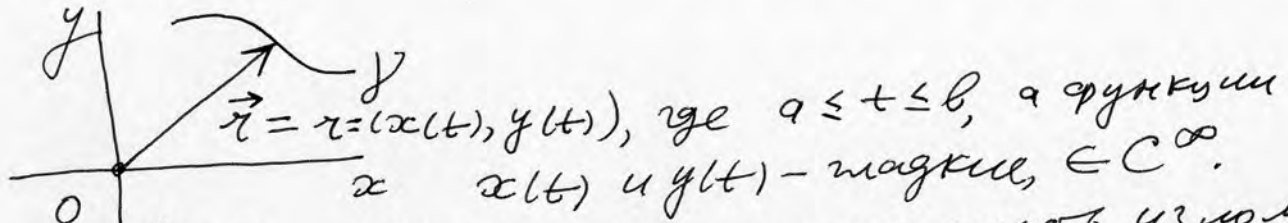
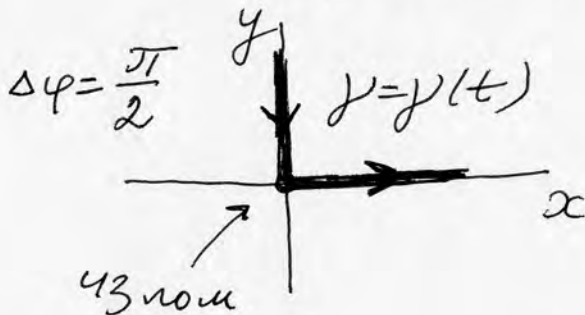
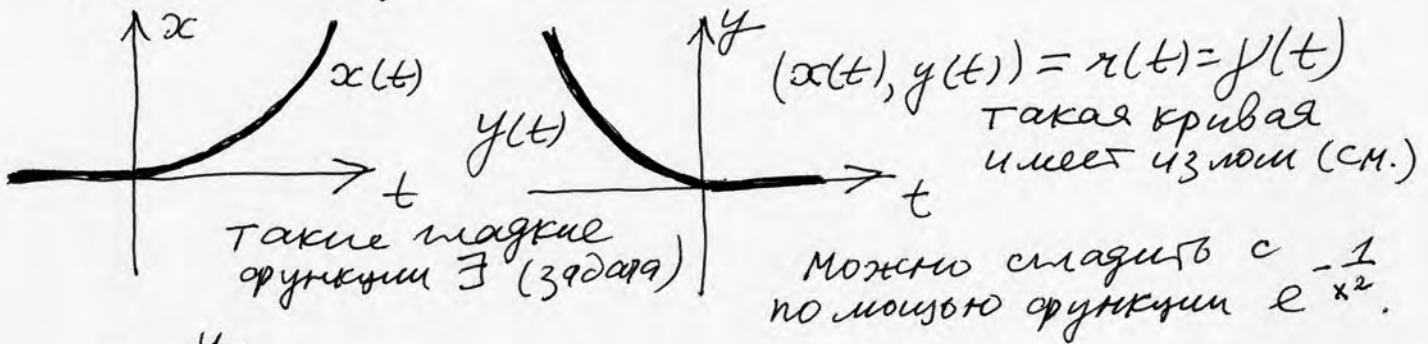


- Этот курс - дополнение к обязат. курсу "Дифф.Geom. и топология" (на 2,3 курсах).
- Понятие поверхности (многообразия) $M^k \subset \mathbb{R}^n$.
- Шаг 1. Кривые на плоскости $\mathbb{R}^2$. Гладкая кривая.



Однако такая кривая может иметь излом.
Пример "гладкого излома".



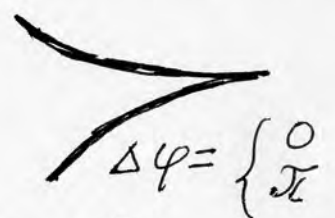
Здесь - "поворот" на $\pi/2$.

- Задача. Построить пример аналитич. кривой $r(t)$ с "кловом", т.е.

$(x(t))$ и $y(t)$ - аналит. ф-ции $\rightarrow$

- Задача. Может ли аналит. кривая иметь излом с $\Delta\varphi \neq 0$ или π ?
Например, "повернуть" на $\pi/2$?

Ответ: Нет. Доказать.



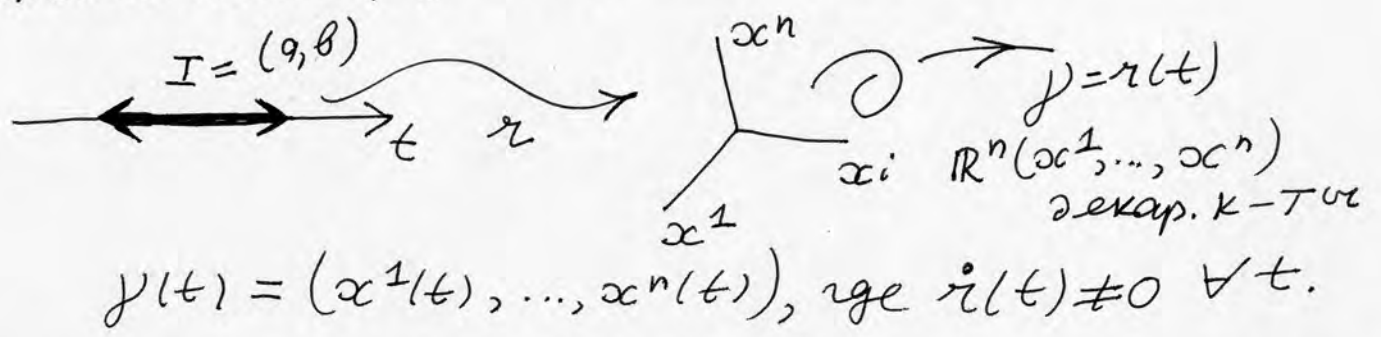
- Замечание. Гладкая кривая с изломом $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ (см. выше) очевидно не аналитическая.
- Итак, в чем дело? Почему излом?

Пусть $\dot{r} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = v$ - касател. в-р к кривой y .

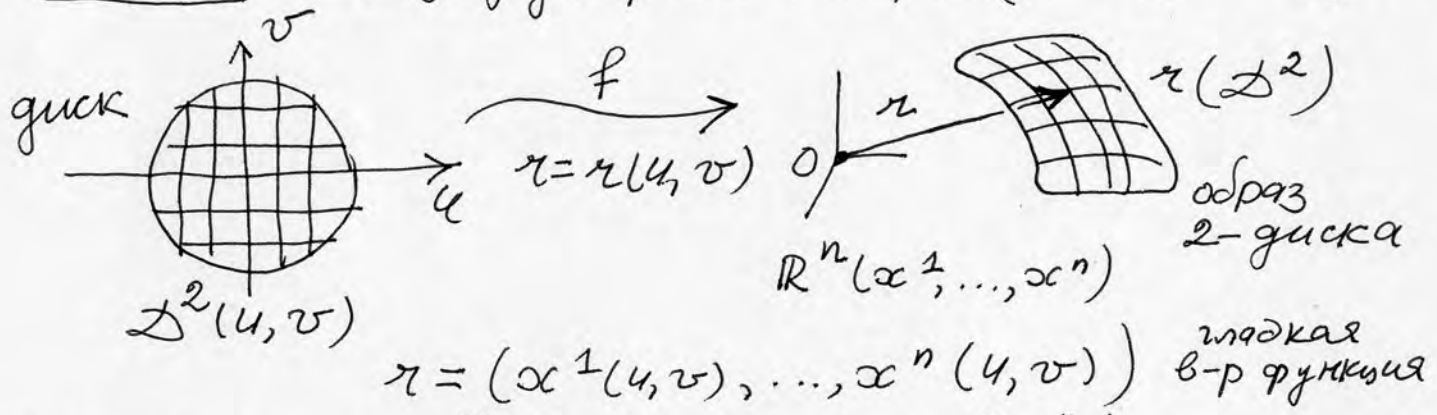


В примере выше  в точке O $\dot{r} = 0$,
и в это мгновение кривая резко повернула.
• Отсюда видно: нужно запретить $\dot{r}(t_0) = 0$.
Итак:

- Определ. Гладкая кривая назыв. регулярной, если $\dot{r}(t) \neq 0 \quad \forall t$.
- По теор. о неявной функции $\Rightarrow$ на такой кривой нет изломов. В-р скорости (касат. в-р) поворачивается плавно.
- В дальнейшем считаем глад. кривые — регулярными.
- Аналогичное определение для кривой в $\mathbb{R}^n$.

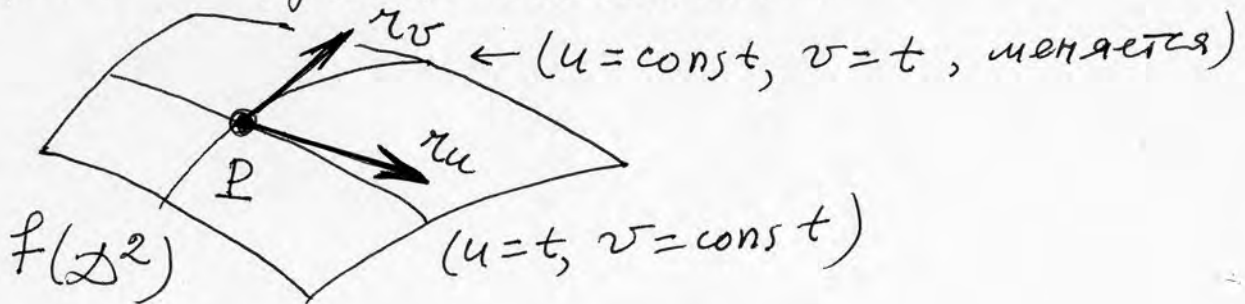


Шаг 2. Глад. двумерные поверхн. (2-многообр.) в $\mathbb{R}^n$.



Рассм. в-ры: $r_u = \frac{\partial r(u, v)}{\partial u} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u} \right)$ и $r_v = \frac{\partial r(u, v)}{\partial v} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial v} \right)$. частные производные.

• Геомет. смысл в-ров r_u и r_v : это касательные в-ра к координатным линиям.



- Касат. плоскость $T_P(\gamma_u, \gamma_v)$ — натянута на векторы γ_u и γ_v , если они лнн. независимы.
- По теор. о неявной функции (ан. анализ), если в-ры γ_u и γ_v лнн. незав. в точке P , то локально, около точки P образ $\gamma(\mathbb{D}^2)$ явл. гладкой 2-поверхн. в $\mathbb{R}^n$, в том смысле, что касат. плоскость гладко меняется от точки к точке.

На этом основании дадим формал. определение.
 # → Опред. Локальной гладкой 2-мерной поверхностью M^2 в $\mathbb{R}^n$ (или локальным 2-мерным многообразием) назыв. лн-во точек в $\mathbb{R}^n$, допускающее представление

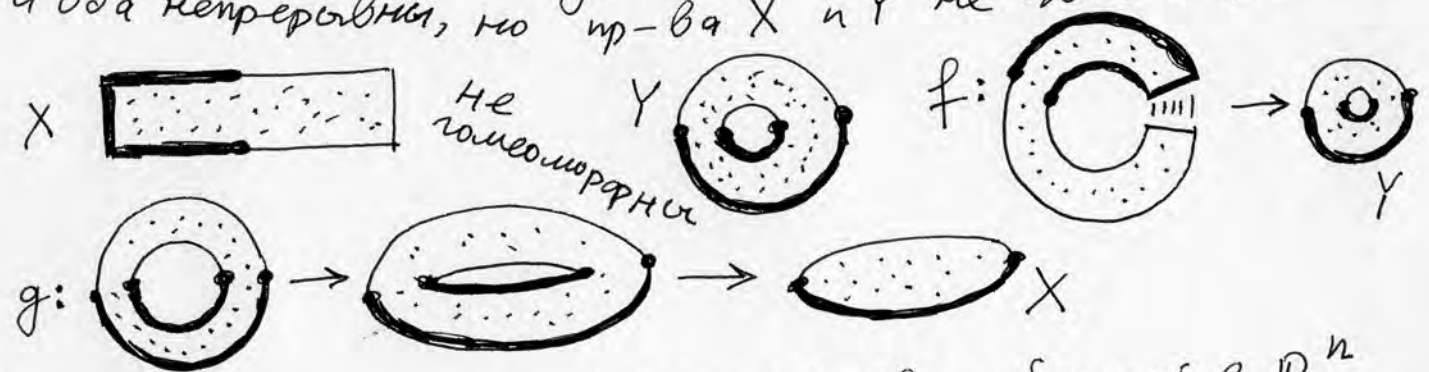
в виде:

$$1) M^2 = \{ \pi = \pi(u, v), \text{ где } \gamma_u \text{ и } \gamma_v \text{ лнн. незав. встоду на } \mathbb{D}^2(u, v), \text{ здесь } \pi: \mathbb{D}^2(u, v) \rightarrow \mathbb{R}^n \},$$

$\pi \in C^\infty$, (в частности, $\gamma_u \neq 0$ и $\gamma_v \neq 0$ встоду на $\mathbb{D}^2$).

2) $\pi: \mathbb{D}^2 \rightarrow \pi(\mathbb{D}^2)$ гомеоморфно образу, т.е. π — это гомеомор. $\mathbb{D}^2$ и $\pi(\mathbb{D}^2)$.

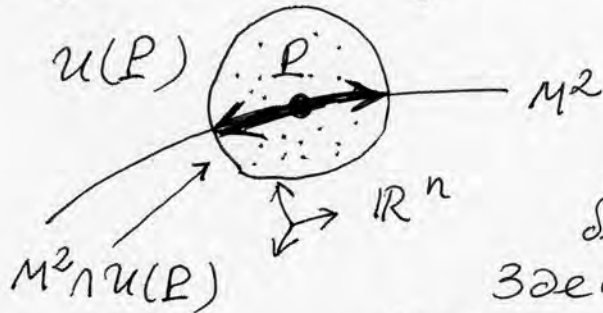
- Комент. условие 2 запрещает, например:
- Касат. плоскость $T_P M^2 \subset \mathbb{R}^n$ и натянута на в-ры γ_u и γ_v .
- По теор. о неявн. функциях такое отображение π задает гомеоморфизм между $\mathbb{D}^2$ и $\pi(\mathbb{D}^2)$, и более того, диффеоморфизм: $\mathbb{D}^2 \approx \pi(\mathbb{D}^2)$.
- Напоминание: $f: X \rightarrow Y$ назыв. гомеоморф., если f и f^{-1} оба взаимно-однозн., и оба непрерывны.
- Полезн. пример: $\exists X \xrightleftharpoons[f]{f} Y$, где f и g оба взаимно-одн. и оба непрерывны, но пр-ва X и Y не гомеоморфны.



- Напоминание: отобра. $f: U \rightarrow V$ двух областей в $\mathbb{R}^n$ назыв. диффеоморфизмом, если f — гомеоморфизм и f, f^{-1} — оба гладкие (C^∞).

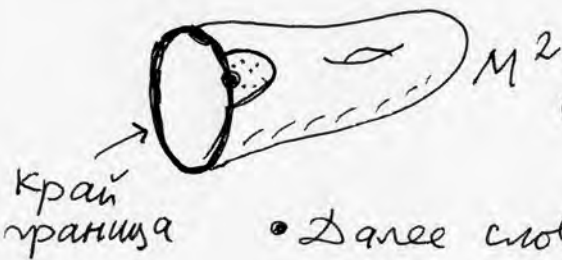
• В этом примере $\dim X = \dim Y = 2$. Задача: построить аналогичный пример в размерности 1, т.е. $\dim X = \dim Y = 1$.

• Опред. Глобальной мажорантой 2-мерн. поверхностью M^2 в $\mathbb{R}^n$ (или глоб. 2-многообразием в $\mathbb{R}^n$) назовем мн-во в $\mathbb{R}^n$ такое, что для $\forall$ точки $P \in M^2$ $\exists$ откр. окрестн. (шар) $U(P)$ в $\mathbb{R}^n$: $U(P) \cap M^2$ допускает представление вида $\#$ (см. опред. выше). т.е. является локал. маж. 2-поверхностью.



• Такие 2-поверхности назовем замкнутыми, = без края = без границы.
Здесь $\forall$ точка $P \in M^2$ имеет откр. окрестн., гомеоморф. 2-диску D^2 .

• Опред. Поверхн. (2-мнот.) имеет край (границу), если в ней есть точки двух типов:



диск



половина диска

(более подробное опред. см. в учебнике Мищенко, Фоменко).

- Далее слово "глобальная" будем опускать.
- Будем говорить, что такое M^2 мажорантно вложено в $\mathbb{R}^n$.
- Яркое отличие "мажорантности" от "непрерывности".
Сфера Александера = "дикая сфера".

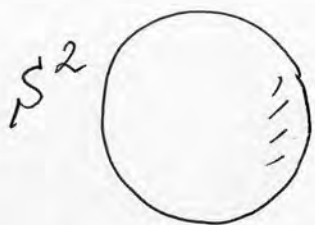
• Теор. (без д-ва). Гладкая 2-поверхность, ^{компактная} и замкнутая (т.е. без границы), вложенная в $\mathbb{R}^3$, и гомеоморфная 2-сфере, ^М разбивает $\mathbb{R}^3$ на два мн-ва A и B (т.е. $\mathbb{R}^3 - M = A \cup B$) со свойствами: 1) $\bar{A}$ (т.е. замыкание A) гомеоморфно 3-шару D^3 , 2) $\bar{B}$ (замыкание B) — односвязно, т.е. $\pi_1(\bar{B}) = 0$, т.е. любая "петля" γ в $\bar{B}$ непрерывно стягивается в точку из $\bar{B}$.

Оказывается, если рассмотреть всю лишь топологическое (непрерывное) вложение сферы S^2 в $\mathbb{R}^3$ (т.е. гомеоморфизм S^2 на образ), то картина может сильно измениться.

(5)

Построим специальный гомеоморф. $h: S^2 \rightarrow h(S^2)$
сферы S^2 на ее образ $h(S^2)$ в $\mathbb{R}^3$.

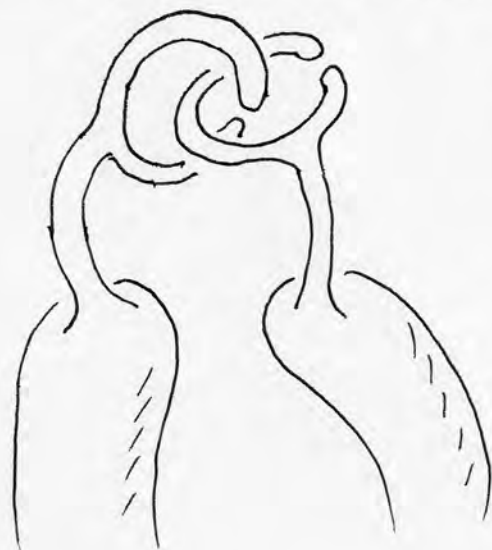
Шаг 1. Из стандартн. сферы S^2 в $\mathbb{R}^3$ "вырастают"
два "пальца":



эти два "пальца"
почти зацеплены,
как показано на
рис.

Шаг 2

Затем на двух
концах двух "близких пальцев" повторяем процесс:



Шаг 3, ... $\rightarrow \infty$

и так далее, до бесконечности.
"Пальцы" все время
уменьшаются в размерах.

Можно доказать, что
"в пределе" получится
гомеоморфизм $h: S^2 \rightarrow h(S^2)$
сферы S^2 на ее образ $h(S^2)$.

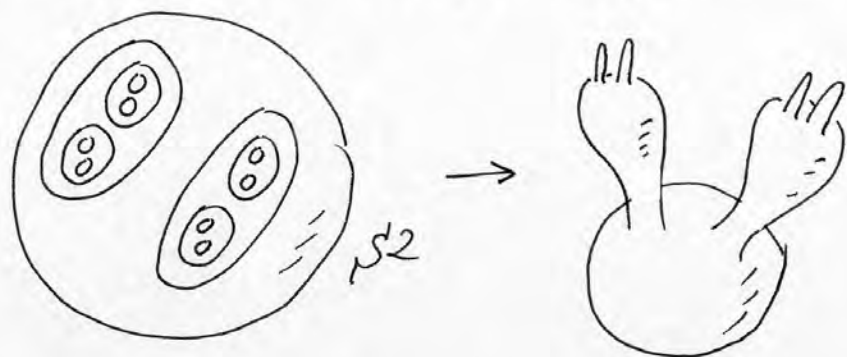
Этот образ, гомеоморфный 2-сфере, и называется
сферой Александера или "дикой сферой". Этот
"предел" существует.

- Теор. (Без а-ва). 1) Закрытое мн-во $h(S^2)$
гомеоморфно 2-сфере.
- 2) Этот ~~не~~ гомеоморфизм h не является мажким
вложением сферы в $\mathbb{R}^3$. Топологическая сфера
 $h(S^2)$ не является "локально плоской" в своих
особых точках. Такие "плохие" точки очень много:
они образуют канторово множество.
- 3) $\mathbb{R}^3 \setminus h(S^2) = A \cup B$, где A гомеоморфно 3-шару
 D^3 (это - "внутренность" сферы $h(S^2)$), а мн-во
 B - не связно. Т.е. существуют петли $\gamma \subset B$,
не стягивающиеся в точку из B .



