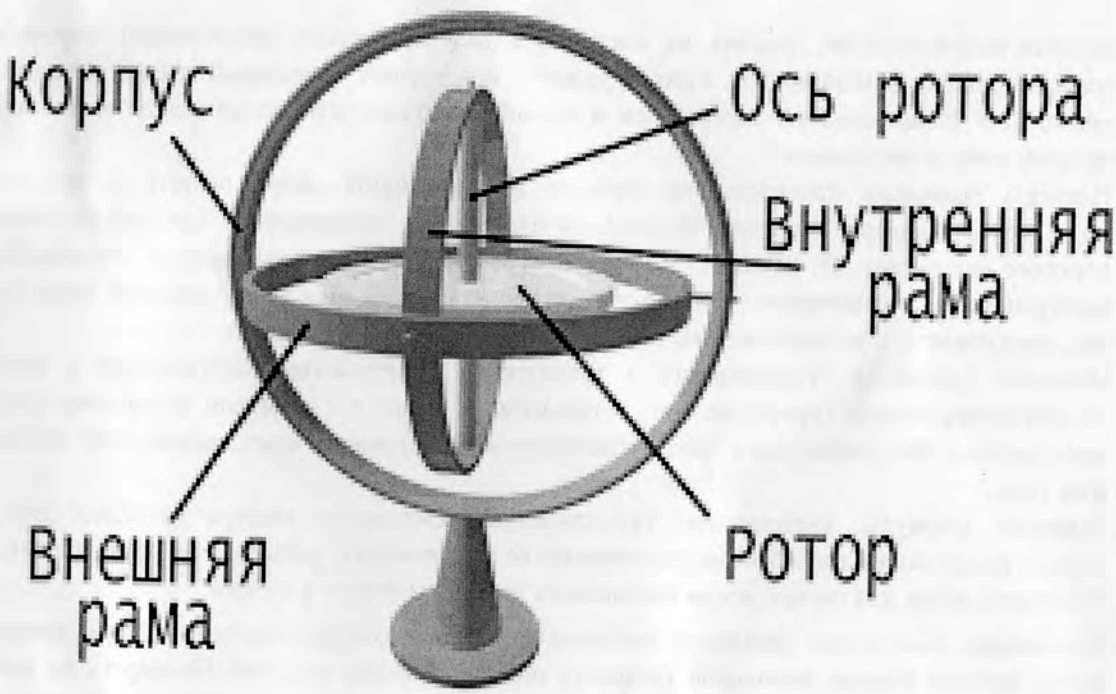
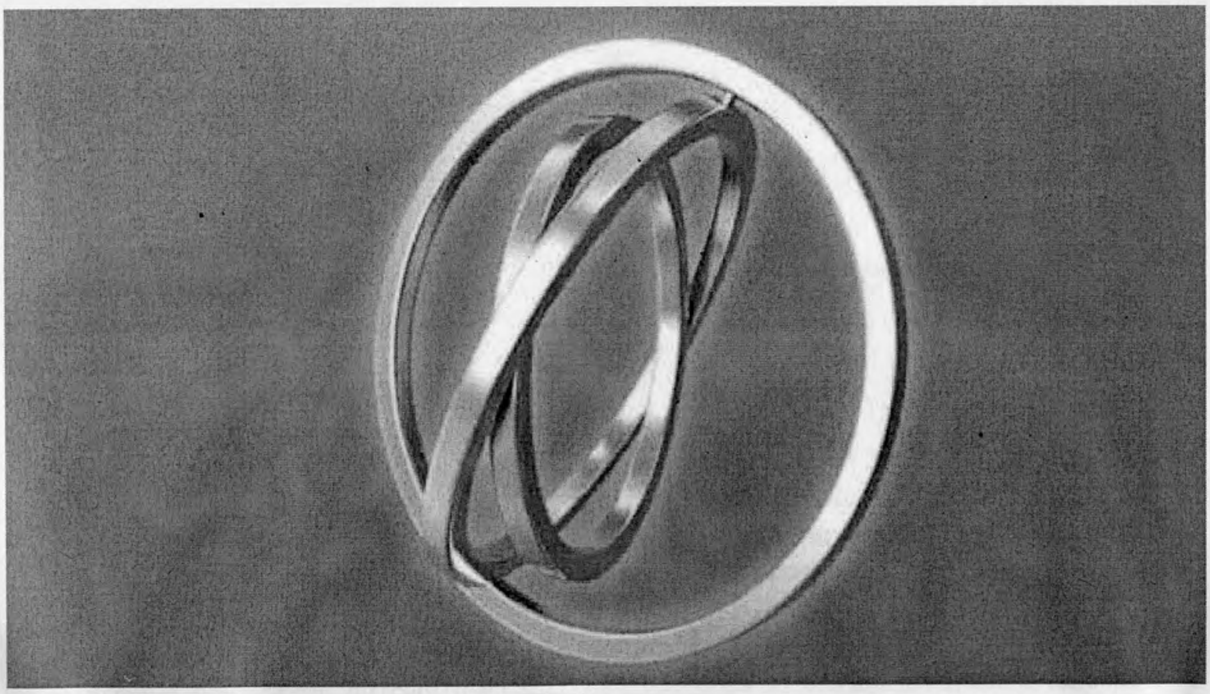
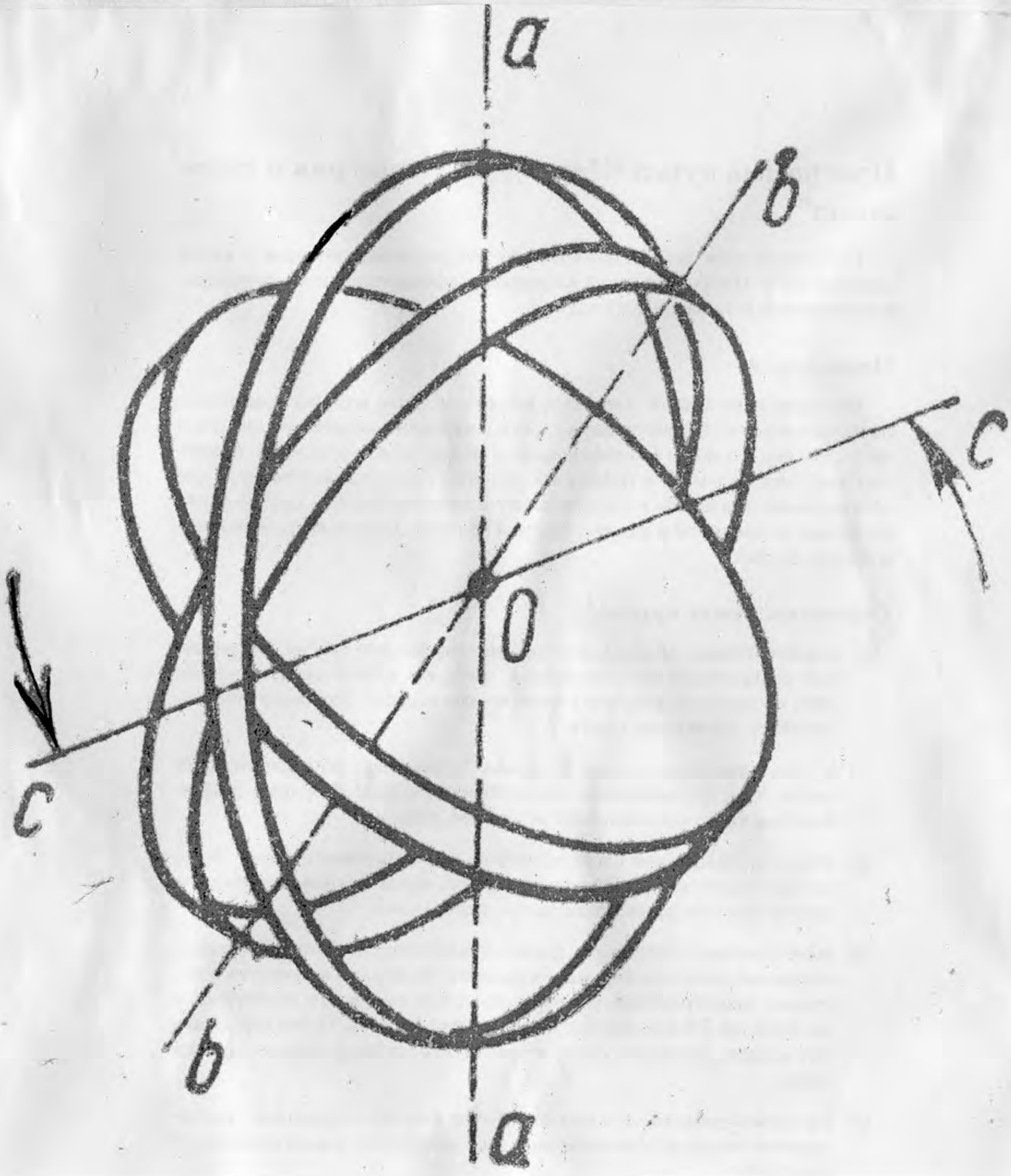
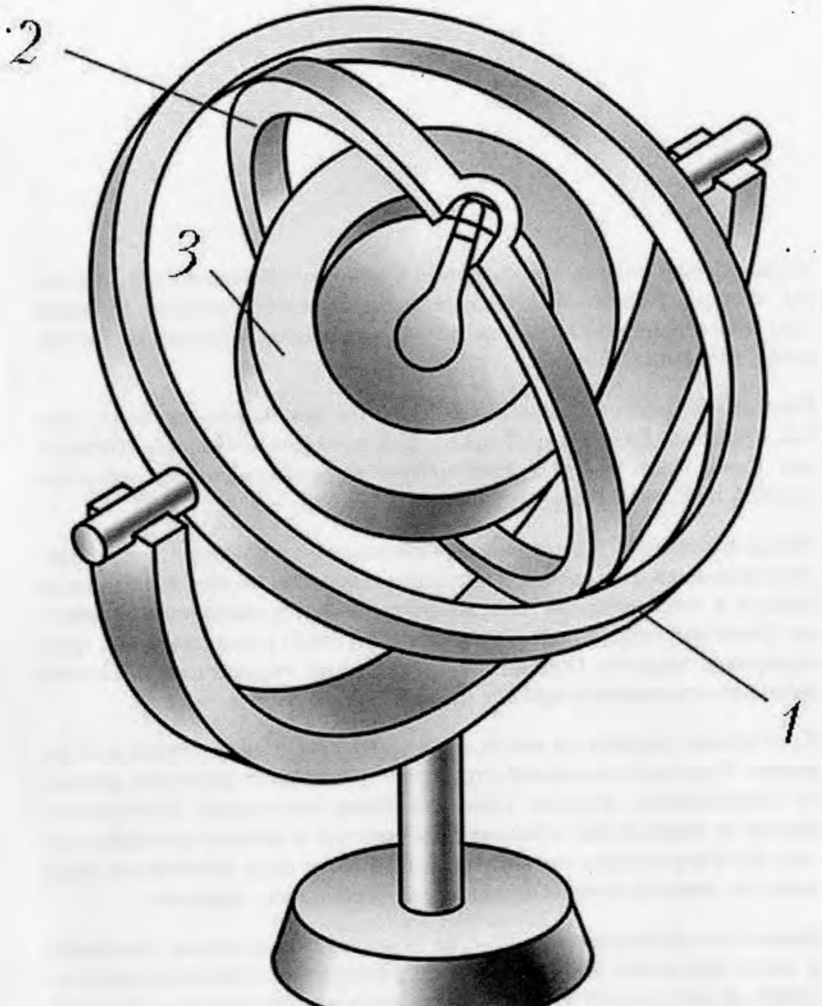
Карда́нов подве́с — универсальная шарнирная опора, позволяющая закреплённому в ней объекту вращаться одновременно в нескольких плоскостях. Главным свойством карданова подвеса является то, что если в него закрепить вращающееся тело, то оно будет сохранять направление оси вращения независимо от ориентации самого подвеса. Это свойство нашло применение в гироскопах, применяющихся в авиации и космонавтике. Держатели судовых компасов или просто сосудов с питьём в транспортных средствах тоже используют карданов подвес, который позволяет предмету находиться в вертикальном положении несмотря на толчки и тряску.

