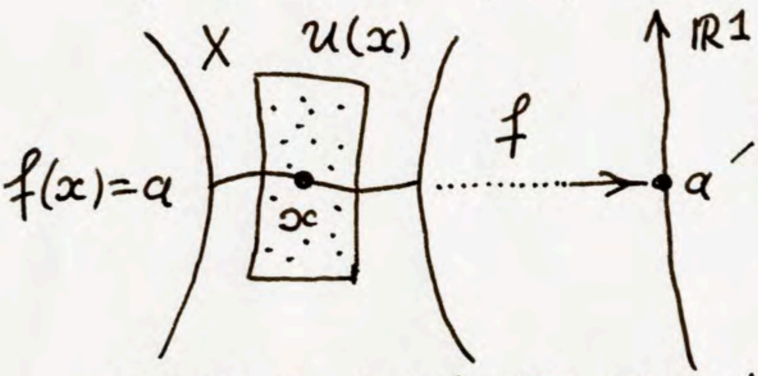
# Весенний семестр.

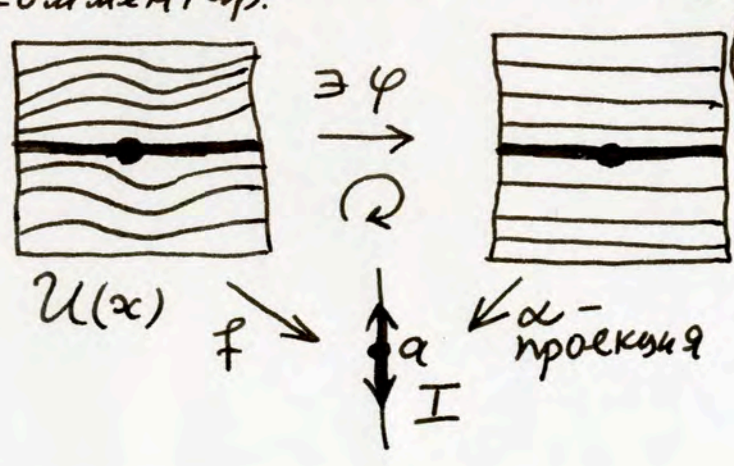
## Лекция 1.

- Напомин. о классич. теории Морса:
  $M^n$, $f(x)$, $C^\infty(M)$, крит. точки: $df(x_0)=0$,
  невырож. крит. точка: $d^2f\big|_{x_0}$ – невыр. т.е. $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)$ – невырож. квадр. матрица. Индекс $\lambda$ невыр. крит. точки.
- Теор. (Морс). Рассм. $M^n$ и $f(x)$; пусть все "срезы" $(f(x) \leq c = \text{const})$ – компактны. Пусть $f$ – ф-я Морса.
  Тогда: 1) $M$ гомотоп. эквивал. клеточн. комплексу:
  $M^n \sim \bigcup_{i,\lambda} \sigma_i^\lambda$, где клетки $\sigma_i^\lambda \longleftrightarrow x_i$ (крит. т. $ind=\lambda$).
  2) $M$ гомеоморфно объедин. ручек $M^n \approx \bigcup_{i,\lambda} H^n_{i,\lambda}$, где
  $H^n_\lambda = D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ и ручки $H^n_{i,\lambda} \longleftrightarrow x_i$ = крит. т. $ind=\lambda$.
- Однако в прилож. (физика, биология, химия) далеко не всегда крит. точки невырожд. А тем не менее получить информ. о топологии $M$ – надо. Оказыв., есть красивое обобщение теор. Морса – это теория Люстерника-Шнирельмана.
- Отказ от невырож. крит. точек. Более общо: точки бифуркации.
  Опред. точки бифуркации: сначала – регул. точка:
  $f: X \to \mathbb{R}^1$, где $f$ – непрер. отобр. хаусд. топол. пр-ва $X$ в $\mathbb{R}$



