доказывать эту теор. не буду. Дам нагляд. пояснения.
- Пункт 1 докажу ниже для случая гиперповерхн. в $\mathbb{R}^n$.
- Пункт 2: всюду плотность в $C^\infty(M)$. Рассм. пример на M^1:

$y=x^3$



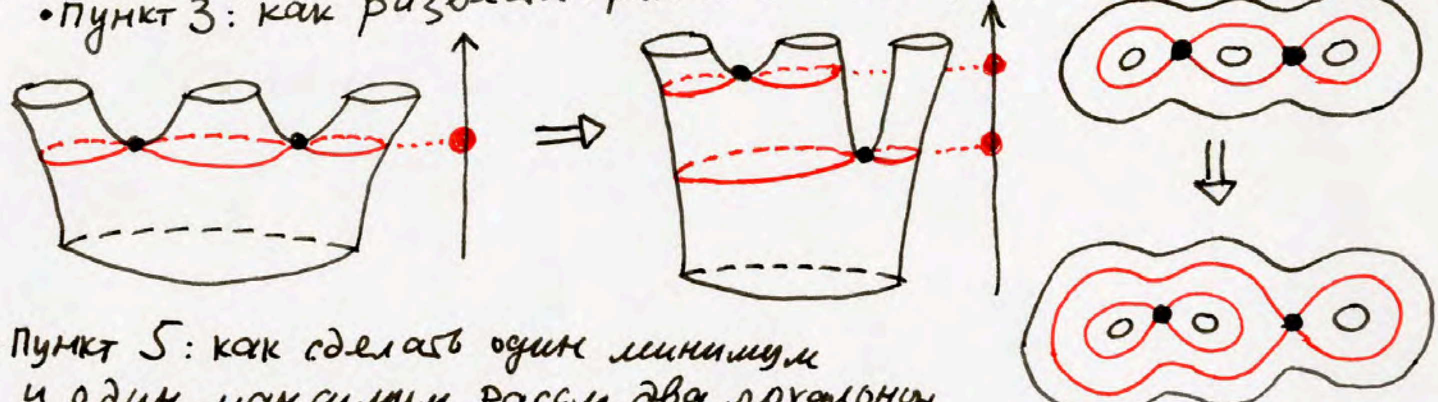
Точка 0 – вырожд. т.к. $y'(0)=y''(0)=0$. Рассм. малое возмущение: $y=x^3-\varepsilon x$, где $\varepsilon>0$ и мало; тогда



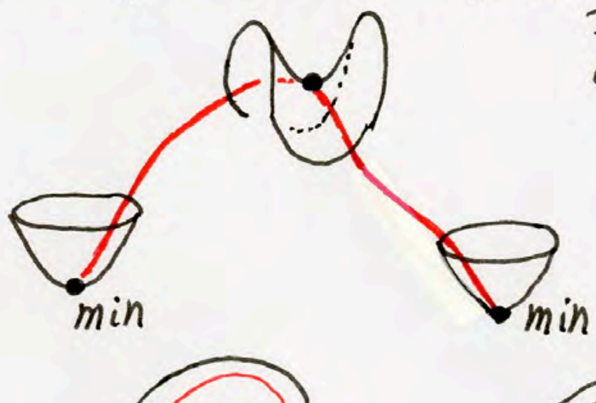
$y'=3x^2-\varepsilon$ и $y'=0$ в точках $x=\pm\sqrt{\varepsilon/3}$, а тогда $y''=6x\neq 0$ в этих точках, т.е. $x^3-\varepsilon x$ является ф-ей Морса. Вырожд. особенн. x^3 распалась на две морсовские особен.:

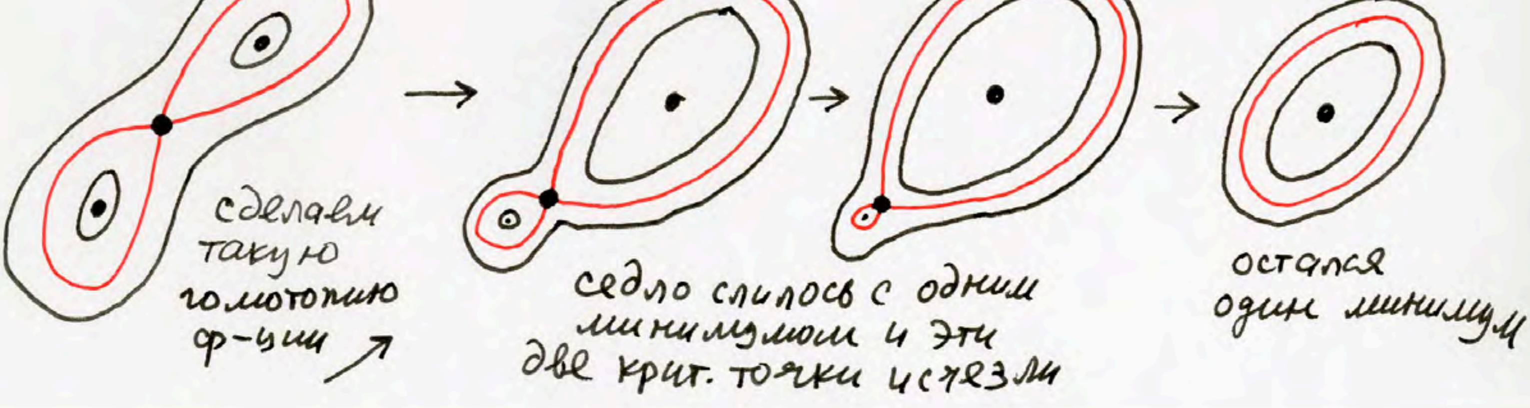
$$x^3 \to x^2, \quad x^3 \to x^2$$

- Пункт 3: как развести крит. точки на разные уровни. См.:

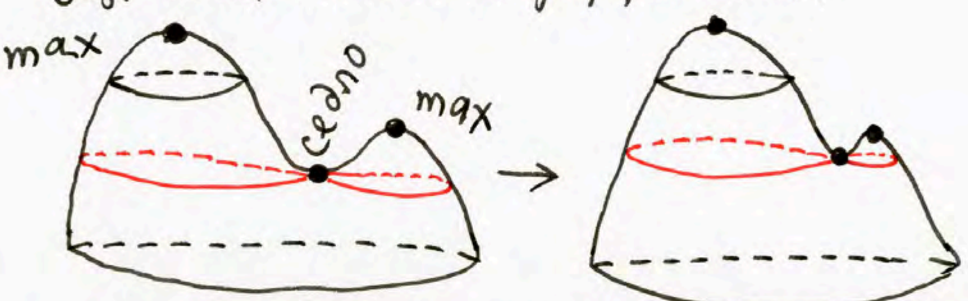


- Пункт 5: как сделать один минимум и один максимум. Рассм. два локальных минимума. Тогда по "принципу перевала" между ними есть седло: если на графике ф-ции f расположить резиновую нить с концами в двух лок. min, то нить будет сокращаться, скользить по графику и остановится, "зацепившись" за "перевал", т.е. за седло. Тогда на многообразии (пример – на M^2) появится такая картина уровней:





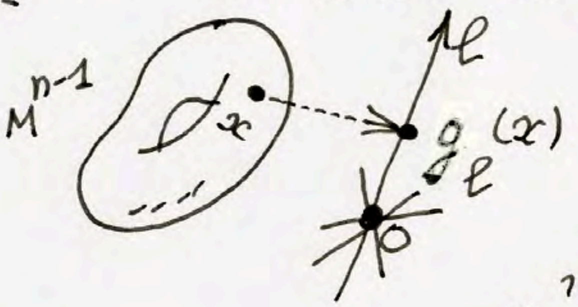
Еще одна наглядная деформация:



седло и максимум "съели" друг друга. Таким образом, используя седла, мы оставим только один максимум (или min).

