# Лекция 5

Симплектич. многообразия.

• **Опред.** Гладк. мног. $M^{2n}$ называ. симплектич., если на нем задана симплек. структура, т.е. внешняя дифф. 2-форма $\omega = \sum \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$, где $d\omega = 0$ (т.е. форма $\omega$ – замкнута), и $\omega$ – невырожд., т.е. $\det \Omega \neq 0$, где $\Omega = (\omega_{ij})$, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

• Напоминание о формах: $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, т.е. умнож. кососимм. Условие замкнутости:

$$d\omega = \sum \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k}\, dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = 0,$$ что эквивал. условию:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} = 0, \quad \forall i, j, k.$$ Это условие можно взять за определ. замкн. формы.

В самом деле, соберем мономы в $d\omega$ с произведением $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$, т.е. $\sim (i, j, k)$; тогда:

$$+\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} \cdot dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \\ \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^j} \cdot dx^j \wedge dx^i \wedge dx^k \\ \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} \cdot dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j \end{array}\right| = \left(\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k}\right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

Чтд.

• **Теор. Дарбу.** $(M^{2n}, \omega)$ – симпл. мног. Тогда у $\forall$ точки $x \in M$ всегда $\exists$ откр. окрестн. $U(x)$, а в ней $\exists$ локальн. регулярн. координаты $(p, q) = (p_1 \dots p_n, q_1 \dots q_n)$ такие, что $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$, т.е. $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ в $\forall$ точке из $U(x)$.

Т.е. симпл. структура приводится к канонич. виду сразу в целой окрестн. точки $x$.

В этом – важное отличие от риманов. метрики $ds^2 = \sum g_{ij}\, dx^i dx^j$.

Например, риман. метр. с $\neq 0$ тензором кривизны не приводится к виду $E$ в целой окрестности.

• Полное д-во теор. Дарбу см. ниже. А пока для $n = 1$, т.е. на $M^2$:

$$\omega = f(x,y)\, dx \wedge dy \overset{?}{=} dp \wedge dq = dp(x,y) \wedge dq(x,y) = (p_x dx + p_y dy) \wedge (q_x dx + q_y dy) = (p_x q_y - p_y q_x)\, dx \wedge dy,$$ т.е. получили ур-е: $f = p_x q_y - p_y q_x$. Решений много. Например: $q = y$, тогда $f = p_x$ и $p(x,y) = \int_0^x f(x,y)\, dx + \text{const}$. Чтд.

• Градиент и косой градиент. См. ниже.

• Задание формы $\omega$ на $M$ означает, что задано кососимм. скаляр. произведение: $\langle a, b \rangle = \sum \omega_{ij} a^i b^j$, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$; $\langle a, b \rangle = -\langle b, a \rangle$.

Риманова метрика (симмет. скаляр. произвед.)

Градиент

$v$ = grad $f$, если для $\forall w$: $\langle w, \mathrm{grad} f\rangle \doteq w(f)$, т.е. производная $f$ вдоль $w$. Это – определ. градиента. Здесь $w$ – произв. вект. поле на $M$. Тогда

$$\sum g_{ij} w^i (\mathrm{grad} f)^j = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} w^i$$

т.е. $\sum g_{ij} (\mathrm{grad} f)^j = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, т.е.

$$(\mathrm{grad} f)^i = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j},$$ где

$(g^{ij}) = G^{-1}$, обратн. матр.

Симплект. форма $\omega$ (кососимм. скаляр. произвед.)

Косой градиент

$v$ = sgrad $f$, если для $\forall w$:

$\omega(w, \mathrm{sgrad} f) = w(f)$, т.е. производная $f$ вдоль $w$. Это – определ. косого градиента. Т.е.

$$\sum \omega_{ij} (\mathrm{sgrad} f)^j = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} w^i,$$

т.е. аналогично градиенту имеем:

$$(\mathrm{sgrad} f)^i = \sum_j \omega^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j},$$ где

$(\omega^{ij}) = \Omega^{-1}$, обратная матр. к $\Omega = (\omega_{ij})$ – невырожд.