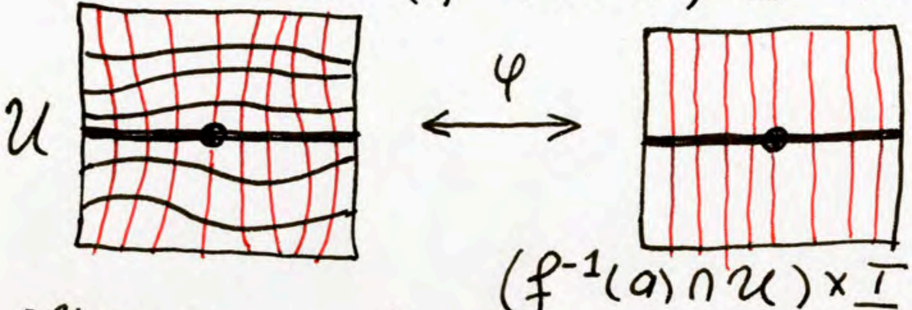

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "\exists\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & (f^{-1}(a)\cap\mathcal{U})\times I \arrow[d, "\alpha = \text{проекция}"] \\ & \mathbb{R}^1 \end{tikzcd}$$

точка $x$ называв. регулярной, если $\exists$ ее откр. окр. $\mathcal{U}(x)$ и гомеоморф. $\varphi: \mathcal{U}(x) \longrightarrow (f^{-1}(a)\cap\mathcal{U})\times I$ такой, что диаграмма коммут., т.е. $f=\alpha\circ\varphi$ (см. выше).
- В противн. случае точка $x$ называв. точкой бифуркации.
- Комментар.




Надо, чтобы при гомеом. $\varphi$ слои $f^{-1}(t)$, где $a-\varepsilon \leq t \leq a+\varepsilon$ переходили в слои $f^{-1}(a)\times t$, где $t\in I$ в прямом произведении $(f^{-1}(a)\cap\mathcal{U})\times I$.

Теперь мы можем "нарисовать" в $U$ "вертикальные" одномерные слои. Это — прообразы вертикальных слоев в прямом произв. $(f^{-1}(a)\cap U)\times I$ при гомеоморф. $\varphi$:



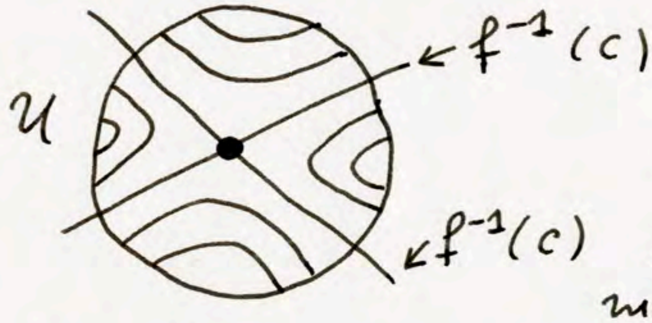

эти "вертикальные слои" — аналоги линий тока вект. поля $\operatorname{grad} f$ на гладком многообр. $M$. Они ортогональны поверхн. уровня $f^{-1}(t)$, $t\in I$.

• Итак, это — правильные точки $x$. Все остальные — это точки бифуркации, "плохие".

Пример. Пусть $f: M\to\mathbb{R}$ — ф-я Морса. Тогда ее крит. точки явл. точк. бифуркации (в новом смысле). Д-во. Пусть $x$ — точка min или max. Тогда окрестн. $U$ такова:

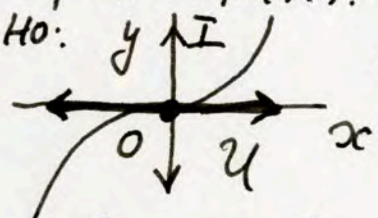

Если $c$ — это знач. $f$ в такой точке, то $x=f^{-1}(c)=$ точка. Ясно, что $U\neq f^{-1}(c)\times I$, т.к. $\dim U=n$, а $\dim(x\times I)=1$. Здесь $n\geqslant 2$.