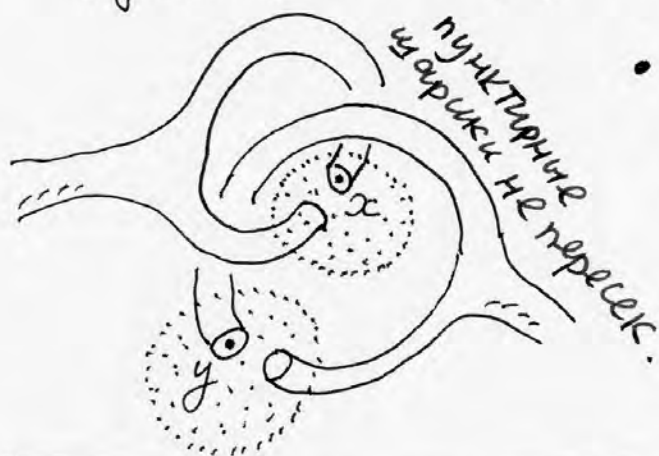
сфера Александра

- Вкратце: почему $\bar{A}$ гомотопично шару? Потому, что "пальцы" вырастают из пар дисков на S^2 :

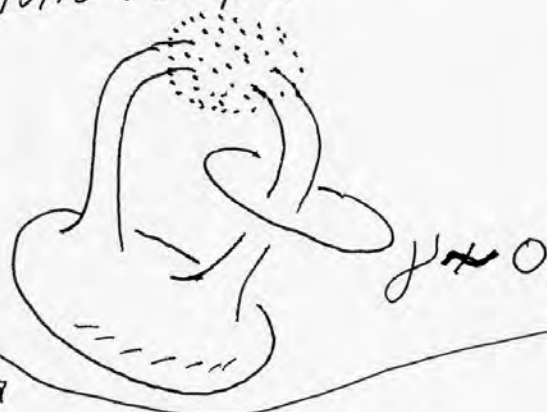


так что шар остается шаром (гомотопен D^3). А потому $\bar{A}$ как "предел" тоже гомотопично шару.

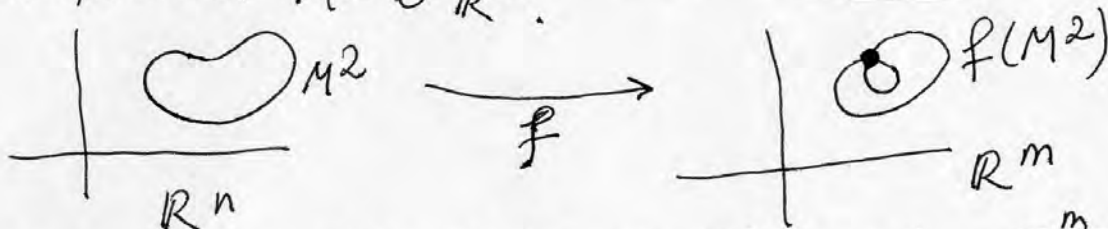
- Вкратце: почему h — это гомотопизм. т.е. если $x \neq y$ — две разные точки на сфере, то $h(x) \neq h(y)$. В самом деле, если $x \neq y$, то с некоторого момента (при построении h) эти точки окажутся в разных дисках, а потому — на разных "ручках", а потому уже никогда "не встретятся".



- Почему $\bar{B}$ — неодноточно? см. например, нестягиваемую петлю на рис.



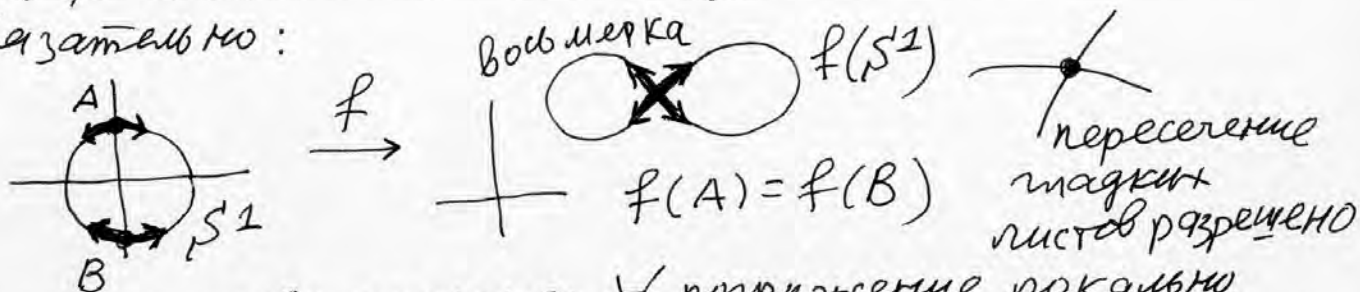
- Теперь — понятие погружения поверхности M^2 в $\mathbb{R}^m$.



Пусть (u, v) — локал. к-ты на M^2 , а $x^1, \dots, x^m$ — декарт. к-ты в $\mathbb{R}^m$.

Тогда $f: (x^i = x^i(u, v), 1 \leq i \leq m)$. Рассмотрим функц. матрицу $df = \begin{pmatrix} x_u \\ x_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u^1 & \dots & x_u^m \\ x_v^1 & \dots & x_v^m \end{pmatrix}$, где $x_u^i = \frac{\partial x^i}{\partial u}$, $x_v^i = \frac{\partial x^i}{\partial v}$. Это — матрица Якоби. Она задает дифференциал df отображения f .

- Опред. $f: M^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ назыв. погружением, если f — гладко (C^∞) и $\text{rang}(df) = 2$ в $\forall P \in M^2$. т.е. векторы τ_u и τ_v лин. незав. в $\forall$ точке $P \in M^2$.
- Комент. Не требуется гомеоморфизма M^2 образом $f(M^2)$. $\forall$ вложение — это погружение. обратно — не обязательно:



- По теор. о неявн. функциях $\forall$ погружение локально является вложением. Т.е. локально есть гомеоморфизм (и диффеоморф.) на образ.
- Опред. Две поверхн. (два 2-мн.) назыв. гомеом. (диффеом.), если $\exists f: M_1 \rightarrow M_2$, где f — гомеоморфизм (соотв. диффеоморфизм).

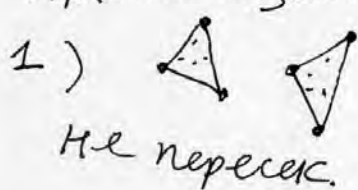
• Теор. классиф. 2-мерн. поверхн. Компактные, гладкие, связные, замкнутое (т.е. без края, без границ).

Цель: классифицировать такие M^2 стогн. до гомеоморф.

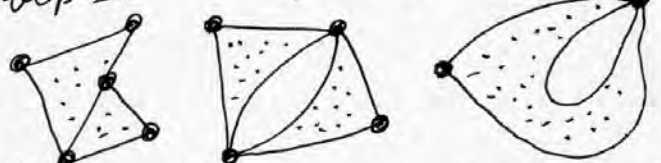
• Подробное д-во см. в: Мищенко, Фоменко, "Краткий курс дифф. геом. и топол.", стр. 180 — 191 (М., URSS, Леланд, 2016).

- Шаг 1. Триангуляция. Определение. Трианг. гладкой 2-поверхн. M^2 — это набор (конечный) вершин (точек) и гладких дуг (ребер). Условие: дуги пересекаются только в (своих) вершинах и только своими концами. Они режут M^2 на области, гомеомор. треугольникам. (считаем тр-уг. — замкн. подмн.)

• При этом возможны только след. варианты:



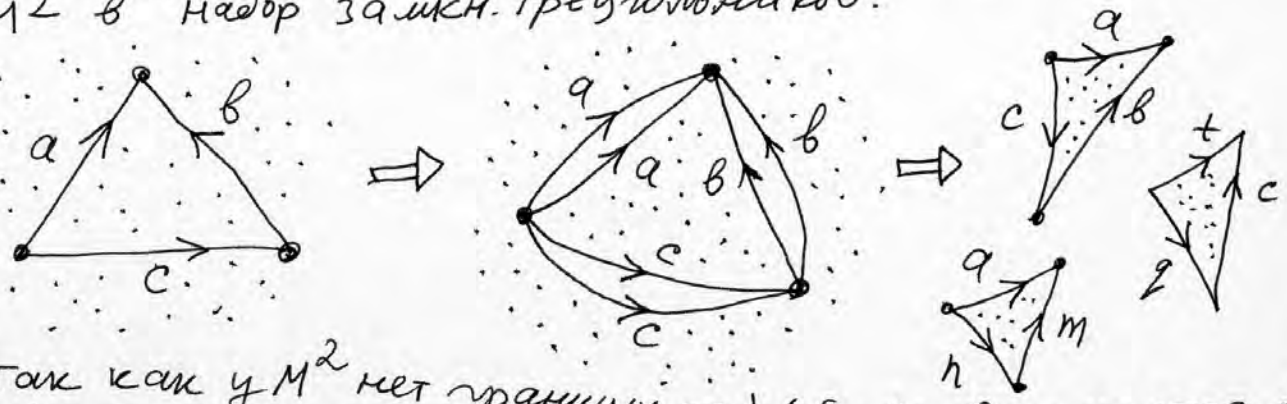
• Запрещено, например:



- Теор. (без д-ва. см. наш обязат. курс дифф. геом. и топол.) $\forall$ гладкое 2-мерн. комп. связное, замкн. (= без края) многообр. допускает гладкую конечную триангуляцию.

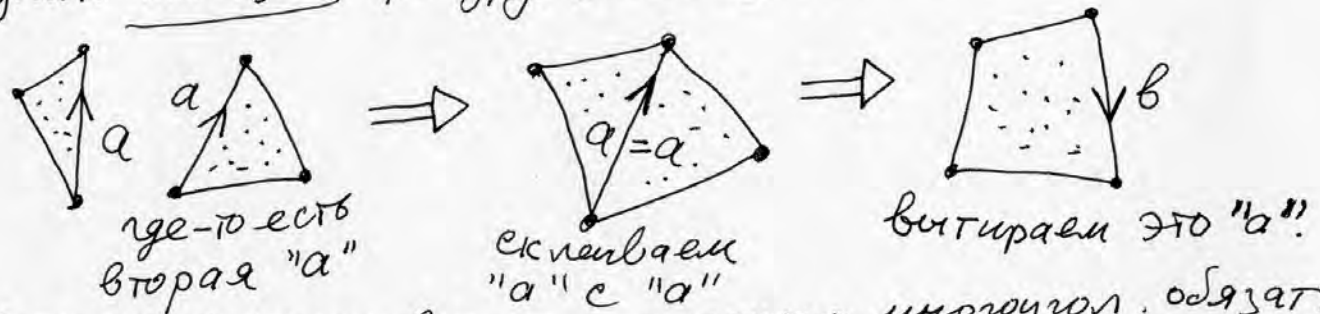
• Берем любую такую трианг. на M^2 .

- Шаг 2. Метим ребра a — ставим на них буквы (все разные!) и стрелки (ориентации) произвольно. Затем разрежем M_2 по всем ребрам и "рассыпав" M_2 в набор замкн. треугольников.

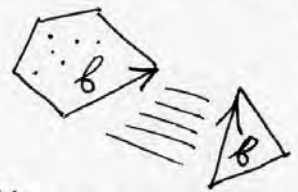


Так как у M_2 нет границы, то $\forall$ буква встречается в наборе Δ ровно два раза! Т.к. у каждого разреза есть два берега.

- Шаг 3. Склеиваем обратно треугольнички, чтобы получить плоскую фигуру (многоугольник).

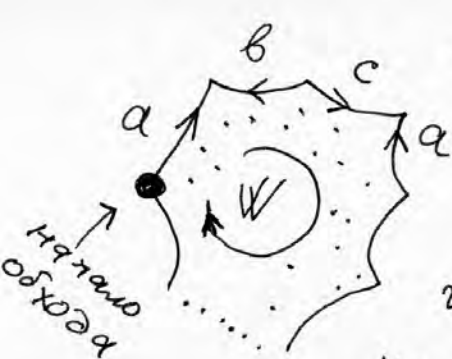


На границе получится плоского многоуг. обязат. Э хотя бы одна буква "b" такая, что ее дубликат "b" лежит на каком-то из оставшихся треугольников. Д-во: допущ. противное. Восстановим все склейки и M_2 окажется неразрывным объединением по крайней мере 2-х непересекающихся кусков (компонент). Противоречит связности M_2 .
Итак, Э "b" со своим дубликатом в оставшихся треугольничках:



склеиваем по "b",
вытираем этот разрез.
и т.д.

- В итоге получим плоский связный многоугольник W . Мы ислерпаем (т.е. подклеим) все треугольнички (иначе будет противоречие со связностью M_2).
Итог: на границе ∂W многоугольника W каждая буква "a" встрет. ровно два раза. Построение W — неоднозначно.
- Шаг 4. По мног. W строим "слово" (код) W . Будем его упрощать и приведем к каноническому виду (это — конечная цель).



обходим ∂W и выписываем буквы, указывая их ориентацию:

$$W = a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} ; \varepsilon_i = \pm 1$$

итак: $M^2 \rightarrow W(M^2)$ (= слово, код).

Неоднозначно. Это — не страшно. сократим все стоящие рядом aa^{-1} .

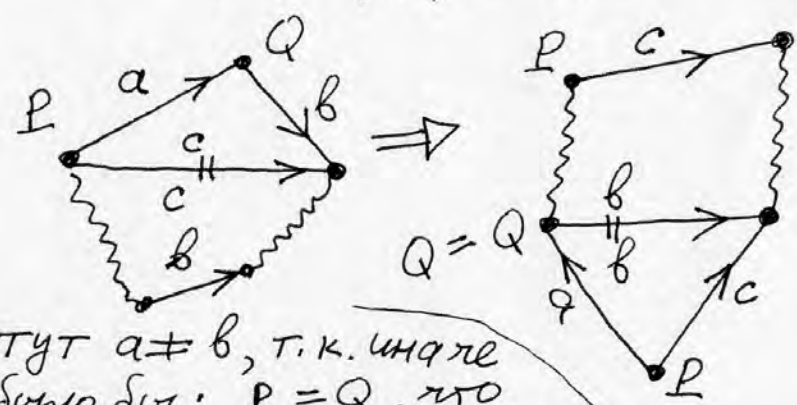
лемма. Если $W = \text{---} aa^{-1} \text{---}$ (прочерком обозначаем остальные буквы)

то на том же M^2 $\exists$ новая система разрезов, что $W' = \text{---}$ (т.е. aa^{-1} исчезает, а остальные не меняются).



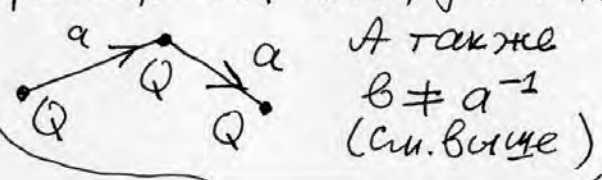
шаг 5. Все вершины $\rightarrow$ в одну вершину.

Рассмотр. классы эквивалентных вершин (т.е. склеивающихся в одну точку на M^2): $\{P\}, \{Q\}, \dots, \{R\}$. Тогда (если их $>$ леммы) $\exists$ два класса $\{P\}$ и $\{Q\}$ с парой их вершин на одном ребре:



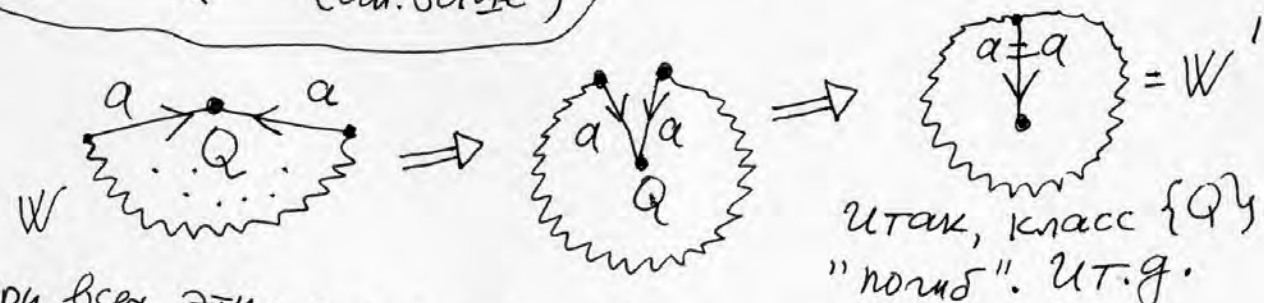
итак: $\{Q\} - 1$
 $\{P\} + 1$

тут $a \neq b$, т.к. иначе было бы: $P = Q$, что противоречит выбору $P \neq Q$.



А также $b \neq a^{-1}$ (см. выше)

Продолжая таким образом, "перекатываем" весь класс $\{Q\}$ в другие классы вершин. Последний шаг: когда в $\{Q\}$ осталась 1 вершина



итак, класс $\{Q\}$ "поглощен". Ит.д.

• При всех этих операциях M^2 заменяется на гомеоморфное. меняем лишь код $W \rightarrow W'$ (но не M^2 !). меняем систему разрезов.

(17)

т.е. выбираем ("рисует") более экономичные, оптимальные разрезы. При упрощении W новые разрезы уже не являются триангуляцией. Но это уже неважно. Поверхность M_2 при этом вообще не меняется.

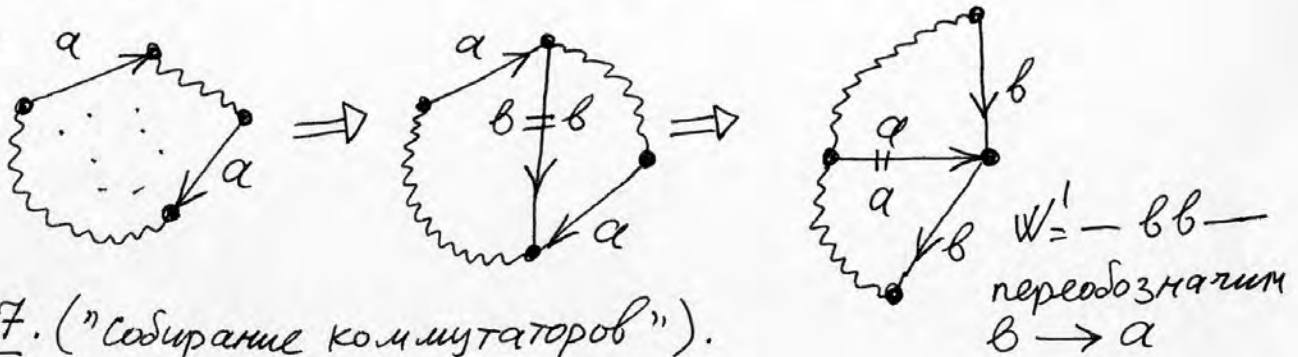
сферы с ручками, проективные плоскости, лист Мебиуса как "скрещенный колпак" и т.д.



- Шаг 6. ("собираание квадратов"). лемма:

$$W = \text{---} a \text{---} a \text{---} \Rightarrow W' = \text{---} aa \text{---}$$

до-во.

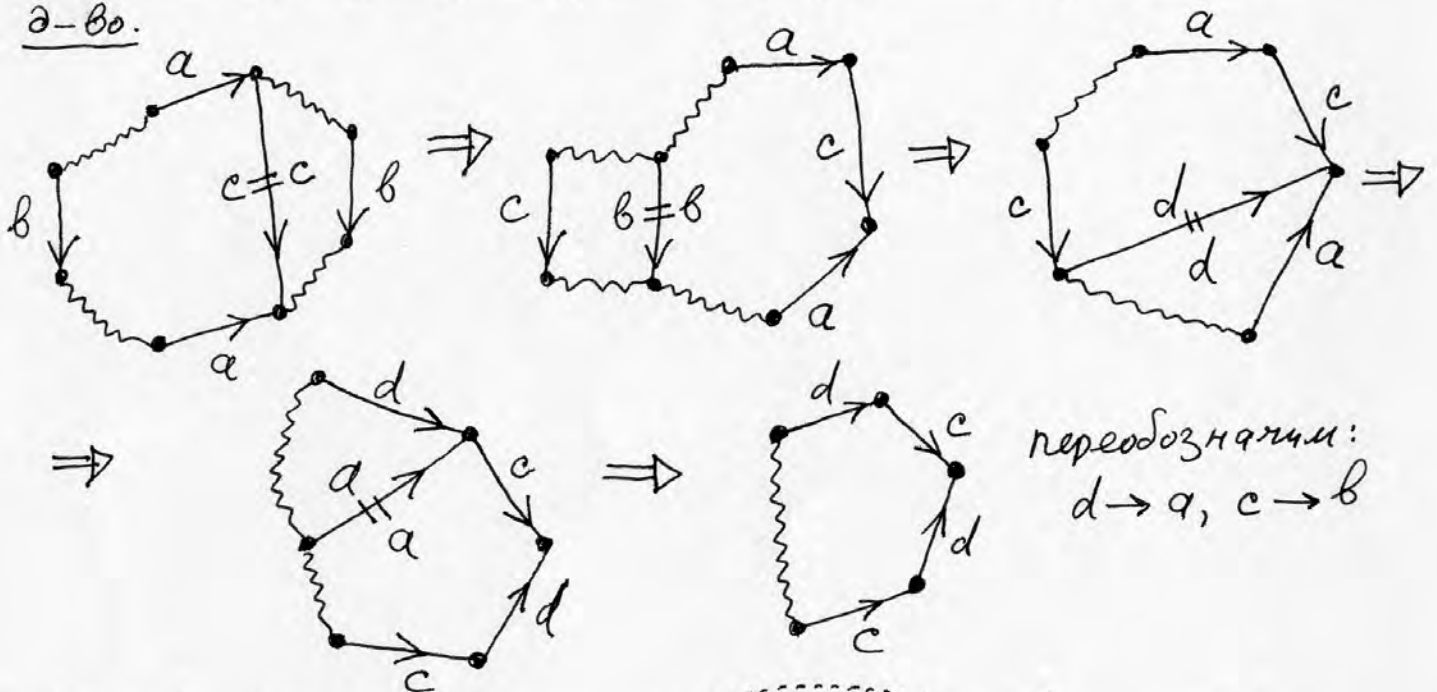


- Шаг 7. ("собираание коммутаторов").

лемма.

$$W = \text{---} a \text{---} b \text{---} a^{-1} \text{---} b^{-1} \text{---} \Rightarrow W' = \text{---} a b a^{-1} b^{-1} \text{---}$$

до-во.

