1. Поскольку интегралы $f_1, f_2, \dots, f_n$ заданы, то совместная поверхн. уровня $T^n_\xi = (f_i = \xi_i,\ 1 \le i \le n)$ задана системой уравнений. Они могут быть сложными, но, тем не менее, "они известны". Конечно, торы Лиувилля T^n_ξ могут располагаться в M^{2n} довольно прихотливо. Но зато на каждом торе система линеаризуется (в подходящих координатах).
2. Любая функция $H = H(f_1, \dots, f_n)$ задает гамильтонову систему, интегрируемую по Лиувиллю.
3. Конкретный вид интегралов неважен в том смысле, что важно лишь пространство интегралов $\{H(f_1, \dots, f_n)\}$. Т.е. действие абелев. группы $\mathbb{R}^n$, порожденной полями $(\operatorname{sgrad} f_i,\ 1 \le i \le n)$. Напомню, что любая ф-я от интегралов сама является интегралом.

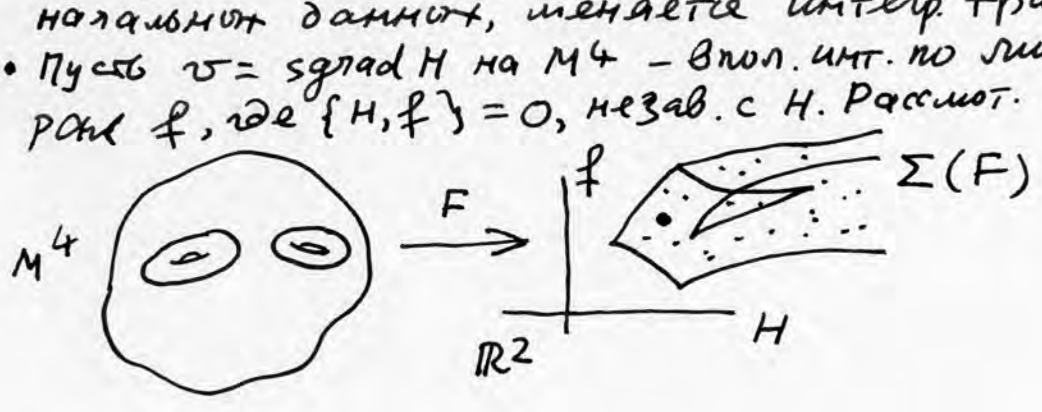
• Отображ. момента. Если на M^{2n} задана система v, вполне интегрир. по Лиувиллю, то возникает т.н. отображ. момента: $F: M^{2n} \to \mathbb{R}^n$, где $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, где f_i — интегралы системы. Множество особых значений $\xi \in \mathbb{R}^n$ для отобр. F замкнуто и называется бифуркационной диаграммой $\Sigma = \Sigma(F)$. Т.е. если $\xi \in \Sigma(F)$, то в полном прообразе $F^{-1}(\xi)$ есть критич. точки, т.е. такие, где ранг $(dF) < n$.

• Если $\xi \in \mathbb{R}^n$ — регулярное знач. отобр. момента, то $F^{-1}(\xi)$ — набор торов Лиувилля, если прообраз — компактен. Если $\xi \in \Sigma(F)$, то $F^{-1}(\xi)$ содержит особые слои (с критич. точками). Тем самым, возникает слоение на торы (в компактном случае) и особые слои. Это слоение наз. слоением Лиувилля.