• Теперь вернемся к пункту 1 теоремы. Докажем в важном частном случае. Будем использовать материал нашего обязат. курса по дифф. г

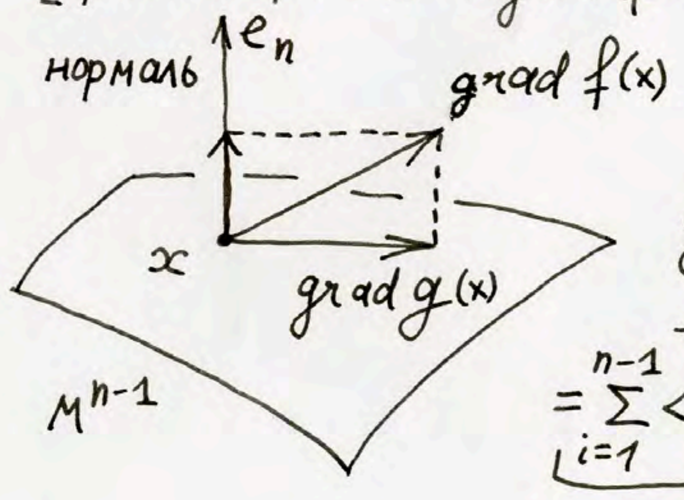
Теор. Пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое подмног. (гиперповерхн.). Рассм. функции высоты $g_\ell(x)$ на M, задаваемые ортогон. проекциями M на прямые ℓ в $\mathbb{R}^n$, проходящие через начало координат O. Тогда для почти всех прямых ℓ, ф-я g_ℓ явл. ф-ей Морса.



Мы считаем, что на ℓ задана ориентация, т. е. $g_\ell(x)$ — это веществ. число.

Для д-ва нам потреб. следующ. утверж. Пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — гиперпов. и $f(x)$ — глад. ф-я в окрестности M^{n-1}, и $\operatorname{grad} f$ — в-р градиента f в $\mathbb{R}^n$ относит. евкл. метрики. Пусть $g(x)$ — ограничение f на поверх. M^{n-1} и пусть g_{ij} — риман. метр. на M^{n-1}, индуцир. объемл. евкл. метр. в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\operatorname{grad} g(x)$ — градиент ф-ции g на M^{n-1} относит. этой индуц. метр. g_{ij}; т. е. $\operatorname{grad} g(x) \in$ касател. плоск. к M^{n-1}.

Утверж. Тогда $\operatorname{grad} g(x) = \pi(\operatorname{grad} f(x))$, где π — это ортогон. проекция $\operatorname{grad} f$ на касат. плоск. $T_x M^{n-1}$.



Д-во. Пусть $e_1, \ldots, e_{n-1}$ — ортобазис в $T_x M^{n-1}$, а e_n — нормаль к M. Тогда

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \operatorname{grad} f, e_i \rangle e_i + \langle \operatorname{grad} f, e_n \rangle e_n = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \langle \operatorname{grad} g, e_i \rangle e_i}_{\substack{\parallel \\ \operatorname{grad} g \text{ в } T_x M^{n-1}}} + \langle \operatorname{grad} f, e_n \rangle e_n.$$

так как $g(x)$ можно продолжить с M "вдоль нормали" к M до ф-ции в малой окрестности M, не меняя значений $g(x)$

