ЛЕКЦИЯ 11

Классическая постановка биллиардной задачи.

Пусть область Ω на плоскости $\mathbb{R}^2$ такова, что граница области является кусочно-гладкой кривой, причем в точках излома этой кривой углы равны $\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим динамическую систему, описывающую движение (материальной) точки внутри области Ω с естественным отражением на границе $P = \partial\Omega$. Эту систему назовём "биллиардом в области". Будем считать, что в точках, где граница P не гладкая (тогда, как было сказано выше, угол излома обязательно равен $\frac{\pi}{2}$) траектории системы можно доопределить по непрерывности: а именно, попав в вершину угла границы, материальная точка, не теряя скорости, отразится назад по той же траектории. Таким образом, с формальной точки зрения фазовым пространством системы является многообразие

$$M^4 := \{(x,v)| \quad x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2\ , |v| > 0\}/\sim$$

где отношение эквивалентности в регулярных точках граничной задаётся так

$$(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P, \quad |v_1| = |v_2| \quad \text{и} \quad v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P.$$

Здесь через T_xP обозначена касательная прямая к области Ω в точке x, а через $|v|$ – евклидова длина вектора v.

Если точка x является вершиной угла, то по непрерывности потребуем чтобы $v_1 = -v_2$ (как было сказано выше).

Это отношение эквивалентности иногда будем называть биллиардным законом.

Эллиптико-гиперболический биллиард.

Пусть область биллиарда Ω ограничена дугами софокусных эллипсов и гипербол.

Определение Фиксируем систему координат (x, y). Определим софокусные квадрики как квадрики семейства

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1 \quad \lambda \in (-\infty, b) \cup (b, a)$$

и полученные из них "предельным переходом", точнее квадрики семейства

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda), \lambda \leq a. \tag{1.1}$$

Здесь $\infty \geq a \geq b > 0$ — фиксированная пара чисел (определяющая семейство софокусных квадрик), λ — параметр семейства (определяющий квадрику семейства).

см. рис. 1*

В классическом случае ($\infty > a > b$) при $\lambda \neq a$ или b это эллипсы или гиперболы. При $\lambda = b$ эта квадрика является парой совпадающих прямых $y = 0$, и как множество совпадает с горизонтальной осью. Далее будем также называть ее фокальной прямой, отрезок между фокусами вырожденными эллипсом, а выходящие из фокусов непересекающиеся лучи — вырожденной гиперболой. Вырожденные эллипс и гиперболы можно определить как поточечные пределы эллипсов и гипербол софокусного семейства соответственно, близких к $\lambda = b$.

Параметру $\lambda = a$ соответствует вырожденная квадрика, точки которой составляют вертикальную ось. Заметим, что для компактной биллиардной области (стола) отрезок этой прямой, попадающий в область Ω, является поточечным пределом попадающих в него дуг ветвей невырожденных гипербол. Будем называть соответствующую уровню $\lambda = a$ кривую гиперболой (а не вырожденной квадрикой) для упрощения изложения.

При $\infty = a > b$ софокусные квадрики являются софокусными параболами.

Под осями семейства квадрик в дальнейшем будем понимать координатные оси Ox и Oy. При $a = b$ квадрики вырождаются в концентрические окружности и ортогональные им радиальные прямые.

Нетрудно показать, что софокусные квадрики ортогональны друг другу.

Замечание В дальнейших рассуждениях эллипсы и гиперболы предполагаются софокусными квадриками семейства (1.1) (причем $\infty > a > b$), если не оговорено иного. В случае рассмотрения круговых биллиардов ($0 < a = b < \infty$) мы особо отметим это.

Определение Пусть дана компактная область в плоскости, ограниченная дугами софокусных квадрик, все углы которой в точках излома границы равны $\frac{\pi}{2}$. В этом случае граница области является либо простой замкнутой кривой, либо несвязным объединением двух эллипсов. Дуги квадрик, концами которых служат углы области, назовем *сегментами квадрик*, ограничивающих данную область (или сегментами границы данной области).

В нашей работе мы не рассматриваем биллиарды с "внутренними стенками". Т.е. мы считаем, что у каждой граничной точки любая достаточно малая окрестность разбивается на две части — внутреннюю и внешнюю.

Легко понять, что сегменты принадлежат к одному из четырёх типов: эллипс, дуга невырожденной гиперболы, заключённая между двумя эллипсами, дуга невырожденного эллипса, заключённая между двумя гиперболами, отрезок фокальной прямой.