---

• <u>Опред.</u> Вект. поле $v$ на симпл. мног. $M^{2n}$ называется гамильтоновым, если $v$ = sgrad($H$) для некотор. гладкой ф-ции $H$ на $M$. Тогда $H$ назыв. гамильтонианом.

• по теор. Дарбу у $\forall x \in M$ $\exists$ откр. окрест. $U(x)$, в которой можно ввести канонич. к-ты (координ. Дарбу) $(p, q) = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$, в которых $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Тогда гамильтон. вект. поле $v$ примет вид:

$v = \mathrm{sgrad}\, H = (-\partial H/\partial q_1, \ldots, -\partial H/\partial q_n; \partial H/\partial p_1, \ldots, \partial H/\partial p_n)$, т.е. $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$; $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$, $1 \le i \le n$. Это – канонич. форма гамильтон. ур-й.

• Если на $M$ одновремен. заданы как риман. метр. $(g_{ij}) = G$, так и симпл. структура $(\omega_{ij}) = \Omega$, то имеем:

$w(H) = \langle w, \mathrm{grad} H\rangle = \omega(w, \mathrm{sgrad} H)$, т.е.

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_j g_{ij} (\mathrm{grad} H)^j = \sum_j \omega_{ij} (\mathrm{sgrad} H)^j.$$

• Если $M = \mathbb{R}^{2n}$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$, то $(\mathrm{grad} H)^i = \sum_j \omega_{ij} (\mathrm{sgrad} H)^j$, т.е. grad $H = \Omega$(sgrad $H$), т.е. sgrad $H = \Omega^{-1}$(grad $H$).

• Если $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ – канонич., то grad $H = \Omega$(sgrad $H$) и sgrad $H = -\Omega$(grad $H$). Здесь grad $H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \ldots \frac{\partial H}{\partial p_n}, \frac{\partial H}{\partial q_1} \ldots \frac{\partial H}{\partial q_n}\right)$.

• Важно: многие законы физики и механики записываются в виде гамильтон. ур-й:

$\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$; $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$, $1 \le i \le n$. Поэтому исследование таких ур-й важно и популярно.

• Примеры симпл. мног-й.

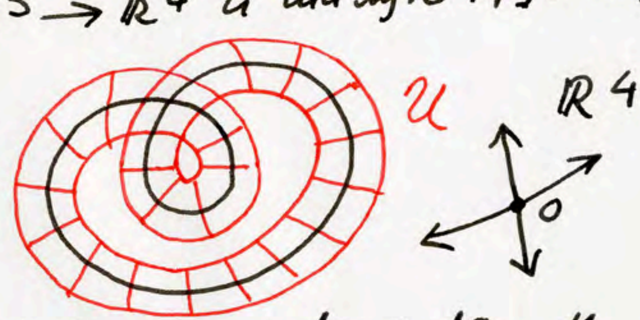
1) $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$, т.е. $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$.

2) $M^2$ — двумер. ориентир. глад. мног, где $\omega = f\, dx \wedge dy$ — форма площади на ориент. $M^2$, где $f > 0$. Эта 2-форма замкнута и невырожд., т.к. $f(x, y) > 0$. Заменой локал. к-т можно привести к виду $\omega = dp \wedge dq$; см. д-во выше.

3) Утв. Пусть $M^3$ — глад. комп. ориент. замкн. мн-е. Тогда по теор. Уитни (усиление) $M^3$ гладко погруж. в $\mathbb{R}^4$; $\exists$ $\lambda : M^3 \to \mathbb{R}^4$.

Утв. Прямое произв. $M^3 \times I$ явл. симпл. многообр.

