Лекция 2.

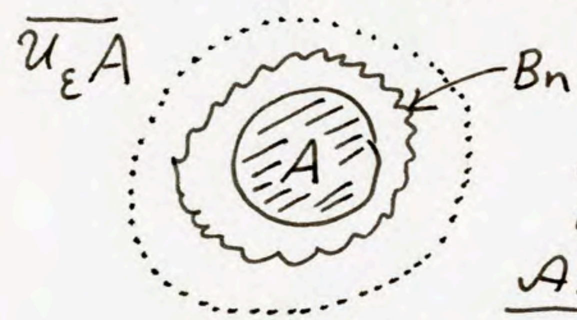
Пусть $X = M$ – гладк. мног. и $\Theta(M)$ – мн-во всех замкнутых подмнож. в M. Пусть на M задана метрика r (расстояние). Тогда $\Theta(M)$ превращ. в метрич. пр-во введением метрики ρ Хаусдорфа. Пусть $A, B \subset M$. Тогда

$$\rho(A,B) = \sup_{a\in A}\left(\inf_{b\in B} r(a,b)\right) + \sup_{b\in B}\left(\inf_{a\in A} r(b,a)\right)$$

• <u>Утв.</u> (без д-ва). ρ удовл. аксиомам метрики:
1) $\rho(A,B) = \rho(B,A)$; 2) $\rho(A,B)=0 \Longleftrightarrow A=B$;
3) $\rho(A,C) \le \rho(A,B) + \rho(B,C)$ $\forall A,B,C \in \Theta(M)$.

• <u>Лемма 6.</u> Пусть $B_n \subset M$ все замкн., где $n = 1,2,\ldots$ и пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, т.е. $\rho(B_n, A) \to 0$ при $n\to\infty$. Пусть $\mathrm{cat}_M B_n \geqslant i$ при всех n. Тогда $\mathrm{cat}_M A \geqslant i$.

<u>Д-во.</u> В силу леммы 5 $\exists \varepsilon > 0$: $\mathrm{cat}_M \overline{U_\varepsilon A} = \mathrm{cat}_M A$.
Т.к. $A = \lim B_n$, то $\exists N$: при $n > N$ имеем: $B_n \subset \overline{U_\varepsilon A}$:



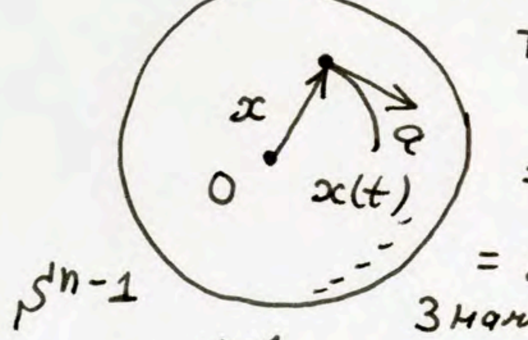
Тогда $\mathrm{cat}_M A = \mathrm{cat}_M \overline{U_\varepsilon A} \geqslant \mathrm{cat}_M B_n \geqslant i$.
Чтд.

• Теперь на время отойдем от катег. Л.Ш. и обсудим "аналогию".

<u>Аналогия.</u> Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ – станд. сфера и $f(x) = B(x,x) = \langle Bx, x\rangle$ – квадрат. (билин.) симметр. форма в $\mathbb{R}^n$. Здесь $\langle\,,\rangle$ – евкл. скал. произв., а $B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ лин. операт. (матр.), отвеч. форме B.
Рассм. огранич. ф-ции f на S^{n-1} и найдем ее крит. точ.

<u>Утв.</u> $x \in S^{n-1}$ явл. крит. точк. ф-ции $f = B(x,x) \Longleftrightarrow Bx = \lambda x$, т.е. x – собств. в-р формы (операт.) B.

