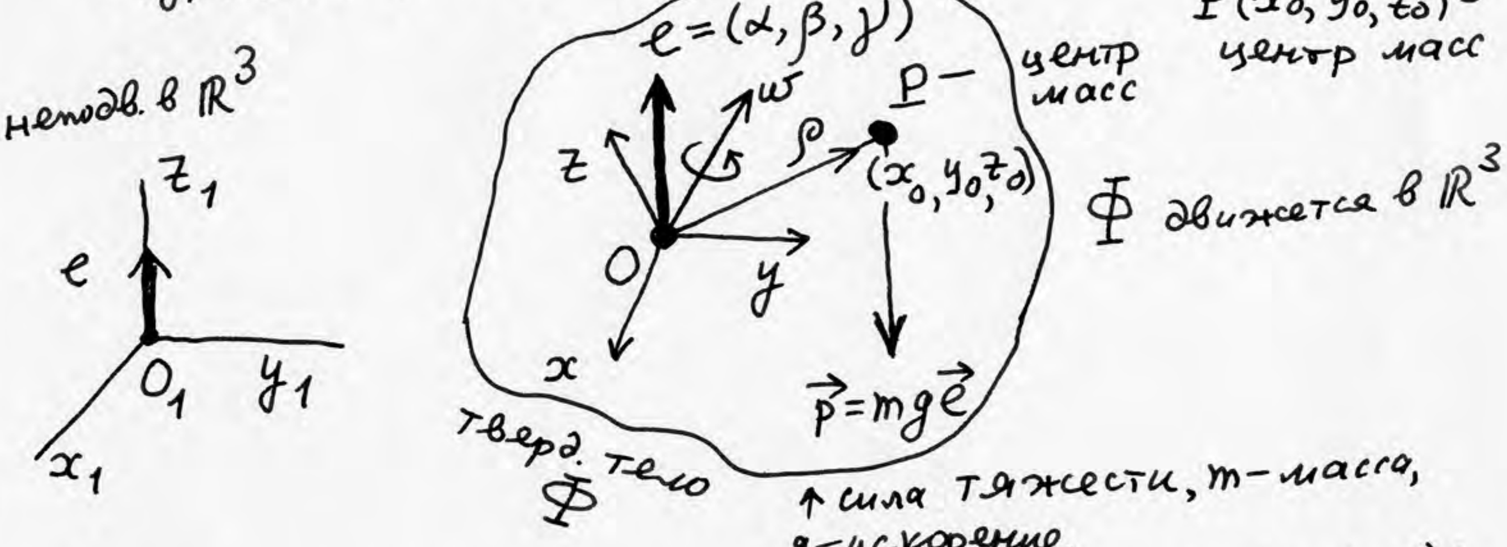
[Важные примеры интегрир. систем в физике и механике.
Ур-я Эйлера — Пуассона движ. тверд. тела в $\mathbb{R}^3$.

• <u>Опред.</u> Твер. тело в $\mathbb{R}^3$ — это система точек с заданным набором расстоян. между ними.

Пусть x_1, y_1, z_1 — неподв. в $\mathbb{R}^3$ система дек. к-т. Пусть дано твер. тело в $\mathbb{R}^3$. В нем задана "вмороженная" сист. декар. к-т x, y, z, т. е. фиксирован репер, неподв. относит. твер. тела.



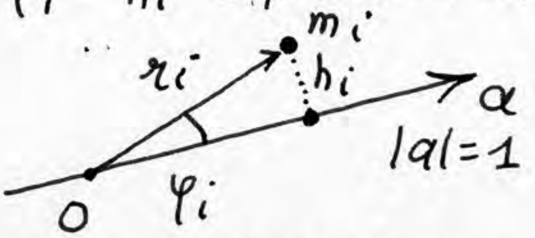
Если твер. тело — это система точек $(m_1 r_1, \ldots, m_N r_N)$, где m_i — массы точек, а x_i — их радиус-векторы (из точки O), то
$$\rho_{ц.масс} = \frac{1}{\sum m_i} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i$$
(если тело — дискретно). Если тв. тело "непрерывно", то
$$\rho_{ц.масс} = \frac{1}{M} \int_{\Phi\,(тело)} \vec{r}\, dm(\vec{r}),$$
где $\vec{r} = r(x,y,z)$ — радиус-вектор, а $dm(\vec{r})$ — плотность тела в точке $r(x,y,z)$.