Д-во. Рассм. погруж. $\lambda : M^3 \to \mathbb{R}^4$ и малую трубчатую окрестн. $\mathcal{U}(\lambda M^3)$ в $\mathbb{R}^4$. Ясно, что $\exists$ гладкое погруж. $\mu : M^3 \times I \to \mathcal{U}(\lambda M^3)$, см. рис. Рассм. в $\mathbb{R}^4$

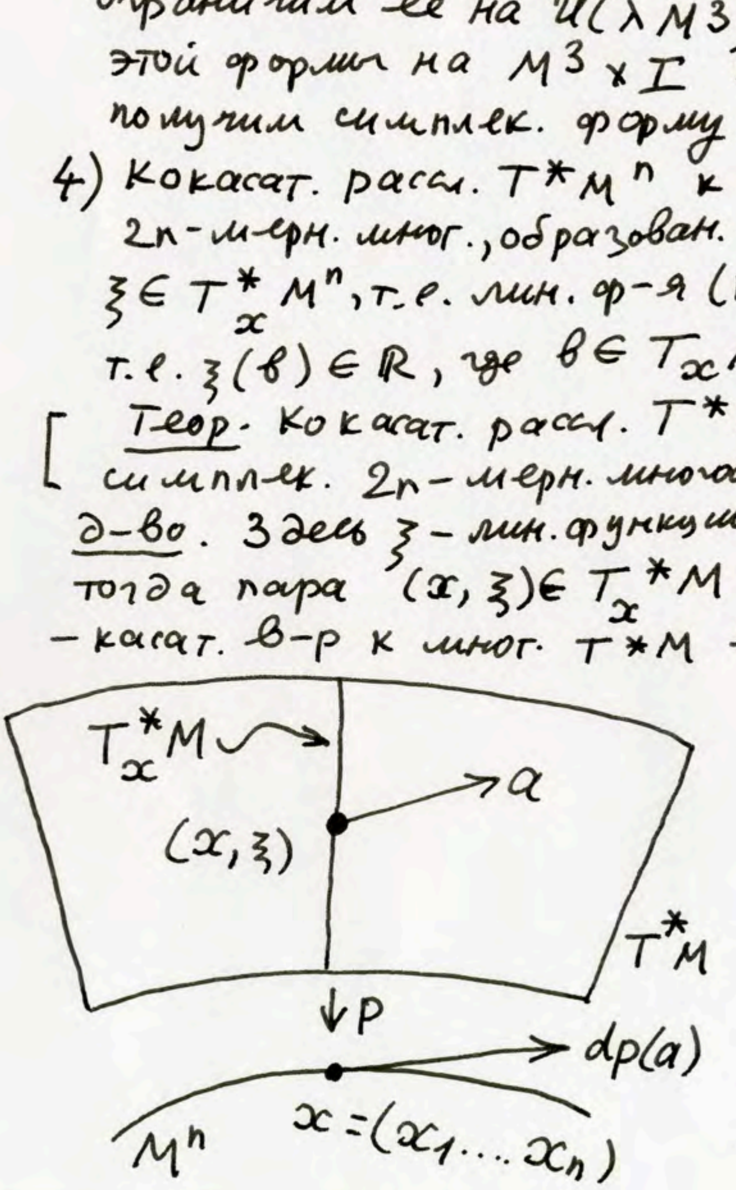



канонич. форму $\omega = dp \wedge dq = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$ и ограничим ее на $\mathcal{U}(\lambda M3)$, после чего возьмем прообраз этой формы на $M^3 \times I$ при отображ. $\mu$. Очевидно получим симплек. форму на $M3 \times I$. Чтд.

4) Кокасат. рассл. $T^*M^n$ к гладк. мног. $M^n$ — это гладкое $2n$-мерн. мног., образован. парами $(x, \xi)$, где $x \in M^n$, а $\xi \in T^*_x M^n$, т.е. лин. ф-я (ковектор) на касат. пр-ве $T_x M$, т.е. $\xi(b) \in \mathbb{R}$, где $b \in T_x M$ — касат. в-р.

[ Теор. Кокасат. рассл. $T^*M^n$ для $\forall$ гладк. $M^n$ является симплек. $2n$-мерн. многообр. Это — важный класс мног.