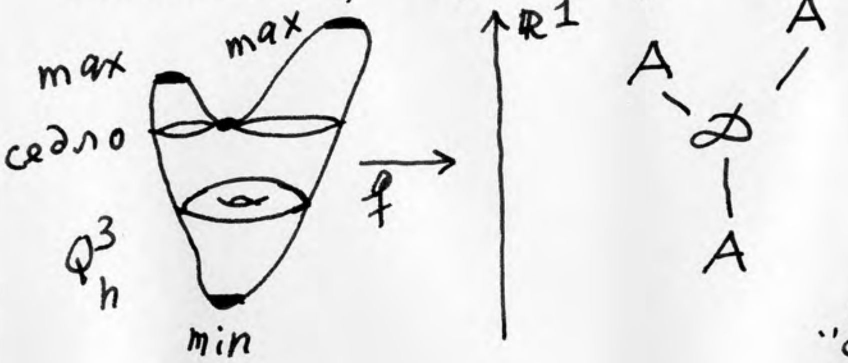
• В аналитическом случае почти все торы Лиувилля "нерезонансны", т.е. являются замыканием своих интегральных траекторий. Т.е. динамика на них "условно-периодическая", т.е. траектория — "иррациональна", т.е. частоты — несоизмеримы. Это — теорема.

• Таким образом, в аналит. случае почти все тора T^n — это замыкания интегральн. траекторий. При изменении начальных данных, меняется интегр. траект., т.е. тор T^n.

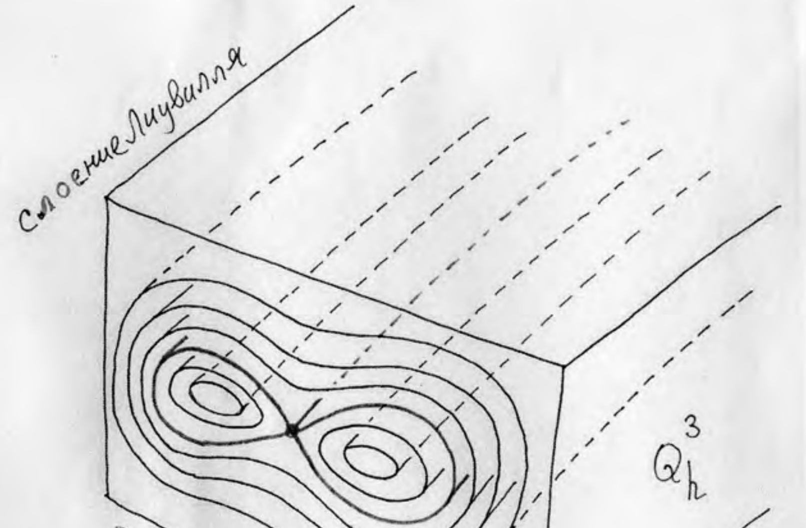
• Пусть $v = \operatorname{sgrad} H$ на M^4 — впол. инт. по Лиув., т.е. есть интеграл f, где $\{H, f\} = 0$, незав. с H. Рассмот. отобр. момента



Мн-во $\Sigma(F)$ разбивает мн-во $F(M^4) \subset \mathbb{R}^2$ на открытые области, "камеры", состоящие из регулярн. значений отобр. F. Если $\xi \in F(M)$ — регулярно, то $F^{-1}(\xi)$ состоит из торов Лиувилля. Фиксируем $H=h=$ $= \text{const}$ и пусть $dH \neq 0$ на 3-уровне $Q^3_h = (H=h)$. Тогда Q^3_h — гладк. 3-мерн. многообр., называемое изоэнергетическим. Рассм. слоение Лиувилля на Q^3_h; тогда $f: Q^3_h \to \mathbb{R}^1$. Пусть W — граф, точками которого явл. компоненты связн. множеств $f^{-1}(\xi)$, где $\xi \in (H=h)$:



Ребра графа — это 1-параметрич. семейства 2-торов Лиувилля, а вершины графа — это особые слои слоения Лиувилля, условно обозначен. "буквами" и называемые "атомами".



3-многообразие расслоено на двумерные слои. "Большинство" слоев — это 2-мерные торы. Они наглядно показывают эволюцию интегральных траекторий динамической системы.