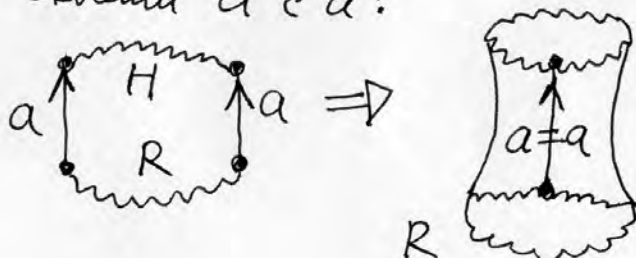


- Шаг 8. лемма. $W = \text{---} a \text{---} \overset{\exists v}{\text{---} a^{-1} \text{---} v^{-1} \text{---}} \text{---}$
 между $a \text{---} a^{-1}$
 $\exists v$ такое, что его
 дубликат v^{-1} расположен вне "отрезка" $a \text{---} a^{-1}$
 (именно v^{-1} , т.к. все квадраты мы уже собрали вместе).

до-во. Допуст. противное:

$$\text{---} a \text{---} \overset{v}{\text{---} a^{-1} \text{---} v^{-1} \text{---}} \text{---}$$

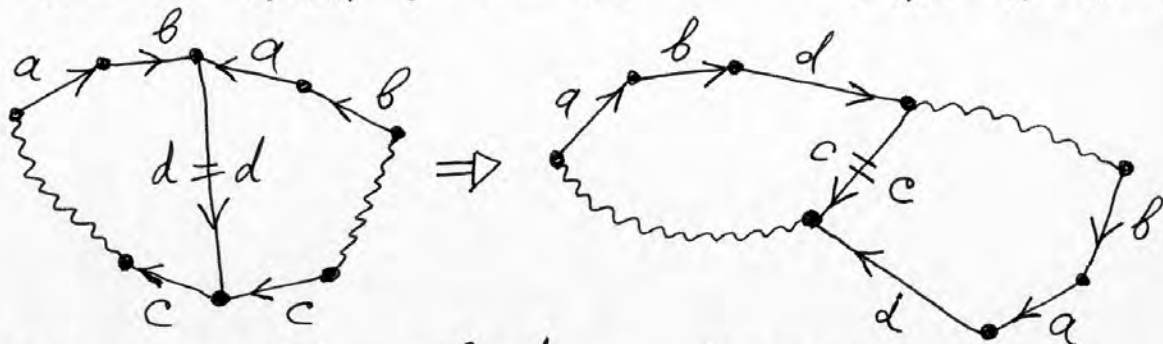
т.е. $\forall v$ между a и a^{-1} ,
 дубль v^{-1} слова между a и a^{-1} .
 склеим a с a^{-1} :



Но тогда все вершины из H
 склеены с вершинами из H ,
 и все вершины из R склеены
 с вершинами из R . Т.е.
 возникают два класса разных
 вершин. А мы уже привели все
 к одной вершине. Противоречие.

Шаг 9. (нет сдвигающей серии). В присутствии квадрата коммутатор превращается в 2 квадрата.

Лемма. $W = \text{---} a b a^{-1} b^{-1} \text{---} c c \text{---} \Rightarrow W' = \text{---} a^2 \text{---} b^2 \text{---} c^2 \text{---}$
 $\partial = \partial_0$.



получим: $\text{---} a b d \text{---} b a d \text{---}$ и теперь собираем вместе 3 квадрата: $\text{---} a^2 \text{---} b^2 \text{---} d^2 \text{---}$

Шаг 10. мы доказали, что $\exists$ три канонических кода:

$\alpha) a a^{-1}$

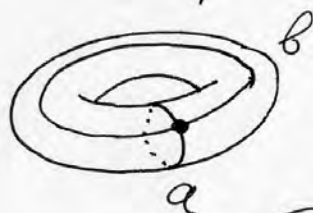
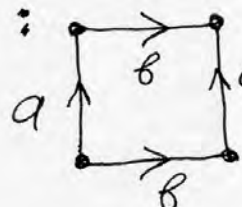
$\beta) a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, g > 0$

$\gamma) c_1^2 c_2^2 \dots c_k^2, k > 0$.

код α — это сфера: $a \cdot a^{-1} \Rightarrow$

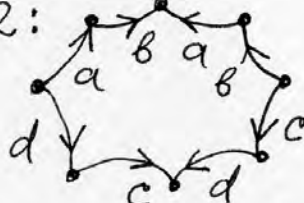


код β для $g=1$:



тор T^2
"бублик"

код β для $g=2$:



"крефель"
"две ручки"

код β для $\forall g$:



g "ручек"

другая модель в $\mathbb{R}^3$:

сфера с ручками

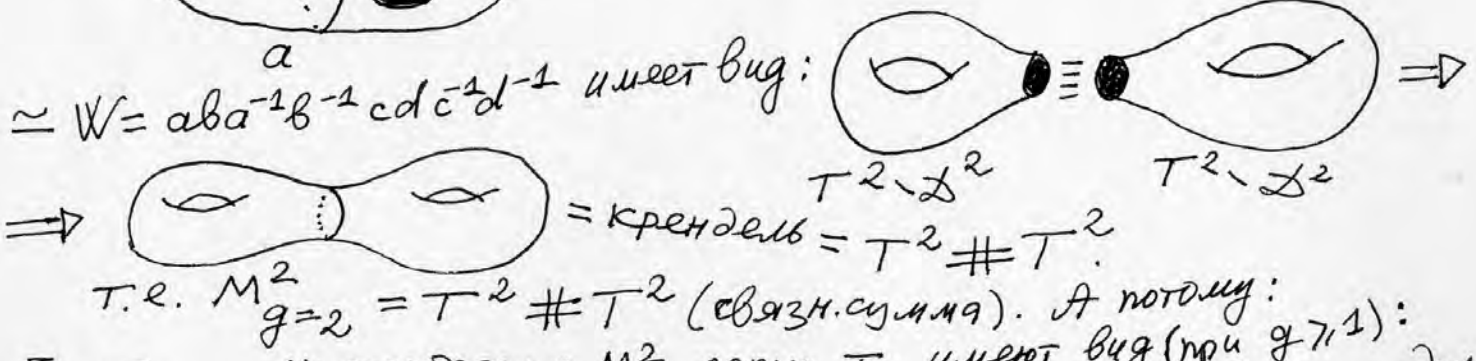
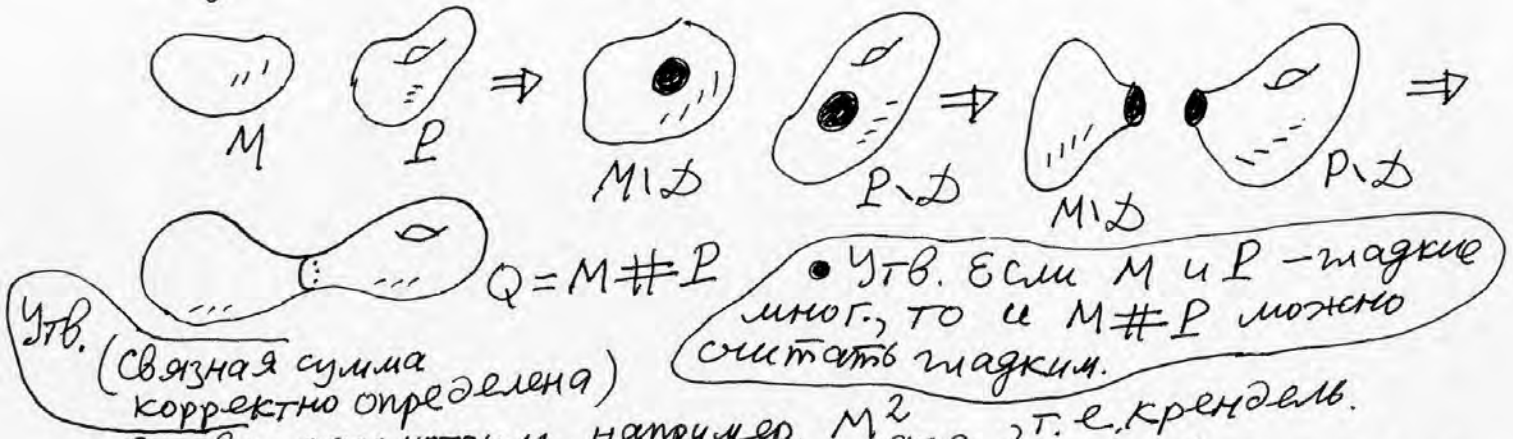
условно запишем так:

$S^2 + g(\text{ручек}),$

где $g \geq 0$. При $g=0$ получится 2-сфера S^2 . Тем самым, мы объединяем в записи $S^2 + g(\text{ручек})$ оба кода: α и β .

Эту ∞ серию назовем "серией I". Как увидим далее, это — ориентируемые 2-многообразия.

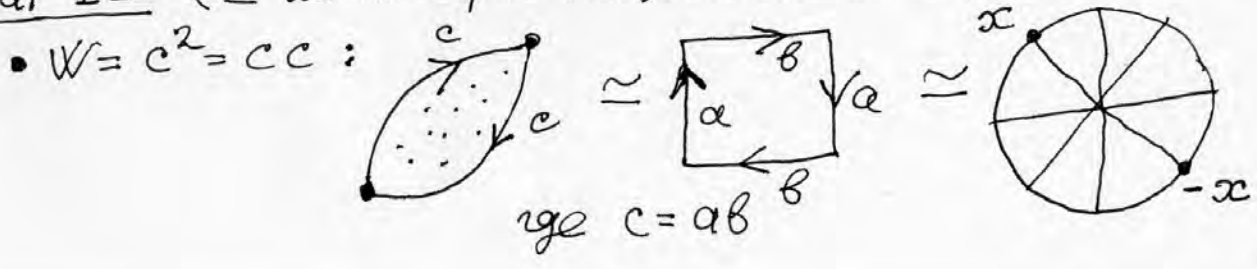
• Другой подход к построению M^2 . связности
опред. (связная сумма). Пусть M и P — два многообр.
 рассм. $M \setminus D$ и $P \setminus D$, т.е. выберем из M и P по диску
 (шару). Получим два мног. с краем сфера. отождествим
 эти две граничные сферы при помощи гомеоморфизма.
 Полученное мног. назыв. связной суммой: $Q = M \# P$.



[Теор. Многообразия M^2_g серии I имеют вид (при $g \geq 1$): $M^2_g = T^2 \# \dots \# T^2$ (g раз). Число $g \geq 1$ называется родом.
 Считаем, что при $g=0$ $M^2_{g=0}$ гомеом. сфере.

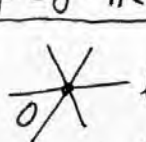
Утв. Все многообр. серии I можно матко вложить в $\mathbb{R}^3$.
 2-во фактил. уже дано выше. Это — сферы с ручками.

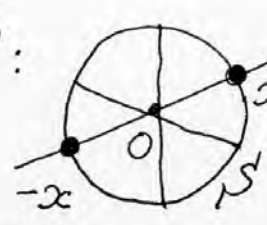
Шаг 11. (2-многоб. серии II). Начнем с примеров.



т.е. $W = S^2$ - это диск D^2 , на границе которого отождествлены точки по правилу: $x \sim (-x)$, т.е. диаметрально противоположные.
 А это есть проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$.

• Опрег. $\mathbb{RP}^n$. В $\mathbb{R}^{n+1}$ рассм. пучок прямых ℓ через точку O .

 ℓ $\mathbb{RP}^n = \{\ell\}$, т.е. точки $\mathbb{RP}^n$ - это прямые этого пучка.

• эквивал. опрег. $\mathbb{RP}^n$:  $\ell \leftrightarrow (x, -x)$, где $x \in S^n$.

т.е. $\mathbb{RP}^n = S^n / \mathbb{Z}_2$

получается отождествлением диамет. противополож. точек на сфере S^n . $\sigma: x \rightarrow -x$ инволюция на сфере.

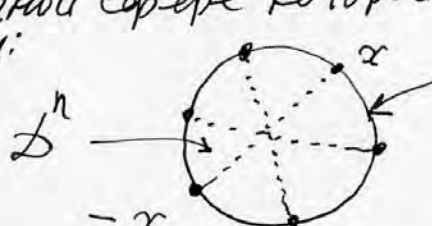
т.е. $\mathbb{RP}^n = S^n / \sigma$, факторизуем сферу по действию σ .

• еще одно эквивал. опрег. $\mathbb{RP}^n$:

 S^n S_+^n S_-^n нижняя полу сфера
 $x \sim (-x)$

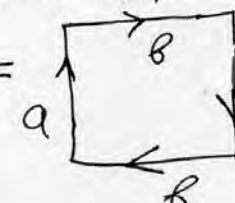
 S^{n-1} (экватор)
 т.е. $\mathbb{RP}^n$ - это полусфера, на границе которой (на экваторе) отождествлены диаметр. противополож. точки.

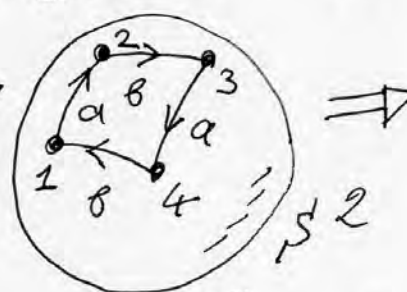
• еще одно опрег. $\mathbb{RP}^n$: так как полусфера S_-^n гомеоморф. диску (шару) D^n , то $\mathbb{RP}^n$ - это шар (диск) D^n , на граничной сфере которой отождествл. диаметр. противополож. точки:

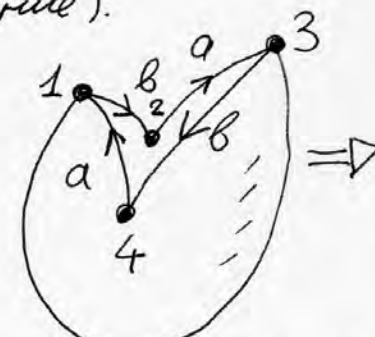
 D^n S^{n-1}
 $-x$

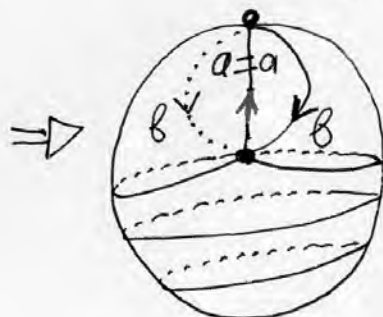
$\mathbb{RP}^2 =$ 

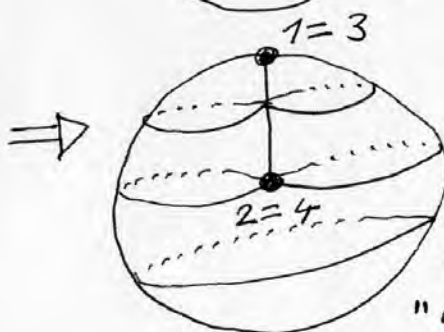
• Модель $\mathbb{RP}^2$ в $\mathbb{R}^3$ (это - не погружение).

$\mathbb{RP}^2 =$ 

 S^2

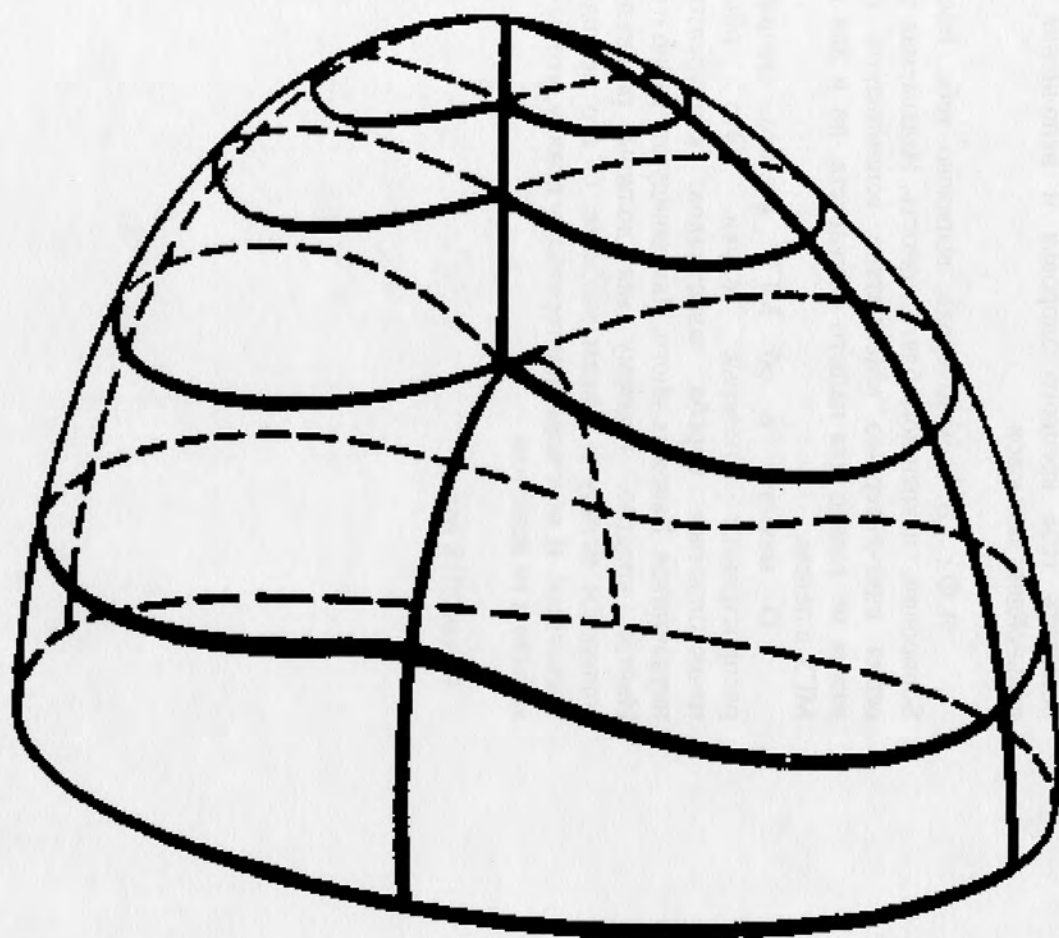




 $1=3$ $2=4$

В точках $(1=3)$ $(2=4)$ погружения нет.
 В остальных точках - погружение.

Если снизу отрезать "шапочку", то останется лист Мёбиуса. см. рис.

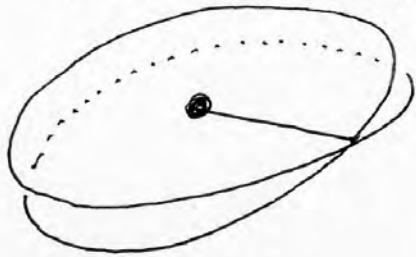


Это — погружение листа Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$, при котором его граница (окружность) стала плоской. За это пришлось "заплатить" тем, что у листа Мёбиуса появились самопересечения.

Такую модель для μ называют "скрещенный" колпак.

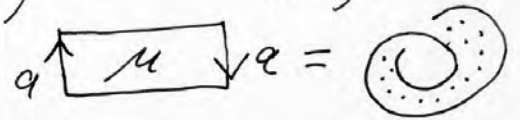
См. след. страничку: $\mu = \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{Z}^2$.

