Лекция 4

• Группа симплек. линей. веществ. преобраз. в $\mathbb{R}^{2n}$.
Обознач.: $Sp(n, \mathbb{R})$. Определ.: $g: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, сохраняет форму $(\,,\,)$, т.е. $(ga, gb) = (a, b)\ \forall a, b$.
Т.е.: $g \Omega g^T = \Omega$, где $\Omega = I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ — канонич. симплек. структура.

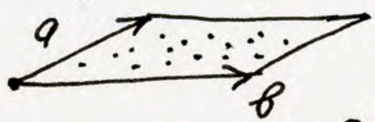
т.е.: $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, отсюда имеем:

$-BA^T + AB^T = 0$, $-BC^T + AD^T = E$, $-DA^T + CB^T = -E$, $-DC^T + CD^T = 0$. Это — квадратичные ур-я на элементы группы $Sp(n, \mathbb{R})$. В явном простом виде они не решаются.

• но если g близко к единице, то решаются: пусть $g = E + \varepsilon X$, тогда $(E + \varepsilon X) I (E + \varepsilon X^T) = I$, отсюда:
$I + \varepsilon I X^T + \varepsilon X I + \varepsilon^2 X X^T = I$, т.е. $I X^T + X I = 0$,
если $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, то отсюда получаем: $B^T = B$, $C^T = C$, $D^T = -A$,
т.е. $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}$, где B и C — симм. матрицы.

• Пример. рассм. $Sp(1, \mathbb{R})$ на $\mathbb{R}^2$.
__Утв.__ $Sp(1, \mathbb{R})$ изоморфна $SL(2, \mathbb{R})$, а топологически $Sp(1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^2 \times S^1$, в частности $\pi_1(Sp(1, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}$.

__Д-во.__ На $\mathbb{R}^2$ имеем: $(a, b) = a^1 b^2 - a^2 b^1 = \det \begin{pmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{pmatrix} =$
$=$ площадь $\Pi(a, b)$, где $\Pi(a, b)$ — параллелогр., натянутый на в-ры $a = (a^1, a^2)$ и $b = (b^1, b^2)$:



Итак, $g \in Sp(1, \mathbb{R})$ если и только если $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ сохраняет площадь $\Pi(a, b)$, т.е. $\det g = 1$, т.к. площадь $\Pi(ga, gb) = \det g \cdot$ площ.$\Pi(a, b)$.
Т.е. $g \in SL(2, \mathbb{R}) = \{ g : \det g = 1 \}$. Далее $SL(2, \mathbb{R}) \simeq SO(2) \times G$, где $SO(2) \simeq S^1$ (окружн.), а $G \simeq \mathbb{R}^2$ как топол. пр-во.

• __Компактная группа $Sp(n)$__. Напомним: кватернионы.
$\mathbb{Q} = \mathbb{R}^4(1, i, j, k)$ — ассоц. алг. кососоммут, с единицей и с делением, над $\mathbb{R}$, где: $i \cdot j = k$; $-j = ik$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ (без делителей нуля). Кватернион $q = a_0 \cdot 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$,

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

сопряжен. кватерн.: $\bar{q} = a_0 \cdot 1 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$;
$q \cdot \bar{q} = \sum a_\alpha^2 = \langle q, q \rangle$ — евклидово скаляр. произв. в $\mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{Q}$.
$q^{-1} = \bar{q} / |q|^2$; $\overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$, антиинволюция.

• Рассм. $\mathbb{Q}^n = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ – n-мерное кватерн. пр-во над алг. $\mathbb{Q}$, т.е. $q_\alpha \in \mathbb{Q}$ – кватернион. к-ты.

Рассм. кватерн.-значную форму $\langle s, p\rangle_{\mathbb{Q}} = \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha \bar{p}_\alpha$, где $s, p \in \mathbb{Q}^n$, и $\bar{p}_\alpha$ – кватерн. сопряжение.

• Опред. Мн-во линейн. однород. преобраз. $g: \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$, таких, что $\langle gs, gp\rangle_{\mathbb{Q}} = \langle s, p\rangle_{\mathbb{Q}}$ (т.е. сохран. форму $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{Q}}$), образует группу $Sp(n)$, назыв. компакт. симплект. группой. Она не совпадает с $Sp(n, \mathbb{R})$.

