Лекция 3

• Примеры вычисл. категории Л.-Ш.

• **Теор.** cat $S^n = 2$, $n \geq 0$.

Д-во. Ясно, что cat $S^n \leq 2$, т.к. $S^n = \bar{D}^n_1 \cup \bar{D}^n_2$, где $\bar{D}^n_i$ — две полусферы

и $\bar{D}_1, \bar{D}_2 \to *$ по сфере.

Далее: cat $S^n \neq 1$, т.к. S^n не стягивается по себе в точку. Это вытекает, напр., из теор. гомологий. Мы доказали, что $H_n(S^n) = \mathbb{Z} \neq 0$ при $n \geq 0$, а потому S^n гомотоп. не эквив. точке. Чтд.

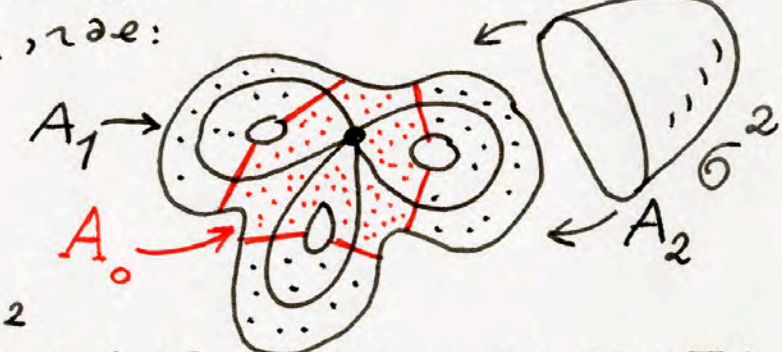
• Замеч. На S^n есть ф-я с ровно 2 крит. (бифурк.) точками — это ф-я высоты на $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Т.е. здесь оценка достигается: $\mu(f) = 2 = \mathrm{cat}\, S^n$.

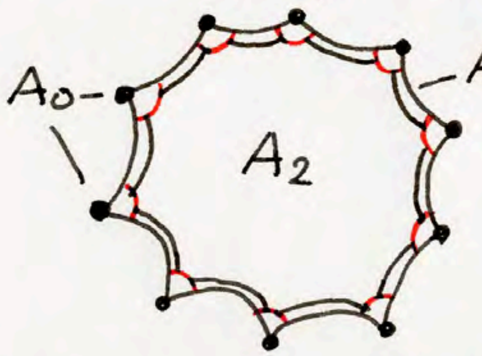
• **Теор.** Пусть M^2 — глад. замкн. 2-поверхн. (ориент. или неор.) связная. Тогда $\mathrm{cat}(M^2) = 3$, если $M^2 \neq S^2$.

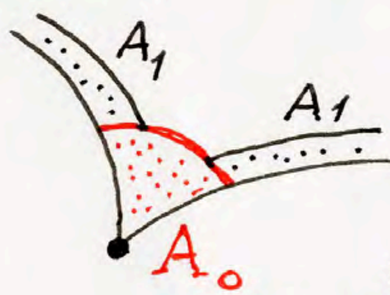
Д-во. По теор. классиф. M^2 имеем: $M^2 = \sigma^0 \cup (\sigma^1_1 \cup \ldots \cup \sigma^1_s) \cup \sigma^2$, где σ^α — клетки $\dim = \alpha$, а s связано с родом M.

Тогда $M^2 = A_0 \cup A_1 \cup A_2$, где:

A_0 — окрестн. клетки σ^0 (вершины), A_1 — набор "прямоугольников", а A_2 — замкн. диск в клетке σ^2. Ясно, что A_0, A_1, A_2 стяг. в точку по M^2. Итак, cat $M^2 \leq 3$. Нарисуем эти три мн-ва на фундам. многог. W:



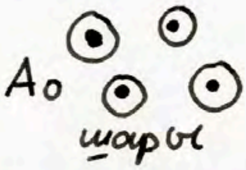




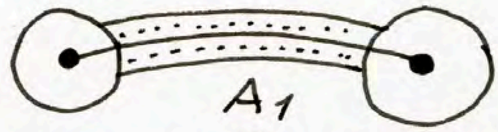
Далее. cat $M^2 \geq 3$ если $M \neq S^2$. Ниже будет сформул. теор. о "когомологич. длине" клеточн. пр-ва. Из этой теоремы и получим оценку снизу, т.к. кольцо когомол. $H^*(M^2_g, \mathbb{R}) = \left(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \,\middle|\, a_1 \wedge b_1 = \ldots = a_g \wedge b_g = \omega^{(2)},\ a_i \wedge b_j = a_i \wedge a_j = b_i \wedge b_j = 0,\ i \neq j\right)$ в ориент. случае, например, а потому когомол. длина $M^2_g = 2$, при $g \geq 1$. Аналог. и в неориент. случае для группы коэфф. $= \mathbb{Z}_2$. Чтд.

• **Теор.** Пусть M^n — гладк. связн. многообр. Тогда cat $M^n \leq n+1$.

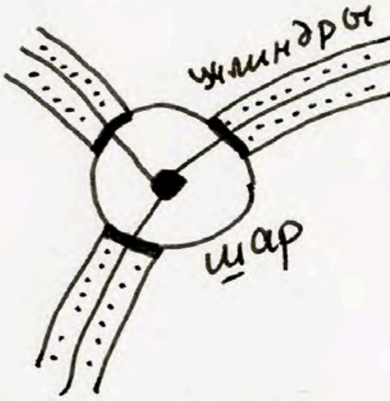
Д-во. рассм. гладк. триангул. M^n, т.е. его разбиение в объедин. гладких симплексов: $M^n = \bigcup_{i,q} \Delta^q_i$. Тогда $M = A_0 \cup A_1 \cup \ldots A_n$, где A_q устроена так: A_0 – это объедин. замкн. n-мерн. шаров, окружающих 0-мерные симпл., т.е. точки; причем шары возьмем малого радиуса, чтобы они не пересеклись:



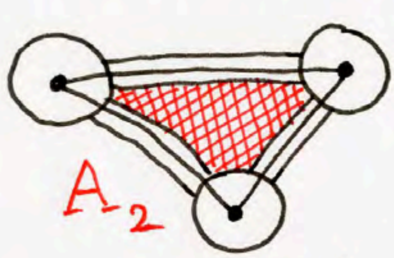
За A_1 возьмем непересек. (попарно) цилиндры, окружающие дуги 1-мерн. симплексов, не попавшие в шары:

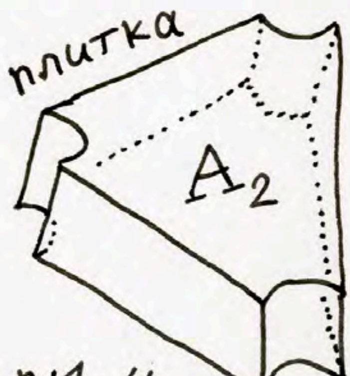


Причем цилиндры выберем "тонкими", чтобы их основания не пересекались на границе любого шара из A_0:



За A_2 возьмем n-мерные "тонкие" окрестности частей 2-мерных симплексов, не попавших в $A_0 \cup A_1$:



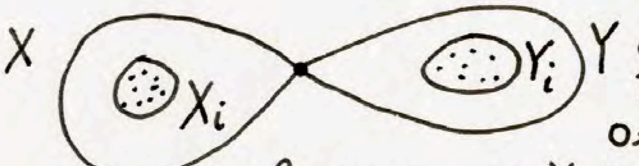


и т.д.

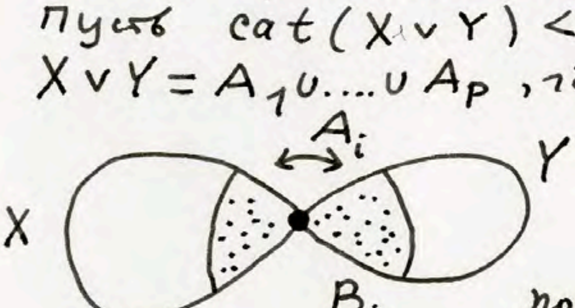
Ясно, что $M = A_0 \cup \ldots \cup A_n$ и все $A_q \to *$ по M. Но т.к. покрытие может оказаться не оптимал., то $\operatorname{cat} M \le n+1$. Чтд.