Если же $x$ — седлов. крит. т. для $f$, то $U$ имеет вид:




Очевидно, что $U\neq f^{-1}(c)\times I$. Здесь $f^{-1}(c)=$ "конус". Потому $f^{-1}(c)\times I$ — не многообр.

• Если же $x$ — вырожд. крит. точка гладк. $f$ на $M$, то $x$ может не быть точк. бифурк. (в новом смысле), т. е. может оказаться правил. (регул.) точкой. Пример: $y=x^3$. Здесь $x=0$ — вырожд. крит. т.: $df=3x^2dx$, $f''=6x$ и $=0$ при $x=0$. Но:

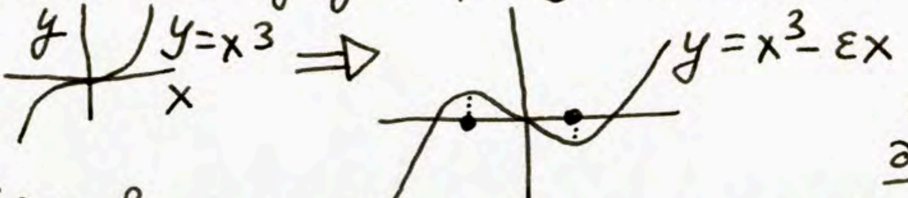



Здесь $U\simeq f^{-1}(0)\times I$, т. к. $f^{-1}(0)=0$ (точка). Т.е. $x=0$ — правил. точка (в новом смысле). Т.е. $f: U\to I$ — это гомеоморф.: $x\to x^3$.

• Вот условн. схема взаимод. крит. точек гладк. ф-й и точек бифуркации:


В дальнейшем мы будем рассматр. в основном $f: M\to\mathbb{R}$, где $M$ и $f$ — гладкие, но $f$ не обязат. ф-я Морса. Но будем предполаг. что $f$ имеет лишь <u>конечное</u> число точек бифурк. на $M$.

• При гладк. деформации (гомотопии) функции точки бифурк. могут сливаться и распадаться. Пример: $y = x^3 - \varepsilon x$,
$y' = 3x^2 - \varepsilon = 0 \to x = \pm\sqrt{\varepsilon/3}$, т.е. две невырожд. крит. точки могут сливаться в одну вырожд. особенность:




Как оценить снизу число крит. точек функции на данном многообр.?

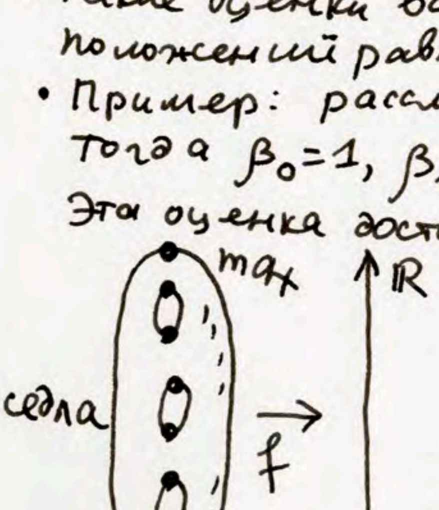
• Если $f$ — ф-я Морса, то такие оценки есть. По теор. Морса $M = \bigcup_{i,\lambda} \sigma_i^\lambda$, где $\sigma_i^\lambda \longleftrightarrow x_i$ ($ind = \lambda$). Рассмот. число $\mu_\lambda = \#$(крит. точек $ind = \lambda$). Тогда $\mu_\lambda(f)$ = кол-во образующ. в группе клеточн. цепей $C_\lambda(M, \mathbb{Z})$, т.к. клетки $\sigma_i^\lambda$ — это образующие. Но тогда $\mu_\lambda(f) \geqslant$ ранг $H_\lambda(M, \mathbb{Z}) = \beta_\lambda$ — число Бетти в размерн. $= \lambda$.