Подвес получил своё название по имени Джероламо Кардано (1501—1576), который изобрёл его, он описал это устройство в своей получившей широкую известность книге «De subtilitate rerum» («Хитроумное устройство вещей», 1550 г.).

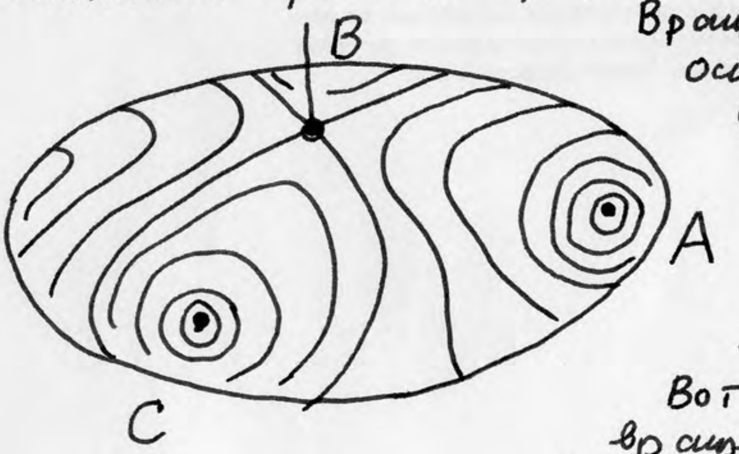





a
b
c
O
c
b
a

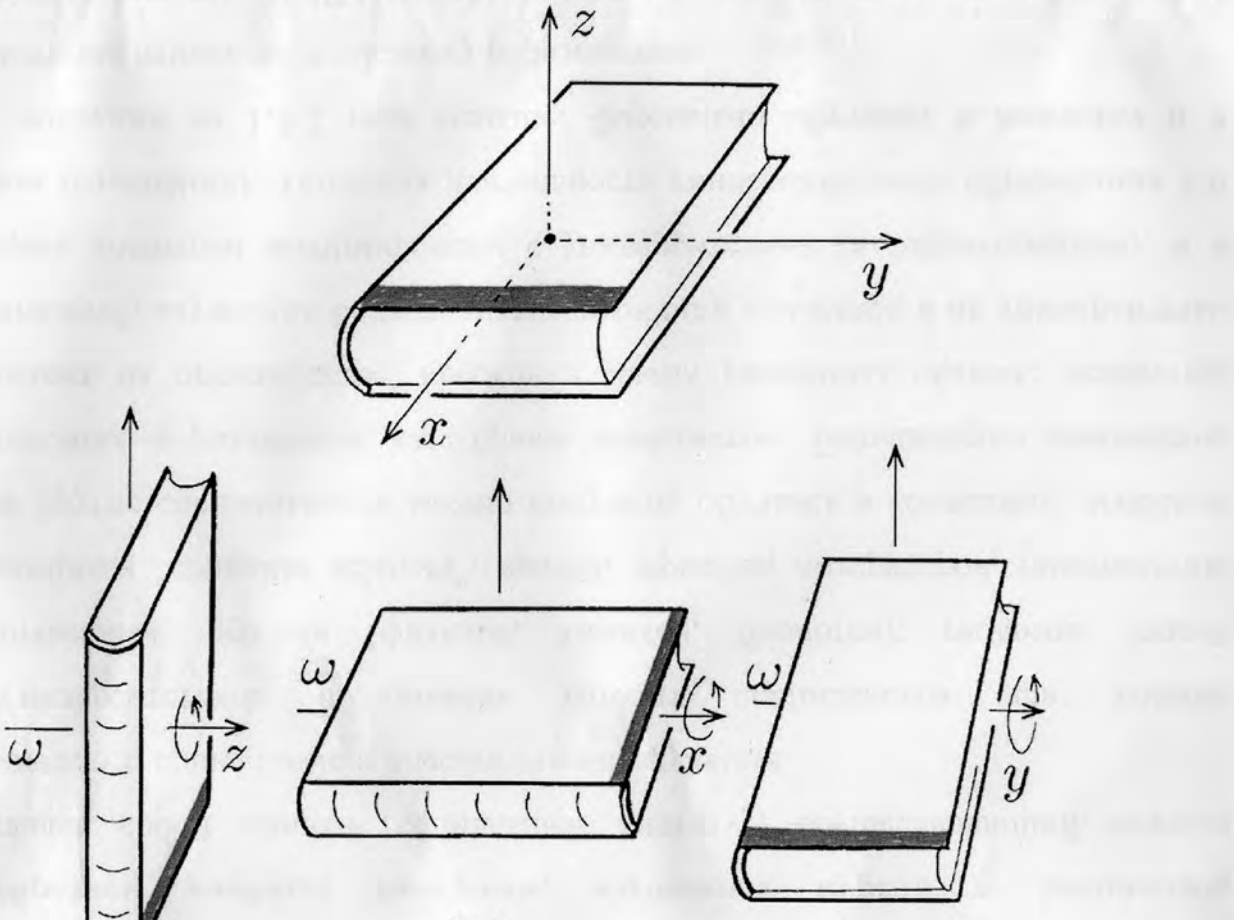


• Комментарий к устойчивости гироскопа в кардан. подвес.
В $\mathbb{R}^3(pqr)$ рассм. два интеграла: H и f_4, т.е.
$H = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$, $f_4 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2$ и их совместные линии уровня, т.е. интеграл. траектории ($H = \text{const}$, $f_4 = \text{const}$).
Эллипсоиды пересек. со сферами. Пусть $A > B > C$.