• Теор. $\operatorname{cat}(X \vee Y) = \max(\operatorname{cat} X, \operatorname{cat} Y)$, где $X \vee Y$ – это букет топол. пр-ств X и Y:

Д-во. Пусть $\operatorname{cat} X = k$, $\operatorname{cat} Y = m$ и пусть $k \le m$. Тогда $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$, где $X_i \to *$ и $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$, где $Y_i \to *$.



Построим покрытие $X \vee Y$: $\{X_1 \cup Y_1, \ldots, X_k \cup Y_k; Y_{k+1}, \ldots, Y_m\}$. Очевидно, что все эти мн-ва стягиваются в точку по $X \vee Y$. А потому $\operatorname{cat}(X \vee Y) \le m = \max$. Докажем, что меньше m быть не может. Допус. противное. Пусть $\operatorname{cat}(X \vee Y) < m = \max = \operatorname{cat} Y$. Тогда $X \vee Y = A_1 \cup \ldots \cup A_p$, где $p < m$ и $A_i \to *$. Рассм. $B_i = Y \cap A_i$.



Ясно, что B_i, как часть A_i, стягив. в точку по Y, $1 \le i \le p$. Далее: $Y = B_1 \cup \ldots \cup B_p$, т.к. $\{A_i\}$ было покрытием всего $X \vee Y$. Итак, $Y = B_1 \cup \ldots \cup B_p$, где B_i замк. и $B_i \to *$ по Y, а потому $\operatorname{cat} Y \le p < m$, что противоречит тому, что $\operatorname{cat} Y = m$. Чтд.

• Следств. Если $\operatorname{cat} X \geqslant 2$, то $\operatorname{cat}(X \vee S^n) = \operatorname{cat} X$ при $n > 0$.

• Когомологич. длина многообразия. Определение.
Пусть M – гладк. многообр. и $H^*(M, G)$ – его кольцо (алгебра) когомологий, где $G = \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ или $\mathbb{Z}_p$, где нечет. простое. Для $G=\mathbb{R}$ см. определ. $H^*(M, \mathbb{R})$ в нашем обязател. курсе (когомол. внешн. дифф. форм). В алгебре H^* есть умножение (напр. умнож. внешних форм). Рассм. элементы $a_1, \dots, a_m$ из $H^*(M)$ такие, что $\deg a_i > 0$ и $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_m \neq 0$. Тогда максимальное такое m называется <u>когомол. длиной</u> M (для группы коэффиц. G).

[• <u>Теор.</u> Если M – гладк. многообр., то $\operatorname{cat} M \geq k+1$, где k – когомол. длина M.
(без д-ва). См. д-во в кн. А.Т. Фоменко "Дифф. геом. и топол. Дополнит. главы".

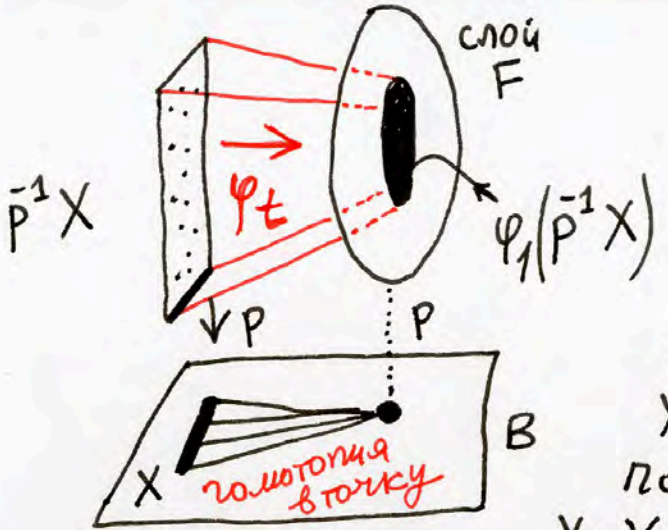
• Примеры.
[<u>Теор.</u> $\operatorname{cat} \mathbb{R}P^n = n+1$. <u>Д-во</u>. Т.к. $\dim \mathbb{R}P^n = n$, то по теор. (см. выше): $\operatorname{cat} \mathbb{R}P^n \leq n+1$. Далее: известно, что $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[e_1]/(e_1^{n+1})$, т.е. $\cong$ кольцо усеченн. полиномов с образующей e_1, где $e_1^{n+1} = 0$; т.е. $\{e_1, e_1^2, \dots, e_1^n\}$. Так как $e_1^n \neq 0$ в H^*, то когомол. длина равна n, а потому $\operatorname{cat} \mathbb{R}P^n \geq n+1$, т.е. $\operatorname{cat} \mathbb{R}P^n = n+1$. Чтд.