• Теор. $\mu_\lambda(f) \geqslant \beta_\lambda$ для $\forall$ ф-ции Морса $f$ на $M$, $\Rightarrow$
$\mu(f) = \sum_\lambda \mu_\lambda(f) \geqslant \sum_\lambda \beta_\lambda$.

• Это — оценка снизу на число крит. точ. $\forall$ ф-ции Морса $f$ на данном $M$. Оценка — через топологию многог. $M$.

• Такие оценки важны в физике для оценки снизу числа положений равновесия физич. систем.

• Пример: рассм. $M^2 = S^2 + g$(ручек), ориент. 2-поверхн. Тогда $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 2g$, $\beta_2 = 1$ и $\mu(f) \geqslant 1 + 2g + 1 = 2(1+g)$.
Эта оценка достигается для ф-ции высоты в $\mathbb{R}^3$:



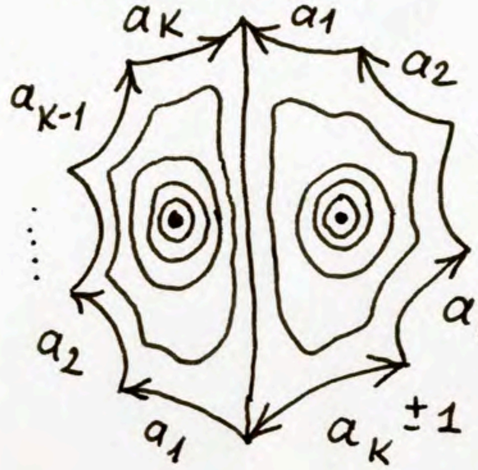

вложение $M^2$ в $\mathbb{R}^3$, как показано. Здесь $\mu(f) = 2 + 2g$. 1 min, $2g$ седел, 1 max. Итак, на данном $M_g^2$ нельзя найти ф-ю Морса с меньшим числом крит. точек.

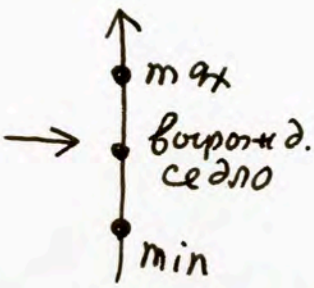
• А теперь разрешим крит. точкам вырождаться (например, сливатся). Тогда их число может уменьшится. Останется ли некая другая оценка снизу на их кол-во, через топологию $M$? Рассмот. пример с вырожд. особенн. на $M_g^2$.

• Зададим $M^2$ (ориент. или неориент.) симметричным "словом" = = фундам. многоуг. $W = a_1 a_2 \dots a_k a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_{k-1}^{-1} a_k^{\pm 1}$, где $-1$ отвечает ориент. $M^2$, а $+1$ отвеч. неориен. $M^2$.

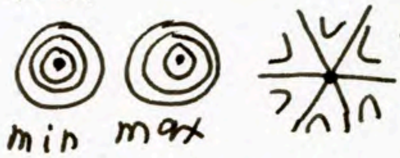
Утв. На $M^2$ всегда $\exists$ гладк. ф-я с ровно 3 крит. точк. 1 min, 1 max, 1 седло — вырожденное. Здесь $g \geqslant 1$ (род).

Д-во. Зададим функц. $f$ на $M^2$ ее линиями уровня на многоуг. $W$:




Три крит. точки:



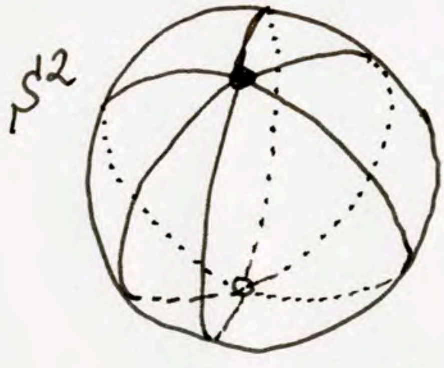

итак, для такой функции $\mu(f)=3$, а $\sum \beta_k = 2+2g$ и при $g \geq 1$: $3 < 4$, т.е. аналог нер-ва здесь нарушен.