Д-во. Здесь $\xi$ — лин. функционал на $T_x M$; пусть $b \in T_x M$; тогда пара $(x, \xi) \in T^*_x M$ и пусть $a \in T_{(x,\xi)}(T^*M)$ — касат. в-р к мног. $T^*M$ в точке $(x, \xi)$; пусть

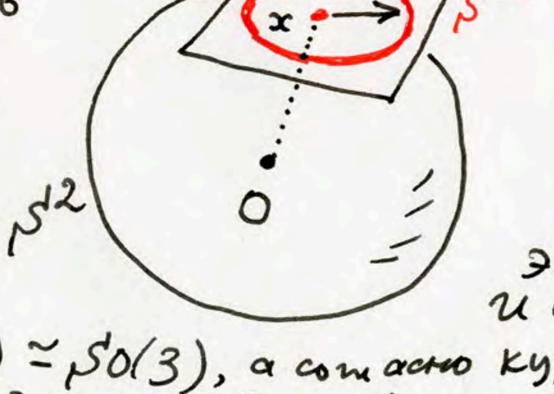



$p : T^*M \to M$ — естествен. проекция, $p(x, \xi) = x \in M$. Тогда дифференциал $dp : T_{(x,\xi)}(T^*M) \to T_x M$. Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — локал. регул. к-ты в окрестн. точки $x \in M$ и пусть $x(t) = (x_1(t) \dots x_n(t))$ — гладк. кривая в $M$ такая, что:

$x(0)=x$ и $dx^i/dt\big|_{t=0}=(dp(a))^i$, т.е. $\dot{x}(0)=dp(a)$.
Здесь $dp(a)$ — образ в-ра $a$ при отобр. $T_{(x,\xi)}(T^*M)\to T_xM$.
Рассмот. 1-форму $\alpha$ на мног. $T^*M$, т.е. лин. дифф. форма $\alpha: T_{(x,\xi)}(T^*M)\to\mathbb{R}$, где $\alpha(a)=\xi(dp(a))$, т.к. $\xi$ — лин. ф-я на $T_xM$, т.е. имеет вид $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in T_x^*M$.
Тогда $\alpha(a)=\sum\limits_i \xi_i\,(dp(a))^i=\sum\limits_i \xi_i\,(dx^i/dt)\big|_{t=0}$, т.е. $\alpha=\sum\limits_{i=1}^n \xi_i\,dx_i$. Положим $\omega=d\alpha=\sum d\xi_i\wedge dx_i$. Это и есть симплек. структура на $T^*M$, т.к. $d\omega=d(\sum d\xi_i\wedge dx_i)=0$, т.к. $d^2\equiv 0$ (св-во внешнего дифференциала), и матрица $\Omega$ формы $\omega$ постоянна и имеет вид $\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix}$, т.е. невырождена.
Чтд.

• Коммент. Наряду с кокасат. рассл. $T^*M$ рассматривают и касат. рассл. $T_xM=\{(x,b)$, где $x\in M,\ b\in T_xM\}$. Это тоже $2n$-мерн. мног. и оно диффеоморфно кокасат. рассл. $T^*M$.
Важное отличие в том, что на $T^*M$ всегда есть симплект. форма $\omega$, а на $T_*M$ ее в "общем случае" нет. Поэтому большую роль играют в симпл. топологии и гамилот. геом. именно кокасат. рассл. (как симплек. мног.).

• Примеры касат. расслоений.
  • $T_*S^1$ гомеоморфно цилиндру $S^1\times D^1$ ($D^1=I$ — интервал)
  • Утв. $T_*S^2\neq S^2\times\mathbb{R}^2$, т.е. не гомеоморф. прямому произвед. В самом деле. рассм. расслоение единичных векторов к 2-сфере, т.е. $S(T_*S^2)=\{(x,b),\ x\in S^2,\ |b|=1\}$.


Тогда задание $(x,b)$ однозначно определяет 3-репер в $\mathbb{R}^3$: $(x, b, \underbrace{x\times b}_{\text{вект. произв.}})$, т.е. элемент группы $SO(3)$.
И обратно.

т.е. $S(T_*S^2)\simeq SO(3)$, а согласно курсу дифф. геом. и топол.: $SO(3)\simeq\mathbb{R}P^3$, а $\mathbb{R}P^3\neq S^1\times S^2$. Поэтому и $T_*S^2\supset$ $\supset S(T_*S^2)$ не явл. прямым произв. Чтд.
$S(T_*S^2)$ = мн-во всех положит. ориентир. ортобазисов в $\mathbb{R}^3$, а это и есть группа $SO(3)$.