[• <u>Теор.</u> $\operatorname{cat} T^n = n+1$. Д-во аналогично. Т.к. $\dim T^n = n$, то $\operatorname{cat} T^n \leq n+1$. Далее: $H^*(T^n, \mathbb{Z}) = \Lambda(e_1, \dots, e_n)$, где все $\deg(e_i) = 1$; здесь Λ – внешняя алгебра. Т.к. произведение $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_n \neq 0$ в Λ, то когомол. дл. тора $= n$, а потому $\operatorname{cat} T^n \geq n+1$, т.е. $\operatorname{cat} T^n = n+1$. Чтд.

• Рассм. локал. тривиал. расслоение $p: E \xrightarrow{F} B$; т.е. для $\forall$ точки $b \in B$ $\exists$ откр. окрест. $U = U(b)$ такая, что $p^{-1}U \simeq U \times F$, где F – слой рассл.

[• <u>Теор.</u> Верно нер-во: $\operatorname{cat} E \leq \operatorname{cat} B \cdot \operatorname{cat}_E F$.
На самом деле верно более общее нер-во:
[<u>Теор.</u> Пусть X – $\forall$ замкн. подмн-во в базе B и $p^{-1}X \subset E$. Тогда: $\operatorname{cat}_E(p^{-1}X) \leq \operatorname{cat}_E F \cdot \operatorname{cat}_B X$. Если $X = B$, то получаем предыдущ. теор., т.к. $p^{-1}B = E$.

<u>Д-во</u>. Сначала докажем для случая: $\operatorname{cat}_B X = 1$, т.е. $X \to *$ по B. Надо доказать, что $\operatorname{cat}_E(p^{-1}X) \leq \operatorname{cat}_E F$. Стянем X по B в $*$. По лемме о накрыв. гомотопии накроем эту деформацию гомотопией $\varphi_t: p^{-1}X \to E$, $0 \leq t \leq 1$. Т.к. при $t=1$ мн-во X в B стягив. по B в точку, то $\varphi_1(p^{-1}X) \subset F$, т.е. $p^{-1}X$ стягивается на подмн-во в слое $F = p^{-1}(*)$. Но тогда
по лемме 1
и лемме 4 } (см. выше): $\operatorname{cat}_E(p^{-1}X) \leq \operatorname{cat}_E(\varphi_1(p^{-1}X)) \leq \operatorname{cat}_E F$.



Мы сослались на лемму о накр. гомотопии для локал. трив. расслоений. Хотя мы доказали ее ранее только для накрытий, но это д-во проходит и в общем случае (докажите!)

Шаг 2. Теперь док. для общ. случая.

Пусть $X \subset B$ и $\mathrm{cat}_B X = k$, т.е.

$X = X_1 \cup \ldots \cup X_{k-1} \cup X_k$, где $X_i \to *$ по B.

Положим $Y = X_1 \cup \ldots \cup X_{k-1}$. Тогда

$X = Y \cup X_k$, где $\mathrm{cat}_B Y \leq k-1$, а $\mathrm{cat}_B X_k = 1$.

Доказ. по индукции. Пусть теор. доказана для всех $Y \subset B$ таких, что $\mathrm{cat}_B Y \leq k-1$. Т.е. верно, что $\mathrm{cat}_E (p^{-1}Y) \leq \mathrm{cat}_E F \cdot \mathrm{cat}_B Y$.