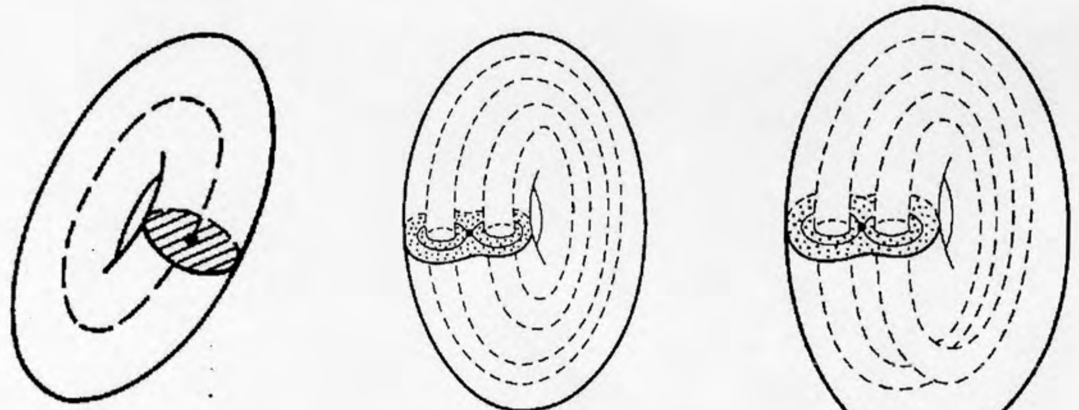
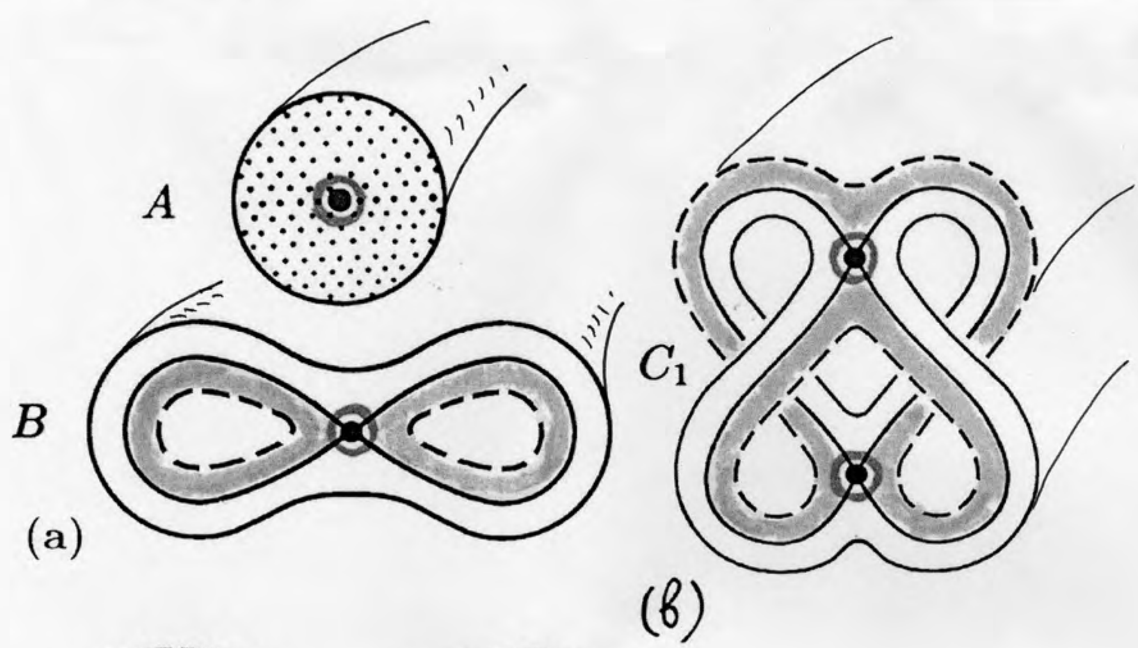
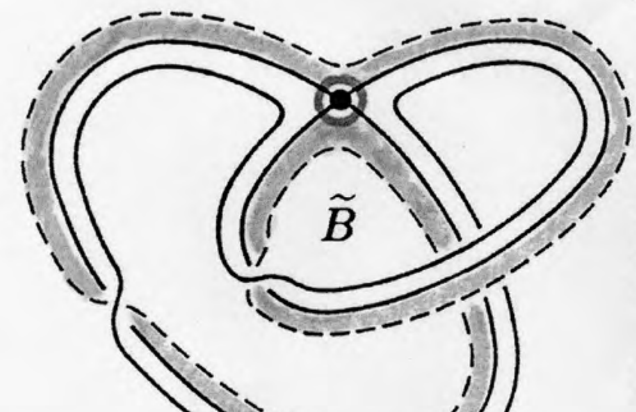
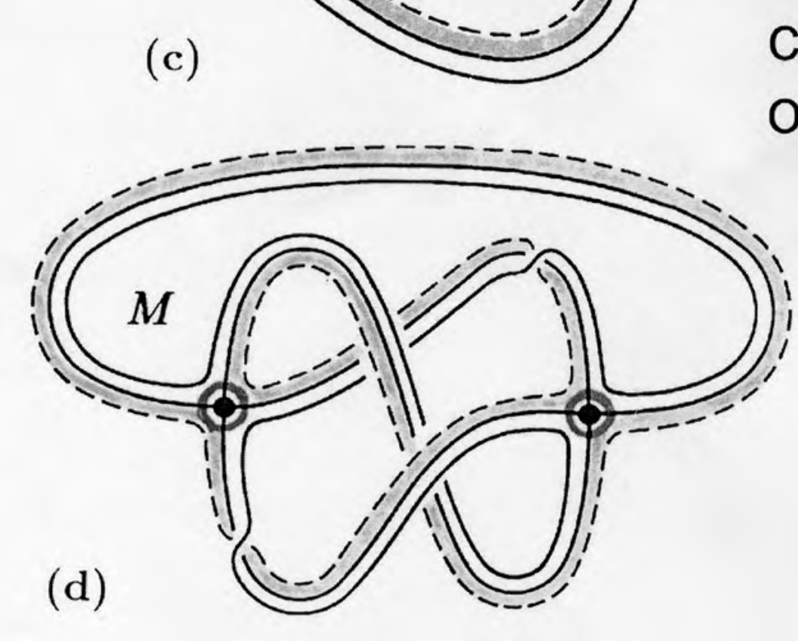