Здесь ω — в-р мгновенн. углов. скорости тела. Вектор e — единичн. в-р в $\mathbb{R}^3$ вверх по оси z_1. Относит. подвижного репера (x,y,z) ("вморож." в тв. тело Φ) он имеет коор-ты:
$e = (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$, а в-р ω относит. (x,y,z) имеет коор-ты:
$\omega = (p(t), q(t), r(t))$. Положение тв. т. Φ в $\mathbb{R}^3$ однозначно задается дек. коор-ми в-ров e и ω:

$$\Phi(t) = (\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)(t) \in \mathbb{R}^6.$$

• <u>Тензор инерции и главн. оси.</u> Пусть Φ — это система точек $(m_1 r_1, \ldots, m_N r_N)$
Тензор инерции это: $T(a,b) = \sum_{i=1}^{N} m_i \langle r_i \times a, r_i \times b \rangle$, где $a, b \in \mathbb{R}^3$, $r_i \times a$ и $r_i \times b$ — векторн. произвед. векторов, m_i — массы

Если $a=b$ — в-р единичн. длины, то $T(a,a)=\sum_{i=1}^{N} m_i|r_i\times a|^2$.
Далее: $|r_i\times a| = |r_i|\cdot|a|\cdot\sin\varphi_i =$
$=|r_i|\cdot\sin\varphi_i = h_i$ = расстояние точки r_i до оси, определяемой в-ром a:



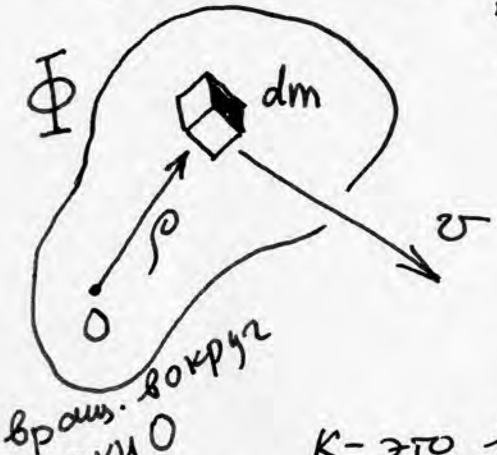
Момент точки r_i относит. оси, опредл. век-ром a, есть: $m_i\cdot h_i^2$ = {масса · квадрат расстояния}.

• Если тело Φ — "непрерывно", то тензор инерции имеет вид:

$$T(a,b)=\int_\Phi \langle r\times a,\ r\times b\rangle\, dm(r) = \text{билин. форма в } \mathbb{R}^3.$$

Она симметр., а потому ее можно привести к главн. осям. Эти оси и назыв. главн. осями инерции твер. тела Φ, а значения $T(a,a)$ на них — это главн. моменты инерции тв.т. Φ. Эти оси мы и возьмем за базис коор-т x, y, z в Φ ("вморож." система). Если I — матр. момент. инерции, то в главн. осях она имеет вид: $I=\begin{pmatrix} A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}$, где A, B, C — глав. момен. инерции тв. тела Φ.

• Кинетич. момент тв. тела (инерции). Возьмем малый "кубик" dm и пусть v — в-р его мгновенн. скорости, а ρ — радиус-в-р. Тогда



вращ. точки O

$[\rho, v]\,dm = (\rho\times v)\,dm$ — кинетич. момент вращен. кубика. А по всему Φ:
вектори. произвед.

$$K=\int_\Phi(\rho\times v)\,dm = K(t)$$ — кинетич. момент вращ. твер. тела.

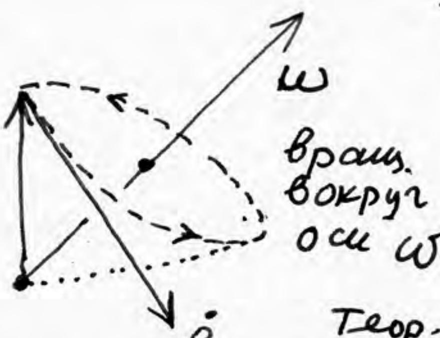
K — это вектор в $\mathbb{R}^3$. Вот две важн. теор. из механики.