•Замечание. Построить на $M^2_g$, $g \geq 1$, ф-ю с ровно 2 крит. точками нельзя.

•Теор. Если на гладк. комп. замкн. мног. $M^2$ есть ф-я с 2 крит. точками, то $M^2$ — сфера.
Д-во несложное, но мы его опустим.

•Утв. Если $g \geq 1$, то построенн. на $M^2_g$ ф-я с 3 крит. точк. не может быть реализована как ф-я высоты при вложении (погружении) $M^2_g$ в $\mathbb{R}^3$. (Докажите!)

Утв. Если $f$ — ф-я высоты на $M^2_g$, $g \geq 1$, при погружении в $\mathbb{R}^3$, то $\mu(f) \geq 4$. (Докажите!). Эта оценка достигается. Для д-ва можно рассмотреть малую трубчат. окрестн. набора меридианов на сфере, и взять границу этой окрестн.




Получится ф-я с 4 крит. точк. на $M^2_g$, т.е. $\mu(f)=4$.
1 min, 1 max, 2 вырожд. седла.

•Итак, задача: оценить снизу $\mu(f)$ (т.е. число точек бифуркации) для $\forall$ гладк. ф-ции на $M^n$ с изолирован. критич. точками (быть может, вырожден.). Это можно сделать при помощи нового понятия — $\operatorname{cat} M$ — категории Люстерника-Шнирельмана.

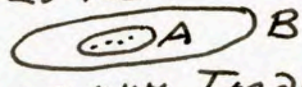
•Определ. Пусть $X$ — топол. хаусд. пр-во и $A \subset X$ — замкн. подмн-во в $X$. Тогда категория Л.Ш. $\operatorname{cat}_X A$ — это наименьшее число замкн. множеств $A_i$ в $X$ таких, что: $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ и каждое $A_i$ стягив. в точку по $X$: $A_i \longrightarrow *$. При этом $A_i$ не предполаг. связными. Если $A = X$, то $\operatorname{cat}_X X = \operatorname{cat} X$ и называется категорией $X$.

•Теор. (Люст.-Шнирел.) Пусть $M$ — связное глад. мног. и $f$ — гладк. ф-я на $M$ с изолиров. точками бифуркац. Тогда $\mu(f) \geq \operatorname{cat} M$. (Крит. точки могут быть вырожд.).

Д-во – это цепочка лемм, раскрыв. св-ва категории $\mathrm{cat}_X A$.

• **Лемма 1**. Пусть $X \supset B \supset A$ – замкнуты. Тогда $\mathrm{cat}_X A \le \mathrm{cat}_X B$.

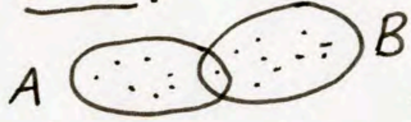
Д-во. Пусть $\mathrm{cat}_X B = k$, тогда $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$, где $B_i$ все замкн. и $\to *$ по $X$. Положим $A_i = B_i \cap A$. Тогда $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, все $A_i$ замкн. и все $A_i \to *$ по $X$. Но такое покрытие $A$ может быть не оптимально, а потому $\mathrm{cat}_X A \le k = \mathrm{cat}_X B$. Чтд.




• **Лемма 2**. Пусть $A, B \subset X$, оба замкн. Тогда

$$\mathrm{cat}_X (A \cup B) \le \mathrm{cat}_X A + \mathrm{cat}_X B.$$

Д-во.