Теорема (Якоби, Шаль) *Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n-мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще $n-2$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.*

см. рис. 2*, рис. 3*, рис. 4*

Софокусные эллипсы и гиперболы

Семейство квадрик с параметром λ

$$(b-\lambda)x^2+(a-\lambda)y^2=(a-\lambda)(b-\lambda), 0<b<a$$

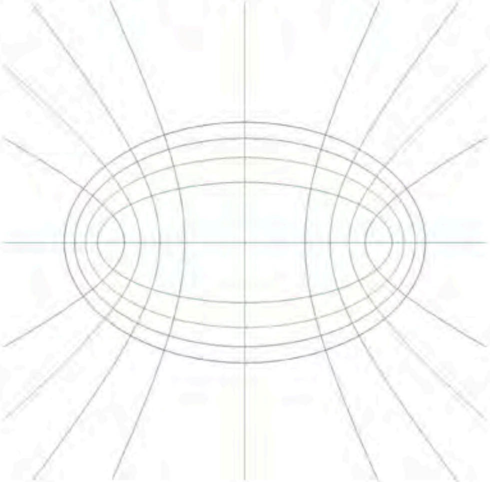
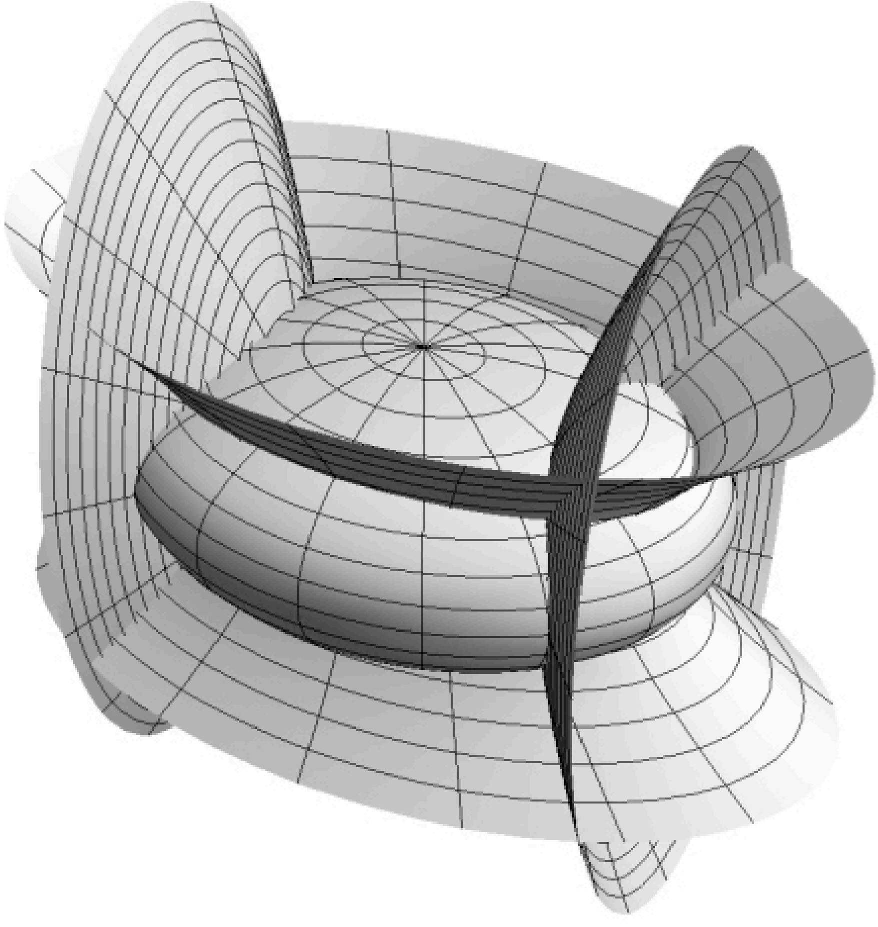


Рис.1*

Теорема (Якоби, Шаль)
Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n-мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики, еще $n-2$ конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.