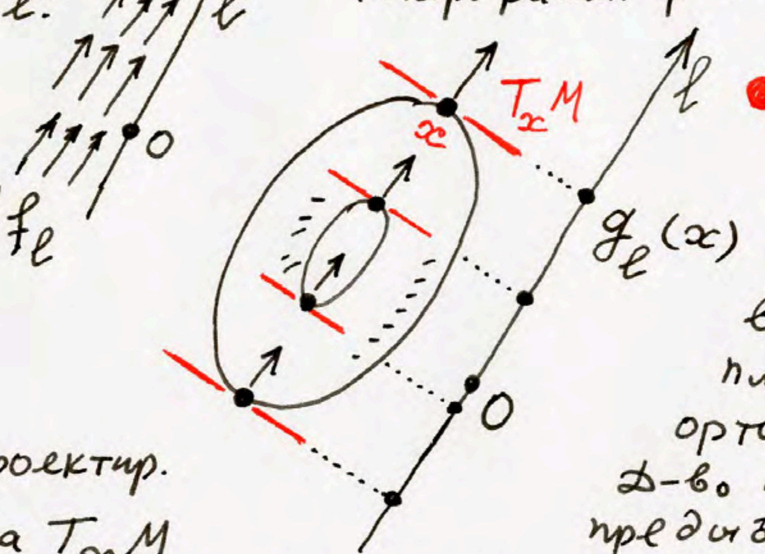
вдоль нормали, т.е. $g(x)$ – постоянна вдоль нормали и ее производная вдоль e_n равна нулю. Итак, grad g в $T_x M$ получается из grad f вычитанием компоненты grad f вдоль нормали e_n; т.е. grad $g = \pi(\mathrm{grad}\, f)$, где $\pi: \mathbb{R}^n \to T_x M^{n-1}$. Итак:

$$\mathrm{grad}\left(g = f|_M\right) = \mathrm{grad}\, f - \langle \mathrm{grad}\, f, e_n \rangle e_n = \pi(\mathrm{grad}\, f).$$

Чтрд.

• Пусть $f_\ell : \mathbb{R}^n \to \ell = \mathbb{R}^1$ – линей. ф-я в $\mathbb{R}^n$, проекция на ℓ. Ее градиент – это постоянное вект. поле, параллельное прямой ℓ:

Теперь рассм. ф-ю $g_\ell = f_\ell|_{M^{n-1}}$:



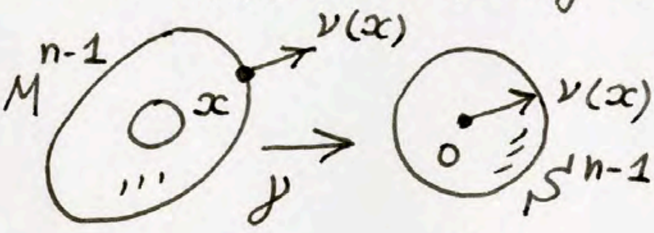
grad f_ℓ

• Утв. Критич. точки ф-ции g_ℓ на M – это в точности те точки $x \in M$, в которых касат. плоскость $T_x M$ ортогональна прямой ℓ. Д-во следует из рис. и предыдущ. утвержд.

grad f_ℓ проектир. в ноль на $T_x M$ если и только если $T_x M$ ортогон. прямой ℓ.

• Теперь рассм. отобр. $\gamma : M^{n-1} \to S^{n-1}$, назыв. отобр. Гаусса. Если $x \in M$, то рассм. нормаль $\nu(x)$ к M, перенесем $\nu(x)$ паралл. и поместим начало $\nu(x)$ в точку O; тогда конец нормали $\nu(x)$ дает точку на сфере S^{n-1}:

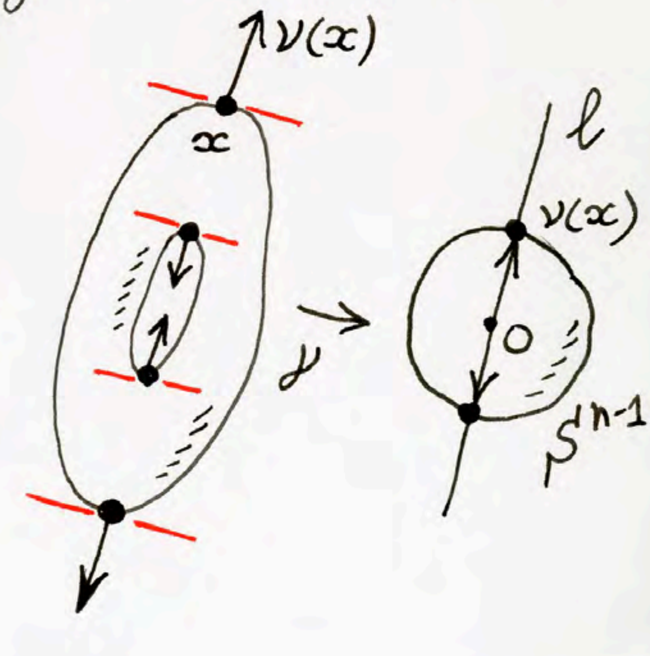
$\gamma(x)$ = конец $\nu(x)$ на S^{n-1}.



• Фиксируем прямую ℓ.

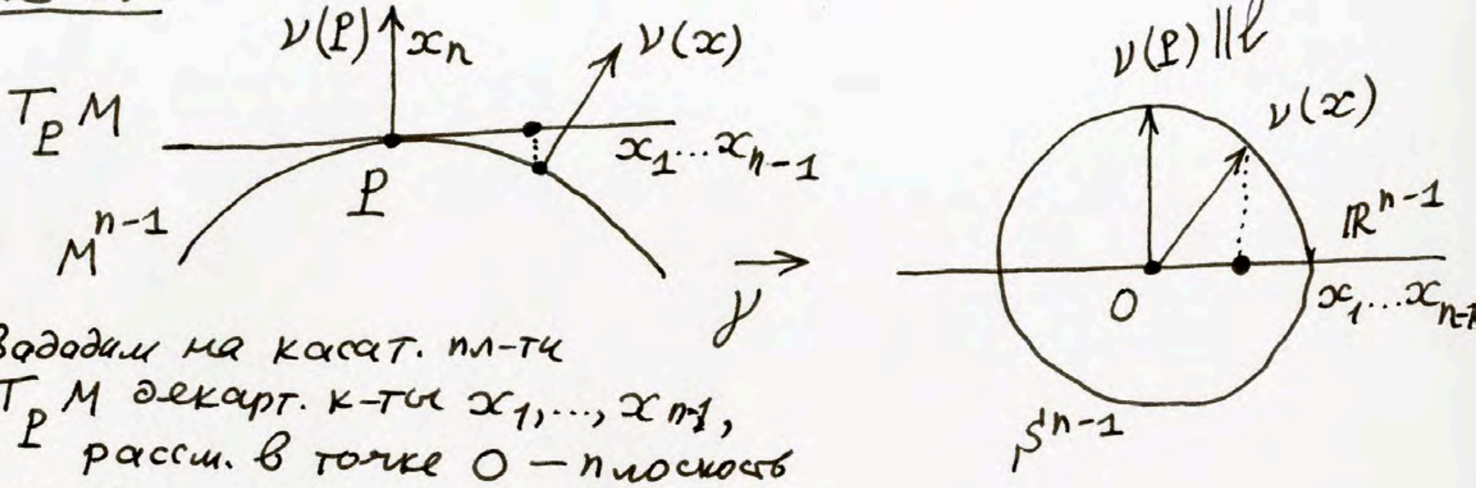
Утвер. Критические точки ф-ции g_ℓ на M – это в точности те точки x, которые явл. прообразами при отобр. γ точек $\ell \cap S^{n-1}$.

Д-во видно из рисунка →



[**Утвер.** Если P - крит. точка ф-ции g_ℓ на M, то
$$Hess(g_\ell) = d\gamma, \text{ т.е. } \left(\frac{\partial^2 g_\ell}{\partial x^i \partial x^j}\right)$$ совпадает с
матр. Якоби отобр. Гаусса γ в этой точке.

Д-во.