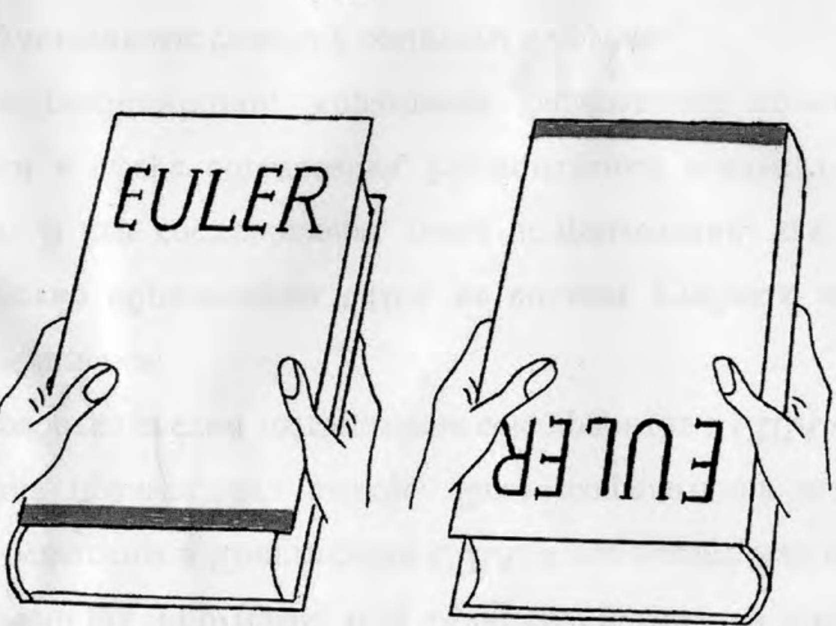


Вращение тв. тела вокруг больш. оси A и малой оси C — очевидно устойчиво. Вращение вокруг средней оси B очевидно неустойчиво.
А гироскопы вытянуты вдоль оси A, поэтому их вращение устойчиво.
Вот еще один коммент. о вращен. тверд. тела вокруг осей A, B, C.

В заключение мы покажем, как полученная нами информация о топологии слоения Лиувилля в случае Эйлера позволяет легко объяснить следующий известный механический эксперимент. Возьмем обычную книгу, которую будем сейчас рассматривать как твердое тело. (Вместо книги можно, конечно, взять деревянную плитку в форме книги). Ориентируем ее в горизонтальной плоскости, как показано на рис. 5.28а и подбросим вверх, закрутив книгу вокруг ее горизонтальной оси симметрии, проходящей через центр книги. Затем поймаем книгу и посмотрим, в каком положении она вернулась к нам. Оказывается, результат существенно зависит от того, как именно мы ориентировали книгу перед началом