Тогда:
$$\mathrm{cat}_E\, p^{-1}X = \mathrm{cat}_E\, p^{-1}(Y \cup X_k) = \mathrm{cat}_E\big((p^{-1}Y) \cup p^{-1}X_k\big) \leq$$
$$\leq \mathrm{cat}_E(p^{-1}Y) + \mathrm{cat}_E(p^{-1}X_k) \leq \mathrm{cat}_E F \cdot \mathrm{cat}_B Y + \mathrm{cat}_E F =$$
$$= (\mathrm{cat}_B Y + 1)\cdot \mathrm{cat}_E F \leq (k-1+1)\cdot \mathrm{cat}_E F = k \cdot \mathrm{cat}_E F =$$
$$= \mathrm{cat}_B X \cdot \mathrm{cat}_E F.$$
Здесь мы использовали, что $\mathrm{cat}_E\, p^{-1}X_k \leq \mathrm{cat}_E F$.

Чтд.

• Оценка в теор. явл. точной, т.е. достигается в некоторых случаях.
Пример. рассм. расслоение Хопфа (см. предыдущ. семестр): $p: S^3 \to S^2$ со слоем S^1. Тогда: $\mathrm{cat}\, S^3 \leq \mathrm{cat}\, S^2 \cdot \mathrm{cat}_{S^3} S^1$.
Имеем: $\mathrm{cat}\, S^3 = 2$, $\mathrm{cat}\, S^2 = 2$, $\mathrm{cat}_{S^3}(S^1) = 1$, т.к. слой S^1 стягив. по S^3 в точку. Итак: $2 = 2 \cdot 1 = 2$, т.е. равенство.

• Замечание. Если расслоен. явл. прямым произведением, т.е. $E = B \times F$, то нер-во в теор. не обязат. явл. равенством. Пример: тор $T^2 = S^1 \times S^1$. Тогда $\mathrm{cat}\, E = \mathrm{cat}\, T^2 = 3$; $\mathrm{cat}\, B = \mathrm{cat}\, S^1 = 2$; $\mathrm{cat}_E F = \mathrm{cat}_{T^2} S^1 = 2$, т.к. меридиан или параллель на торе не стягив. в точку. Итак, $3 < 2 \cdot 2 = 4$.

• Следующ. тема: элементы симплектич. геометрии. Начнем со случая линейн. пр-ва.

• Опред. Линейн. симплек. пр-вом назыв. лин. пр-во $\dim = 2n$ с билин. невырожд. кососимм. формой (a,b): $(a,b) = -(b,a)$.

Удобно моделировать на $\mathbb{R}^{2n}$, где наряду с евклидов. формой $\langle a,b \rangle$ (симмет.) задана и вторая симплектич. форма (a,b).

Для наглядн. — $(\mathbb{R}^{2n}, \langle\,,\rangle)$ — "носитель" линей. симплек. геометрии.

• Итак, пусть задана линей. симпл. структура $(a,b) = \sum \omega_{ij} a^i b^j$, где матр. $\Omega = (\omega_{ij})$, $\det \Omega \neq 0$ и $\Omega^T = -\Omega$.

• Пример. Канонич. симплек. структ. в $\mathbb{R}^{2n}$: $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, т.е. $(a, b) = \sum_{i=1}^{n} p^i q^{i'} - q^i p^{i'}$, где $a = (p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n)$ и $b = (p^{1'}, \dots, p^{n'}, q^{1'}, \dots, q^{n'})$. Здесь $\Omega^2 = -E_{2n}$.

Если заменить базис в $\mathbb{R}^{2n}$, сделав перестановку: $p^1, q^1, \dots, p^n, q^n$, то матрица Ω преобраз. к виду:

$$I = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad I^2 = -E_{2n}.$$

• Этот канонич. пример универсален.

<u>Утв</u>. Пусть Ω — $\forall$ невырож. кососимм. матр. в $\mathbb{R}^{2n}$. Тогда всегда $\exists$ лин. невыр. замена базиса, что $\Omega \to I$, т.е. $A \Omega A^T = I$. Здесь A — матр. замены базиса.