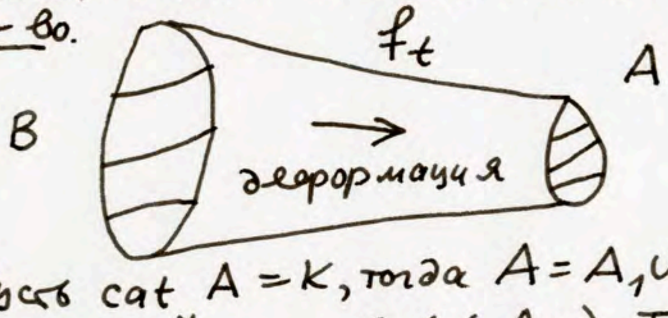

Пусть $k = \mathrm{cat}_X A$ и $p = \mathrm{cat}_X B$, тогда $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ и $B = B_1 \cup \ldots \cup B_p$, где $A_i \to *$, $B_i \to *$. Тогда $A \cup B = A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup B_1 \cup \ldots \cup B_p$ и мы получили "хорошее" покрытие. Но оно быть может не оптимал., а потому $\mathrm{cat}_X (A \cup B) \le k + p = \mathrm{cat}_X A + \mathrm{cat}_X B$. Чтд.

• **Лемма 3**. Пусть $B \supset A$, тогда $\mathrm{cat}_X (\overline{B \setminus A}) \geqslant \mathrm{cat}_X B - \mathrm{cat}_X A$.

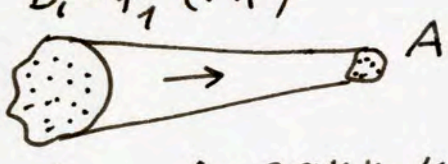
Д-во. Так как $B = A \cup (\overline{B \setminus A})$, то из леммы 2 имеем: $\mathrm{cat}_X B \le \mathrm{cat}_X A + \mathrm{cat}_X (\overline{B \setminus A})$. Чтд.

• **Лемма 4**. Пусть $B \subset X$ и задана гомотопия $f_t : B \to X$, где $f_0 = id$, $f_0(B) \equiv B$; $f_1(B) = A \subset X$. Тогда $\mathrm{cat}_X A \geqslant \mathrm{cat}_X B$. Т.е. при гомотопии замкн. подмн-ва в $X$ его категория может только повыситься. ($A$ называв. деформационным ретрактом $B$).

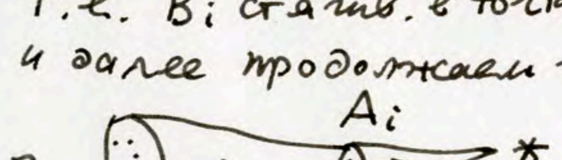
Д-во.




$B_i = f_1^{-1}(A_i)$




Пусть $\mathrm{cat}_X A = k$, тогда $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, $A_i$ замк. и $\to *$ по $X$. Положим $B_i = f_1^{-1}(A_i)$. Тогда все $B_i$ – замкн, т.к. $f_1$ – непрер. отобр. Прообраз замкнутого – замкнут. Далее: $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$. И далее: $B_i \to *$ по $X$, т.к. $A_i \to *$ по $X$. Т.е. $B_i$ стягив. в точку по $X$ при гомотопии $f_t : B_i \to A_i$ и далее продолжаем гомотопию, стягивая $A_i$ в точку.




Итак: $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ – "хорошее" покрытие, но быть может, не оптимальное, а потому

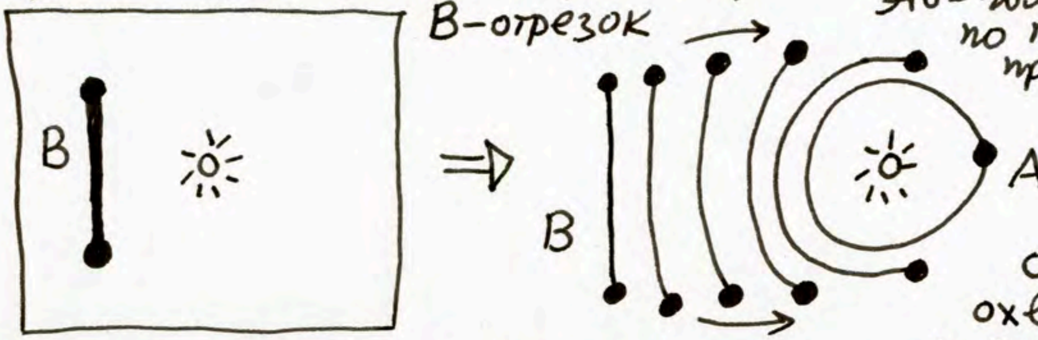
$$\mathrm{cat}_X B \le k = \mathrm{cat}_X A. \text{ Чтд.}$$