Зададим на касат. пл-ти $T_P M$ декарт. к-ты $x_1, \dots, x_{n-1}$, рассм. в точке O — плоскость $\mathbb{R}^{n-1}$, паралл. пл-ти $T_P M$ и с теми же коорд. $x_1, \dots, x_{n-1}$. Зададим локально M около точки P в виде графика ф-ции g_ℓ, где ℓ параллельна $\nu(P)$.
Т.е. локально $M = \{x_n = g_\ell(x_1, \dots, x_{n-1})\}$. Тогда локально M авл. нулевой поверхн. уровня ф-ции $F(x_1, \dots, x_n) = g_\ell(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n = 0$. Тогда нормаль
$$\nu(x) = \frac{\text{grad } F}{|\text{grad } F|} = \frac{1}{\sqrt{\dots}}\left(\frac{\partial g_\ell}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_\ell}{\partial x_{n-1}}, -1\right).$$
следовательно, $\gamma : (x_1, \dots, x_{n-1}) \to \frac{1}{\sqrt{\dots}}\left(\frac{\partial g_\ell}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_\ell}{\partial x_{n-1}}\right)$.
Так как P - крит. точка для g_ℓ, то $\frac{\partial g_\ell}{\partial x_i}(P) = 0$ и $\sqrt{\dots}\,\big|_P = 1$, а потому матр. Якоби $d\gamma$ отобр. γ имеет вид: $d\gamma\big|_P = \left(\frac{\partial^2 g_\ell}{\partial x_i \partial x_j}\right)(P)$.
Чтр.

- Отсюда вытекает, что $\boxed{\det(d\gamma|_P) = \det\left(\frac{\partial^2 g_\ell}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_P\right)}$.
т.е. критич. точка $P \in M$ для ф-ции g_ℓ невырожд. $\Longleftrightarrow$ она регулярна для отобр. Гаусса, т.е. $\det(d\gamma|_P) \neq 0$ в точке $P \in \gamma^{-1}(\pm\ell)$.
- Итак, осталось выбрать прямую ℓ так, чтобы во всех прообразах $\gamma^{-1}(\pm\ell)$ матр. Як. $d\gamma$ была бы невырожд. Здесь мы воспольз. теор. Сарда.

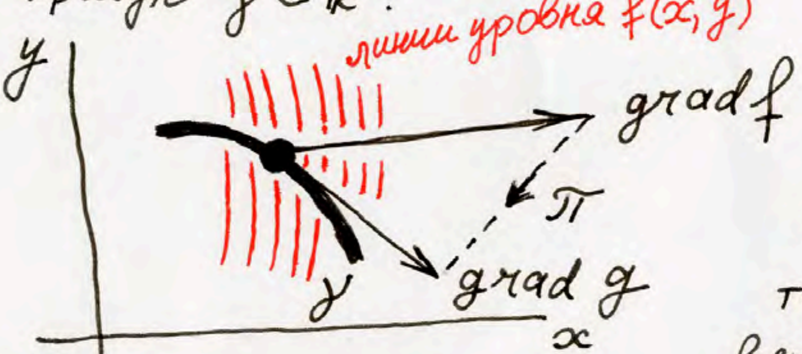
• Теор. Сарда. Пусть $\gamma: V^k \to P^k$ гладк. отобр. глад. многообр. Точка $\xi \in P^k$ называется регул. значением, если во всех точках $\gamma^{-1}(\xi)$ прообраза точки ξ ранг $(d\gamma) = k$, т.е. max. Тогда мн-во регул. знач. ξ в P^k всюду плотно.

• У нас: $V^k = M^{n-1}$, а $P^k = S^{n-1}$ (или $\mathbb{R}P^{n-1}$); $\xi = \ell \cap S^{n-1}$.

• Итак, по теор. Сарда почти все прямые ℓ в $\mathbb{R}^n$ задают регуляр. значения для отобр. γ. Следоват., для почти всех прямых ℓ в $\mathbb{R}^n$ ф-я высоты g_ℓ на M^{n-1} явл. ф-ей Морса. Чтд.