Рис.2*



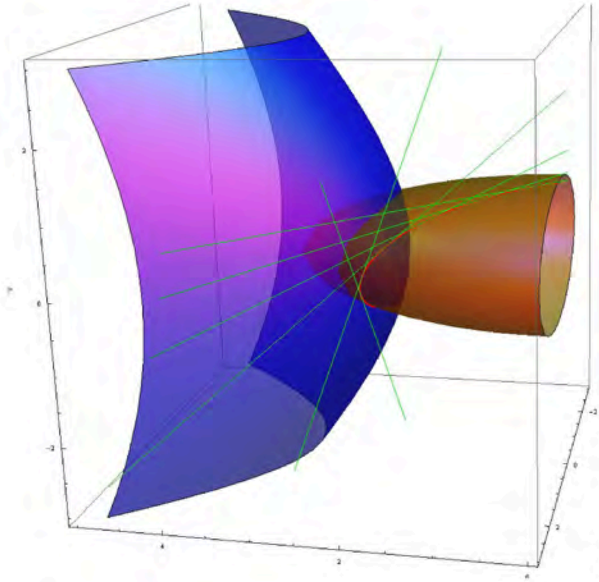


Рис.3*

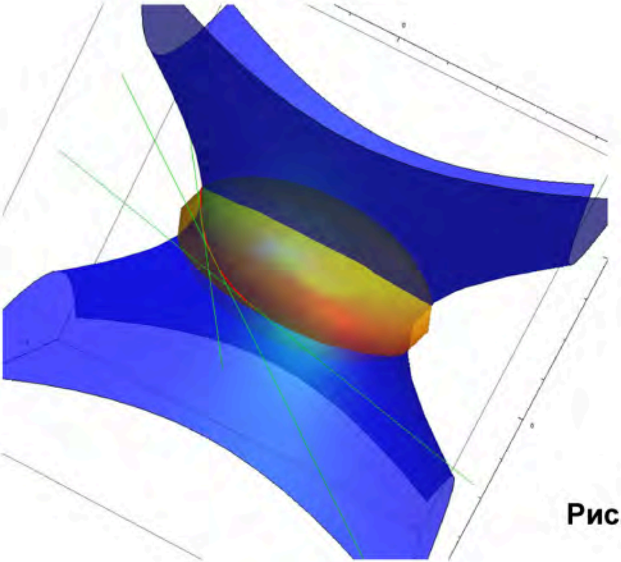


Рис.4*

Рассмотрим геодезический поток трехосного эллипсоида. Он интегрируем. Касательные прямые к фиксированной геодезической являются касательными к некоторому гиперболоиду, конфокальному с данным трехосным эллипсоидом. Дж.Д. Биркгоф заметил, что если устремить малую полуось эллипсоида к нулю, то геодезические на нём перейдут в биллиардные траектории–ломаные внутри эллипса. Интегрируемость сохранится. А именно, касательные в

см. рис.5* рис. 6*

любой точке биллиардной траектории внутри эллипса касаются эллипса или гиперболы, софокусных с этим эллипсом. Далее, было замечено, что в если в качестве плоского биллиарда рассмотреть область, ограниченную дугами софокусных эллипсов и гипербол, то интегрируемость сохранится. А именно, звенья любой биллиардной траектории в области Ω лежат на прямых, касательных к некоторой квадрике, софокусной с семейством квадрик, образующих границу P области Ω.

Рассмотрим функции $|v|^2$ — квадрат модуля вектора скорости — и Λ — значение параметра λ софокусной квадрики–каустики, которой касается данная траектория или её продолжения.

Предложение *Пусть прямая с направляющим вектором* $(v_1,\ v_2)$ *проходит через точку с координатами* (x,y). *Тогда параметр софокусной квадрики семейства* (1.1), *которой касается данная прямая, равен*

$$\lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_2x - v_1y)^2}{v_1^2 + v_2^2}. \qquad (*)$$

Доказательство. Множество точек прямой с направляющим вектором $(v_1,\ v_2)$, проходящей через точку с координатами (x,y), можно параметризовать параметром t следующим образом $(x+tv_1, y+tv_2)$. Напомним, что квадрика семейства (1.1) описывается соотношением

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(a-\lambda).$$

Если прямая имеет с этой квадрикой ровно одну точку пересечения, то подставляя координаты точки прямой в это соотношение получаем уравнение, которое имеет ровно одно решение относительно t :

$$(b-\lambda)(x+tv_1)^2 + (a-\lambda)(y+tv_2)^2 = (a-\lambda)(a-\lambda).$$

Перепишем это уравнение сгруппировав степени t :

$$t^2\left((b-\lambda)v_1^2 + (a-\lambda)v_2^2\right) + 2t\left((b-\lambda)xv_1 + (a-\lambda)yv_2\right) + x^2(b-\lambda) + y^2(a-\lambda) - (a-\lambda)(b-\lambda) = 0. \quad (**)$$

Рассмотрим отдельно случай, при котором данное уравнение не является квадратным. Тогда

$$(b-\lambda)v_1^2 + (a-\lambda)v_2^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Биллиард в эллипсе интегрируем:
Звенья траектории лежат на прямых, касательных к некоторому эллипсу

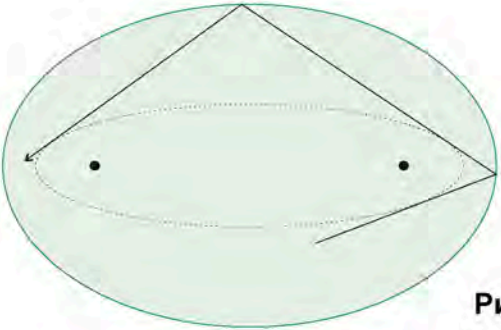


Рис.5*

или к некоторой гиперболе, софокусных с граничным эллипсом.