• Изучим группу $Sp(1)$.

Теор: $Sp(1) \cong SU(2) \simeq S^3$.

• Сначала отождествим $\mathbb{Q}^n$ с $\mathbb{C}^{2n}$. Пусть $q \in \mathbb{Q}^1$, т.е. $q = a + bi + cj + dk = (a+bi) + j(c - di) = z + j\bar{w}$, где $z = a + bi$, $w = c + di$. Тем самым $\mathbb{Q}^1$ отождеств. с $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{Q}^n \simeq \mathbb{C}^{2n}$. Поэтому $Sp(n) \hookrightarrow GL(2n, \mathbb{C})$.

• Д-во теоремы. Рассм. 3-сферу $S^3 = \{|\alpha| = 1 \text{ в } \mathbb{Q}^1 \simeq \mathbb{R}^4\}$. Пусть $g \in Sp(1)$, т.е. $g(q) = q\cdot\bar{\alpha}$, т.е. g действует как умнож. справа на $\bar{\alpha}$. Итак: $g = f_\alpha : q \to q\cdot\bar{\alpha}$. Мы описали действие $Sp(1)$ на $\mathbb{Q}^1 \simeq \mathbb{R}^4$. Отождествим $\mathbb{Q}$ с $\mathbb{C}^2$; тогда:
$q = a + bi + cj + dk = (a + ib) + j(c - id) = z + j\bar{w}$, где: $z = a + ib$, $w = c + id$. Итак $q \longleftrightarrow (z, w) \in \mathbb{C}^2$.

• Пусть $\alpha = p + j\bar{t}$, $p, t \in \mathbb{C}$; $q = z + j\bar{w}$, $z, w \in \mathbb{C}$. Тогда $f_\alpha(q) = (z + j\bar{w})\cdot\overline{(p + j\bar{t})} = q\cdot\bar{\alpha} =$

$$= (z + j\bar{w})\cdot(\bar{p} - tj) = z\bar{p} - ztj + j\bar{w}\bar{p} - j\bar{w}tj =$$

$$= z\bar{p} - ztj + wpj + w\bar{t} = (z\bar{p} + w\bar{t}) + j(\bar{w}\bar{p} - \bar{z}\bar{t}) =$$

$$= (z\bar{p} + w\bar{t}) + j(\overline{pw - tz}) = (z\bar{p} + w\bar{t}) + j(\overline{wp - zt}),$$

т.к. комплекс. числа коммутируют. Итак: комплексификация $f_\alpha^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \bar{p} & \bar{t} \\ -t & p \end{pmatrix}$, причем $|p|^2 + |t|^2 = 1$, т.к. $\alpha \in S^3$, $|\alpha| = 1$.

В самом деле, $g \in Sp(1)$ сохраняет форму $\langle\ ,\ \rangle$, т.е. $\langle f_\alpha q, f_\alpha q\rangle = \langle q, q\rangle$, т.е.

$(q\bar{\alpha})\overline{(q\bar{\alpha})} = q\bar{q}$, т.е. $q\bar{\alpha}\alpha\bar{q} = q\bar{q}|\alpha|^2 = q\bar{q}$, т.е. $|\alpha| = 1$, $\alpha \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$, $\alpha = p + j\bar{t}$, $|p|^2 + |t|^2 = 1$.

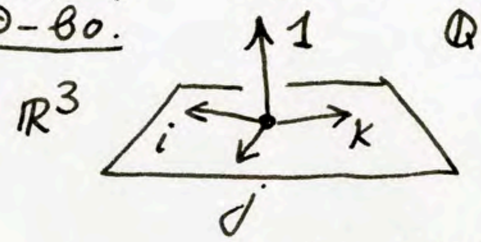
• Далее: рассм. $s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2) \Longleftrightarrow s = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Д-во: $s \in SU(2) \Longleftrightarrow \bar{s}^T = s^{-1}$, т.е. $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, т.е. $d = \bar{a}$, $b = -\bar{c}$,
и $\det(s) = 1$. Ч.и.т.р.д.