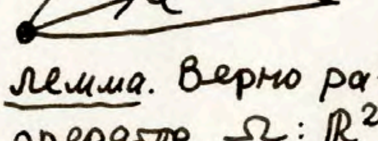
• <u>Опред</u>. Базис $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ в $\mathbb{R}^{2n}$ назыв. симплектическим, если попарные кососкалярн. произвед. имеют вид:

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j) = 0 \quad и \quad (\alpha_i, \beta_j) = -(\beta_j, \alpha_i) = \delta_{ij}.$$

• Изотропность. <u>Опред</u>. Линей. подпр-во $L \subset \mathbb{R}^{2n}$ назыв. изотропным, если для $\forall a, b \in L$ имеем: $(a, b) = 0$. Т.е. ограничение Ω на L тождеств. $\equiv 0$. Пример: $\forall$ в-р $a \in L$ изотропен: $(a, a) = 0$.

• <u>Опред</u>. Векторы a, b кооортогон., если $(a, b) = 0$. Подпр-во L явл. косоортогон. дополнением к подпр-ву K, если $(L, K) = 0$, т.е. $(a, b) = 0$ для $\forall a \in L$ и $\forall b \in K$. Если $L(a)$ — косоортог. дополн. к в-ру a, то $a \in L(a)$, т.е. a лежит в своем косоортог. дополнении.

Ясно, что $\dim L(a) = 2n - 1$, т.к. форма Ω невырожд.



Вообще, плоск. L изотропна $\Longleftrightarrow$ она лежит в своем косоортогон. дополнении. Т.е. когда она сама себе косоортогональна.

• <u>Лемма</u>. Верно равенство: $(a, b) = \langle \Omega a, b \rangle$, где Ω — линей. оператор $\Omega: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, отвеч. форме Ω.

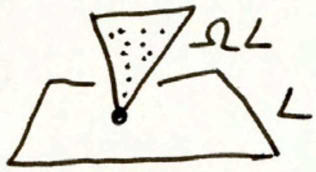
<u>Д-во</u>. $(a, b) = \sum_{i,j} \omega_{ij} a^i b^j = \sum_j \left(\sum_i \omega_{ij} a^i \right) b^j = \langle \Omega a, b \rangle$, где $(\Omega a)_j = \sum_i \omega_{ij} a^i$. Чтд. Ясно, что $(a, b) = \langle a, -\Omega b \rangle$.

• <u>Утв</u>. Плоскость L в симплек. пр-ве $\mathbb{R}^{2n}$ изотропна $\Longleftrightarrow$ ее образ ΩL (при действии операт. Ω) ортогонален L в евклидовом смысле.

<u>Д-во</u>. Пусть $a, b \in L$, тогда $0 = (a, b) = \langle \Omega a, b \rangle = 0$ для $\forall a, b \in L$. Т.е. независимо b пробегает все L, а Ωa пробегает всё ортогон. дополн. к L. В частности, $L \cap \Omega L = 0$. Здесь мы пользуемся тем, что Ω — невырож. матрица.

<u>Следствие</u>. Если L — изотропно, то $\dim L \le n$.

<u>Д-во</u>. Т.к. Ω невырожд., то $\dim \Omega L = \dim L$, а т.к. $\Omega L \cap L = 0$, то



$\dim (L \oplus \Omega L) = \dim L + \dim \Omega L = 2 \dim L \leq 2n = \dim \mathbb{R}^{2n}$, т.е. $\dim L \leq n$. Чтд.

• <u>Опред.</u> Подпр-во L в $\mathbb{R}^{2n}$ называется лагранжевым, если оно изотропно и $\dim L = n$, т.е. оно изотропно и имеет максим. размерность.

• Такие плоскости $\exists$ в $\mathbb{R}^{2n}$. Например, координатные плоскости $\mathbb{R}^n(p) = \mathbb{R}^n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\mathbb{R}^n(q) = \mathbb{R}^n(\beta_1, \dots, \beta_n)$ — лагранжевы.