<u>Д-во.</u> Точка x явл. крит. для $f \Longleftrightarrow df/da\,\big|_x = 0$ для $\forall$ касат. в-ра $a \in T_x S^{n-1}$. Рассм. на сфере глад. путь $x(t)$ такой, что $x(0) = x$ (крит. т.) и $\dot{x}(0) = a$.



Тогда $0 = \dfrac{df}{da}\Big|_x = \dfrac{d}{dt} f(x(t))\Big|_{t=0} =$

$= \dfrac{d}{dt}\langle Bx, x\rangle = \langle B\dot{x}, x\rangle + \langle x, B\dot{x}\rangle =$

$= 2\langle Bx, \dot{x}\rangle = 2\langle Bx, a\rangle$, $\forall a \in T_x S^{n-1}$.

Значит в-р Bx ортогонален касат. пл-ти $T_x S^{n-1}$, а потому коллинеарен в-ру x, т.е. $Bx = \lambda x$. Чтд.

• Из собств. векторов формы B выберем ортобазис в $\mathbb{R}^n$: $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. Упорядочим их по возрастан. λ_i, т.е. $\lambda_0 \le \lambda_1 \le \dots \le \lambda_{n-1}$. Пусть $S^i \subset S^{n-1}$, где $0 \le i \le n-1$ — всевозм. экваторы $\dim = i$, т.е. плоские сечения S^{n-1} плоскостями Π^{i+1} через центр сферы. Пусть $E_i = \{S^i\}$ — класс (совокуп.) всех S^i.

[Утв. Верно равенство: $\lambda_i = \inf\limits_{S^i \in E_i} \left(\max\limits_{x \in S^i} f(x) \right)$. (Докажите!)

Для примера докажем для $i = 0$. Ясно, что $S^0 \in E_0$ — это двоеточия $(x, -x)$, $x \in S^{n-1}$, $x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1$.

Тогда $\max\limits_{x \in S^0} f(x) = f(x) = B(x, x) = \lambda_0 x_0^2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2$.

Надо найти inf этой суммы. Запишем так:

$$f(x) = \lambda_0 \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k^2 = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \lambda_0) x_k^2 \geqslant$$

$\geqslant \lambda_0$, т.к. $\lambda_k - \lambda_0 \geqslant 0$ ввиду упорядочивания. Чтд.

• Итак, ф-я $f(x) = \langle Bx, x \rangle$ в случае общ. положен., т.е. когда все λ_i различны, имеет на S^{n-1} ровно $2n$ крит. точек, а именно, $\pm e_i$, $0 \le i \le n-1$. Но так как $f(x) = f(-x)$, то ф-ю f можно естеств. перенести на проект. пр-во $\mathbb{R}P^{n-1} = S^{n-1}/\mathbb{Z}_2$, т.е. $\mathbb{R}P^{n-1} = \{(x, -x), \text{ где } x \in S^{n-1}\}$.

При этом f на $\mathbb{R}P^{n-1}$ имеет ровно n крит. точек: $(e_i, -e_i)$.

[Утв. Пусть f — ф-я на $\mathbb{R}P^{n-1}$, порожденная $f = \langle Bx, x \rangle$. Тогда число точек бифурк. (крит. точек) $\mu(f) \geqslant \# E_i$, т.е. $\mu(f)$ не меньше числа классов E_i, т.е. $\mu(f) \geqslant n$.

Д-во. а) Если все λ_i различны: $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1}$, то на каждом уровне $f = \lambda_i$, т.е. $\langle Bx, x \rangle = \lambda_i$, имеется ровно одна крит. точка на $\mathbb{R}P^{n-1}$, а именно: $(e_i, -e_i)$. Получаем: $\mu(f) = n = n = \# E_i$.