Итак $f_\alpha^{\mathbb{C}} \in SU(2)$, т.е. $Sp(1) \cong SU(2)$ и диффеоморфно $S^3 = \{ \alpha \in \mathbb{Q} = \mathbb{R}^4 : |\alpha| = 1 \}$. Чтрд.

• <u>Теор.</u> Существует эпиморф. $SU(2) \cong Sp(1) \to SO(3)$, и это есть 2-листное накрытие $S^3 \to \mathbb{R}P^3 \approx SO(3)$. Это — универсальное накр. $S^3 \to \mathbb{R}P^3$.

<u>Д-во.</u>



$\mathbb{Q}^1 = \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3(i,j,k) \oplus \mathbb{R}^1(1)$. Пусть $\alpha \in S^3 = Sp(1)$. Рассм. отобр. $\alpha \to P_\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, где $P_\alpha(q) = \alpha q \bar\alpha = \alpha q \alpha^{-1}$. При этом $P_\alpha(1) = 1$ и $|P_\alpha(q)| = |\alpha q \bar\alpha| = |\alpha|^2 \cdot |q| = |q|$, т.е. P_α сохран. евклид. метр. в $\mathbb{R}^4$, а потому P_α переводит $\mathbb{R}^3$ в себя, причем $P_\alpha|_{\mathbb{R}^3} \in SO(3)$. В самом деле: $\langle P_\alpha q, P_\alpha q \rangle_{\text{евкл.}} =$

$$= P_\alpha q \cdot \overline{(P_\alpha q)} = (aq\bar a)\overline{(aq\bar a)} = aq\bar a a \bar q \bar a = |a|^2 |q|^2 |a|^2 = |q|^2,$$

т.к. $|a| = 1$. Поэтому $P_\alpha|_{\mathbb{R}^3}$ сохран. евкл. норму в $\mathbb{R}^3$, а потому принадл. $SO(3)$. Ориентация очев. сохраняется. Итак $p\,Sp(1) \subseteq SO_3$.

• далее: $p : Sp(1) \to SO(3)$ явл. гомоморф. Д-во:

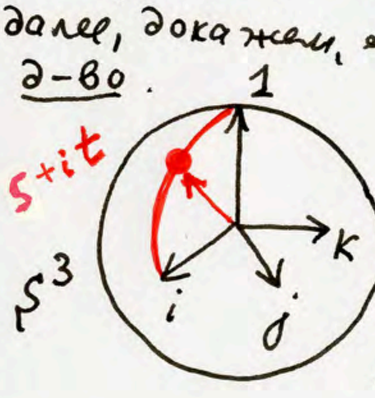
$$P_{\alpha_1\alpha_2}(q) = \alpha_1\alpha_2 q \overline{(\alpha_1\alpha_2)} = \alpha_1\alpha_2 q \bar\alpha_2 \bar\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2 q \bar\alpha_2)\bar\alpha_1 =$$

$= P_{\alpha_1}(P_{\alpha_2}(q))$, чтрд: $P_{\alpha_1\alpha_2} = P_{\alpha_1} \circ P_{\alpha_2}$.

• далее, ищем ядро: $\mathrm{Ker}(p)$. Пусть $P_\alpha = id$, т.е. $P_\alpha q \equiv q$ для $\forall q \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{Q}$. Тогда: $\alpha q \bar\alpha \equiv q$, т.е. $\alpha q = q \alpha$, т.е. все мнимые $q \in \mathbb{R}^3(i,j,k)$ коммут. с α, а тогда очевидно, $\alpha \in \mathbb{R}$, вещественно, а т.к. $|a| = 1$, то $a = \pm 1$, т.е. $\mathrm{Ker}(p) = (\pm 1) = \mathbb{Z}_2$ и $\mathrm{Im}(p) = SU(2)/\mathbb{Z}_2 = S^3/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^3$.

• далее, докажем, что $p : SU(2) \to SO(3)$ — эпиморфизм.

<u>Д-во</u>.