броска. А именно, у книги, очевидно, есть три взаимно перпендикулярных оси симметрии. И мы можем подбросить книгу, закрутив ее вокруг любой из этих осей. Если подбросить книгу, закрутив ее вокруг оси симметрии, отвечающей



(a)



(b)

наименьшему моменту инерции, то книга вернется назад в том же положении, какое она занимала до броска. Если книга подброшена и закручена вокруг оси симметрии, отвечающей максимальному моменту инерции, то эффект будет тот же — книга, повернувшись в воздухе несколько раз, вернется в прежнее положение. См. рис. Совсем другая картина возникнет, когда мы подбросим книгу, закрутив ее вокруг оси симметрии, отвечающей среднему моменту инерции. Здесь книга *перевернется*. Более точно, если в начале броска корешок книги был у вас в левой руке, то поймав книгу в воздухе, вы с удивлением обнаружите, что ее корешок оказался в вашей правой руке. См. рис.

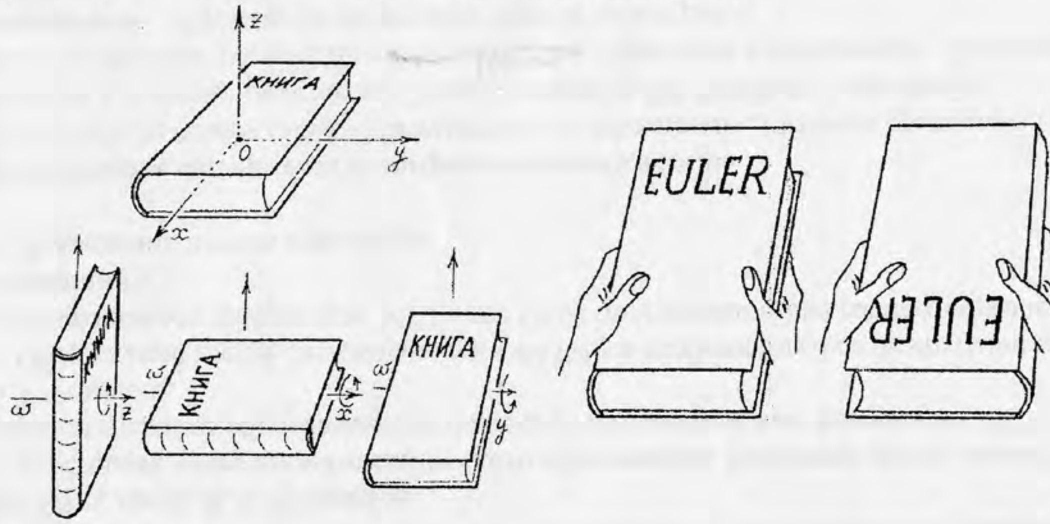
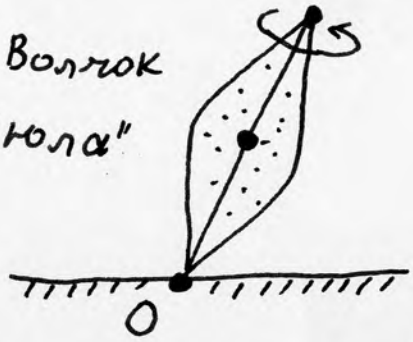