б) Пусть теперь $\lambda_i = \lambda_{i+k}$ для $k > 0$ при каком-то i. Тогда в $\mathbb{R}^n$ $\exists$ собственное подпр-во оператора B размерности $k+1$, состоящее из собств. векторов, отвечающих числу $\lambda_i = \dots = \lambda_{i+k}$. Его пересеч. со сферой S^{n-1} есть экватор S^k, состоящий целиком из крит. точек ф-ции f на S^{n-1}. На $\mathbb{R}P^{n-1}$ это будет $\mathbb{R}P^k$, состоящее из крит. т. ф-ции f на $\mathbb{R}P^{n-1}$. Так как таких точек ∞ много, то $\infty > n = \# E_i$. Чтд.

• Все описанные конструк. инварианты при вращениях в $\mathbb{R}^n$, т.е. инвар. при действии группы $SO(n)$.

• Рассм. "аналоговую" таблицу, где описанные объекты заменяются на понятия из теории бифурк. и категории Л.Ш.

S^{n-1}	$f=B(x,x)$	E_i	$SO(n)$	Теор.: $\mu(f)\geqslant n=\#E_i$
M гладк. многообр.	$f(x)$ гладк. ф-я на M	M_i см. опред. ниже	гомотопии в M	Теор. Люс.–Шн.: $\mu(f)\geqslant \operatorname{cat} M=\#M_i$

• Определ. классов M_i: $M_i=\{X\subset M$, где X-замк. и $\operatorname{cat}_M X\geqslant i\}$.
Тогда $M_i\subset\Theta(M)$, $i=0,1,\dots,N$, где $N=\operatorname{cat} M$.

• <u>Лемма 7</u>. Имеем: $\Theta(M)=M_0=M_1\supseteq M_2\dots M_i\supseteq M_{i+1}\dots\supseteq M_N$.
<u>Д-во</u>. Очевидно вытекает из опред. $\operatorname{cat}_M X$. Ясно, что для $\forall X\in\Theta(M)$: $\operatorname{cat}_M X\geqslant 0$ и $\operatorname{cat}_M X\geqslant 1$. Итак, с ростом i классы M_i "уменьшаются":

<u>Лемма 8</u>. $\forall$ класс M_i замкнут относительно гомотопий подмн-ств X в M и относит. предельных переходов, т.е. если $Y=\lim_{n\to\infty} X_n$, где $X_n\in M_i$, то и $Y\in M_i$.
<u>Д-во</u>. Вытекает из лемм 4 и 6, см. выше.

• Определим теперь числа λ_i для $f(x)$ на M.

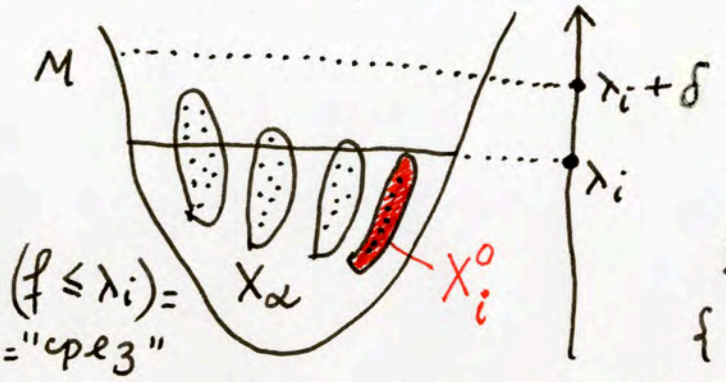
• $$\lambda_i=\inf_{X\in M_i}\Big(\max_{x\in X} f(x)\Big),\quad X\text{-фиксирован}, X\in M_i$$ (т.е. по аналогии с классами E_i, см. выше).

• <u>Лемма 9</u>. Выполнены нер-ва: $\lambda_0=\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\dots\leqslant\lambda_N$, где $N=\operatorname{cat} M$.
<u>Д-во</u>. Рассм. ф-ю $\bar f(X)=\max_{x\in X} f(x)$, где $X\in M_i$. Тогда $\bar f(X)$ является ф-ей на всем $\Theta(M)$ и так как $\Theta(M)=M_0=M_1\supseteq M_2\supseteq\dots\supseteq M_N$, то при уменьшении мн-ва M_i с ростом i, inf ф-ции $\bar f$ может только расти. Чтд.