• Пример, когда $\mathrm{cat}_X B$ может увеличиться при гомотопии $B \to A$.

$X=\mathbb{R}^2\setminus *$ (плоск. с проколом)

B-отрезок

это-гомотопия B по плоскости с проколом.




$A=S^1=f_1(B)$

отрезок B охватывает дырку и превращ. в окружн.

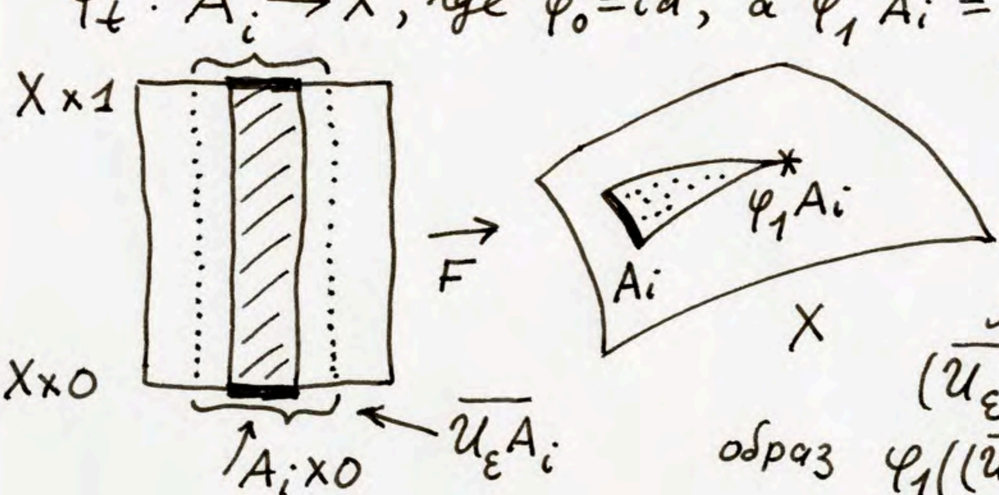
Ясно, что $\mathrm{cat}_X B = 1$ (отрезок стягив. в точку), а $\mathrm{cat}_X A = 2$, т.к. $A=S^1$ не стягив. в точку на плоск. с проколом. Итак, $\mathrm{cat}_X A > \mathrm{cat}_X B$.

• Лемма 5. Пусть теперь $X$ — многообр. и $A\subset X$ замкн. мн-во. Тогда $\exists\, \varepsilon>0$ такое, что $\mathrm{cat}_X(\overline{U_\varepsilon A}) = \mathrm{cat}_X A$.

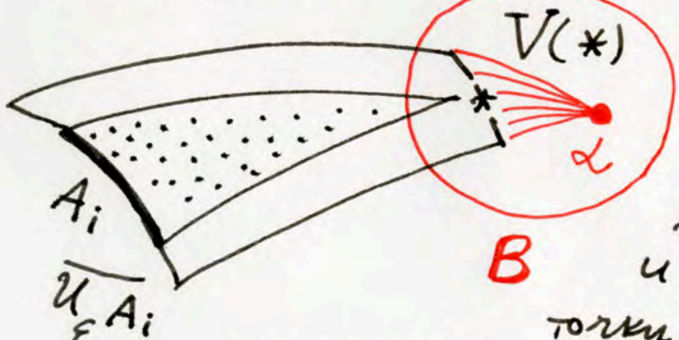
Д-во. В одну сторону, имеем нер-во: $\mathrm{cat}_X A \le \mathrm{cat}_X \overline{U_\varepsilon A}$, т.к. $A\subset \overline{U_\varepsilon A}$. Обратно сложнее. Пусть $\mathrm{cat}_X A = k$, т.е. $A=A_1\cup\ldots\cup A_k$, все $A_i\to *$ по $X$ и замкн.