• Теор. Для движ. твер. тела в $\mathbb{R}^3$ выполнено: $K=I(\omega)$, где ω — век-р мгнов. углов. скорости, I — матр. моментов инерции. В главных осях (вморож. в тв. тело) $I=diag(A,B,C)$. Далее: dK/dt = момент внешних сил.

Иногда вект. произв. в $\mathbb{R}^3$ пишут в виде коммутатора:
$a\times b=[a,b]$. Пусть тв. тело Φ движ. в $\mathbb{R}^3$. Тогда:

Теор. (Эйлер-Пуассон).
$(I\omega)^{\cdot} = [I\omega,\omega] + mg\,[e,\rho_{ц.масс}]$ — ур-я Эйлера,
$\dot e = [e,\omega]$ — ур-я Пуассона. Эти ур-я записаны в сист. к-т, "вморожен." в тв. тело, т.е. (x,y,z).

Ур-я Эйлера вытекают из предыдущ. теоремы. Ур-я Пуассона вполне понятны:



в-р e вращ. вокруг оси ω — мгновен. вращ, поэтому $\dot e \perp e$ и $\dot e \perp \omega$, $|e|=1$, так что $\dot e = [e, \omega]$, чтд.

Запишем ур-я Эйл.–Пуасс. в координатах.

Теор.:

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A\dot p + (C-B)qr = mg(z_0\beta - y_0\gamma) \\ B\dot q + (A-C)rp = mg(x_0\gamma - z_0\alpha) \\ C\dot r + (B-A)pq = mg(y_0\alpha - x_0\beta) \end{array}\right\} \text{Эйлер.} \\ \left.\begin{array}{l} \dot\alpha = r\beta - q\gamma \\ \dot\beta = p\gamma - r\alpha \\ \dot\gamma = q\alpha - p\beta \end{array}\right\} \text{пуассон.} \end{array}\right.$$

Задание динамики ω и e полнос. определ. движ. тв. тела в $\mathbb{R}3(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$

получаем вект. поле (поток) на $\mathbb{R}^6$: $v_{\text{Э.П.}}$ = ур-я Эйл.–Пуасс.

• Сделаем замену перемен.: $S_1 = Ap$, $S_2 = Bq$, $S_3 = Cr$. Тогда:

$\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3(\omega) \oplus \mathbb{R}^3(e) = \mathbb{R}^3(p,q,r) \oplus \mathbb{R}^3(\alpha,\beta,\gamma) =$
$= \mathbb{R}^3(S_1, S_2, S_3) \oplus \mathbb{R}^3(R_1, R_2, R_3)$, где $\alpha = R_1$, $\beta = R_2$, $\gamma = R_3$.

Зададим скобку Пуасс. на $\mathbb{R}^6$ так:

$\{S_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} S_k$; $\{R_i, S_j\} = \varepsilon_{ijk} R_k$; $\{R_i, R_j\} = 0$,

где $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ и $\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$.

Эта скобка Пуассона на $\mathbb{R}6$ вырожд. (имеет $\neq 0$ ядро).

• Более общие уравн. Э.-П. имеют вид:

$$\begin{cases} I\dot\omega = [I\omega, \omega] + \left[e, \dfrac{\partial U}{\partial e}\right] \\ \dot e = [e, \omega] \end{cases}$$

, где $U(e) = U(\alpha, \beta, \gamma)$ — потенциал, гладк. ф-я от e.

• Теор. Рассм. $\mathbb{R}^6(S, R)$ с указанной скобк. Пуассона и ф-ю (гамильтониан) $H = \dfrac{S_1^2}{A} + \dfrac{S_2^2}{B} + \dfrac{S_3^2}{C} + U(R_1, R_2, R_3)$. Тогда ур-я Э.-П. запишутся в виде:

$\dot S_i = \{S_i, H\}$ и $\dot R_i = \{R, H\}$ или: $\begin{cases} \dot S = \left[\dfrac{\partial H}{\partial S}, S\right] + \left[\dfrac{\partial H}{\partial R}, R\right], \\ \dot R = \left[\dfrac{\partial H}{\partial S}, R\right]. \end{cases}$

здесь $\{,\}$ — скобка Пуасс. в $\mathbb{R}^6(S, R)$.

• Д-во — прямые вычисл. Опускаю. См. книгу Болсинов–Фоменко т. 2, с. 192–194.