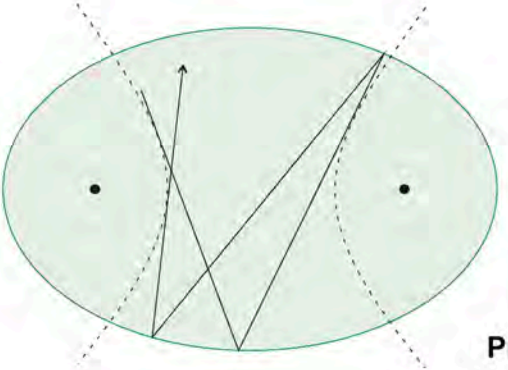


Рис.6*

В этом случае легко видеть, что $\lambda > b$ (т.е. эта квадрика — гипербола) и $\frac{v_1}{v_2} = \pm\frac{\sqrt{a-\lambda}}{\sqrt{\lambda-b}}$. Такое соотношение означает, что вектор (v_1, v_2) коллинеарен направляющему вектору асимптоты гиперболы, который задаются уравнением

$$\frac{x}{\sqrt{a-\lambda}} \pm \frac{y}{\sqrt{\lambda-b}} = 0.$$

В этом случае прямая и квадрика, конечно имеют одну общую точку, однако в этой точке они пересекаются трансверсально. Для касания (на бесконечности) необходимо чтобы прямая $(x+tv_1, y+tv_2)$ являлась асимптотой. Это означает что вектора $(v_1,\ v_2)$ и (x, y) коллинеарны, т.е. $xv_2 - yv_1 = 0$. В результате формула (*) в случае, если уравнение (**) не квадратное, доказана.

Далее, пусть квадратное уравнение (**) имеет один корень, то получаем следующее соотношение на λ :

$$((b-\lambda)xv_1 + (a-\lambda)yv_2)^2 - \left((b-\lambda)v_1^2 + (a-\lambda)v_2^2\right)\left(x^2(b-\lambda) + y^2(a-\lambda) - (a-\lambda)(b-\lambda)\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b-\lambda)^2x^2v_1^2 + 2(a-\lambda)(b-\lambda)xyv_1v_2 + (a-\lambda)^2y^2v_2^2 - (b-\lambda)^2x^2v_1^2 - (a-\lambda)(b-\lambda)x^2v_2^2 -$$

$$-(a-\lambda)(b-\lambda)y^2v_1^2 - (a-\lambda)^2y^2v_2^2 + (a-\lambda)(b-\lambda)^2v_1^2 + (a-\lambda)^2(b-\lambda)v_2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(a-\lambda)(b-\lambda)xyv_1v_2 - (a-\lambda)(b-\lambda)x^2v_2^2 - (a-\lambda)(b-\lambda)y^2v_1^2 + (a-\lambda)(b-\lambda)^2v_1^2 + (a-\lambda)^2(b-\lambda)v_2^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-\lambda)(b-\lambda)\left(2xyv_1v_2 - x^2v_2^2 - y^2v_1^2 + (b-\lambda)v_1^2 + (a-\lambda)v_2^2\right) = 0.$$

Возникающие тривиальные решения $\lambda = a$ и $\lambda = b$, соответствующие координатным осям, всегда появляются в случае общего положения (так как любая не параллельная координатной оси прямая пересекает её в одной точке). Таким образом, выражая λ из последней скобки, получаем $\lambda = \dfrac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_2x - v_1y)^2}{v_1^2 + v_2^2}$.

□

Рассмотрим на открытой области $\Omega_0 = \Omega \setminus \partial\Omega$ – внутренности биллиардной области Ω — следующие две функции $|v|^2$ и Λ. На области Ω_0 функции $|v|^2$ и Λ гладкие. Относительно стандартной симплектической структуры на плоской области Ω_0 функции $|v|^2$ и Λ коммутируют. Отметим, что на границе области Ω эта симплектическая структура не определена. Таким образом, данная "биллиардная" система обладает двумя независимыми на Ω_0 интегралами:

1. $v_1^2 + v_2^2$ — квадрат модуля вектора скорости,
2. $\Lambda = \dfrac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_2x - v_1y)^2}{v_1^2 + v_2^2}$ — параметр софокусной квадрики.