Лекция 6

• Теорема. Рассм. симпл. мног. (M^{2n}, ω) и гладкое вект. поле v на M. Тогда поле v локал. гамильт., если оно сохраняет форму ω, т.е. $\frac{d\omega}{dv} \equiv 0$, т.е. $\frac{d\omega}{dt} \equiv 0$ вдоль v.

Д-во. Что такое $\frac{d\omega}{dv}$? рассм. группу сдвигов $g_t : M \to M$, тогда она действует на ω, т.е. $\omega \to g_t^* \omega$, где

$(g_t^*(\omega))(a, b) = \omega(dg_t(a), dg_t(b))$. здесь $a, b \in T_x M$;

$dg_t : T_x M \to T_{y = g_t(x)}(M)$ – дифференциал g_t.

• Итак, пусть v – поле, тогда $\frac{d\omega}{dv} = \frac{d}{dt}(g_t^* \omega)_{t=0}$.

докажем, что если $\frac{d\omega}{dt} \equiv 0$, то v – локал. гамильт.

• По теор. Дарбу в окрестн. $\forall$ точки x можно ввести такие локал. к-ты (p, q), что $\omega = dp \wedge dq = \sum_i dp_i \wedge dq_i$.

Пусть $v = (X_i(p,q), Y_i(p,q))$ в окрестн. точки x. Тогда

$$v : \begin{cases} \dot p_i = X_i \\ \dot q_i = Y_i \end{cases} \quad 1 \le i \le n \quad \Bigg| \quad \text{имеем: } \dot\omega_t = \frac{d\omega}{dt} = \left(\sum dp_i \wedge dq_i\right)^{\cdot} = \sum d\dot p_i \wedge dq_i + dp_i \wedge d\dot q_i =$$

$$= \sum dX_i \wedge dq_i + dp_i \wedge dY_i = \sum_{i,k} \frac{\partial X_i}{\partial p_k} dp_k \wedge dq_i + \frac{\partial X_i}{\partial q_k} dq_k \wedge dq_i + \frac{\partial Y_i}{\partial p_k} dp_i \wedge dp_k + \frac{\partial Y_i}{\partial q_k} dp_i \wedge dq_k =$$

$$= \sum \left(\frac{\partial X_i}{\partial p_k} + \frac{\partial Y_k}{\partial q_i}\right) \underset{(k<i)}{dp_k \wedge dq_i} + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial p_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial p_i}\right) \underset{(i<k)}{dp_i \wedge dp_k} + \left(\frac{\partial X_i}{\partial q_k} - \frac{\partial X_k}{\partial q_i}\right) \underset{(k<i)}{dq_k \wedge dq_i}$$

$$\equiv 0; \iff \frac{\partial X_i}{\partial p_k} + \frac{\partial Y_k}{\partial q_i} = 0; \quad \frac{\partial Y_i}{\partial p_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial p_i} = 0; \quad \frac{\partial X_i}{\partial q_k} - \frac{\partial X_k}{\partial q_i} = 0.$$

Теперь рассм. 1-форму $\alpha = \sum_i -Y_i dp_i + X_i dq_i$ и найдем

$$d\alpha = \sum_{i,k} -\frac{\partial Y_i}{\partial p_k} dp_k \wedge dp_i - \frac{\partial Y_i}{\partial q_k} dq_k \wedge dp_i + \frac{\partial X_i}{\partial p_k} dp_k \wedge dq_i + \frac{\partial X_i}{\partial q_k} dq_k \wedge dq_i = \sum \left(\frac{\partial X_i}{\partial p_k} + \frac{\partial Y_k}{\partial q_i}\right) \underset{(k<i)}{dp_k \wedge dq_i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial Y_i}{\partial p_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial p_i}\right) \underset{(i<k)}{dp_i \wedge dp_k} + \left(\frac{\partial X_i}{\partial q_k} - \frac{\partial X_k}{\partial q_i}\right) \underset{(k<i)}{dq_k \wedge dq_i} = 0, \text{ т.к.}$$

эти же коэфф. появились выше как условие: $d\omega / dv \equiv 0$.

Итак, если $\frac{d\omega}{dv} = 0$, то $\Rightarrow d\alpha = 0$.

• но в силу леммы Пуанкаре, локально любая замкн. форма точна, т.е.

в данном случае $\exists$ гладк. ф-я $H(p,q)$ на окрестн. $U(x)$ точки x, что: $\alpha = dH$, т.е. $\alpha = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i =$
$= \sum -Y_i dp_i + X_i dq_i$, т.е. $\Longleftrightarrow X_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$; $Y_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$, что и означает, что v — локал. гамил. поле. Чтрд.