В топках (1=3) и (2=4) - ветвление порядка 2:



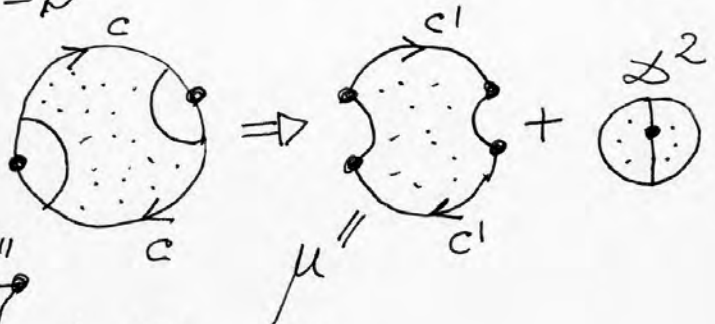
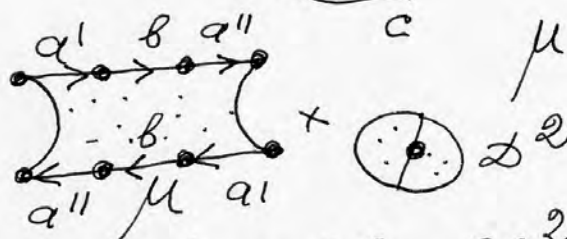
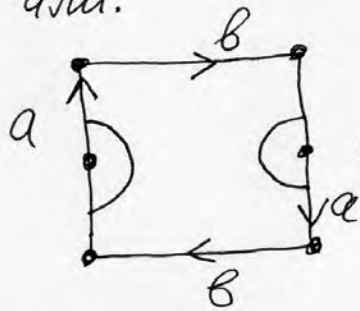
• лемма. $\mathbb{R}P^2 = \mu + \mathbb{Z}^2$, где μ - лист медузы;

$$\partial\mu = S^1, \quad \partial\mathbb{Z}^2 = S^1$$

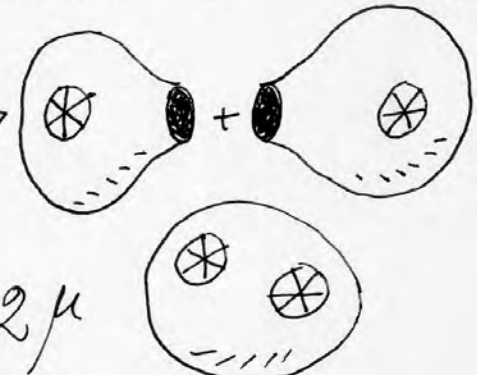
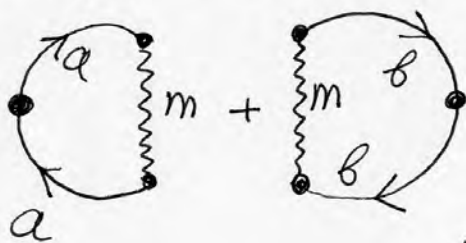
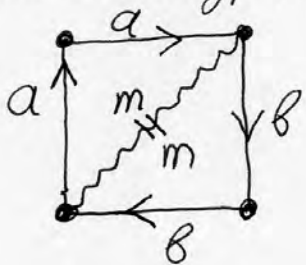


д-во. $\mathbb{R}P^2 - \mathbb{Z}^2 = \mu$:

или:

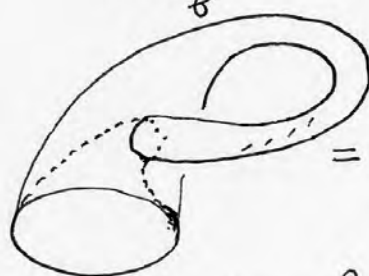
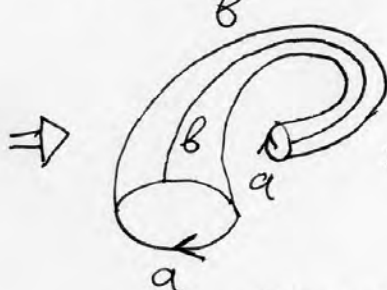
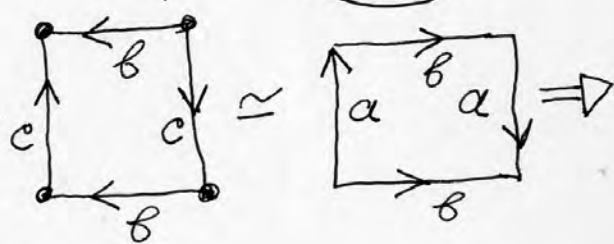
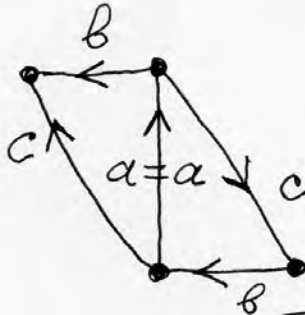
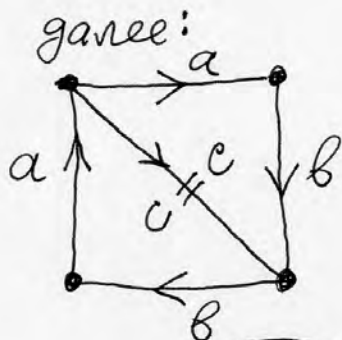


• Два квадрата: $V = a^2 b^2 = a a b b = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ (взвн. сумма)



$$S^2 + 2\mu$$

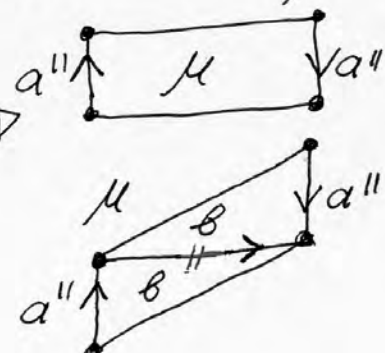
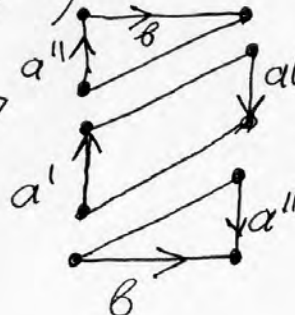
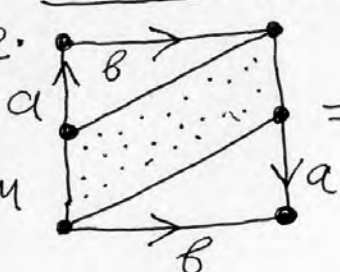
далее:



Сумма
Клейна

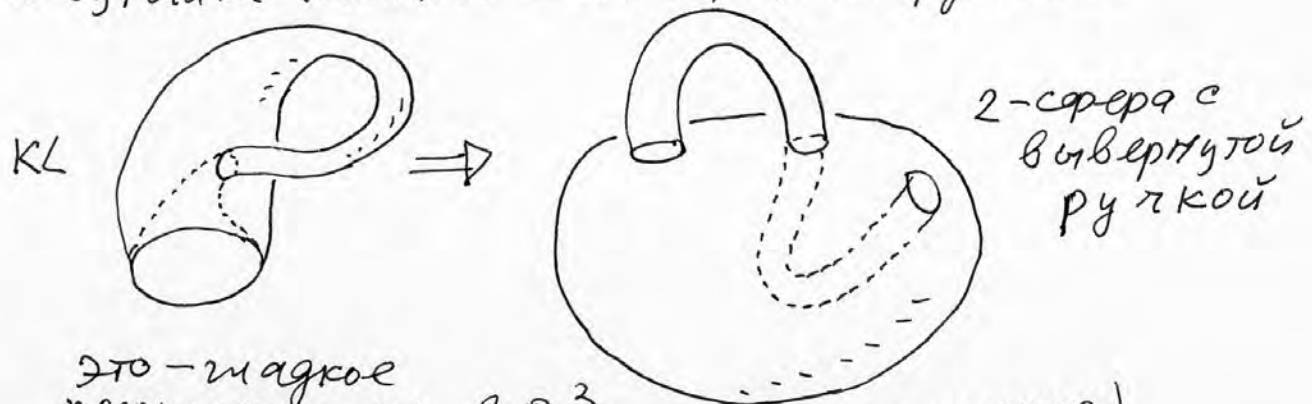
лемма. $KL = \mu + \mu \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 = S^2 + 2\mu =$

д-во.



разрежем

- Бутылка Клейна = вывернутая ручка:



2-сфера с вывернутой ручкой

это — мажорное погружение KL в $\mathbb{R}^3$.
но — не вложение (есть самопересечение)

- еще одно погружение KL в $\mathbb{R}^3$:



склеить восьмерки с поворотом на π

Получается склеиванием восьмерки вдоль тесной окружности так, чтобы после полного оборота окружность повернулась на 180° .

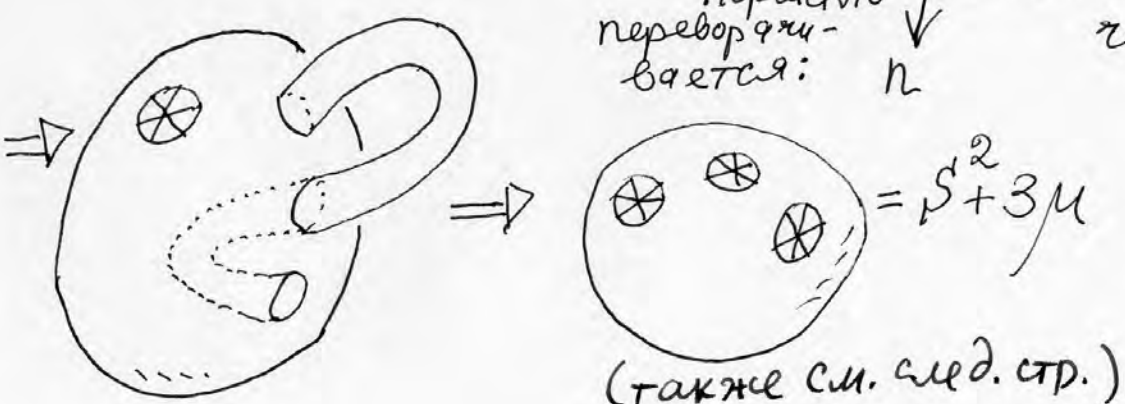
- Еще одно (мажорное) э-во, что нет смешанной серии M^2 :
 $W = -a b a^{-1} b^{-1} c c^{-1} \simeq W' = -a^2 - b^2 - c^2$



$a b a^{-1} b^{-1} - 1$
протащим одну подложку ручки вдоль петли μ , проходящей через лист Мебиуса

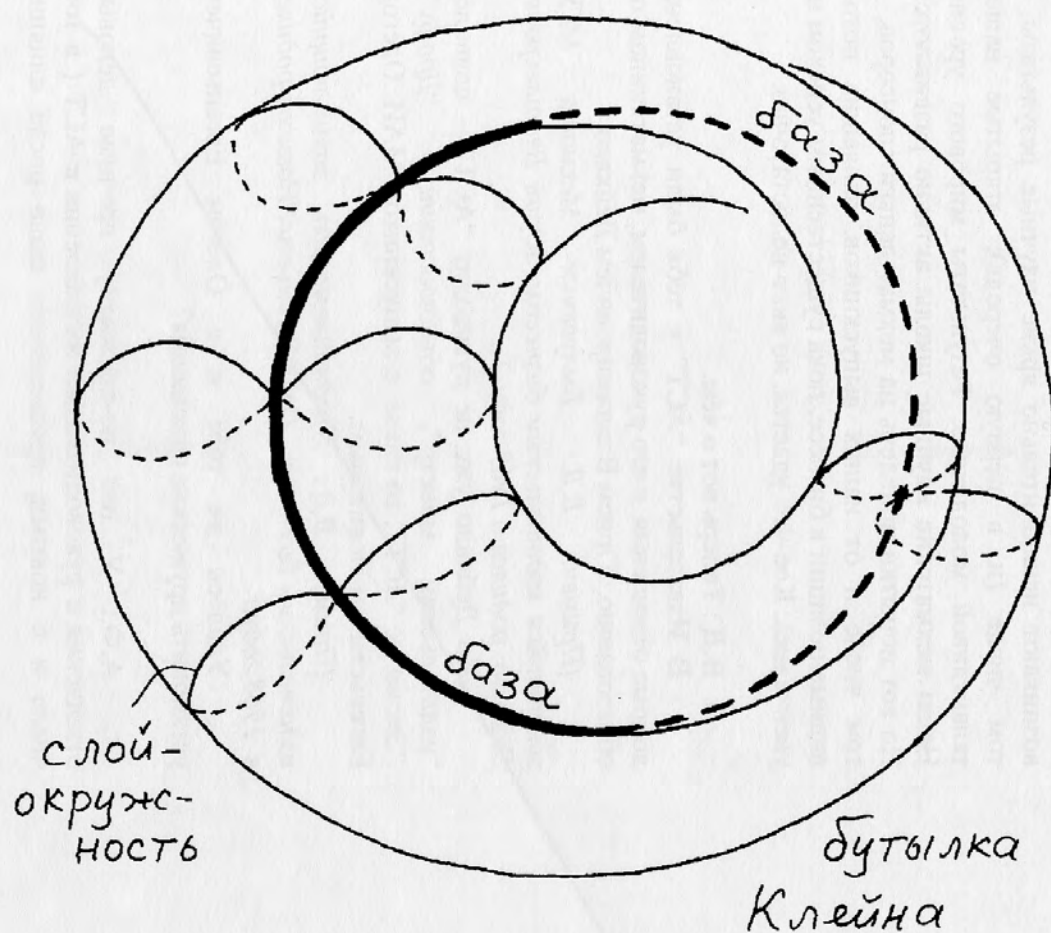
А это означает, что ручка вывернулась:

нормаль переворачивается: n

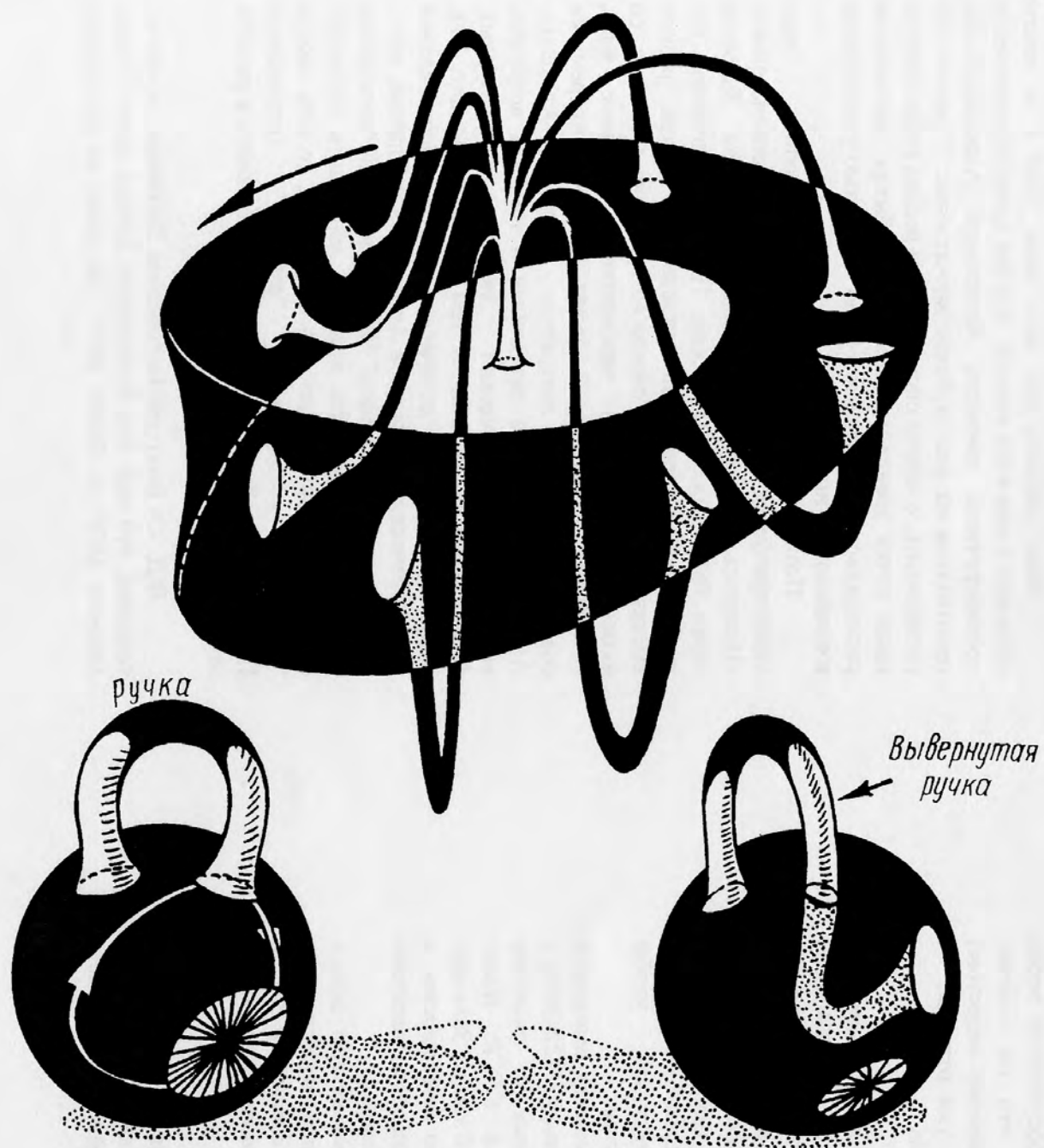


т.е. ручка превратилась в два листа Мебиуса

(также см. след. стр.)



погружение KL в $\mathbb{R}^3$. линия
сампересечения — это окружность



превращение ручки в вывернутую ручку, т.е. в два листа Мебиуса (при наличии листа Мебиуса)
 $\mathbb{Z}$ -во отсутствия "смешанной серии".

Итог шага 11: Любое M^2 типа II гомеоморфно сфере с k тонкими медусами: $S^2 + k\mu$, т.е. связной сумме k экземпляров RP^2 :
 $M^2_k = S^2 + k\mu = RP^2 \# \dots \# RP^2 \quad (k \geq 3)$.

- Ориентируемость и неориентируемость. Рассмотрим на M^2 всевозможные пути-петли γ , выходящие и возвращающиеся в точку x . В точке x рассмотрим касательный репер (из касательных векторов).

Опред. M^2 назыв. ориентируемым, если при любой непрерывной деформации (= скольжении) касательного репера вдоль любой петли, он возвращается в точку x с той же ориентацией.

M^2 назыв. неориентируемым, если найдется петля γ , при скольжении вдоль которой ориентация репера поменяется.

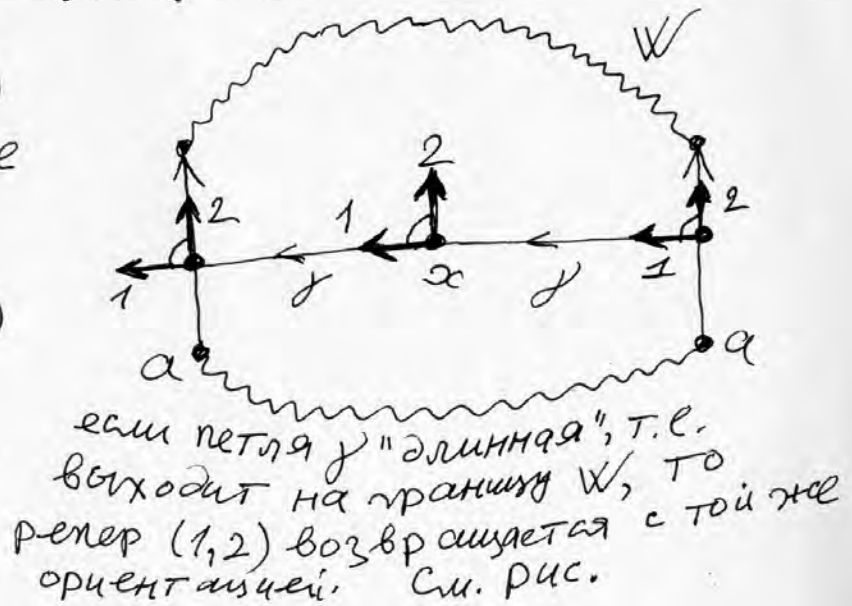
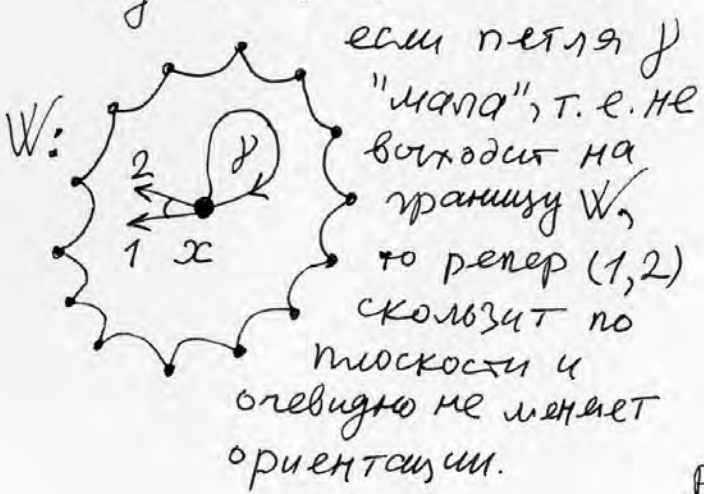
- Ориентируемость или неориентируемость — это инвариант гомеоморфизма.

Шаг 12. Заключительный. Теорема классификации M^2 .

- 1) Любое связное, комп., меткое, замкн. (без края) M^2 гомеоморфно (и диффеоморфно) либо: I: $S^2 + g(\text{ручек}), g \geq 0$, либо: II: $S^2 + k\mu, k \geq 0$. Числа g и k назыв. родом.
- 2) Мног. серии I — ориент. Мног. серии II — неориент.
- 3) Мног. серии I и серии II не гомеоморфны.
- 4) Мног. серии I можно вкладыв. в R^3 .
- 5) Мног. серии II можно погруж. в R^3 , но не вкладываются.

Д-во. Пункт 1 уже доказан выше. Докажем 2.

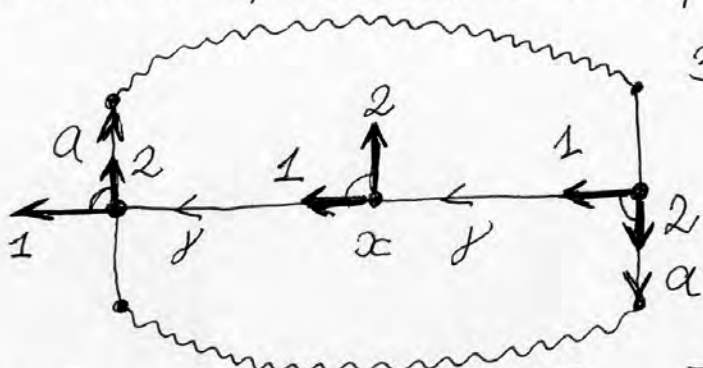
$M^2_g = S^2 + g(\text{ручек}) \cong \prod_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. Рассмотрим петли γ .



- Теперь $M_K^2 = S^2 + k\mu$, $k > 0$. $W = \prod_{i=1}^k S_i^2$.

Как и в ориентир. случае

скольжение (перенос) репера вдоль "малых" петель не меняет ориентации. Теперь рассмот. "длинные петли":



Здесь репер достигает ∂W и, очевидно, возвращ. в точку x с противополож. ориентацией. Пункт 2 теор. доказан.

- Пункт 3. Многооб. I и II не гомеом., т.к. I — ориент., а II — неориент. А вот негомеоморфность многооб. разного рода внутри каждой серии — факт более сложн. мы его докажем потом, используя гомологии.
- Пункт 4 доказан выше.
- Докажем пункт 5. Неориент. случай.

