ЛЕКЦИЯ 7.

Определение . Пусть (M^{2n}, ω) — симплектическое многообразие. Гладкое подмногообразие $N \subset M$ называется

1) *симплектическим*, если ограничение формы ω на N невырождено;
2) *лагранжевым*, если $\dim N = n$ и ограничение формы ω на N тождественно равно нулю.

Пример . Рассмотрим каноническую систему координат $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ и произвольную гладкую функцию $S = S(q_1, \dots, q_n)$. Тогда подмногообразие N, заданное как график

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1},$$

$$\dots$$

$$p_n = \frac{\partial S}{\partial q_n},$$

является лагранжевым. Верно и обратное: если лагранжево подмногообразие N можно в канонических координатах представить как график $p_i = P_i(q_1, \dots, q_n)$, то (по крайней мере локально) найдется функция $S = S(q_1, \dots, q_n)$ такая, что $P_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$.

Еще одним примером лагранжевых подмногообразий являются торы Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем, о которых речь идет в следующем параграфе.

Интегрируемые по Лиувиллю гамильтоновы системы. Теорема Лиувилля

Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие и $v = \operatorname{sgrad} H$ — гамильтонова система с гладким гамильтонианом H.

Определение . Гамильтонова система v называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует набор гладких функций $f_1, \dots, f_n$ таких, что:

1) $f_1, \dots, f_n$ — первые интегралы v,

2) они функционально независимы на M, то есть почти всюду на M их градиенты линейно независимы,

3) $\{f_i, f_j\} = 0$ при любых i и j,

4) векторные поля $\operatorname{sgrad} f_i$ полны, т.е. естественный параметр на их интегральных траекториях определен на всей числовой прямой.

Определение . *Слоением Лиувилля*, отвечающим вполне интегрируемой системе, называется разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов $f_1, \dots, f_n$.

Поскольку $f_1, \dots, f_n$ сохраняются потоком v, то каждый слой слоения Лиувилля — инвариантная поверхность.

Слоение Лиувилля состоит из регулярных слоев (которые заполняют почти все M) и особых слоев (заполняющих множество меры нуль).

Одна из целей нашей книги — описание топологии слоений Лиувилля. Формулируемая ниже теорема Лиувилля описывает их структуру в окрестности регулярного слоя.

Рассмотрим совместную регулярную поверхность уровня функций $f_1, \dots, f_n$:

$$T_\xi = \{x \in M \mid f_i(x) = \xi_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Регулярность означает, что дифференциалы df_i линейно независимы на T_ξ.

Теорема **(Теорема Лиувилля).**

Пусть на M^{2n} задана вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} H$ и T_ξ — регулярная поверхность уровня интегралов $f_1, \dots, f_n$. Тогда:

1) *T_ξ — гладкое лагранжево подмногообразие, инвариантное относительно потоков $v = \operatorname{sgrad} H$ и $\operatorname{sgrad} f_1, \ldots, \operatorname{sgrad} f_n$.*

2) *Если подмногообразие T_ξ связно и компактно, то T_ξ диффеоморфно n-мерному тору T^n. Этот тор называется тором Лиувилля.*

3) *Слоение Лиувилля в некоторой окрестности U тора Лиувилля T_ξ тривиально, т. е. диффеомофно прямому произведению тора T^n на диск D^n.*

4) *В окрестности $U = T^n \times D^n$ существует система координат $s_1, \ldots, s_n$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, называемых переменными действие-угол, со следующими свойствами:*

   а) *$s_1, \ldots, s_n$ — координаты на диске D^n, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — стандартные угловые координаты на торе T^n, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

   б) *$\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$.*

   в) *Переменные действия s_i являются функциями от интегралов $f_1, \ldots, f_n$.*

   г) *В переменных действие-угол гамильтонов поток v выпрямляется на каждом торе Лиувилля из окрестности U, т. е. гамильтоновы уравнения принимают вид*

$$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = q_i(s_1, \ldots, s_n),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

   Это означает, что на каждом торе поток v задает условно-периодическое движение, а траектории являются прямолинейными обмотками тора (рациональными или иррациональными).

Доказательство.

1) Поскольку функции $f_1, \ldots, f_n$ попарно коммутируют, они являются первыми интегралами не только потока $v = \operatorname{sgrad} H$, но и каждого из потоков $\operatorname{sgrad} f_i$. Следовательно, их совместная поверхность уровня T_ξ инвариантна относительно этих потоков и, более того, векторные поля $\operatorname{sgrad} f_1, \ldots, \operatorname{sgrad} f_n$ в силу своей независимости образуют базис в каждой касательной плоскости к T_ξ. Лагранжевость подмногообразия T_ξ следует теперь из формулы $\omega(\operatorname{sgrad} f_i, \operatorname{sgrad} f_j) = \{f_i, f_j\} = 0$.