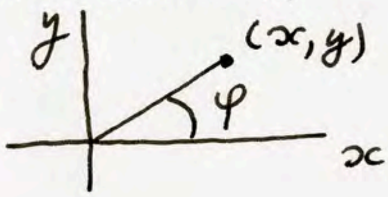
• Вернемся к гамильт. вект. полям на симпл. $M^{2n}$.

Опред. Гладк. вект. поле $v$ на $M^{2n}$ назыв. локально гамильтон., если $\exists$ откр. покрытие $M=\cup\, \mathcal{U}_i$, где на каждом откр. $\mathcal{U}_i$ $\exists$ гладк. ф-я $H_i$ такая, что $v\big|_{\mathcal{U}_i} = \mathrm{sgrad}\, H_i\big|_{\mathcal{U}_i}$, т.е. $\{H_i\}$ — это локал. гамильтонианы.

• Важно, что эти локал. ф-ции $\{H_i\}$ могут "не сшиваться" в одну гладк. однозначную ф-ю $H$ на всем $M^{2n}$.

• Утв. $\forall$ глобал. гамильтон. поле $v=\mathrm{sgrad}\, H$ явл. локально гамильт., но "не наоборот", т.е. $\exists$ локально гамильтон., но не глобал. гамильт. вект. поля.

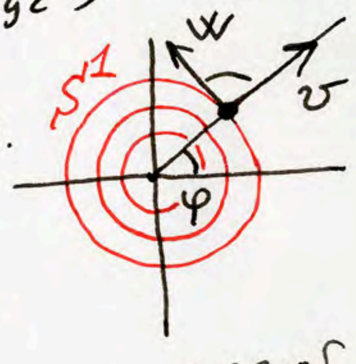
Д-во. В одну сторону — очевидно. Обратно: построим пример. Рассм. симплект. $M^2=\mathbb{R}^2\setminus 0$ с симпл. формой $\omega = dx\wedge dy$ и вект. поле $v=\mathrm{sgrad}(\varphi)$, где $\varphi=\varphi(x,y)$ — полярн. угол на плоскости:




$\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$; $\Omega = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Тогда

$$w=\mathrm{grad}\,\varphi = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$ и т.к. $\mathrm{grad}\,\varphi = \Omega(\mathrm{sgrad}\,\varphi)$, то:

$$v = \mathrm{sgrad}\,\varphi = \left(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2}\right) = r/|r|^2,$$ т.е.




здесь $w$ — поле вращения вокруг начала к-т на $\mathbb{R}^2$, а $v$ — радиальное поле.

• Утв. Это поле $v$ на $\mathbb{R}^2\setminus 0$ явл. локально гамильт., но не глобал. гамильт.

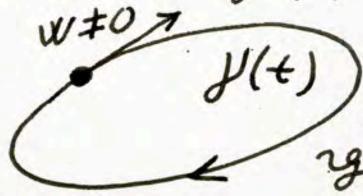
Д-во. Локал. гамильт. мы доказали. Докажем, что — не глоб. гамильт. Пока мы видим только, что ф-я $\varphi(x,y)$ не явл. глоб. однозн. ф-ей на $\mathbb{R}^2\setminus 0$. Но может быть, $\exists$ другая гладк. ф-я $\psi$ на $\mathbb{R}^2\setminus 0$ такая, что $v=\mathrm{sgrad}\,\psi$. Оказыв., такой ф-ции $\psi$ нет. Докажем.

Утв. Пусть $\Omega = E$ на $\mathbb{R}^2\setminus 0$; тогда поле $v=\mathrm{sgrad}\,H$ глобально гамильт., $\Longleftrightarrow$ поле $w=\mathrm{grad}\,H$ — глоб. потенциально. Это вытекает из того, что $\mathrm{grad}\,H = \Omega(\mathrm{sgrad}\,H)$, т.е. $w=\Omega(v)$. В нашем примере у поля $w=\mathrm{grad}\,H$ есть замкн. интегр. траектория (окружн.). В данном примере вообще все интегр. траектории поля $w$ замкнуты. Докажем, что потенц. поле не может иметь замкн. интегр. траекторий, отличных от точки.