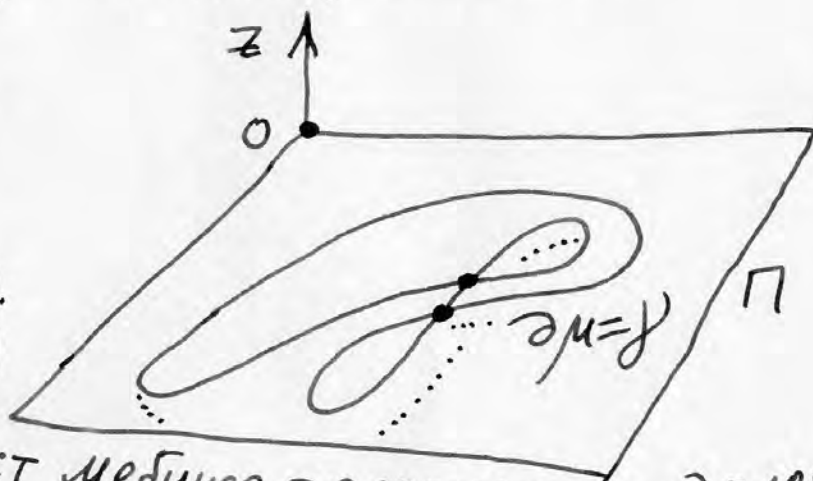
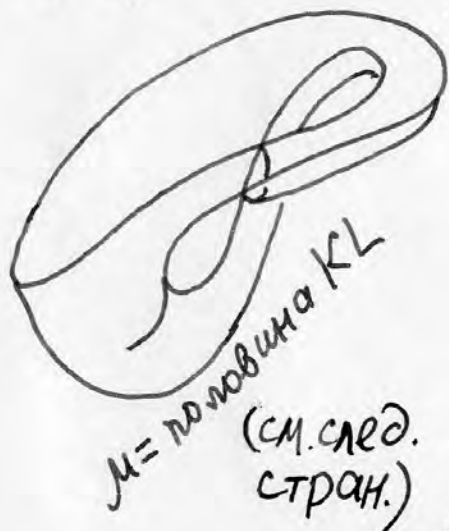
Лемма. $\mathbb{R}P^2$ гладко погруж. в $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}P^2 = \mu + \mathbb{Z}^2$ (см. выше). Рассмотрим $KL = \mu + \mu$

и разрежем KL пополам плоскостью, см. рис.

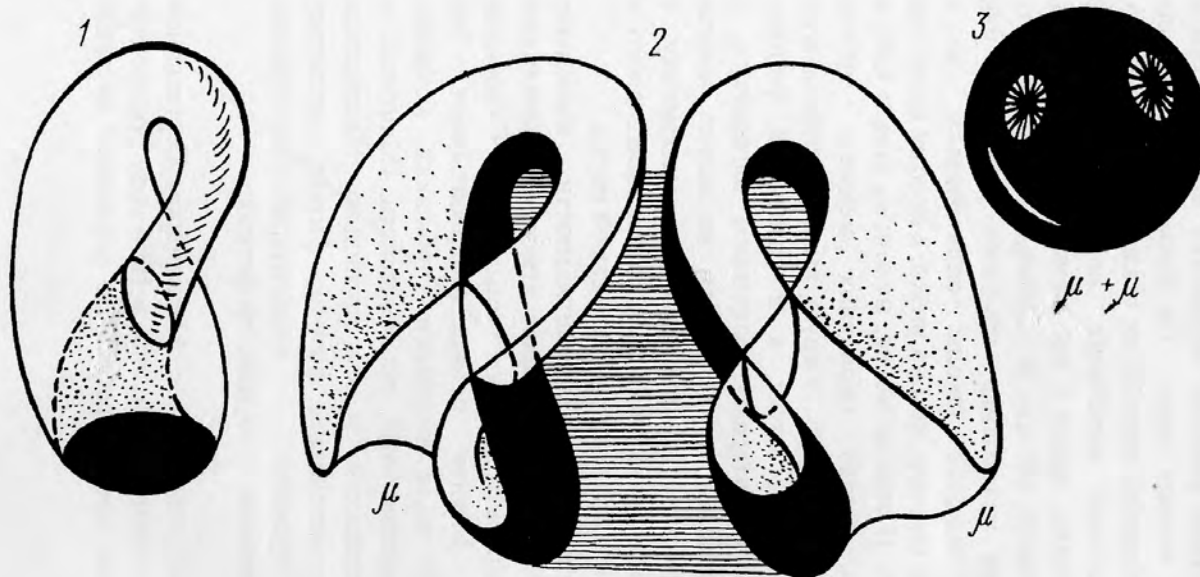
это — погружение μ в $\mathbb{R}^3$.

Граница μ — это плоская кривая с самопересечением:

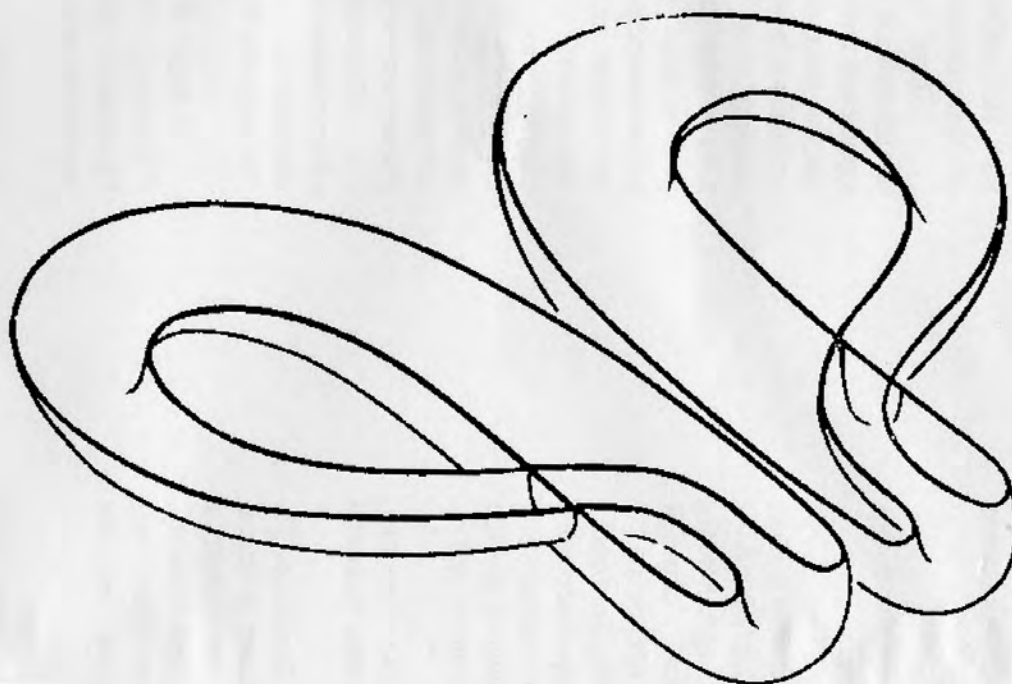
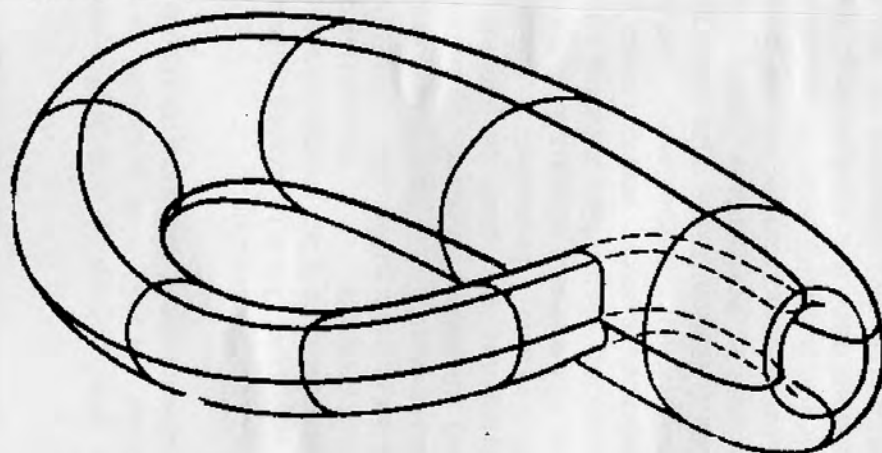


лист Мебиуса расположен под плоскостью P

Будем поднимать вверх плоскость P , одновременно деформируя кривую γ как показано на рис. При этом γ будет "заметать" некоторую 2-поверхность, погруженную в $\mathbb{R}^3$. Цель: продеформировать γ в станд. окружн. S^1 без самопересеч. в P .

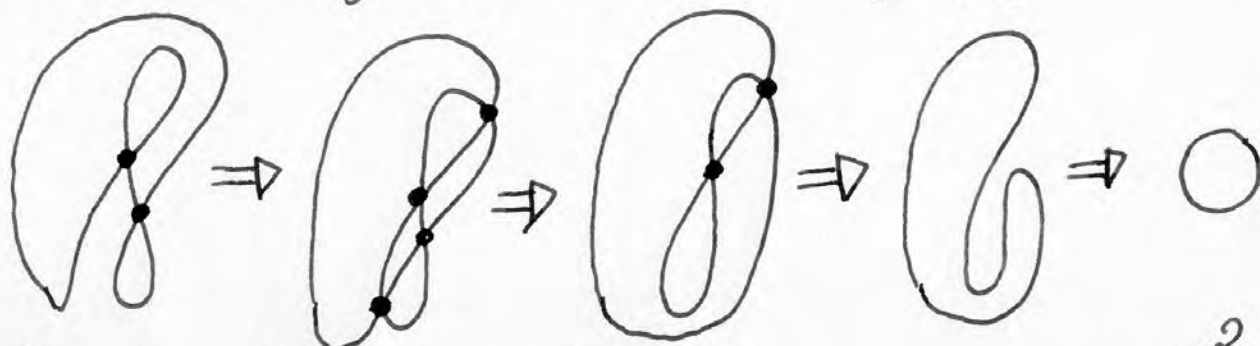


более наглядное изображение разрезания KL
на два листа медузы.

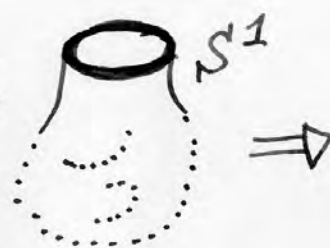


деформация γ : (см. также след. стр.)

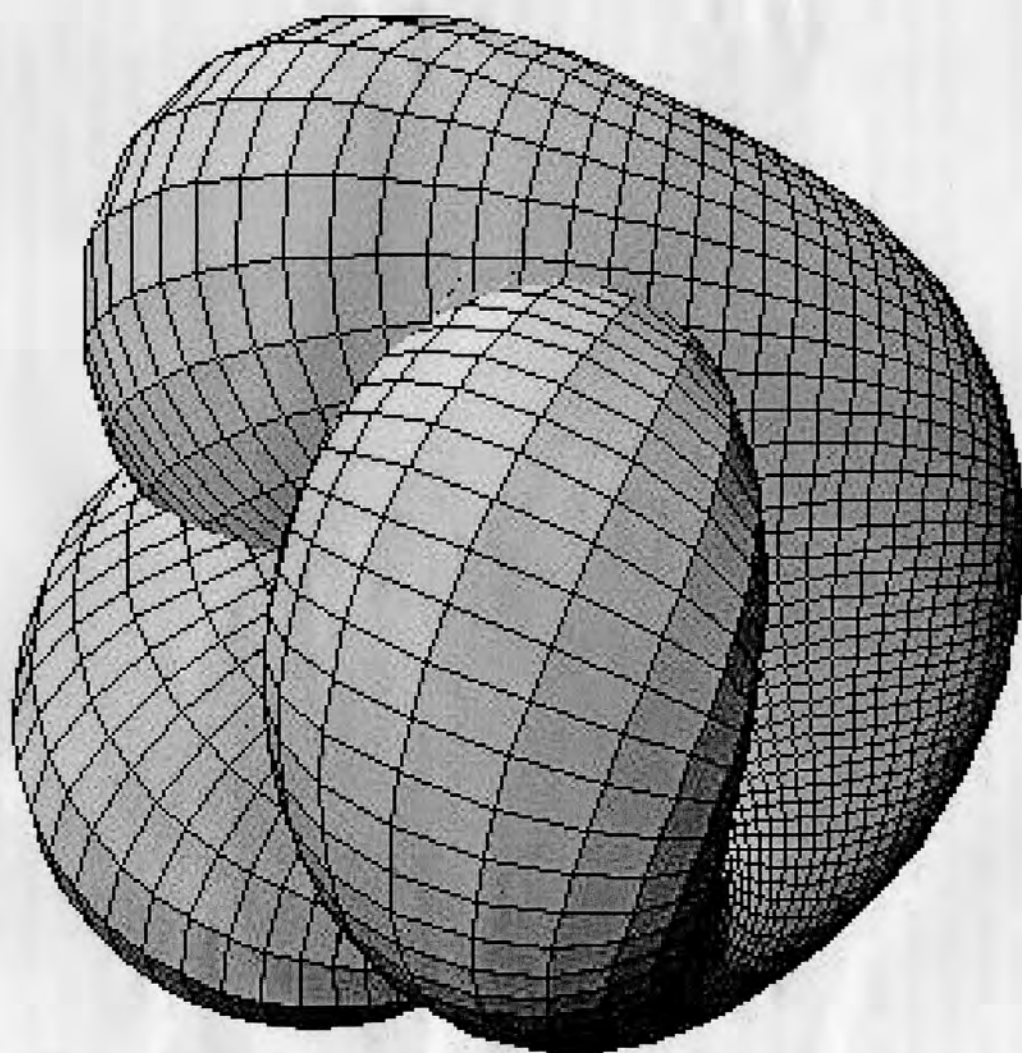
(24)



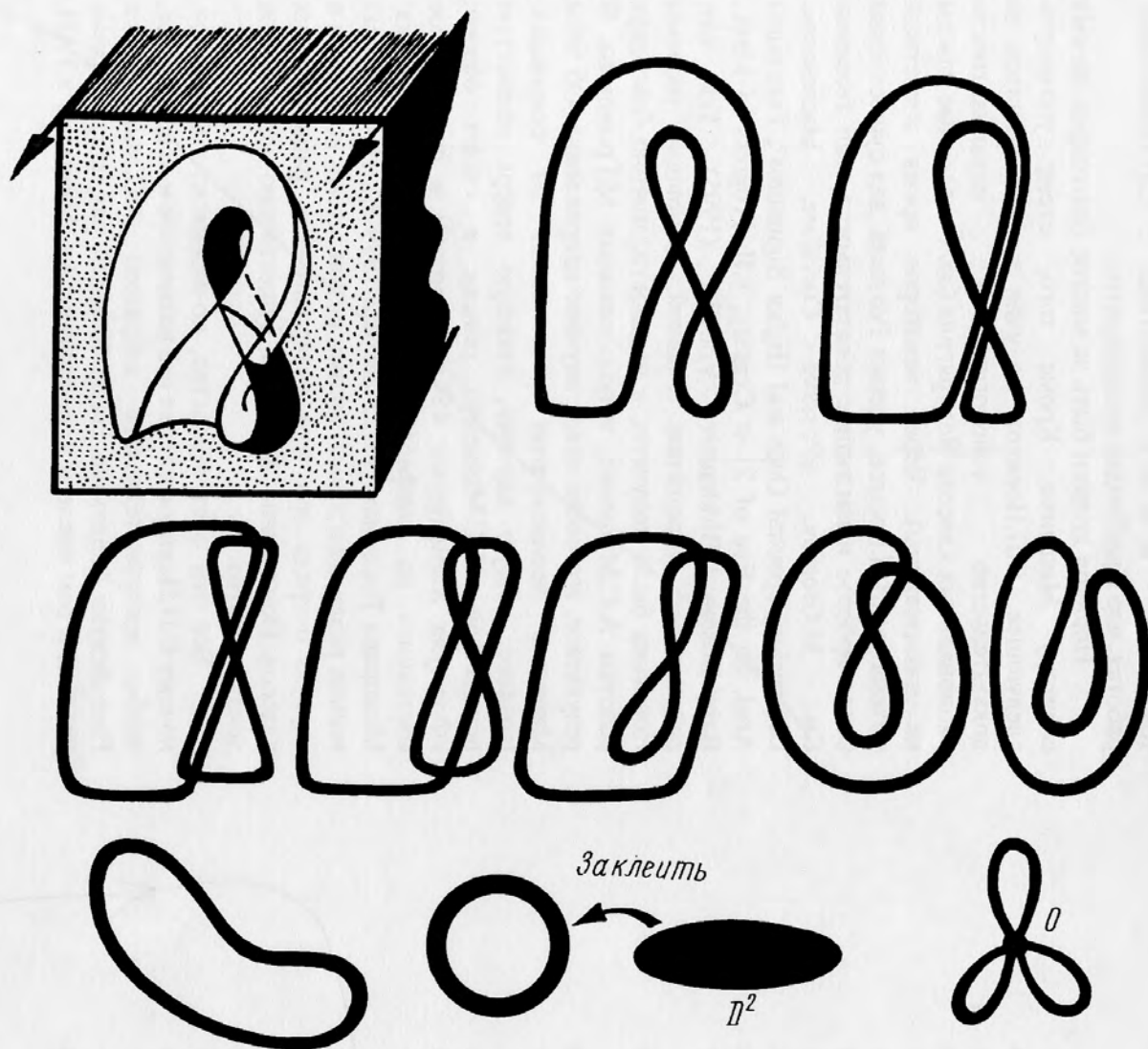
Получили в $\mathbb{R}^3$:
сложную поверхность,
с границей S^1 ,
являющуюся
погружением μ
в $\mathbb{R}^3$



эта поверхность
называется "поверхностью Бойя".



А так как $M^2_k = \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$ (k раз), то мы
получаем погружение M^2_k серии Π в $\mathbb{R}^3$.



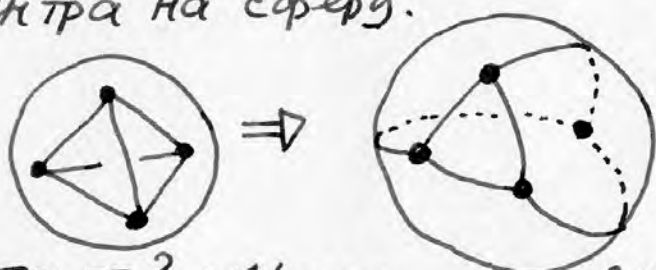
Еще одно изображение деформации границы
листа Мебиуса в поднимающейся плоскости.

Почему M^2_K серии II нельзя вложить в $\mathbb{R}^3$?
 легко доказать, что если M^2 — гладк. комп. замкн. повер.
 вложенная в $\mathbb{R}^3$ (без самопересек.), то она разбивает
 $\mathbb{R}^3$ на две части, а потому ориентируема.

Пункт 5 доказан.

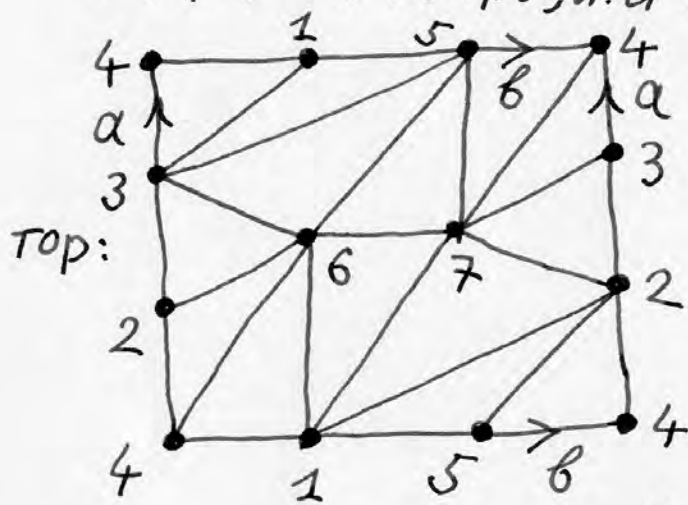
• минимальные триангуляции S^2 , T^2 , $\mathbb{R}P^2$. т.е. с миним.
 альным числом треугольников.

• S^2 : 4 треуг. и 4 вершины. Опшем вокруг
 симплекса (тетраэдра) сферу и строят. его 4х
 центра на сферу.



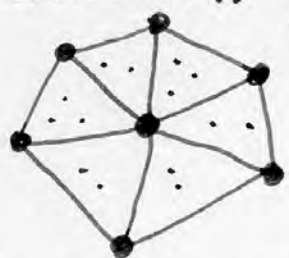
• докажите
 минимальность
 (кстати, это — полный
 граф: каждая вершина
 соединена с каждой)

• тор T^2 : 14 треуг. и 7 вершин:



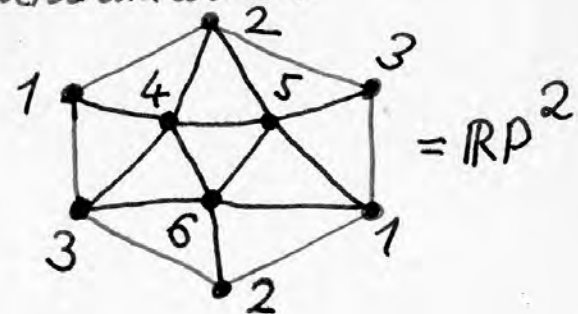
(это — тоже полный граф)
до-во. Пусть n — число треуг.
 в триангул. тора. Тогда число
 ребер равно $3n/2$, т.к. к каж-
 дому ребру примыкают два Δ .
 А всех ребер у n треуг. — $3n$.
 В обязат. курсе есть теор.:
 Эйлерова характ. тора $= 0$,
 т.е. $\# \text{вер.} - \# \text{ребер} + \# \text{треуг.} = 0$

т.е. $\# \text{вер.} - \frac{3n}{2} + n = 0 \Rightarrow \text{вершин} = n/2$. Всего
 вершин у n треуг. — $3n$, поэтому при склейке M^2 из
 n треуг. в одну вершину на T^2 "в среднем" попадает
 $(3n)/(n/2) = 6$ вершин. А потому $\exists$ вершина на T^2
 кратности ≥ 6 . Но тогда её "звезда" имеет вид:



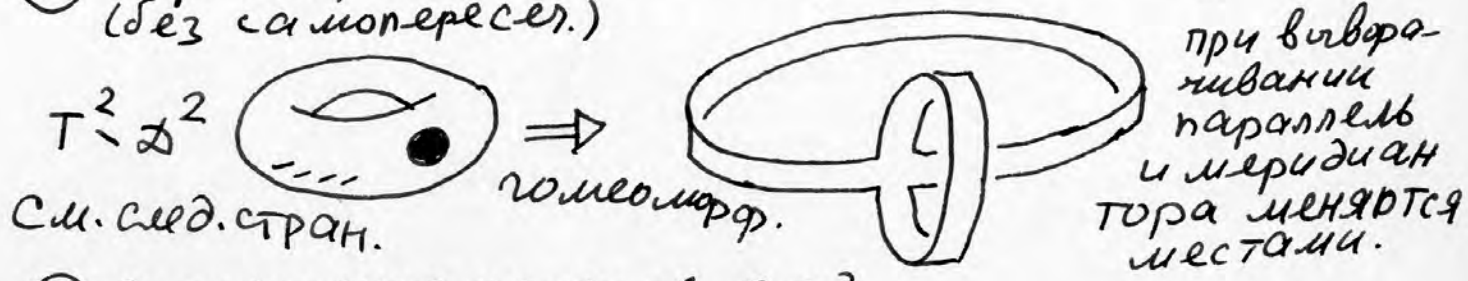
т.е. к ней примыкают по крайней
 мере 6 треуг. А тогда число вершин ≥ 7 .
 А мы предьявили триангул. с 7 верш.
 Потому она минимальна.