• Итак, ур-я Э.-П. записаны в Пуассоновом виде. Еще раз: эта скобка Пуасс. вырожд. на $\mathbb{R}^6$, потому симпл. структ. на $\mathbb{R}^6$ не задает.

• $\mathbb{R}^6(S, R)$ изоморф. алг. Ли $so(3) + \mathbb{R}^3$ (полупрям. сумма).

• Вернемся снова к координатам $(p\,q\,r\,\alpha\,\beta\,\gamma)$. Тогда:

$$H = \langle I\omega, \omega\rangle + 2mg\langle \rho_{\text{ц.масс}}, e\rangle =$$
$$= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2mg(x_0\alpha + y_0\beta + z_0\gamma).$$

• Утвер. Ур-я Э.-П. на $\mathbb{R}^6(\omega, e)$ всегда имеют два независ. интеграла: $f_1 = \langle e, e\rangle = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, (геометрич. интеграл)

$f_2 = \langle I\omega, e\rangle = Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma$ (интеграл площадей)

т.е. $f_1 = c = const$ и $f_2 = g = const$ вдоль потока $v_{\text{Э.П.}}$

• Д-во. прямое вычисление. Геометрический интеграл f_1 очевиден, т.к. в-р e в $\mathbb{R}^3$ единичен, т.е. $\langle e, e\rangle = 1 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

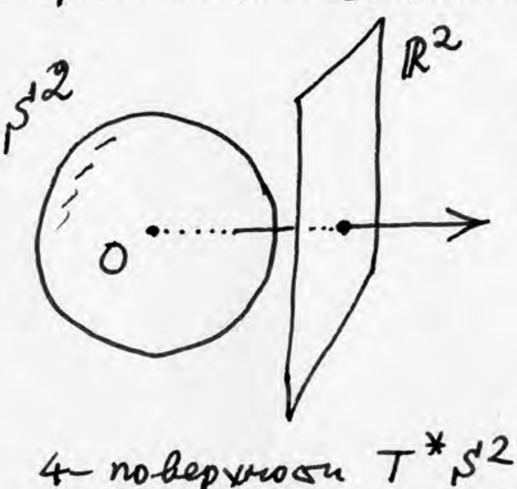
• Рассм. в $\mathbb{R}^6$ совместн. 4-поверхн. уровня: $f_1 = c$, $f_2 = g$; получим $M^4_{c,g} \subset \mathbb{R}^6$. Рассм. такие c и g, что $M^4_{c,g}$ — регуляр. подмног. в $\mathbb{R}^6$. Возникает слоение  $\leftarrow M^4_{c,g}$

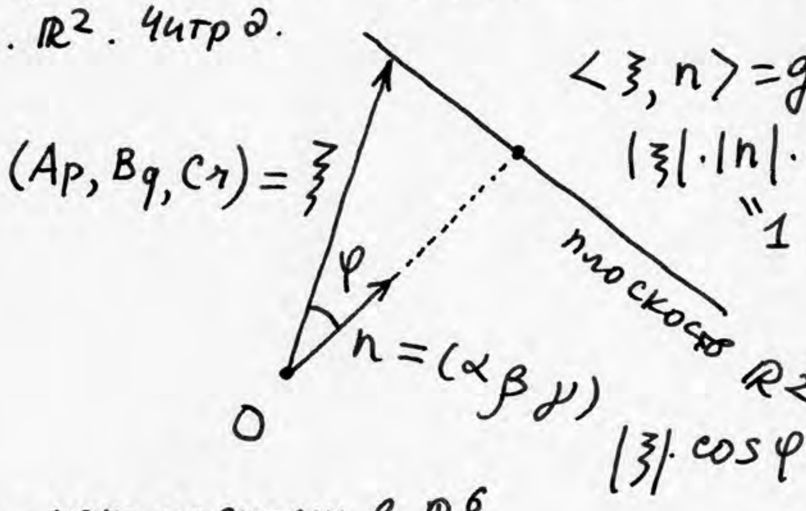
• Утв. Если $M^4_{c,g}$ — регулярно, то оно диффеоморфно T^*S^2, т.е. кокасат. рассл. к сфере S^2.

Д-во. $M^4_{c,g} = (f_1 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = c;\ f_2 = \langle I\omega, \omega\rangle = g = const)$.