2) Потоки $\operatorname{sgrad} f_1, \ldots, \operatorname{sgrad} f_n$ попарно коммутируют, поскольку

$$\{\operatorname{sgrad} f_i, \operatorname{sgrad} f_j\} = \operatorname{sgrad}\{f_i, f_j\} = 0,$$

и являются полными. Это позволяет определить на многообразии M^{2n} действие Φ абелевой группы $\mathbb{R}^n$, порожденное сдвигами вдоль потоков $\operatorname{sgrad} f_1, \ldots, \operatorname{sgrad} f_n$. Это действие можно задать явной формулой. Пусть g_i^t — диффеоморфизм, сдвигающий все точки многообразия вдоль интегральных траекторий поля $\operatorname{sgrad} f_i$ на время t. Пусть $(t_1, \ldots, t_n)$ — точка $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\Phi(t_1, \ldots, t_n) = g_1^{t_1} g_2^{t_2} \ldots g_n^{t_n}.$$

Лемма . *Если подмногообразие T_ξ связно, то оно является орбитой действия Φ группы $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство.

Рассмотрим образ группы $\mathbb{R}^n$ в M при следующем отображении

$$A_x\colon (t_1, \ldots, t_n) \to \Phi(t_1, \ldots, t_n)(x),$$

где x — некоторая фиксированная точка из T_ξ. Поскольку поля $\operatorname{sgrad} f_i$ независимы, то это отображение является погружением, т. е. локальным диффеоморфизмом на образ. Итак, образ $\mathbb{R}^n$ (то есть орбита точки x) открыт в T_ξ. Если допустить, что подмногообразие T_ξ не является орбитой группы $\mathbb{R}^n$, то оно является объединением по крайней мере двух орбит. Но так как каждая из них открыта, то T_ξ оказывается несвязным, что противоречит условию. Лемма доказана. ■

Лемма . *Орбита действия группы $\mathbb{R}^n$, имеющая размерность n, является фактор-пространством $\mathbb{R}^n$ по некоторой решетке $\mathbb{Z}^k$. Если орбита компактна, то $k = n$ и орбита является n-мерным тором.*

Доказательство.

Каждая орбита $O(x)$ гладкого действия группы является фактор-пространством (= однородным пространством) группы по стационарной подгруппе H_x точки x. Ясно, что подгруппа H_x дискретна, поскольку отображение A_x локально является диффеоморфизмом. Напомним, что дискретная подгруппа не имеет точек накопления. В частности, внутри любого ограниченного множества всегда находится лишь конечное число элементов этой подгруппы. Утверждается далее, что H_x является решеткой $\mathbb{Z}^k$. Доказательство проведем индукцией по n.

Пусть $n = 1$. Возьмем на прямой ненулевой элемент e_1 из H_x, ближайший к нулю. Тогда все остальные элементы из H_x ему кратны. В самом деле, если элемент e некратен e_1, то для некоторого k имеем:

$$ke_1 < e < (k+1)e_1.$$

Но тогда элемент $e - ke_1$, ближе к нулю, чем e_1. Получили противоречие.

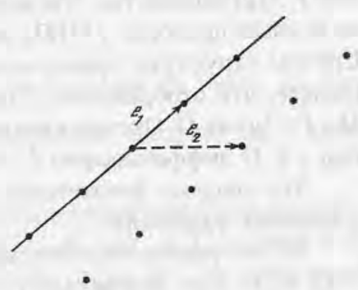

Рис. 1.1

Пусть $n = 2$. В качестве e_1 выберем ненулевой элемент, ближайший к нулю на плоскости $\mathbb{R}^2$ и рассмотрим порожденную им прямую $l(e_1)$ (рис. 1.1). Все элементы из H_x, лежащие на ней, кратны e_1. Далее возникают две возможности. Может оказаться, что все элементы из H_x уже лежат на прямой $l(e_1)$. Тогда доказательство завершается. Вторая возможность: существуют элементы группы H_x, не лежащие на $l(e_1)$. Тогда в качестве e_2 возьмем ненулевой элемент, ближайший к прямой $l(e_1)$. Легко видеть, что такой элемент существует. Утверждается, что все элементы группы H_x, оказавшиеся в плоскости, натянутой на e_1 и e_2, являются их линейными комбинациями с целыми коэффициентами. Допустим противное и пусть h — элемент из H_x, не разлагающийся по e_1 и e_2 с целыми коэффициентами. Тогда разобьем плоскость на параллелограммы, порожденные e_1 и e_2 (рис. 1.2). Элемент h оказывается в одном из них, причем не находится в вершине параллелограмма. Ясно, что сдвинув h на подходящую целочисленную комбинацию e_1 и e_2, мы обнаружим элемент h', более близкий к прямой $l(e_1)$, чем e_2. Получили противоречие.