Рассмот. действие P_{s+it} на векторах j и k:

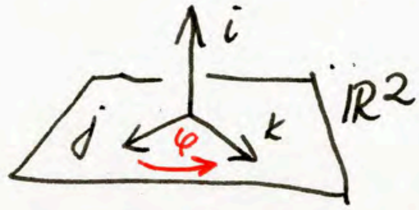
$$P_{s+it}(j) = (s+it)j(s-it) =$$
$$= (sj+tk)(s-it) = s^2 j - sjit + tsk - t^2 ki =$$
$$= (s^2 - t^2) j + 2st k = (\cos\varphi) j + (\sin\varphi) k,$$ где

$\cos\varphi = s^2 - t^2$, $\sin\varphi = 2st$, $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, т.к. $s^2 + t^2 = 1 \in S^3$.

При этом в-р 1 стоит на месте: $P_{s+it}(1) = |s+it|^2 = 1$;

а также в-р i стоит на месте: $i \to (s+it)i(s-it) = i$.

Значит P_{s+it} вращает $\mathbb{R}^3(i,j,k)$ в плоскости $\mathbb{R}^2(j,k)$ поворотом на угол φ, а в-р i стоит на месте:



т.е. мы реализовали поворот $\mathbb{R}^3$ вокруг неподв. в-ра i на угол φ, в виде P_{s+it}, т.е. данное вращение из $SO(3)$ попало в образ отобр. $p: SU(2)\to SO(3)$.

Совершенно аналогично, в образ p попадают и все повороты вокруг осей j и k. Но известно (из алгебры), что любое вращение $g\in SO(3)$ разлагается в композицию поворотов вокруг осей i,j,k; т.е. вся группа $SO(3)$ лежит в образе $p: SU(2)\to SO(3)$. Итак, $Im(p)=SO(3)$, $Ker(p)=\mathbb{Z}_2$, а потому $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3) \simeq \mathbb{RP}^3$. Чтд.

• **Теор.** Группа $SO(4)\simeq (SU(2)\times SU(2))/\mathbb{Z}_2 \simeq (S^3\times S^3)/\mathbb{Z}_2$, где подгруппа $\mathbb{Z}_2$ вложена "по диагонали", т.е. $\to(-E,-E)$.

Д-во. Аналогично предыд. теореме. Пусть $(\alpha_1,\alpha_2)\in SU(2)\times SU(2)$; рассм. отображ. $p: SU(2)\times SU(2)\to SO(4)$, где $(\alpha_1,\alpha_2)\to P_{(\alpha_1,\alpha_2)}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, т.е. $P_{(\alpha_1,\alpha_2)}: q\to \alpha_1 q\,\alpha_2^{-1} = \alpha_1 q\,\bar\alpha_2$, $|\alpha_1|=|\alpha_2|=1$.

Тогда операторы $P(\alpha_1,\alpha_2)$ сохран. евклид. норму в $\mathbb{R}^4$, т.к.:

$$|\alpha_1 q\bar\alpha_2|^2 = \alpha_1 q\bar\alpha_2\left(\overline{\alpha_1 q\bar\alpha_2}\right) = \alpha_1 q\bar\alpha_2\alpha_2\bar q\bar\alpha_1 = |\alpha_1|^2|\alpha_2|^2|q|^2 =$$
$=|q|^2$, чтд. Итак, $P_{(\alpha_1,\alpha_2)}\in SO(4)$.

• Аналогично (см. выше) доказыв., что p — гомоморфизм и эпиморфизм на $SO(4)$. Ищем ядро p, т.е. $P_{(\alpha_1,\alpha_2)}=id$, т.е. $\alpha_1 q\bar\alpha_2\equiv q$ $\forall q\in\mathbb{Q}=\mathbb{R}^4$, т.е. $\alpha_1 q = q\alpha_2$, $\forall q$. Тогда при $q=1$ имеем: $\alpha_1=\alpha_2$ и всё сводится к случаю $SO(3)$, т.е. $Ker(p)=\mathbb{Z}_2=(E_4,-E_4)$ в $\mathbb{R}^4$; а точнее: $\{(1,1),(-1,-1)\}$ в $SU(2)\times SU(2)$. Т.е. $\mathbb{Z}_2$ вложено в прямое произвед. "по диагонали"! В частности, $SO(4)\neq S^3\times\mathbb{RP}^3$. Чтд.