Рис.: Примеры 3-атомов – перестроек торов Лиувилля – A, B, A^*





Примеры "атомов" = бифуркаций сложности один и два



• <u>Д-во теор. Дарбу.</u>

Рассм. симпл. мног. (M^{2n}, ω). Тогда для $\forall$ точки $P \in M$ $\exists$ откр. окрест. $\mathcal{U} = \mathcal{U}(P)$ и локал. регул. коорд. $p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n$ в $\mathcal{U}(P)$, что: $\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i$, т.е. $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ в целой окрестн. $\mathcal{U}(P)$.

<u>Д-во.</u>

• <u>лемма 1</u>. Достаточно построить такие локал. к-ты, что в них:

$\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$. Это и дает: $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$.

Здесь скобка Пуасс. $\{\,,\}$ соответ. данной форме ω.

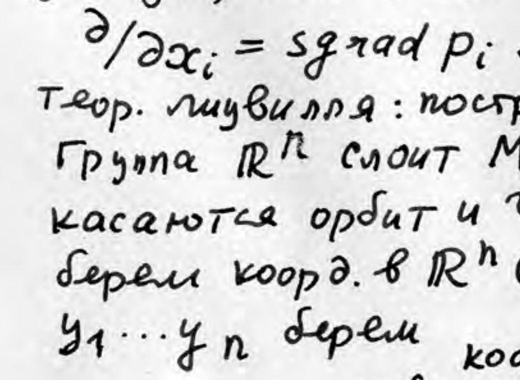
Д-во леммы очевидно вытек. из св-в скобки Пуассона.

• <u>лемма 2</u>. Пусть уже найдены ф-ции $p_1, \dots, p_n$ в инволюции, т.е. $\{p_i, p_j\} = 0$. Тогда $\exists$ дополнит. к ним локал. к-ты $q_1 \dots q_n$, такие, что: $\{q_i, q_j\} = 0$ и $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$.