• <u>Лемма 10</u>. Пусть f на M такова, что все "срезы" $(f\leqslant a)$, т.е. $\{x\in M: f(x)\leqslant a\}$ – компактны. Тогда в $\forall$ классе M_i $\exists$ замкн. мн-во X_i^0 такое, что $\lambda_i=\max_{x\in X_i^0} f(x)$. Т.е. inf функции $\bar f$ на M_i достигается на мн-ве X_i^0.

• Таких X_i^0 может быть много.

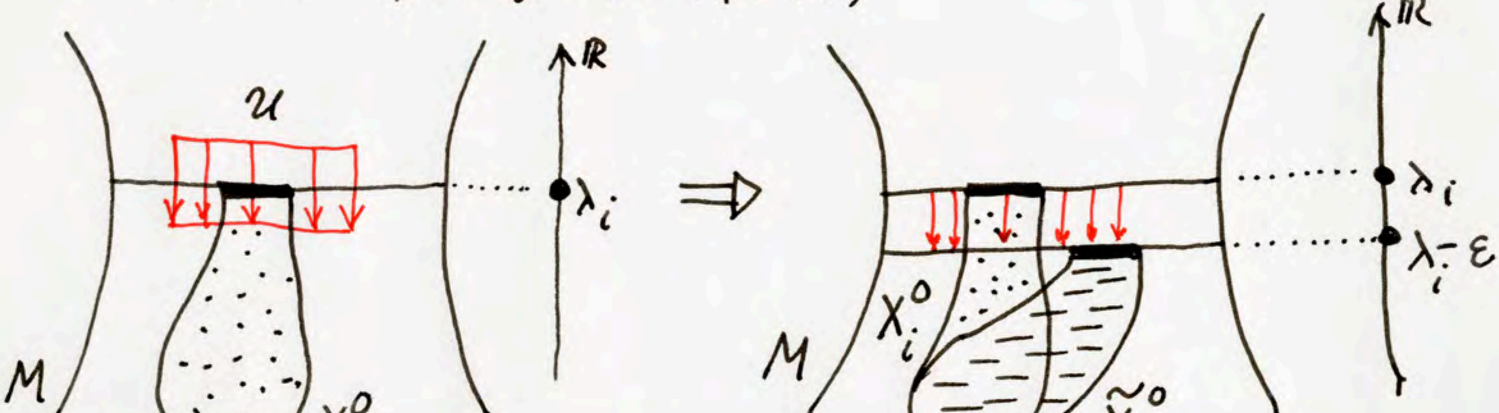
Д-во. Т.к. $\lambda_i = \inf\limits_{X\in M_i}\left(\bar f(X)\right)$, то $\exists$ последоват. $\{X_\alpha\}\in M_i$ таких, что $\bar f(X_\alpha)\to\lambda_i$ при $\alpha\to\infty$. Если $\delta>0$, то $\exists$ номер N такой, что при $\alpha>N$ имеем: $\bar f(X_\alpha)<\lambda_i+\delta$:



Так как срезы $(f\le\lambda_i+\delta)$ компактны, то при $\alpha>N$ все X_α попадают в компактную область в M. Используя стандартную идею ε-сетей, из последоват. $\{X_\alpha\}$ можно выбр. подпоследоват. $\{X_{\alpha_t}\}$, сходящуюся к некотор. замкн. подмн-ву X_i^0 в M. Ясно, что $\bar f(X_i^0)=\lambda_i$, т.е. $\max\limits_{x\in X_i^0} f(x)=\lambda_i$. Чтд.

• Лемма 11. Пусть все срезы $(f\le a)$ компактны. Тогда на бифурк. уровне $f=\lambda_i$ обязат. лежит хотя бы одна точка бифуркации. Более того, такая точка есть на мн-ве X_i^0.