• Дополнит. коммент. к утвержд.: $\mathrm{grad}(f|_{M^{n-1}}) = \pi(\underset{\text{в } \mathbb{R}^n}{\mathrm{grad}\, f})$. Вот как этот факт выглядит в размерн. $= 2$.

Пример. Рассм. ф-ю $f(x,y)$ на $\mathbb{R}^2$ и ограничим ее на кривую $\gamma \subset \mathbb{R}^2$.



Вектор grad f ортогонал. линиям уровня $f = \mathrm{const}$ (на $\mathbb{R}^2$).

$$\mathrm{grad}\, f = (f_x, f_y)$$

Пусть кривая $\gamma = M^1$ задана так: $y = y(x)$. Тогда касател. вектор к γ имеет вид:

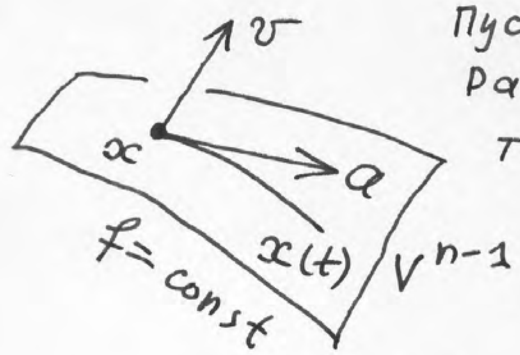
$\dot{\gamma} = (1, y'_x)$, т.к. $\gamma(x) = (x, y(x))$. Ограничение f на γ:

$g = f|_\gamma = f(x, y(x))$. В-р grad g касается кривой γ.

Ясно, что $|\mathrm{grad}\, g| = \dfrac{dg}{dx} = \dfrac{d}{dx} f(x, y(x)) = f_x + f_y \cdot y'_x =$

$= \langle \mathrm{grad}\, f, \dot{\gamma} \rangle = |\pi(\mathrm{grad}\, f)|$. Итак: $\mathrm{grad}\, g = \pi(\mathrm{grad}\, f)$ чтд.

• Выше использовался тот факт, что grad f всегда ортогонален поверхностям уровня $f = \mathrm{const}$ в M. Напомню д-во этого факта. Пусть на M задана риманова метр. $g_{ij}(x)$ и $f(x)$ — гладк. ф-я. Тогда $\mathrm{grad}\, f = (\partial f / \partial x^i)$, по определ. При наличии риман. метр. ковекторное поле grad f можно реализовать как вект. поле v (иногда обозначаемое тоже grad f, что не очень хорошо), где $v = (v^i)$, $v^i = g^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^j} = \sum_j g^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^j}$, где g^{ij} — элементы обратной матрицы G^{-1}, а $G = (g_{ij})$. Итак, утверждается, что v ортогонально поверхн. уровня $f = \mathrm{const}$. Д-во:



Пусть $a \in T_x V^{n-1}$, где $V^{n-1} = (f = const)$.
Рассм. локал. гладк. кривую $x(t) \subset V$ такую, что $x(0) = x$ и $\dot{x}(0) = a$.
Тогда $f(x(t)) \equiv const$ и

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t)) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} =$$

$$= \sum_{i,j} g_{ij} v^j \frac{dx^i}{dt} = \sum_{i,j} g_{ij} v^j a^i = \langle v, a \rangle$$ (т.е. скалярн. произв. v и a в метр. g_{ij}).

Итак, $\langle v, a \rangle = 0$ для $\forall a \in T_x V$, т.е. вектор v ортогонален касат. пл-ти $T_x V$. Чтр д.

• Если $g_{ij} = \delta_{ij}$ (т.е. евклид. метрика), то $v^i = (\operatorname{grad} f)_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, т.е. сам градиент можно понимать как вект. поле. В евклид. метр. нет разницы между векторами и ковекторами.

функция Морса