<u>Д-во</u>. <u>шаг 1</u>. Рассм. ф-ции $p_1 \dots p_n$ и $\alpha: p_i \to v_i = \operatorname{sgrad} p_i$. Тогда векторн. поля $v_1 \dots v_n$ коммут., т.е. $[v_i, v_j] = 0$, так как $[v_i, v_j] = \operatorname{sgrad} \{p_i, p_j\} = 0$.

• <u>шаг 2</u>. По теор. из дифф. геом. (или из д-ва теор. Лиувилля) следует, что $\exists$ новые локал. к-ты $(x, y) = (x_1 \dots x_n; y_1 \dots y_n)$ такие, что $v_i = \partial / \partial x_i$, $1 \le i \le n$, т.е. $\partial / \partial x_i = \operatorname{sgrad} p_i$. Фактически мы доказали это при д-ве теор. Лиувилля: построим гладк. действие $\mathbb{R}^n$ на M^{2n}. Группа $\mathbb{R}^n$ слоит M^{2n} на орбиты. При этом, поля $v_1 \dots v_n$ касаются орбит и $v_i = \operatorname{sgrad} p_i$. За координаты $x_1 \dots x_n$ берем коорд. в $\mathbb{R}^n$ (т.е. на орбите), а за дополнит. к-ты $y_1 \dots y_n$ берем коорд. на диске D^n, трансверсальном орбите группы $\mathbb{R}^n$.

• <u>шаг 3</u>. Условно изобраз. эти ф-ции в пр-ве $C^\infty(M)$:
("три плоскости, подпр-ва").



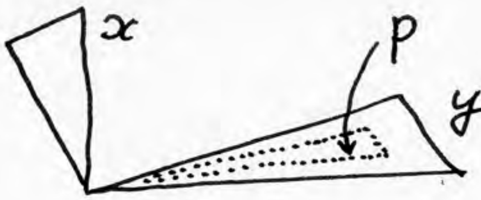
Так как (x, y) — локал. к-ты на M, то $p = p(x, y)$, т.е. все p_i — это функции от (x, y).

<u>лемма 3</u>. На самом деле $p = p(y)$, т.е. p от x не зависят.

<u>Д-во.</u> $\frac{\partial}{\partial x_i}(p_j) = (\operatorname{sgrad} p_i) p_j = \{p_i, p_j\} = 0$, т.к. p_i находятся в инвол.

Итак, $\partial p_j / \partial x_i = 0$, $\forall i, j$. Чтд.

• <u>шаг 4</u>. Итак, $p = p(y)$, а потому за новые координ. можно взять (x, p), т.е.



Переход: $(x,y)\to(x,p)$ "подкручивает" локал. к-ты. Чего хотим? Хотим привести Ω к виду $\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}$. Надо найти попарные скобки: $\{x,x\}$, $\{x,p\}$ и $\{p,p\}$. Сразу имеем: $\{p_i,p_j\}=0$, т.к. ф-ции p_i были в инволюции. Подсчитаем $\{x,p\}$. Имеем:

$$\{x_i,p_j\} = -\mathrm{sgrad}(p_j)(x_i) = -\frac{\partial}{\partial x_j}(x_i) = -\delta_{ij},$$ т.е.

$\{x_i,p_j\}=-\delta_{ij}$. Теперь: пусть $\{x_i,x_j\}=\lambda_{ij}(x,p)$. Т.е. пока матрица попарных скобок такова:

	x	p
x	$\lambda_{ij}(x,p)$	E
p	$-E$	0

Хотим аннулировать матрицу $(\lambda_{ij}(x,p))$.

• Шаг 5. $\lambda_{ij}(x,p)=\lambda_{ij}(p)$, т.е. снова ф-ции λ от x не зависят.