• Задача: миним. трианг. $\mathbb{R}P^2$
 имеет 6 вершин
 и 10 краей. см. рис.

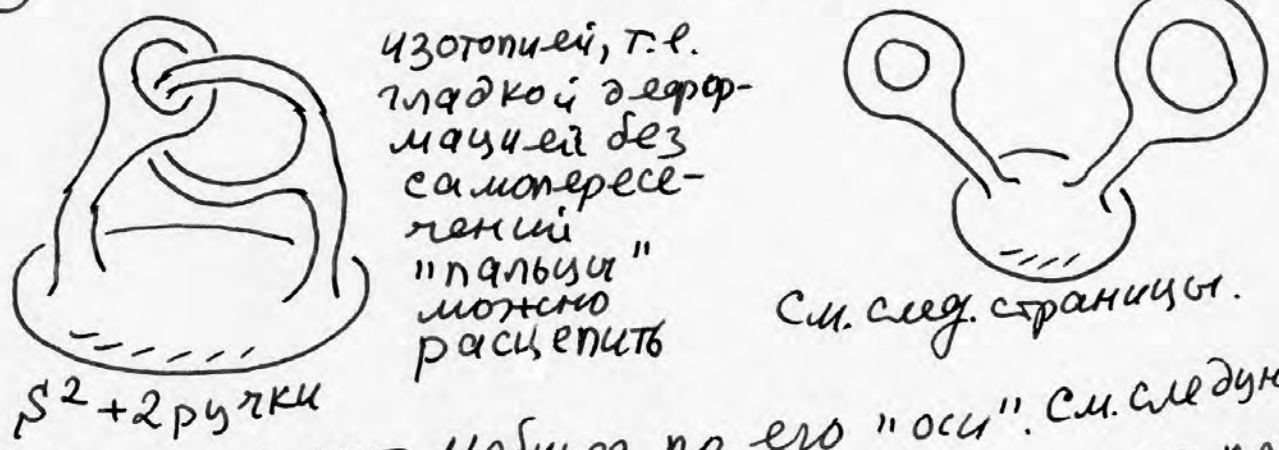


для $\mathbb{R}^2$ - это тоже полн. граф. Но для других 2-поверхн. их минимал. триангул. не обязана быть полными графами.
 • Несколько задач.

- ① Тор с дыркой можно вывернуть наизнанку в $\mathbb{R}^3$ (без самопересек.)



- ② Расщепление пальцев в $\mathbb{R}^3$:

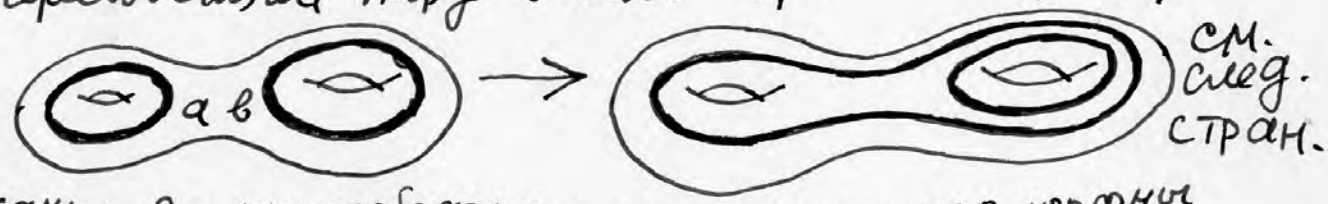


- ③ Разрезать лист Мебиуса по его "оси". См. следующую стр.

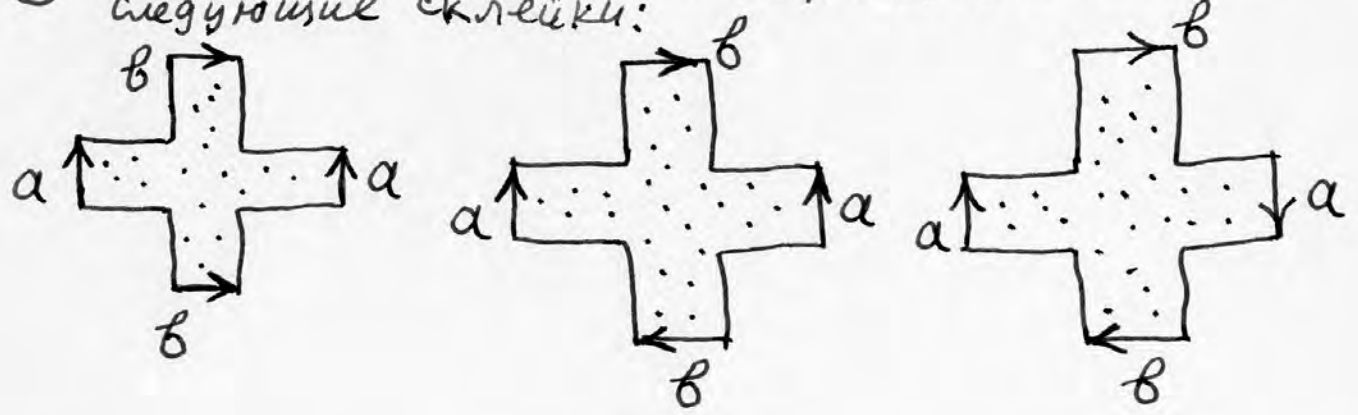
- ④ Чему гомеоморфно мн-во всех прямых на плоскости.

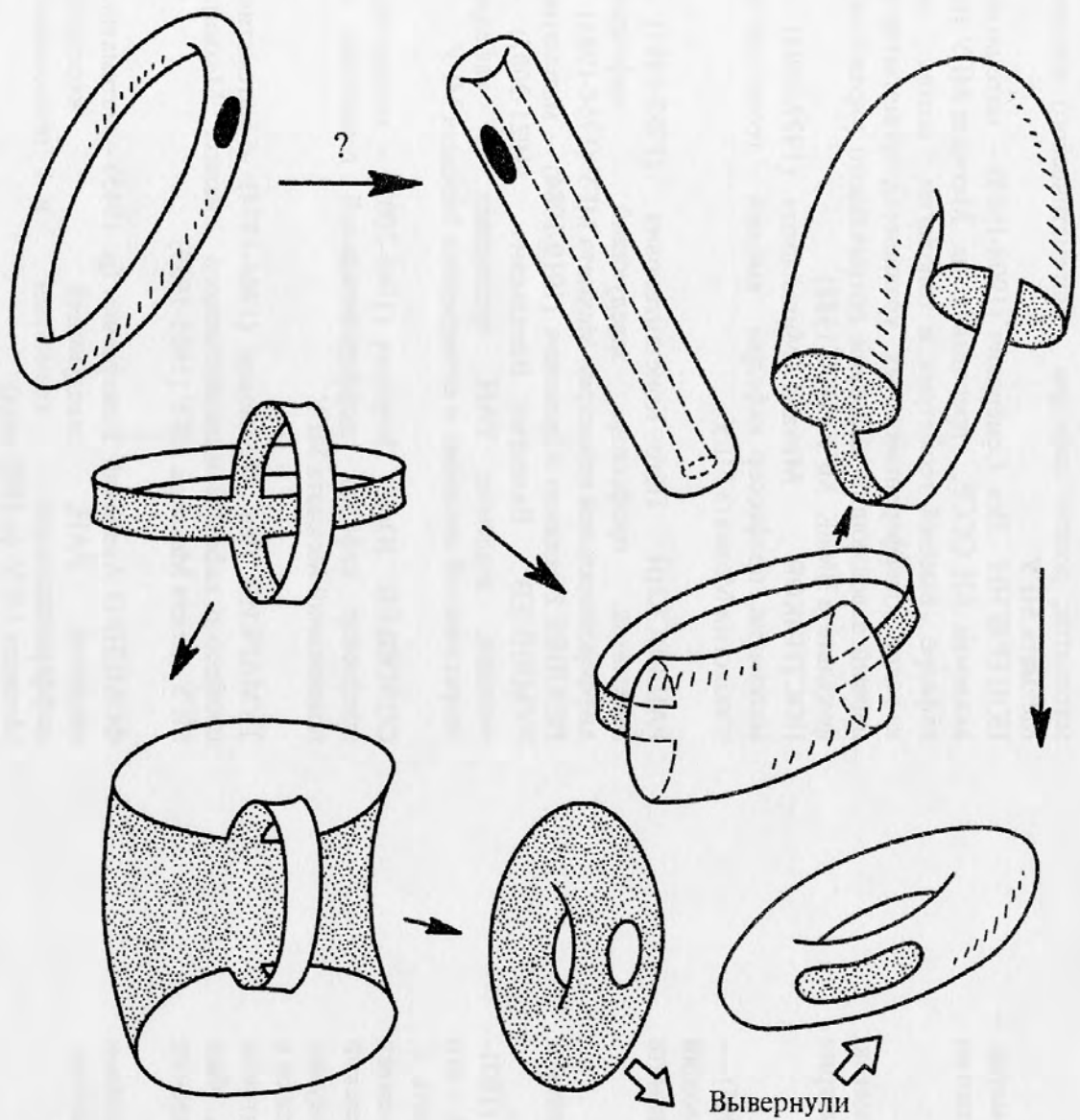
ответ: листу Мебиуса.

- ⑤ Построить гомеоморфизм кренделя на себя, переводящий пару циклов a, b в пару b, a .

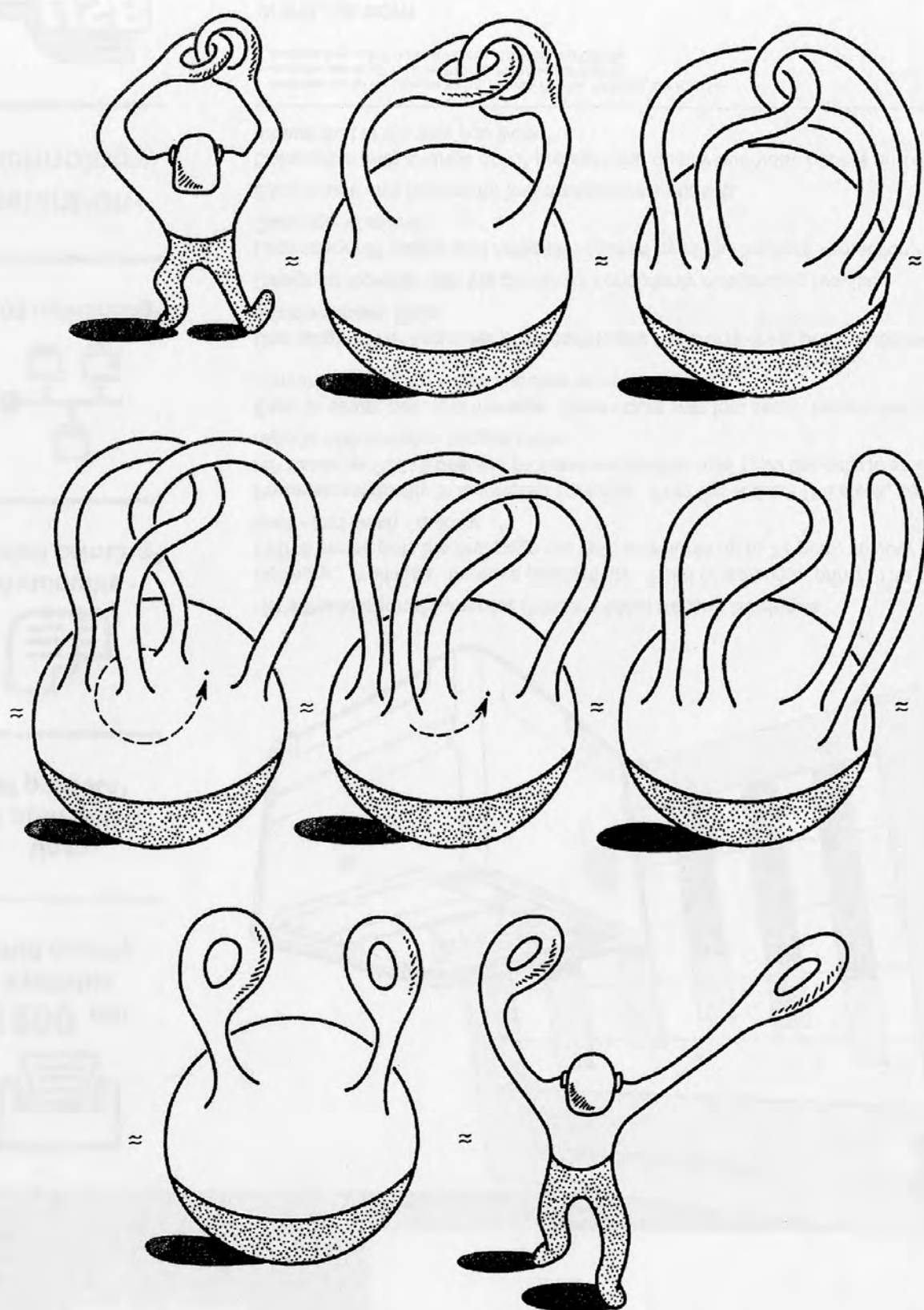


- ⑥ Какими 2-многообразиями с краем гомеоморфны следующие склейки:

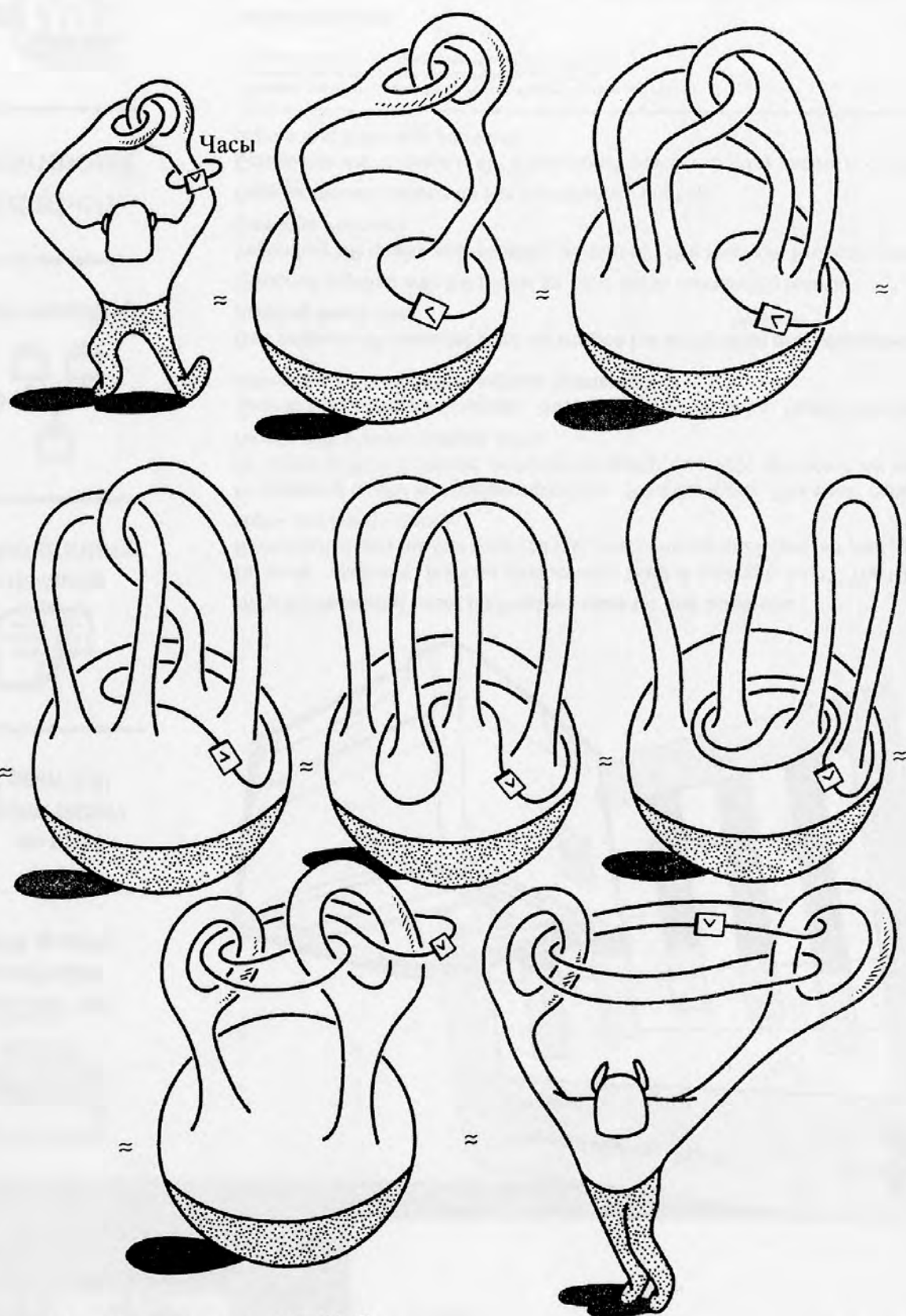




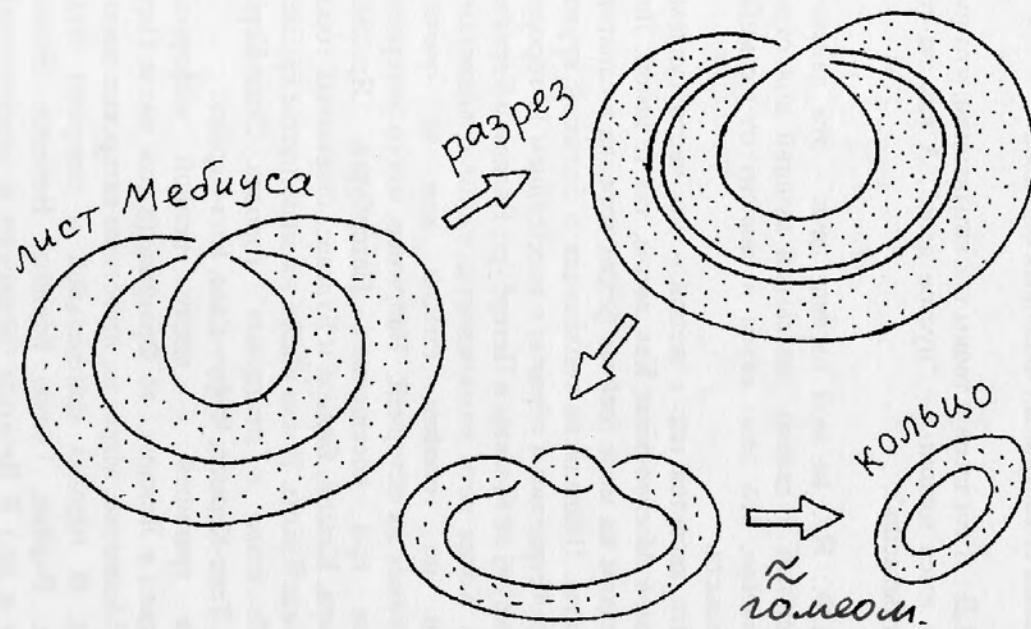
Выворачивание
тора с дыркой наизнанку в $\mathbb{R}^3$.
параллель и меридиан меняются местами.



Расцепление наложев
в $\mathbb{R}^3$

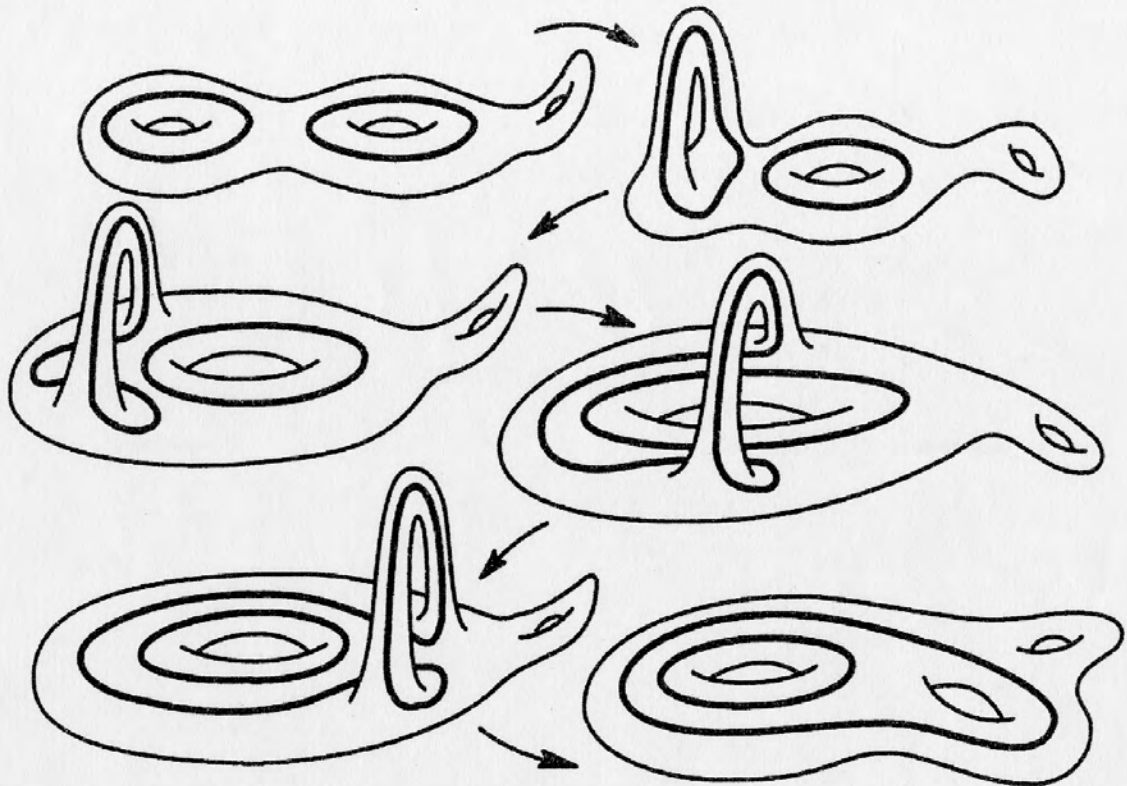


Но если на руке
 есть часы (с ремешком), то пальцы конечно
 можно расцепить, но ремешок завяжется,
 как показано на рис.