- Рассм. гамильт. вект. поля на M^2, где M^2 ориент. и ω — форма площади.
- Теор. Вект. поле v на M^2 локал. гамильтон. $\Longleftrightarrow$ оно несжимаемо, т.е. $\operatorname{div}(v) = 0$.

Д-во. Докажем для случая локал. евклид. метрики на M^2. Пусть обл. $U \subset \mathbb{R}^2(x,y)$, $v = (P, Q)$; $\omega = dx \wedge dy$ в декарт. к-тах x, y. Тогда $\operatorname{div} v = P_x + Q_y$;

$\omega(a, b) =$ площадь $\Pi(a,b)$, где $\Pi(a,b) =$  параллелограм

Тогда по предыдущ. теореме v — локал. гамилот. $\Longleftrightarrow$ v сохраняет форму ω, т.е. площадь $\Pi(a,b)$. Рассмот. гладк. отобр. $f_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, где f_ε — сдвиг вдоль интегр. траектории поля v. Тогда $f_\varepsilon : (x,y) \to (x + \varepsilon P + \ldots ; y + \varepsilon Q + \ldots)$ и

пл.$(df_\varepsilon \Pi) =$ площ. $\Pi \cdot \det($матр. Якоби отобр. $f_\varepsilon)$, а так как площ. $(df_\varepsilon \Pi) =$ площ. $\Pi = \omega(a,b)$, то f_ε сохран. площ. $\Longleftrightarrow$ $\det(df_\varepsilon) = 1$. Ищем df_ε:

$$df_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon P_x & \varepsilon P_y \\ \varepsilon Q_x & 1 + \varepsilon Q_y \end{pmatrix}; \quad \det(df_\varepsilon) = 1 + \varepsilon(P_x + Q_y) + \ldots \equiv 1,$$

т.е. $\Longleftrightarrow P_x + Q_y = 0 = \operatorname{div}(v)$.

Чтрд.

- Примеры локал. гам. вект. полей $\equiv$ несжим. полей на $\mathbb{R}^2$.

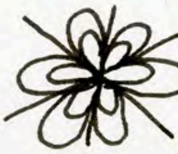
Рассм. компл. анал. ф-ю $f(z) = a(x,y) + i b(x,y)$ и два вект. поля: $v = \operatorname{grad}(a)$, $w = \operatorname{grad}(b)$; $v = (a_x, a_y)$ и $w = (b_x, b_y)$. Условия Коши-Римана: $a_x = b_y$; $a_y = -b_x$.
Отсюда: поля v и w ортогональны на $\mathbb{R}^2$, т.к. $\langle v, w \rangle = a_x b_x + a_y b_y = 0$ в силу усл. Коши-Римана. В декар. коорд. $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а потому $\Omega v = w = (-a_y, a_x)$, т.е. $w = \operatorname{sgrad}(a)$ и $v = \operatorname{sgrad}(b)$, т.е. v и w — лок. гамил.

- Утв. Интегралом v явл. ф-я $b(x,y)$, а интегралом w явл. ф-я $a(x,y)$; т.е. $v(b) = 0$ и $w(a) = 0$.

Д-во. $v(b) = v_x b_x + v_y b_y = a_x b_x + a_y b_y = 0$; и $w(a) = 0$, т.е. линии тока поля v — это линии уровня $b(x,y)$, а линии тока поля w — это линии уровня $a(x,y)$.

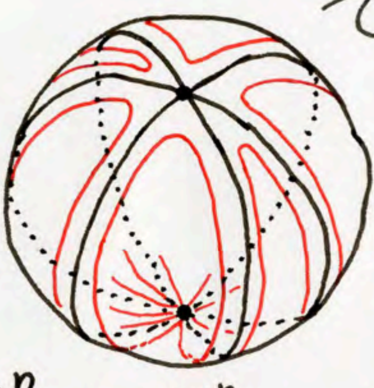
• примеры. 1. $f = z^n = r^n \cos n\varphi + i r^n \sin n\varphi$, где $n>0$. Тогда $a = r^n\cos(n\varphi)$, $b = r^n\sin(n\varphi)$, т.е. линии тока таковы:

ноль порядка $n>0$. 2. $f = z^{-n}$, $n>0$, полюс поряд. n. здесь $a = r^{-n}\cos(n\varphi)$, $b = r^{-n}\sin(n\varphi)$, т.е.