Ур-е: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = const$ — это сфера S^2 в $\mathbb{R}^3(\alpha\beta\gamma)$; а ур-е: $Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma = const$ — это двум. плоскость в $\mathbb{R}^3(pqr)$.

При фиксир. $\alpha\beta\gamma$ решение — это (p, q, r), т.е. ковектор, пробегающий 2-плоск. $\mathbb{R}^2$. Черт.





$\langle \xi, n\rangle = g = const$

$|\xi|\cdot\underbrace{|n|}_{=1}\cdot\cos\varphi = g$

$|\xi|\cdot\cos\varphi = g.$

4-поверхности T^*S^2 — некомпактны в $\mathbb{R}^6$.

• Теор. 1) Ограничение скобки Пуасс. (см. выше) с $\mathbb{R}^6(S, R) = \mathbb{R}^6(\omega, e)$ на подмног. $M^4_{c,g}$ дает невырожд. скобку Пуасс., т.е. задает симплект. структ., т.е. $M^4_{c,g} \simeq T^*S^2$ оказывается симплект. многообр.

2) Ограничение потока $v_{\text{Э.П.}}$ на $M^4_{c,g}$ является гамильтон. вект. полем, т.е. $v_{\text{Э.П.}} = \operatorname{sgrad} H$, где $\operatorname{sgrad} \simeq$ форме симпл. на $M^4_{c,g}$.

• Итак, ур-я Э.-П. динамики тв. тела в $\mathbb{R}^3$ оказываются гамильтоновыми на совместн. 4-уровнях геометрического интеграла f_1 и интеграла площадей f_2.

• Д-во. – прямое вычисл. См. книгу Болс. Фомен.

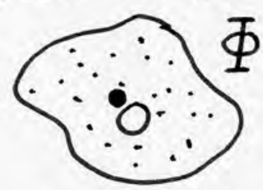
• Итак, мы нашли три независ. интеграла: H, f_1, f_2. Они функц. незав. в общем положении.

Д-во – прямое вычисление.

• Некоторые классич. случаи интегрируемости.

Ур-я Э.-П. зависят от параметров: (A, B, C, x_0, y_0, z_0). Если они произвольны, то система неинтегрируема. Но при некоторых знач. параметров появляется четвертый независ. интеграл f_4. И тогда система $v_{Э.П.}$ будет интегрир. по Лиувиллю. Примеры. Поиск 4-го интеграла – это искусство. Поэтому найденные случаи интегрируемости – "именные", известные.

• Случай Эйлера. Здесь твер. тело закреплено в центре масс, т.е. $\rho_{ц. масс} = 0$, т.е. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.



Тогда $H = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$. Ур-я Э.-П. принимают вид:

$$\begin{array}{c} Ap \\ + \\ Bq \\ + \\ Cr \end{array} \quad \begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A-C)rp = 0 \\ C\dot{r} + (B-A)pq = 0 \end{cases}$$

Умножим на Ap, Bq, Cr и сложим три ур-я. Получим:

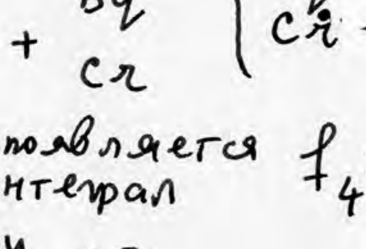
$$(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2)^{\bullet} = 0, \text{ т. е.}$$

появляется интеграл $f_4 = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \langle I\omega, I\omega\rangle = |K|^2 = \text{const}$. Итак,

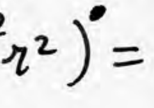
Ур-я Пуассона: $\dot{\alpha} = r\beta - q\gamma$, $\dot{\beta} = p\gamma - r\alpha$, $\dot{\gamma} = q\alpha - p\beta$. Итак, система $v_{Э.П.}$ разделилась на ур-я Э. и ур-я Пуасс. Решаем ур-я Эйл., получаем $p(t), q(t), r(t)$, затем подставляем в ур-я Пуасс. и находим $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$. Задача: доказать, что f_4 функц. независ. с H, f_1, f_2, и все они – в инволюции.

• Примеры на "случай Эйл.". • Колебания корабля в океане:

O = ц. масс.



• Полет астероида в $\mathbb{R}^3$:



• Карданов подвес и гироскопы. Очень важное приложение.