Теор. Рассмотр. риман. многообр. $(M, g_{ij})$ и пусть $\langle\,,\rangle$ — симм. скал. произв., т.е. $\langle a, b\rangle = \sum g_{ij}a^i b^j$. Пусть гладк. вект. поле $w$ на $M$ имеет хотя бы одну замкн. интегр. траект. (т.е. периодич. решение), на которой $\exists$ точка, где $w\neq 0$.

Тогда поле $w$ — не глобал. потенц. на $M$.

Д-во. Допус. против. Пусть $\exists$ гладк. однозн. на всем $M$ ф-я $H$ такая, что $w = \mathrm{grad}\, H$. Тогда рассм. дифференциал $dH$ на замкн. интегр. траект. $\gamma$ :




$\gamma = (x(t))$, $x(0)=x(T)$, где $T$ — период. и $\dot{x}(t) = w(x(t))$. Имеем:

$$\int_\gamma dH = \int_0^T dH(x(t)) = H(x(T)) - H(x(0)) = 0,$$

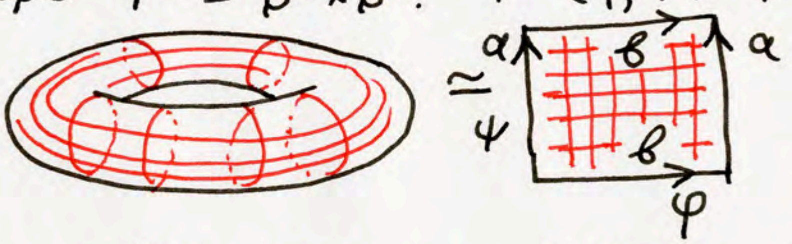
т.к. $H$ — однозн. ф-я и $x(0)=x(T)$. Далее: $\frac{\partial H}{\partial x^i} = \sum g_{ij}(\mathrm{grad}\, H)^j$;

$$\int_\gamma dH = \int_0^T \sum \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}\,dt = \int_0^T \sum g_{ij}(\mathrm{grad}\, H)^j \frac{dx^i}{dt}\,dt = \int_0^T \sum g_{ij}\, w^j w^i\, dt = \int_0^T |w|^2\, dt > 0,$$

т.к. хотя бы в одной точке $w \neq 0$ на $\gamma$. Противоречие. Чтд.

• Возвращ. к нашему примеру: $w$ на $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ имеет замкн. интегр. траект., а потому $w$ не потенц., а потому $v = \mathrm{sgrad}\, H$ не глобал. гамильтоново. Чтд.

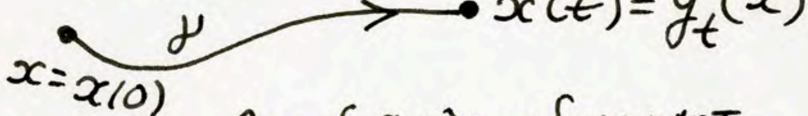
• Такие примеры есть и на компакт. многообр. Например, на торе $T^2 = S^1 \times S^1$. $T^2(\varphi,\psi) = S^1(\varphi) \times S^1(\psi)$.




Рассм. два вект. поля $v = (0,1)$ и $w = (1,0)$, т.е. поля = потоки, текущие по параллелям тора и по меридианам.

На модели тора на квадрате $aba^{-1}b^{-1}$ эти поля — это плоские паралл. потоки вдоль координ. линий. Оба эти поля имеют замкн. интегр. траектории. Потому они — не глобал. потенциальны (как и на $\mathbb{R}^2$). А т.к. $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, то оба поля и не глоб. гамильт., хотя — они локал. гамильтон.

• сдвиги вдоль траект. вект. поля на $M$. Пусть $v$ — вект. поле и $x(t)$ — его интегр. траектории, т.е. $\dot{x} = v(x(t))$. Рассм. сдвиги $g_t : M \to M$, где $g_t(x) = x(t)$ вдоль траект. $\gamma$, где $x = x(0)$ :




Тогда $g_t$ — это диффеом. $M$ на себя. Все $\{g_t\}$ образуют однопарам. группу $G = \{g_t\}$, действ. на $M$. Группа сдвигов.