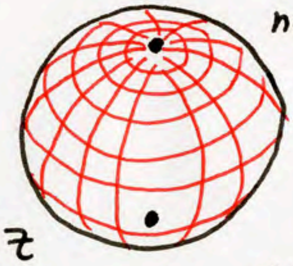
3. $f = \ln(z) = \ln r + i\varphi$, т.е.

Эти потоки можно изобразить на сфере $S^2 = \mathbb{C}^1(z) \cup \infty$, т.е.



z^n и z^{-n}

$\ln z$



параллели и мерид. на сфере.

4. ф-я Жуковского $f = z + \frac{1}{z}$; обтекание шара (диска)

Задача: нарисовать на сфере.

• Скобка Пуассона. Пусть f и g — ф-ции на симпл. мног. (M, ω).

$$\{f,g\} = \omega(\mathrm{sgrad}\, f, \mathrm{sgrad}\, g) = \sum \omega_{ij} (sf)^i (sg)^j =$$

обозначим sgrad f через sf; и $\Omega^{-1} = (\omega^{ij})$ (индексы вверху)

$$= \sum \omega_{ij}\, \omega^{i\alpha} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\, \omega^{j\beta} \frac{\partial g}{\partial x^\beta} = \sum \delta^\alpha_j\, \omega^{j\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g}{\partial x^\beta} = \omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g}{\partial x^\beta}.$$

• $\{f,g\}$ — скобка Пуассона: $\sum \omega^{\alpha\beta}\, \partial f/\partial x^\alpha\, \partial g/\partial x^\beta$.

Здесь мы воспольз. тем, что ω — невырожд. а потому $\exists$ матр. $\Omega^{-1} = (\omega^{ij})$.

• Утв. $\{f,g\} = (\mathrm{sgrad}\, f) g = -(\mathrm{sgrad}\, g) f$. Вытекает из определ. sgrad, т.к. $\{f,g\} = \omega(sf, sg) = (sf)g = (-sg)f$.

• Теор. 1) Скобка пуасс. билин. опер. (над $\mathbb{R}$) и кососиммет.

2) формула Лейбница: $\{h, f\cdot g\} = \{h,f\}\cdot g + f\cdot\{h,g\}$;

3) тождество Якоби: $\{\{f,g\},h\} + \{\{h,f\},g\} + \{\{g,h\},f\} \equiv 0$.

Д-во. Св-во 1 вытекает из билин. и кососимм. формы ω.

св-во 2: $\{h, f\cdot g\} = (sh)(f\cdot g) = ((sh)f)g + f((sh)g) =$

$= \{h,f\}g + f\{h,g\}$, чтд.

св-во 3 сложнее. Именно тут используется, что $d\omega = 0$. Сошлемся на изв. формулу Картана:

$$(d\omega)(\xi,\eta,\zeta) = \xi\,\omega(\eta,\zeta) - \omega([\xi,\eta],\zeta) + \circlearrowleft$$ циклически еще два раза

(без д-ва)

Положим: $\xi = \operatorname{sgrad} f = sf$; $\eta = sg$; $\zeta = sh$. Так как $d\omega = 0$, то:

$$0 = \underbrace{sf(\underbrace{\omega(sg, sh)}_{\{g,h\}})}_{(sf)\{g,h\} = \{f,\{g,h\}\}} - \underbrace{\omega([sf, sg], sh)}_{-[sf,sg]h = -sf(sg(h)) + sg(sf(h)) = -\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{f,h\}\}} + \text{G}$$

$$\{f,\{g,h\}\} \quad -\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{f,h\}\} + \text{G} = 0$$

сокращаются; а это и есть тожд-во Якоби.

Чтд.

- Дополн. общая формула Картана:

$$\left[\begin{array}{l} d\omega(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} a_i \,\omega(a_1 \ldots \hat{a}_i \ldots a_{n+1}) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([a_i, a_j], a_1 \ldots \hat{a}_i \ldots \hat{a}_j \ldots a_{n+1}). \end{array}\right.$$

без д-ва.

- Св-ва скобки Пуассона на симпл. мног. (M, ω).
Рассм. пр-во $C^\infty(M, \omega)$ глад. ф-й с билин. операц. $\{\,,\}$, т.е. $f, g \to \{f, g\}$. •<u>Теорема</u>. Пр-во $C^\infty(M, \omega)$ превращается в алг. Ли, где $[\,,] = \{\,,\}$. Д-во сразу вытекает из предыдущ. теор. и т. к. $\{\,,\}$ билин., кососимм., и т-во Якоби. Чтд, так как это и есть определение алг. Ли.