Д-во. Имеем: $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\{x_i,x_j\} = v_\alpha\{x_i,x_j\} =$
$=(\mathrm{sgrad}\,p_\alpha)\{x_i,x_j\} = \{p_\alpha,\{x_i,x_j\}\} =$ (по тожд. Якоби) $=$
$= -\{x_j,\{p_\alpha,x_i\}\} - \{x_i,\{x_j,p_\alpha\}\} = 0$, т.к. $\{p_\alpha,x_i\}=-\delta_{\alpha i}$
$=\mathrm{const}$ и $\{x_j,p_\alpha\}=\delta_{j\alpha}=\mathrm{const}$ и т.к. $\{f,\mathrm{const}\}\equiv 0$.

Итак, $\lambda_{ij}=\lambda_{ij}(p)$. Чтрд.

• Шаг 6. Итак: $\{x,x\}=\Lambda(p)$; $\{x,p\}=E$, $\{p,p\}=0$.
Далее снова подкручиваем к-ты: $(x)\to(q)$, т.е. $(x,p)\to(q,p)$, где положим $q_j=x_j-f_j(p)$. Ищем f_j.
Хотим, чтобы $\{q_i,q_j\}=0$. Имеем:

$$\{p_j,q_i\}=\{p_i,x_j-f_j(p)\}=\{p_i,x_j\}-\{p_i,f_j(p)\}=$$
$$=\delta_{ij}-\sum(\partial f_j/\partial p_i)\cdot\{p_i,p_j\}=\delta_{ij},$$ т.к. $\{p_i,p_j\}=0$.

Итак, $\{p_j,q_i\}=\delta_{ij}$. Далее:

$$\{q_i,q_j\}=\{x_i-f_i(p), x_j-f_j(p)\}=\lambda_{ij}(p)-\{x_i,f_j(p)\}+$$
$$+\{x_j,f_i(p)\}+\underbrace{\{f_i(p),f_j(p)\}}_{=0,\ \text{т.к. } p_i \text{ коммутируют}}.$$

$$\{x_i,f_j(p)\}=\sum_\alpha(\partial f_j/\partial p_\alpha)\cdot\{x_i,p_\alpha\}=\sum_\alpha\frac{\partial f_j}{\partial p_\alpha}\delta_{i\alpha}=\frac{\partial f_j}{\partial p_i}.$$

Полезная формула: $\{x_i,f_j(p)\}=\partial f_j/\partial p_i$.

Итак: $\{q_i, q_j\} = \lambda_{ij}(p) - \dfrac{\partial f_j(p)}{\partial p_i} + \dfrac{\partial f_i(p)}{\partial p_j} \overset{?}{=} 0$

Приравняв нулю, получаем уравнения на ф-ции $f_i(p)$. Ищем.
т.е. решаем систему: $\lambda_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial p_j} - \dfrac{\partial f_j}{\partial p_i}$.

Расcм. 2-форму $\rho = \sum \lambda_{ij} dp_i \wedge dp_j$; хотим найти 1-форму $\tau = \sum f_i dp_i$ такую, что $\rho = d\tau$. Если найдем, то:

$$\rho = \sum \lambda_{ij} dp_i \wedge dp_j = d\left(\sum f_i dp_i\right) = \sum \frac{\partial f_i}{\partial p_j} dp_j \wedge dp_i =$$

$$= \sum_{i<j} \left(-\frac{\partial f_i}{\partial p_j} + \frac{\partial f_j}{\partial p_i}\right) dp_i \wedge dp_j,\ \text{т.е. } \lambda_{ij} = -\frac{\partial f_i}{\partial p_j} + \frac{\partial f_j}{\partial p_i}$$ хитро (с точн. до знака).