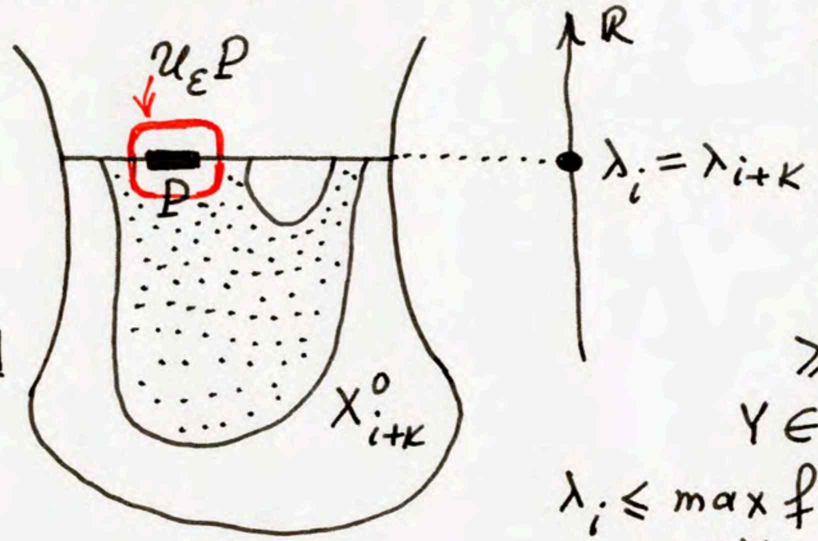
Д-во. Рассм. X_i^0, т.е. $\max\limits_{x\in X_i^0}(f(x))=\lambda_i$. Допуст. противн. т.е. что пересечение X_i^0 с уровнем $(f=\lambda_i)$ состоит только из правильн. точек. Тогда кажд. точка $x\in X_i^0\cap(f=\lambda_i)$ имеет окрестн. $U(x)$, в которой есть "вертикальные" отрезки I, трансверс. поверхн. уровня $(f=\lambda_i)$.



Эти отрезки — аналог линий тока вект. поля $(-\operatorname{grad} f)$. Вдоль них осуществим непрер. гомотопию (деформ.) мн-ва X_i^0 в мн-во $\tilde X_i^0$, лежащее целиком в срезе $(f\le\lambda_i-\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$. $\varphi_t: X_i^0\to\tilde X_i^0$. Как мы знаем, $\operatorname{cat}\tilde X_i^0\geqslant\operatorname{cat}X_i^0\geqslant i$, т.е. $\tilde X_i^0$ осталось в том же классе M_i. А потому $\max\limits_{x\in\tilde X_i^0} f(x)\geqslant\lambda_i=\inf$. Однако, $\tilde X_i^0\subset(f\le\lambda_i-\varepsilon)$, т.е. получили противоречие. Чтд.

• **Лемма 12.** Пусть среди чисел λ_i есть кратные, т. е.
$\lambda_1 \le \lambda_2 \dots \le \lambda_i = \lambda_{i+k} \le \dots \le \lambda_N$, где $k>0$. Пусть X^0_{i+k} таково, что $\max\limits_{x\in X^0_{i+k}}(f(x)) = \lambda_{i+k} = \lambda_i$ и пусть P — мн-во точек бифуркации на уровне $\lambda_i = \lambda_{i+k}$, лежащих в X^0_{i+k} ($P \ne \emptyset$). Тогда $\mathrm{cat}_M P \geqslant k+1$.

Д-во. Допус. против., т. е. что $\mathrm{cat}\, P \le k$. В силу леммы 6 $\exists\ \varepsilon>0$ такое, что $\mathrm{cat}\, \overline{U_\varepsilon P} = \mathrm{cat}\, P$, а потому $\mathrm{cat}\, \overline{U_\varepsilon P} \le k$.