- Пусть $V(M)$ – линей. ∞-мерное пр-во всех гладк. вект. полей на M. Это – тоже алг. Ли с операц.– коммутатор вект. полей: лин. дифф. опер. $\simeq$ вект. поля,
$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$, где X, Y – лин. дифф. опер.
т. е. $[X, Y]^k = \sum_i X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x^i}$. Итак, имеем две алг. Ли:
$C^\infty(M)$ и $V(M)$. Рассмот. отобр. $\alpha : C^\infty(M) \to V(M)$, где $\alpha(f) = \operatorname{sgrad} f$.

- <u>Теор.</u> 1) α – гомоморф. алг. Ли, т.е. $\alpha\{f, g\} = [sf, sg] = [\alpha f, \alpha g]$.

2) $\operatorname{Im}(\alpha) = \operatorname{Im}(C^\infty(M))$ в $V(M)$ – это все глобал. гамильт. вект. поля на M; обозначим: $\operatorname{Ham}(M)$; т.е. $\alpha\, C^\infty(M) = \operatorname{Ham}(M)$.

3) Если M – связно, то $\operatorname{Ham}(M) \simeq C^\infty(M)/\mathbb{R}^1$.

4) Пусть $\overset{loc}{\operatorname{Ham}}(M)$ – пр-во всех локал. гамил. полей на M. Тогда: $\operatorname{Ham}(M) \subset \overset{loc}{\operatorname{Ham}}(M)$ и $\operatorname{Ham}(M)$ явл. идеалом в $\overset{loc}{\operatorname{Ham}}(M)$.

- <u>Д-во</u>. 1) α – гомоморф.? т.е. $s\{f, g\} \overset{?}{=} [sf, sg]$, где $sf = \operatorname{sgrad} f$. Рассм. $\forall$ гладк. ф-ю h на M. Надо проверить:

$(s\{f,g\})h \stackrel{?}{=} [sf, sg]h$. Имеем:

$(s\{f,g\})h = \{\{f,g\},h\} =$ (по тожд. Якоби) $= -\{\{h,f\},g\} - \{\{g,h\},f\} = \{f,\{g,h\}\} - \{g,\{f,h\}\} =$
$= sf(sg(h)) - sg(sf(h)) = [sf, sg]h$. Чтрд.

② $Im(\alpha) = Ham(M)$ — по определению. Далее: $Ham(M) = C^\infty(M)/Ker\,\alpha$.

③ Рассм. $Ker(\alpha)$; тогда $f \in Ker\,\alpha \iff sgrad\,f = 0$, т.е. все $\partial f/\partial x_i = 0$, а так как M связно, то $f = const$; т.е. $Ker\,\alpha = (const) = \mathbb{R}^1$. Чтрд.

④ Докажем, что $Ham(M)$ – идеал в $\overset{loc}{Ham}(M)$. Рассм. поля v и w из $\overset{loc}{Ham}(M)$, т.е. $v = s(f_U)$ и $w = s(g_U)$ на $\forall$ открытой малой окрестн. $U \subset M$. Операция $s = sgrad$ определена всюду на M, глобально, т.к. форма ω задана глобально. Надо док., что $[v, w] \in Ham(M)$, т.е. $Ham(M)$ – идеал. Имеем:

$[v, w] = [sf_U, sg_U] = s\{f_U, g_U\} = sgrad\,\omega(sf_U, sg_U) =$
$= sgrad\,\omega(v, w) = sgrad\,H$, где ф-я $H = \omega(v, w)$ — глобально определена, т.к. поля v и w глобально определены и гладки.

Чтрд.

• Теор. 1) Пусть $v = sgrad\,H$. Тогда ф-я f явл. интегралом v (т.е. $v(f) = 0$) $\iff \{H, f\} = 0$.
2) Если f и g — два интеграла поля $v = sH$, то скобка $\{f, g\}$ — тоже интеграл v.

Д-во.

① $v(f) = (sgrad\,H)f = \{H, f\}$; $v(f) = \{H, f\} = 0$. В частности, ф-я H — всегда интеграл $v = sH$, т.к. $\{H, H\} = 0$.

② $(sgrad\,H)\{f,g\} = \{H, \{f,g\}\} = -\{g, \{H,f\}\} - \{f, \{g, H\}\}$
в силу т-ва Якоби и $\equiv 0$, т.к. $\{H, f\} = \{g, H\} = 0$. Чтрд.

• Однако эта теор. редко позволяет находить новые интегралы, т.к. часто скобка $\{f, g\}$ функционально зависима с f и g, а потому новый независимый интеграл не получается.