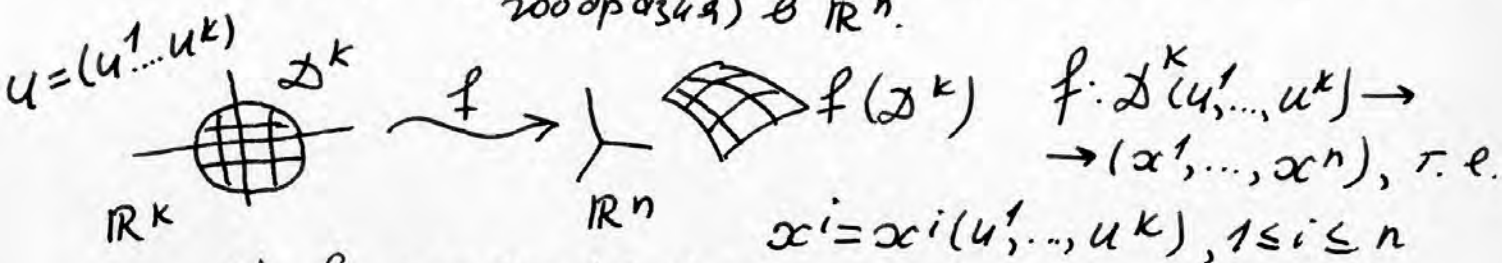
Разрезав 1 раз по осс, получили ленту, закрут. на 2π . Разрезав еще раз по осс ленты, получили уже две такие же ленты (закручен. на 2π), причем эти ленты зацеплены в $\mathbb{R}^3$. Докажите. Продолжить разрезания по осс. что получится?

(Каждое из закрученных на 2π колец будет зацеплено с каждым).

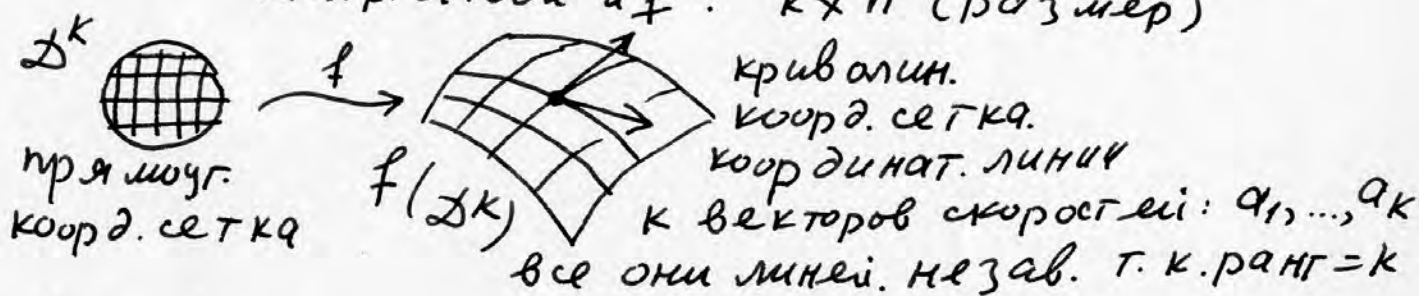


В алгебре такие операции иногда называются операциями Нильсена.

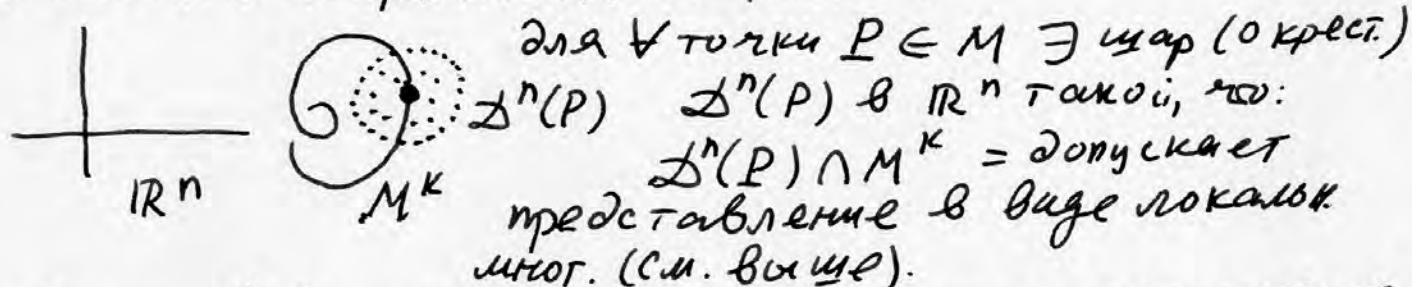
- Следующий этап. Многомерные k -мерн. поверхн. (многог.) $M^k \subset \mathbb{R}^n$. а) локальные k -мерн. многог. (подмногообразия) в $\mathbb{R}^n$.



- 1) f — гомеоморфизм D^k на образ $f(D^k)$
- 2) $\text{ранг}(df) = k (= \max)$, т.е. $\text{ранг}\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^a}\right) = k$
матр. Якоби $df: k \times n$ (размер)

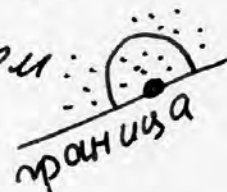


б) Глобал. k -мерн. многог. (поверхн.) в $\mathbb{R}^n$.



- Как и в $\dim = 2$ определено вложение и погружение многообразий.

- Аналогич. опред. и k -мерное многог. с краем:



- Теор. (Уитни). "слабая".

пусть дано вложен. M^n в $\mathbb{R}^N, N < \infty$.

тогда $\exists$ погружение $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ и

$\exists$ вложение $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.

- Теор. (Уитни). "Сильная". Пусть M^n вложено в $\mathbb{R}^N$.

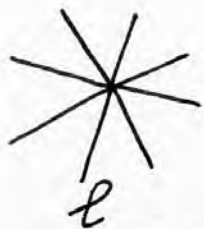
тогда $\exists$ погружение $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ и

(без д-ва). $\exists$ вложение $M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, при $n > 1$.

- Докажем слабую теор. Уитни. Согласно нашему опред. многог. M^n , оно уже вложено в некоторое $\mathbb{R}^N$.

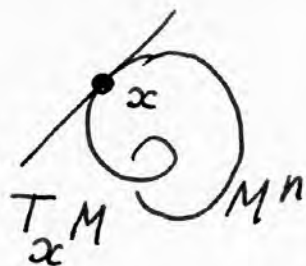
Хотим понизить размерность вложения и погружения.

- Начнем с погружения.



$$\mathbb{R}P^{N-1} = \{l\}$$

пучок прямых l
через точку O



идея: берем прямую l в $\mathbb{R}P^N$, берем ортогональную ей гиперплоскость $\mathbb{R}P^{N-1}(l)$ и проектируем M^n вдоль направления l на $\mathbb{R}P^{N-1}(l)$.

проекция: $p_l: M^n \rightarrow \mathbb{R}P^{N-1}(l)$.

Хотим, чтобы p_l было погружением M^n в гиперплоскость. Т.е. чтобы матрица Якоби $d(p_l)$ не имела $\neq 0$

ядра на $\forall$ касат. плоскости $T_x M$. Т.е. чтобы $d(p_l) \alpha \neq 0$ для $\forall \alpha \in T_x M$ и $\alpha \neq 0$. Направление l можно менять. Надо выбрать "хорошую" прямую l .

• для этого надо понять - какие прямые l - "плохие".

ясно, что направление (прямая) l является "плохим" $\Leftrightarrow$ в некоторой точке $x \in M$ есть касательная прямая (из $T_x M$), параллельная l .

А если рассматривать l с точн. до паралл. сдвига, то, попросту, l касается M в точке $x \in M$. И так, все

"плохие" прямые l имеют вид: $(x, l(x))$, где $l(x) \in T_x M$. Все они образуют некоторое замкн.

подмн-во L в $\mathbb{R}P^{N-1}$:



$\mathbb{R}P^{N-1}$

• Ясно, что $\dim L = 2n-1$,

т.к. точка $x \in M$ задается

n параметрами, а $l(x) \in T_x M$ задается $(n-1)$ параметр.

• По теор. Сарда если $\dim L < \dim \mathbb{R}P^{N-1}$, то мера L в $\mathbb{R}P^{N-1}$ равна нулю. Тогда дополнение к L в $\mathbb{R}P^{N-1} \neq \emptyset$, т.е. найдется "хорошая" прямая l . И так:

если $\dim L = 2n-1 < N-1 = \dim \mathbb{R}P^{N-1}$, то берем любую "хорошую" l и проектируем M на гиперплоскость $\mathbb{R}P^{N-1}(l)$, ортогон. l . Получаем погружение M^n в $\mathbb{R}P^{N-1}$.

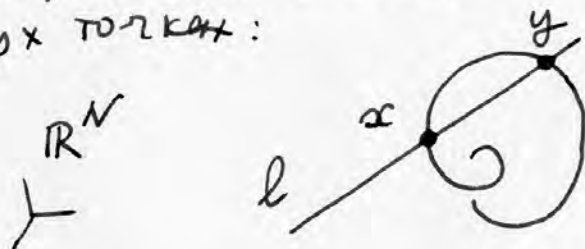
Здесь $\text{rang } dp_l = n$, т.е. $\text{Ker}(dp_l) = 0$, а потому p_l явл. локал. диффеом. M^n на образ.

• Продолжаем такие проектирования, пока $2n-1 < q-1$.

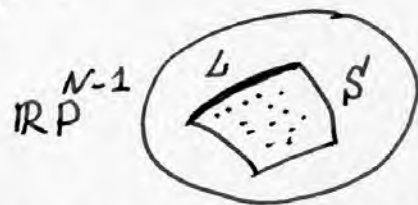
Последний шаг такой: $2n-1 < (2n+1)-1$.

На этом шаге M^n проектируется в $\mathbb{R}^{(2n+1)-1} = \mathbb{R}^{2n}$ (35) и это — погружение. Мы построили погружение M^n в $\mathbb{R}^{2n}$.

- Первый пункт слаб. теор. Уитни доказан.
- Теперь — о вложении. Идея — та же. Однако к предыдущему надо добавить условие, что проекция p_ℓ не склеивает различные точки x и y из M . Значит к "плохим" прямым ℓ из предыдущ. пункта надо добавить все такие ℓ , что ℓ (рассматриваемая с точн. до паралл. переноса) пересекает M в двух точках:



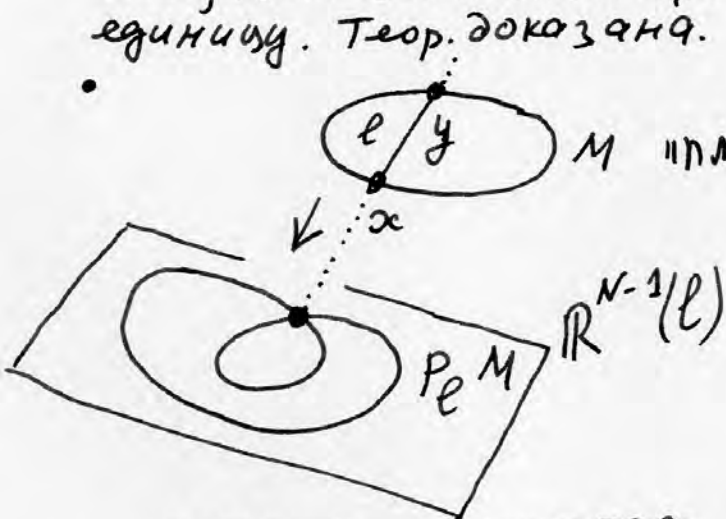
Такие "плохие" хорды образуют подмн-во S в $\mathbb{R}P^{N-1}$:



- Ясно, что $\dim S = 2n$, т.к. каждая из точек $x, y \in M^n$ задается n параметрами (координатами).

Итак, пока $2n < N-1$, можно проектировать M^n в $\mathbb{R}^{N-1}$, и это будет вложением. Проектируем вдоль $\ell \in \mathbb{R}P^{N-1} \setminus (L \cup S)$, т.е. вдоль "хорошего" напр-ия ℓ .

- Последняя проекция будет $p_\ell: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. Получаем вложение. предыдущая оценка ухудшилась на единицу. Теор. доказан.



"плохое" направление $\ell(x, y)$.

$$S = \{ \ell(x, y), x, y \in M^n \}.$$

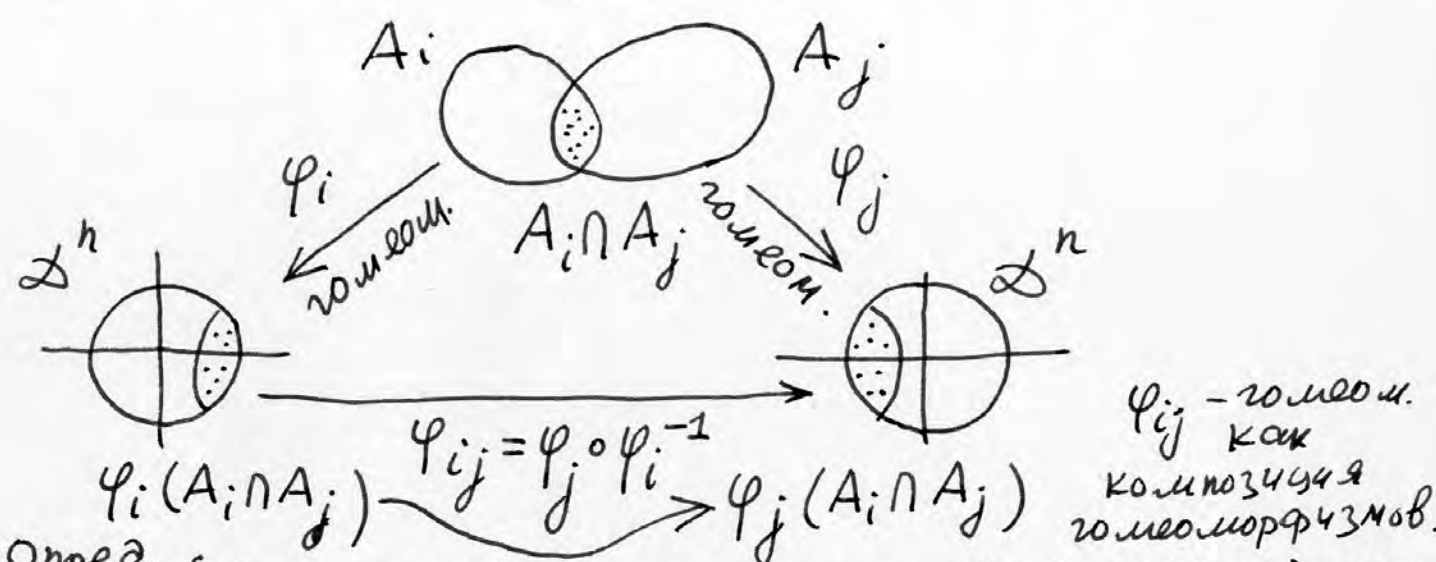
$$\dim S = 2n.$$

Точки x и y "бегают" по M^n независимо друг от друга.

- Абстрактное опред. топологического и метрического мн-ва. при помощи атласа. Без вложения в $\mathbb{R}^N$.

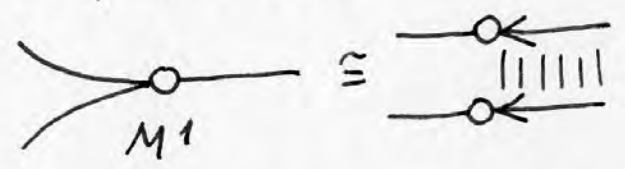
Опред. Топол. хаусдорфово пр-во X назыв. топол. многообразием, если $X = \bigcup_i A_i$, где все A_i открыты в X и для каждого i задан гомеомор. $\varphi_i: A_i \rightarrow D^n$, где D^n — диск (шар) в $\mathbb{R}^n$; n — одно и то же для всех i и назыв. размерностью X , $n = \dim X$.

- A_i назыв. локал. картами, φ_i - локал. координаты, а совокупность $\{(A_i, \varphi_i)\}$ - это атлас на X .
- Функции склейки или функции перехода данного атласа:



• Опред. $\{\varphi_{ij}\}$ назыв. функциями перехода (склейки) данного атласа.

• пример не хаусдорфова мног.



• Опред. Тополог. мног. назыв.

такими, если все функции перехода атласа явл. таковыми (C^∞). Аналогично определ. многообразия класса C^r , веществ.-аналит., компл.-аналит. (в терминах φ_{ij}).

• Теор. (без д-ва). Существуют тополог., но не такие мног. т.е. такие, на которых нельзя задать такого атласа.

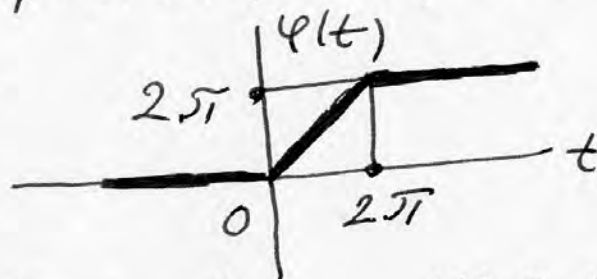
• Теор. (без д-ва). Существуют мног.-я, гоомеоморфные, но не диффеоморфные. Пример: станд. сфера S^7 и мног. $M_k^7 \subset S^9$, которое задается так. $C^5 = \mathbb{R}^{10} \supset S^9 = \{(z_1, \dots, z_5) \mid |z_1|^2 + \dots + |z_5|^2 = 1\}$. Рассм. M_k^7 как пересечение сфер S^9 с поверхностью: $\{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0\}$. Здесь $k = 1, 2, \dots, 28$. Получаются 28 таких мног., среди которых есть и станд. сфера S^7 . Все остальные 27 тадж. мног. ей гоомеоморфны, но не диффеоморфны (сферы Милнора).

- Теор. (Уитни). Любое гладкое связное многообразие, заданное с помощью гладкого атласа (т.е. "абстрактно") допускает гладкое вложение в некоторое конечномерное $\mathbb{R}^N$, $N < \infty$ (т.е. реализ. как гладк. поверхн. в $\mathbb{R}^N$).

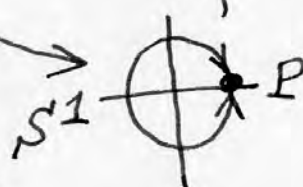
• 2-во. Докажем для компактного M^n (для простоты).
 Сначала — технич. лемма.

Пусть $D^n \subset \mathbb{R}^n$ — станд. шар (диск). Э гладк. отображ.
 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$, при котором $h: D^n \rightarrow S^n \setminus P$ является
 диффеом. (где P — точка, напр. северн. полюс сферы); а
 $h: \mathbb{R}^n \setminus D^n \rightarrow P$, т.е. все дополн. к шару отобр. в точку P .
2-во. Пусть $n=1$. Строим $h: \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$. Сначала:

$$g: \begin{cases} x = \cos \varphi(t) \\ y = \sin \varphi(t) \end{cases} \text{ где:}$$

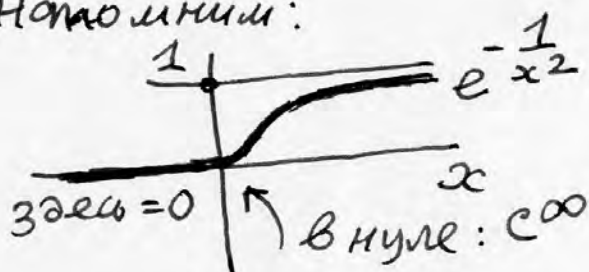


$$g: \begin{matrix} \leftarrow & \xrightarrow{\quad} & \end{matrix} \begin{matrix} 0 & 2\pi \end{matrix} \mathbb{R}^1$$



но g не гладко
 в точках 0 и 2π .
 Здесь излом.
 Надо сгладить.

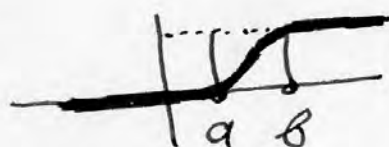
Напомним:



$$e^{\left(\frac{-1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2} \right)}$$

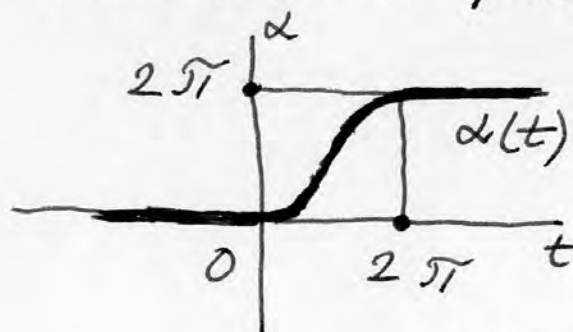


$$\lambda(x) = \int_0^x \rho(x) dx :$$



гладкая функ-я,
 "склеивает" две
 постоянные.