Рассм. $Y = X^0_{i+k} - U_\varepsilon P$. Тогда $\mathrm{cat}\, Y = \mathrm{cat}(X^0_{i+k} \setminus U_\varepsilon P) \geqslant \mathrm{cat}\, X^0_{i+k} - \mathrm{cat}\, \overline{U_\varepsilon P} \geqslant i+k-k = i$. Отсюда: $Y \in M_i$. Но тогда:

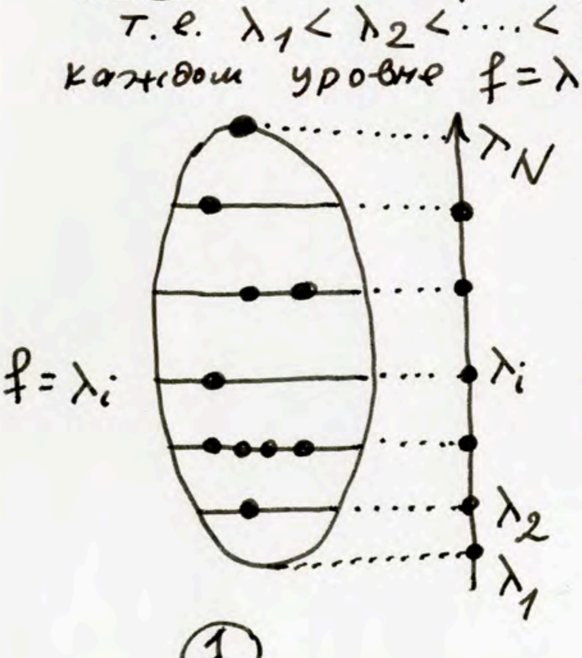
$$\lambda_i \le \max_{x\in Y} f(x) \le \max_{x\in X^0_{i+k}} f(x) \le \lambda_{i+k} = \lambda_i$$

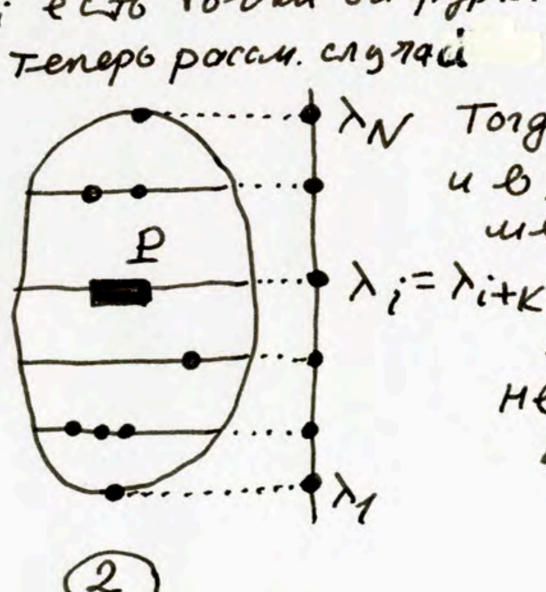
Значит $\max\limits_{x\in Y} f(x) = \lambda_i$, а тогда по лемме 11 на мн-ве Y обязательно есть точки бифурк. Но их нет, т. к. все они должны быть в P, а P выброшено из $Y = X^0_{i+k} \setminus U_\varepsilon P$. Противоречие.
Чтд. (т. е. Y можно взять за X^0_i).

• **Лемма 13** = д-во теор. Люст.-Шнир.

Д-во. Сначала рассм. случай общ. полож., когда все λ_i различ., т. е. $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$, где $N = \mathrm{cat}\, M$. По лемме 11 на каждом уровне $f = \lambda_i$ есть точки бифурк. Значит $\mu(f) \geqslant N$.

Теперь рассм. случай когда $\lambda_i = \lambda_{i+k}$.





Тогда $\mathrm{cat}\, P \geqslant k+1$ и в P есть по крайней мере $k+1$ различн. точек. А потому все равно общее число точек бифурк. не меньше $N = \mathrm{cat}\, M$.
Чтд.