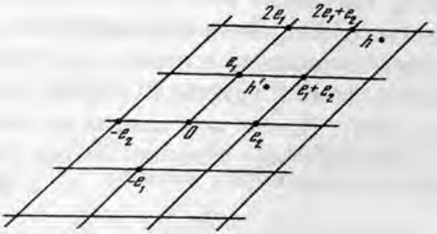

Рис. 1.2

Продолжая это рассуждение далее по индукции, мы и получаем, что существует базис $e_1, \ldots, e_k$ в подгруппе H_x такой, что каждый ее элемент является однозначной линейной комбинацией векторов базиса с целыми коэффициентами.

Если $k < n$, то фактор-пространство $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$ является цилиндром, т.е. прямым произведением $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, где T^k — k-мерный тор. В частности, только при $n = k$ орбита компактна, и тогда она диффеоморфна тору T^n.

Лемма доказана. ■

Следовательно, доказан пункт 2 теоремы .

3) Докажем, что окрестность U тора T_ξ является прямым произведением тора T^n на диск D^n.

Этот факт следует из следующей более общей и хорошо известной теоремы. Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение гладких многообразий и y из N — регулярное значение для f, то есть во всех точках прообраза $f^{-1}(y)$ ранг df равен размерности N. В частности, $\dim M \geqslant \dim N$. Пусть, кроме того, множество $f^{-1}(y)$ компактно. Тогда существует окрестность D точки y в N такая, что ее полный прообраз $f^{-1}(D)$ диффеоморфен прямому произведению $D \times f^{-1}(y)$. Причем структура прямого произведения согласована с отображением f в том смысле, что отображение f на $D \times f^{-1}(y)$ совпадает с естественной проекцией $D \times f^{-1}(y)$ на D. Отсюда следует, в частности, что каждое множество вида $f^{-1}(z)$ при $z \in D$ диффеоморфно $f^{-1}(y)$.

Эта теорема фактически является переформулировкой известной теоремы о неявных функциях.

Лемма . *В окрестности $U(T_\xi)$ форма ω является точной, т. е. существует 1-форма α такая, что $d\alpha = \omega$.*

Доказательство.

Эта лемма является следствием следующего общего утверждения. Пусть Y — подмногообразие в X, причем существует отображение $f\colon X \to Y \subset X$, гомотопное тождественному отображению $\mathrm{id}\colon X \to X$. Тогда замкнутая дифференциальная форма $\varkappa$ точна на X тогда и только тогда, когда точна форма $\varkappa|_Y$. В нашем случае, когда X — это окрестность тора Лиувилля, а Y — это сам тор Лиувилля, выполнено даже более сильное условие: $\omega|_{T_\xi} = 0$, поскольку тор T_ξ лагранжев.Поэтому ω точна.

т. е. постоянны на торах Лиувилля.

40

Теорема Лиувилля доказана. **(Последние пункты я здесь не доказывал, см. книгу).** ■

Комментарий. Отметим, что переменные действия $s_1, \dots, s_n$ могут быть заданы явной формулой. Пусть $U(T_\xi) = D^n \times T^n$ — окрестность лиувиллева тора. Фиксируя некоторый базис $e_1, \dots, e_n$ в решетке, отвечающей тору T_ξ, мы тем самым однозначно определяем набор базисных циклов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ в фундаментальной группе $\pi_1(T^n_\xi) = \mathbb{Z}^n$. По непрерывности эти циклы могут быть распространены на все лиувиллевы торы из рассматриваемой окрестности.

Сопоставим каждому тору Лиувилля набор вещественных чисел $s_1, \dots, s_n$ по следующей формуле

$$s_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} \alpha,$$

где α — дифференциальная 1-форма в окрестности $U(T_\xi)$ такая, что $d\alpha = \omega$ (обычно α называют формой действия). В результате в $U(T_\xi)$ возникает набор гладких функций

$$s_1 = s_1(f_1, \dots, f_n),$$

$$\dots$$

$$s_n = s_n(f_1, \dots, f_n),$$

которые совпадают (с точностью до константы) с переменными действия, построенными при доказательстве теоремы Лиувилля. Чтобы в этом убедиться достаточно рассмотреть в качестве α форму $\sum s_i \, d\varphi_i$ (см. доказательство теоремы).