- Аналогично строим гладкую функцию $\alpha(t)$:



Тогда искомое $h: \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$
 имеет вид:

$$h: \begin{cases} x = \cos \alpha(t) \\ y = \sin \alpha(t) \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty$$

• лемма доказана.

- В силу компактности M^n можно взять его конечное (38) открытое покрытие: $M^n = \bigcup_{i=1}^K A_i$, где A_i гомеом. $\mathbb{D}^n$.
- Для $\forall A_i$ строим такую отображ. $h_i: M^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где $h_i: A_i \rightarrow \mathbb{D}^n$ явл. диффеоморфизмом, а все дополне-ние в M к A_i отображ. в северн. полюс P сферы S^n :

$$h_i: M^n \setminus A_i \rightarrow P \in S^n.$$

- Каждое h_i можно задать как вектор-ф-ю в $\mathbb{R}^{n+1}$:
 $h_i(x) = (y_i^1(x), \dots, y_i^{n+1}(x))$, где y_i^i — декарт. к-ты в $\mathbb{R}^{n+1}$.

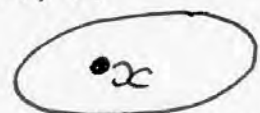
- Теперь строим окончательное $h: M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$:

$$h(x) = (h_1(x), \dots, h_K(x)) \in \mathbb{R}^{K(n+1)}, \text{ т.е. } N = K(n+1).$$

- Утв. Отобр. h явл. погружением M^n в $\mathbb{R}^N$.
до-во. Матр. Якоби (дифференциал) dh имеет вид:

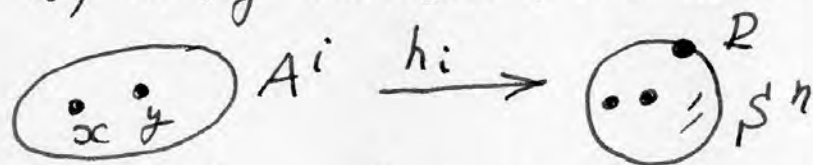
$$dh = (dh_1, \dots, dh_K), \text{ где } dh_i(x) \text{ — матр. Якоби } h_i.$$

Тогда $\text{rang } dh(x) = n (= \max)$, т.к. точка x попадает в какую-то карту A_i :



$h_i: x \rightarrow S^n \setminus P$ и явл. диффеом. локально около x , а тогда $\text{rang } dh_i(x) = n$, а тогда и $\text{rang } dh(x) = n$, т.к. $dh_i(x)$ — это "часть" матрицы $dh(x)$.

- Утв. Если $x \neq y$, то $h(x) \neq h(y)$, т.е. h — вложение.
 а) x и y "близки", т.е. попали в одну карту A_i :



$$h(x) = (\dots h_i(x) \dots) \quad \text{Но: } h_i(x) \neq h_i(y), \text{ т.к. } h(y) = (\dots h_i(y) \dots) \quad \text{обе эти точки } \in S^n \setminus P, \text{ где } h_i \text{ — диффеом.}$$

- б) точки x и y "далеки", т.е. $\exists$ карта A_i , так что: $x \in A_i$, $y \notin A_i$, т.е. $y \in M \setminus A_i$. Тогда:

$$h(x) = (\dots h_i(x) \dots) \quad \text{Здесь } h_i(x) \neq P, \text{ т.к. } h(y) = (\dots P \dots) \quad h_i(x) \in S^n \setminus P.$$

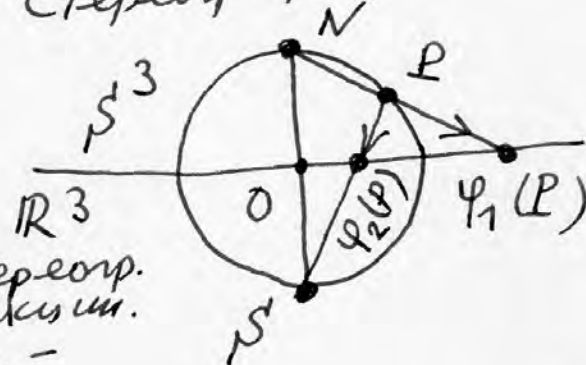
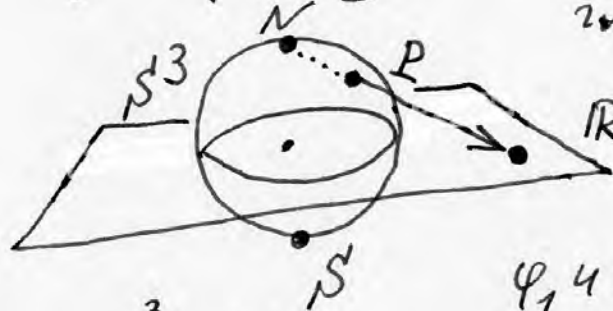
• Теор. Уитни доказана.

(39)

- Кратко о 3-мерн. мног. Классифик. 3-мерн. мног. - нерешенн. и популярн. проблема. "Список" кодов всех $\{M^3\}$ известен (см. ниже), но в нем каждое мног. M^3 представлено множеством "кодов". И алгоритмически распознать - когда два "кода" задают одно и то же мног. (или-разные мног.) - пока не удается.

• Примеры 3-много.

- 1. Сфера S^3 : $x_1^2 + \dots + x_4^2 = 1$ в $\mathbb{R}^4$. Тогда $S^3 = A_1 \cup A_2$, где $A_1 \approx A_2 \approx D^3$ и функция клейки этого атласа - таковая. Стереогр. проекция:



$$A_1 = S^3 \setminus N$$

$$A_2 = S^3 \setminus P$$

Ψ_1 и Ψ_2 - стереогр. проекции.
ф-я перехода Ψ_{12} - таковая. (докажите).

- $\mathbb{R}P^3$ (проект. пр-во) - таковое. 2-во - позже. сразу $\mathbb{R}P^n$.
- $M^2 \times S^1$. Вообще, если M^m и N^n - тажк. мног., то $M \times N$ - тажк. мног. $\dim = m + n$.

- Теор. о строении произвол. компакт. тажк. связн. 3-много. 2-во дадим позже. Рассм. в $\mathbb{R}^3$ два экзепл.

$$M^2 = S^2 + g(\text{ручек}):$$

и рассматривают их "заполнения", т.е.

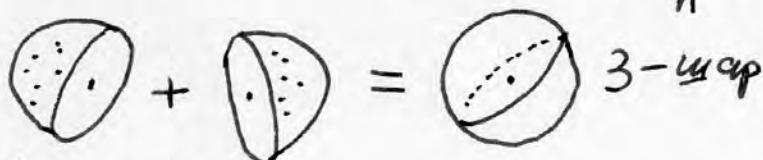
ограниченные или

в $\mathbb{R}^3$ 3-много. Π_1 и Π_2 , т.е. $\partial \Pi_1 = M_1$, $\partial \Pi_2 = M_2$.

Пусть $h: M_1 \rightarrow M_2$ - произвол. диффеом. M_1 на M_2 .

Склеим Π_1 и Π_2 по этому диффеом. их грани.

Получим 3-много. $Q^3 = \Pi_1 \cup_h \Pi_2$, тажк. компакт. без края.



две половинки шара

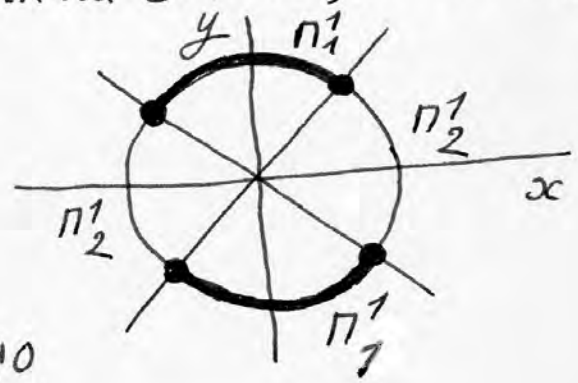
- Теор. (2-во потоки). $\forall$ топ. комп. связ. замкн. 3-многог. Q^3 можно представить в виде $\pi_1 \cup_h \pi_2$ для некоторого $g \geq 0$ и дифф. $h: M_1 \rightarrow M_2$, где $M_1 \approx M_2 \approx S^2 + g(\text{ручек})$.

- Важн. пример. Теор. сфера $S^3 = (\text{полноторие}) \cup_h (\text{полноторие})$. Полноторие — это заполн. тор T^2 в $\mathbb{R}^3$, т.е.

$S^1 \times D^2$:



• Начнем с нашей аналогии:



• $S^1 \subset \mathbb{R}^2(x, y)$. $S^1 = (x^2 + y^2 = 1)$.

Рассм. "конус": $|x| = |y|$ на $\mathbb{R}^2$
Это — две прямые (биссект.)

• Пересечем этот конус K с S^1 :

$$K \cap S^1 = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ |x| = |y| \end{array} \right\} = \begin{array}{c} \bullet \bullet \\ \bullet \bullet \end{array} = S^0 \times S^0.$$

Тогда $S^1 = \pi_1^1 \cup \pi_2^1 = \underbrace{(|x| \leq |y|)}_{S^0 \times D^1} \cup \underbrace{(|x| \geq |y|)}_{S^0 \times D^1} = (S^0 \times D^1) \cup (S^0 \times D^1)$.

А теперь рассм. $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Аналог.

• $S^3 \subset \mathbb{R}^4(x, y, u, v) = \mathbb{C}^2(z, w)$, где $z = x + iy$, $w = u + iv$.
 $S^3 = (|z|^2 + |w|^2 = 1) = (x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 1)$.

Рассм. конус K^3 в $\mathbb{R}^4$: $K = (|z| = |w|): x^2 + y^2 = u^2 + v^2$.

Пересечем K со сферой S^3 :

$(|z|^2 + |w|^2 = 1; |z| = |w|) \Leftrightarrow |z| = |w| = 1/\sqrt{2}$. Итак:

• $K \cap S^3 = \left(z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi}, w = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\psi} \right) = \underset{\text{тор}}{T^2} = S^1(\varphi) \times S^1(\psi)$.

Тогда S^3 есть объединение двух 3-многог. с краем:

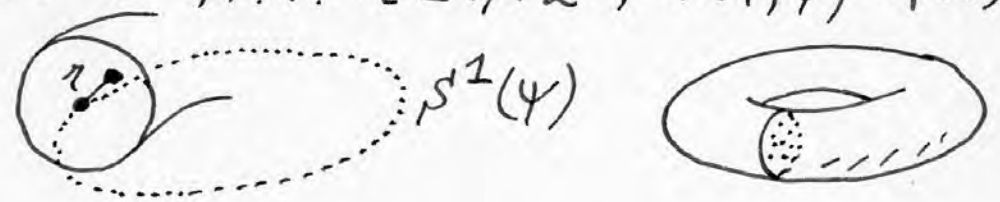
$S^3 = (|z| \leq |w|) \cup (|z| \geq |w|) = \pi_1^3 \cup \pi_2^3$.

Здесь $\pi_1 = (|z|^2 + |w|^2 = 1; |z| \leq |w|)$;

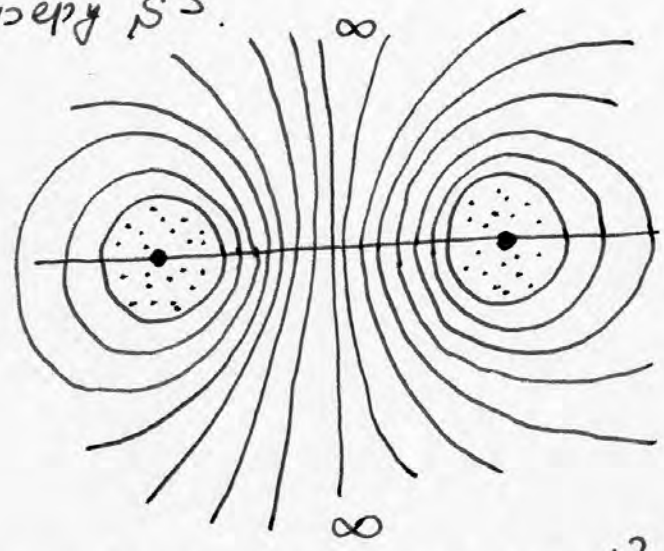
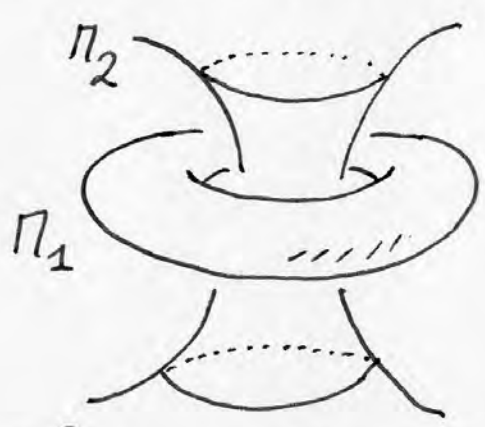
$\pi_2 = (|z|^2 + |w|^2 = 1; |z| \geq |w|)$.

- Тогда $\pi_1 \approx \pi_2 = \text{полноторие}$, т.е. $S^1 \times D^2$. В самом деле: на сфере $z = r e^{i\varphi}$, $w = \sqrt{1-r^2} e^{i\psi}$; в многообр. π_1 : $|z| \leq |w| \Leftrightarrow r^2 \leq 1-r^2$, т.е. $r \leq 1/\sqrt{2}$, а (φ, ψ) — произв.

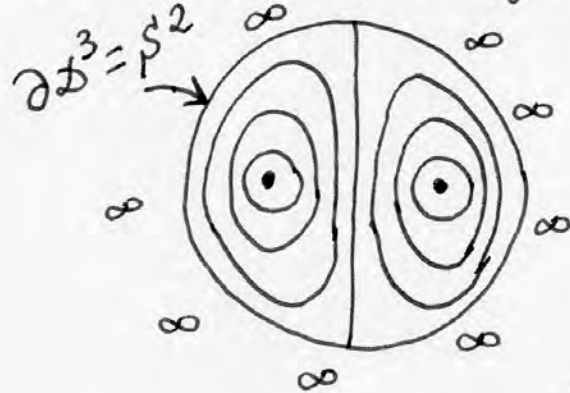
Это и есть полноторие:



- И так: $S^3 = \Pi_1 \cup_h \Pi_2$ = склейка двух полноторий.
как они склеены по их границе? Рассм. инволюцию $\sigma: S^3 \rightarrow S^3$, где $\sigma(z, w) = (w, z)$. Тогда $\sigma \Pi_1 = \Pi_2$ и $\sigma \Pi_2 = \Pi_1$ т.е. полнотория Π_1 и Π_2 меняются местами. Т.е. на гранич. торе меняются местами параллель и меридиан.
 $\sigma: T^2 \rightarrow T^2$ с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: $\begin{cases} \text{паралл.} \rightarrow \text{мерид.} \\ \text{мерид.} \rightarrow -\text{паралл.} \end{cases}$
- Натянутое изображ. в $\mathbb{R}^3$, пополнено ∞ , т.е. ∞ удаленной точкой, что и дает сферу S^3 .

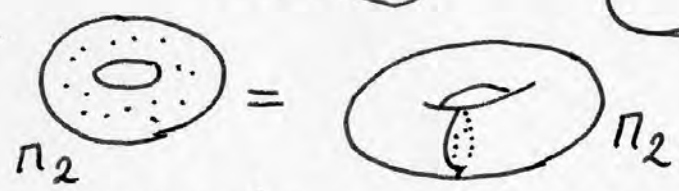
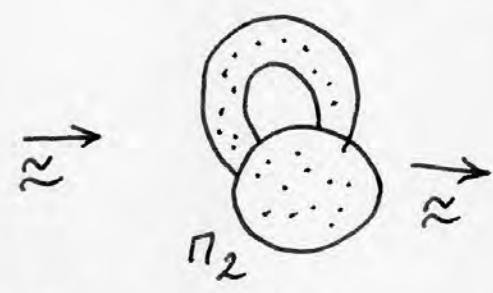
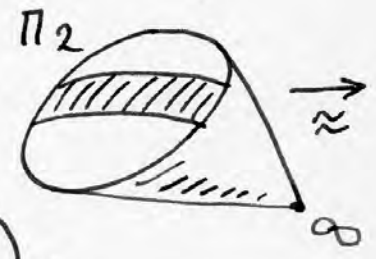
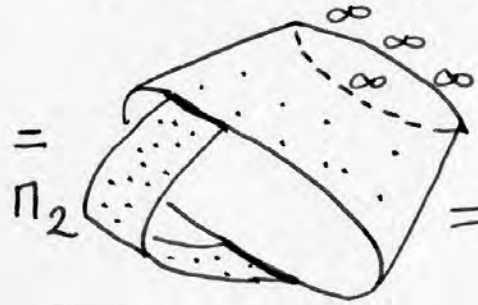
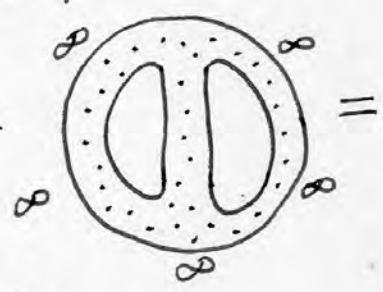


- $\mathbb{R}^3$ покроем 3-шаром D^3



отображая гранич. сферу S^2 в точку, получаем 43 шара D^3 сферу S^3 .

S^3 - полноторие =



- с этим разбиением сферы в сумму двух полноторий связано т.н. расслоение Хопфа: $p: S^3 \rightarrow S^2$ со слоем S^1 .

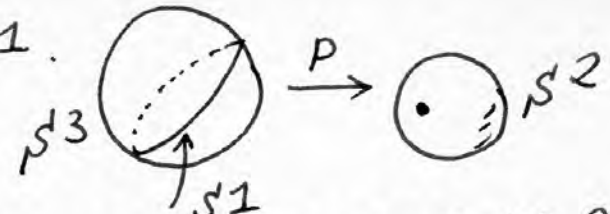
$$S^3 = \{z, w \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2(z, w).$$

$$p(z, w) = z/w = \zeta \in \mathbb{C}^1 \cup \infty = \mathbb{R}^2 \cup \infty = S^2.$$

при проекции p в одну точку переходят точки вида:

$$(e^{i\varphi} z, e^{i\varphi} w) \rightarrow \zeta = z/w$$

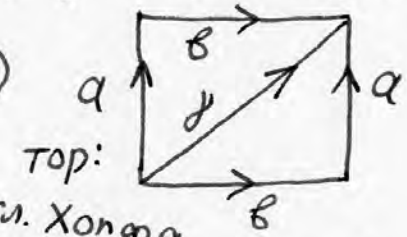
т.е. точки окружности S^1 . $\bar{p}^1(\tau) = (e^{i\varphi_z}, e^{i\varphi_w})$



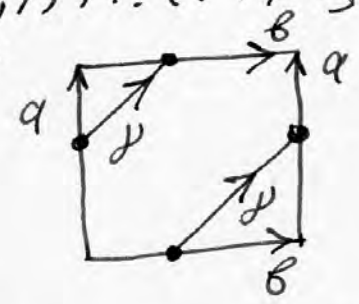
- $S^3 = \Pi_1 \cup \Pi_2$, где каждое полноторие расслоено на 2-тора, стягивающиеся на осевую окружность. Каждый из этих 2-торов расслоен на окружности, являющиеся слоями расслоения Хопфа. И эти окружности на 2-торе являются траекториями типа (1,1), т.е. 1 раз обходят параллель и 1 раз - меридиан тора:



γ -слой рассл. Хопфа



тор:



- Пример многомер. глад. мног. Теор. проект. пр-ва $\mathbb{R}P^n$ и $\mathbb{C}P^n$ - гладк. многообразия.

о-во. $\mathbb{R}P^n = \bigstar_{\mathbb{R}^{n+1}} \ell \simeq \ell = \{ \lambda(x^1, \dots, x^{n+1}), \lambda \neq 0, \exists x^i \neq 0 \}$

Атлас на $\mathbb{R}P^n$ имеет вид: $\mathbb{R}P^n = A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}$, где локал. карта $A_i = \{ \ell : x^i \neq 0 \}$. Координатн. отображ.

$\varphi_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет вид:
 $\varphi_i : \lambda(x^1, \dots, x^{n+1}) \rightarrow \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) \in \mathbb{R}(\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{n+1})$
здесь: $\alpha_k = x^k / x^i$, при $k \neq i$. Ясно, что $\varphi_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм

- Функции склейки на $A_i \cap A_j = \{ \ell (x^i \neq 0, x^j \neq 0) \}$.

пусть $A_i(\alpha_k, k \neq i)$ и $A_j(\beta_k, k \neq j)$.
тогда на пересечении:

$\beta_k = x^k / x^j, k \neq j$ и $\alpha_k = x^k / x^i, k \neq i$, отсюда:

$\alpha_k = \frac{x^k / x^j}{x^i / x^j} = \frac{\beta_k}{\beta_i}; \alpha_j = x^j / x^i = 1 / \beta_i$

Все эти функции гладкие и даже веществ. аналитич.

- Аналогично — для $\mathbb{C}P^n$. При этом $\mathbb{C}P^n$ всегда ориентир., а $\mathbb{R}P^n$ — ориентир. при n -нечет. и неориент. при n -четно. Докажем далее.

- Проблема алгоритмиз. классиф. n -мерн. гладк. мног. (без о-ва). При $n=1$ классиф. есть. При $n=2$ тоже есть: см. теорему выше. При $n=3$ — ? неизвестно.

Наличная с $n=4$ (и выше) проблема классиф. мажк.
инот. M^n (с точн. до диффеом. или гомотоп.) алгоритмически
неразрешима (А. А. Марков). Итак:

n

1	2	3	4	5	6	7	
+	+	?	-	-	-	-	