Сейчас мы докажем, что $\exists\,\varepsilon>0$: $\overline{U_\varepsilon A_i}\to *$ по $X$ вслед за $A_i$. Если это уже доказано, то $\overline{U_\varepsilon A}=\bigcup_{i=1}^{k}\overline{U_\varepsilon A_i}$ а потому $\mathrm{cat}_X\overline{U_\varepsilon A}\le k=\mathrm{cat}_X A$. Чтд.

Осталось доказать для каждого $A_i$. Дана гомотопия $\varphi_t: A_i\to X$, где $\varphi_0=id$, а $\varphi_1 A_i = *$. То есть: $F: A_i\times I\to X$

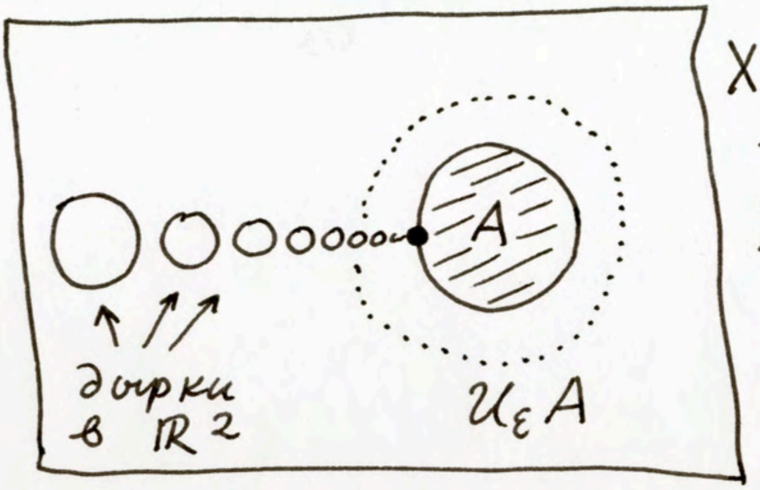



По теореме Титса отображ. F можно (в случае многообразия X) продолжить до непрер. отобр. на малую окрестность $(\overline{U_\varepsilon A_i})\times I$. Тогда образ $\varphi_1((\overline{U_\varepsilon A_i})\times 1)$ содержит точку $*\in X$ и расположен в малой окрест. $V(*)$ в $X$:




Но так как $X$ — многог., то окрестн. $V(*)$ можно считать лежащей внутри диска $B\subset X$. Поэтому гомотопию можно продолжить и стянуть $\varphi_1((\overline{U_\varepsilon A_i})\times 1)$ в точку $\alpha\in B$. Тем самым, вся окрестн. $\overline{U_\varepsilon A_i}$ стянулась в точку по $X$. Чтд.

Если $X$ — не многообр., то лемма 5 неверна. Контрпример.




$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{D}^2_i$$

т.е. выбросим из плоскости счетное число дисков так, чтобы дырки накапливались к точке на границе диска $A$.

Т.к. $A$ — диск, то $\mathrm{cat}_X A = 1$, диск стягивается.

Но для $\forall \varepsilon > 0$ $\mathrm{cat}_X \overline{U_\varepsilon A} > 1$, т.к. в $U_\varepsilon A$ всегда есть счетное число дырок.

Кстати, $\mathrm{cat}_X \overline{U_\varepsilon A} = 2$, так как

$\overline{U_\varepsilon A} = P \cup Q$, где $P$ и $Q$ замкн. и очевидно $P \to *$ и $Q \to *$ по $X$.