Рис.

Это любопытное обстоятельство теперь легко объяснить. В самом деле, полет книги хорошо моделирует случай Эйлера в динамике тяжелого твердого тела. Достаточно забыть о движении центра масс книги, т. е. рассматривать только ее «чистое вращение» вокруг центра масс. Кроме того, можно считать, что постоянная площадей здесь равняется нулю. Дело в том, что при каждом из трех описанных бросков мы закручиваем книгу вокруг горизонтальной оси, идущей в точности по одному из собственных направлений ее тензора инерции. Следовательно, вектор кинетического момента каждый раз пропорционален вектору угловой скорости. Сила тяжести направлена вертикально вниз, то есть ортогональна угловой скорости и, следовательно, кинетическому моменту книги. Поскольку постоянная площадей получается как скалярное произведение кинетического момента на вектор силы тяжести, следовательно, в данном эксперименте эта постоянная равна нулю. Следовательно, мы попадаем в ситуацию случая Эйлера с нулевой постоянной площадей. Поэтому полет книги можно интерпретировать как движение интегральной траектории динамической системы случая Эйлера по ее изоэнергетической трехмерной поверхности.

• Случай Лагранжа. Здесь $A = B$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 \neq 0$

Волчок "юла"



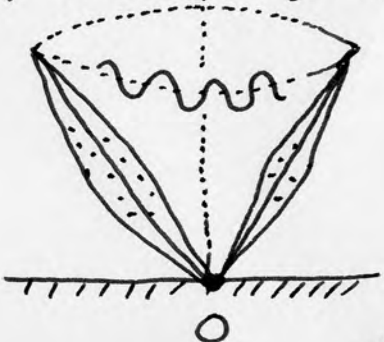
Последнее ур-е Эйлера:

$$C\dot{r} + \underbrace{(B-A)}_{0}pq = mg\,(\underbrace{y_0\alpha - x_0\beta}_{0}) \Rightarrow$$

$$C\dot{r} = 0, \text{ т.е. } \dot{r} = 0, \text{ т.е. } r = \text{const}$$

это и есть четвертый линейный интеграл.

Движение оси волчка Лагранжа: прецессия и нутация:



Эта система тоже вполне интегрир. по Лиувиллю.

• Другие случаи интегрируемости:

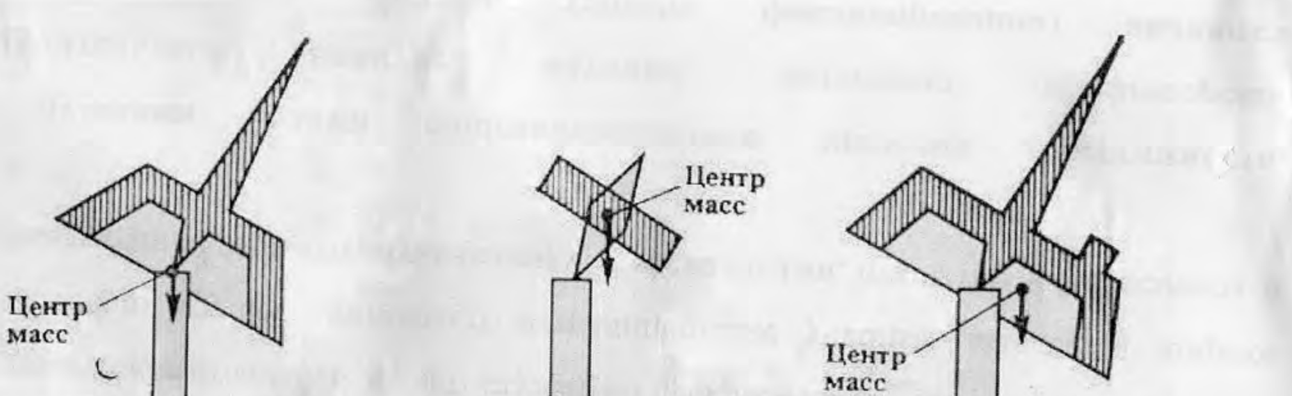


Рис.
Модели вращающихся тел, имеющих одну неподвижную точку, предложенные Н. Е. Жуковским: а — случай Л. Эйлера; б — случай Ж. Лангранжа; в — случай С. В. Ковалевской (ЦМ — центр масс).

• Случай С. Ковалевской. Он нетривиален, здесь дополнит. интеграл имеет степень 4. Здесь $A = B = 2C$, $y_0 = z_0 = 0$. Ур-я Эйлера–Пуасс. принимают вид:

$$\begin{cases} 2\dot p = qr \\ 2\dot q + rp = c\gamma \\ \dot r = -c\beta \end{cases} \begin{vmatrix} + \\ \text{умнож. на } i \\ \end{vmatrix} \text{сложим} \Rightarrow$$

где $c = const \neq 0$

$$2(p+iq)^{\bullet} = -ir(p+iq) + ic\gamma$$

из ур-й Пуассона $\rightarrow$ $\begin{cases} \dot\alpha = r\beta - q\gamma \\ \dot\beta = p\gamma - r\alpha \end{cases}$ $+$ i сложим $\Rightarrow$

$$2(p+iq)^{\bullet} = -ir(p+iq) + ic\gamma$$ ← умножим на $(p+iq)$

$$(\alpha+i\beta)^{\bullet} = -ir(\alpha+i\beta) + i\gamma(p+iq)$$ ← умножим на $(-c)$ и сложим. Исключим γ.

$$\left((p+iq)^2 - c(\alpha+i\beta)\right)^{\bullet} = -ir\left((p+iq)^2 - c(\alpha+i\beta)\right) \Rightarrow$$

$$+\begin{cases} \left[\ln\left((p+iq)^2 - c(\alpha+i\beta)\right)\right]^{\bullet} = -ir \\ \left[\ln\left((p-iq)^2 - c(\alpha-i\beta)\right)\right]^{\bullet} = ir \end{cases}$$

; сделаем комплексное сопряжение и сложим, т. е. исключим r:

Получаем:

$$\left[\ln\left((p+iq)^2 - c(\alpha+i\beta)\right)\cdot\left((p-iq)^2 - c(\alpha-i\beta)\right)\right]^{\bullet} = 0, \Rightarrow$$

$\left((p+iq)^2 - c(\alpha+i\beta)\right)\cdot\left((p-iq)^2 - c(\alpha-i\beta)\right) = const$; а т.к. здесь $s\cdot\bar s = const$, то $|s|^2 = const$, где

$s = (p^2 - q^2 - c\alpha) + i(2pq - c\beta)$, т. е.

$$|s|^2 = const \Rightarrow \underline{(p^2-q^2-c\alpha)^2 + (2pq - c\beta)^2 = const},$$

т. е. мы нашли интеграл Ковалевской степени 4.

• Теорема (Болсинов, Фоменко). Степень 4 интеграла Ковалевской понизить нельзя, т. е. у этой системы нет дополнит. интеграла степени < 4. (см. книгу Болс. Фом.)