• Но такая τ $\exists$, т.к. верно следующее.

$$+\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} = \dfrac{\partial^2 f_j}{\partial p_\alpha \partial p_i} - \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial p_\alpha \partial p_j} \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda_{\alpha i}}{\partial p_j} = \dfrac{\partial^2 f_i}{\partial p_j \partial p_\alpha} - \dfrac{\partial^2 f_\alpha}{\partial p_j \partial p_i} \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda_{j\alpha}}{\partial p_i} = \underbrace{\dfrac{\partial^2 f_\alpha}{\partial p_i \partial p_j} - \dfrac{\partial^2 f_j}{\partial p_i \partial p_\alpha}}_{\Sigma = 0} \end{cases} \qquad \begin{matrix} (i & j & \alpha) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (\alpha & i & j) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (j & \alpha & i) \end{matrix}$$

т.е. $\dfrac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} + \dfrac{\partial \lambda_{\alpha i}}{\partial p_j} + \dfrac{\partial \lambda_{j\alpha}}{\partial p_i} = 0$. Далее:

$$\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\left(\lambda_{ij}(p)\right) = \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\{x_i, x_j\} \overset{\text{по предыдущ. вычислению}}{=} \{x_\alpha, \{x_i, x_j\}\}$$

Но тогда $\dfrac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} + \underset{\text{цикл}}{\circlearrowleft} = \{x_\alpha, \{x_i, x_j\}\} + \underset{\text{цикл}}{\circlearrowleft} =$ тож-во Якоби $= 0$.

Итак: $\dfrac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} + \underset{\text{цикл}}{\circlearrowleft} = 0$. Но это означает, что $d\rho = 0$, т.к. $d\rho = \sum \dfrac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \wedge dp_i \wedge dp_j =$

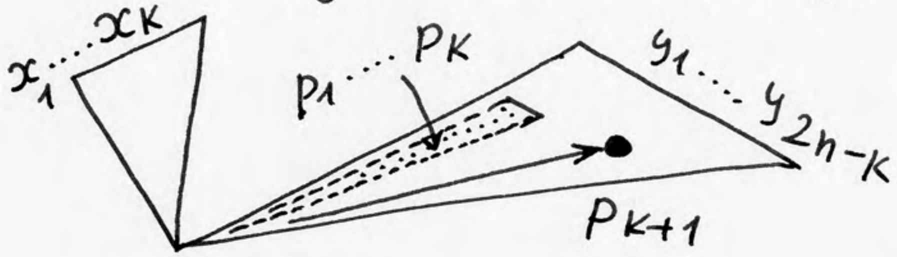
$$= \sum_{\alpha<i<j} \left(\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial p_\alpha} + \underset{\text{цикл}}{\circlearrowleft}\right) dp_\alpha \wedge dp_i \wedge dp_j = 0.$$

• Итак, $d\rho = 0$. Но тогда локал., в диске по лемме Пуанкаре: $\exists\ \tau$ такая, что $\rho = d\tau$, где $\tau = \sum f_i dp_i$. Мы нашли искомые ф-ции $f_i(p)$. Лемма 2 полн. доказана.

• Итак, если есть ф-ции $p_1 \dots p_n$ в инволюции, то отсюда → теор. Дарбу. Осталось построить ф-ции $p_1 \dots p_n$ по индукции.

• <u>Лемма 3</u>. Пусть уже заданы ф-ции $p_1 \dots p_k$, где $k<n$ и $\{p_i, p_j\}=0$. Тогда $\exists$ ф-я p_{k+1} такая, что $\{p_{k+1}, p_i\}=0$ при $1 \le i \le k$, и p_{k+1} – независима с ф-ями $p_1 \dots p_k$.

<u>Д-во</u>. Повторяем д-во предыдущ. леммы 2. Строим к-ты $(x, y) = (x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_{2n-k})$:



Здесь (см. выше) $p = p(y)$, $1 \le i \le k$. Но так как $k<n$, то $k < 2n-k$, т.е. в подпр-ве ф-ций $y_1 \dots y_{2n-k}$ найдется еще одна ф-я p_{k+1}, функц. независим. от ф-й $p_1 \dots p_k$, т.к. $\dim(y) > \dim(p)$. Тогда $\{p_{k+1}, p_i\} = \underbrace{-\mathrm{sgrad}\, p_i}_{=v_i}(p_{k+1}) =$

$= -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{k+1}(y)\right) \equiv 0$. Чтд.

• Теор. Дарбу доказана.