

АКАДЕМИК А. Т. ФОМЕНКО
ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
Спецкурс для студентов, начиная с 1-2 курсов и для
аспирантов

Осенний семестр:

ВВЕДЕНИЕ

Введение. Кривые на плоскости и в пространстве.

Тема 1. ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Двумерные поверхности. Погружения и вложения двумерных поверхностей в евклидово пространство. Сфера Александра. Теорема классификации двумерных поверхностей. Связная сумма. Ориентируемость и неориентируемость. Свойства проективной плоскости, бутылки Клейна, сфер с ручками.

Тема 2. МНОГОМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ (МНОГООБРАЗИЯ).

Многомерные многообразия как поверхности в евклидовом пространстве. Задание гладкого многообразия при помощи локальных карт и атласа. Теоремы Уитни и вложения и погружении многообразий в евклидово пространство. Трехмерные многообразия. Разложение трехмерной сферы в сумму двух полноторий. Расслоение Хопфа. Многомерные проективные пространства. Матричные группы как гладкие многообразия.

Тема 3. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА (КОМПЛЕКСЫ)

Симплициальные пространства. Триангуляции и клетки. Гомотопия, гомотопическая эквивалентность. Изотопия. Теория накрытий. Степень отображения гладких многообразий. Фундаментальная группа клеточного комплекса (образующие и соотношения). Накрытия и фундаментальная группа. Теорема о накрывающей гомотопии. Универсальные накрытия. Теорема ван Кампена (без док-ва). Разветвленные накрытия. Римановы поверхности алгебраических функций и их связь с накрытиями и двумерными многообразиями.

Тема 4. ГОМОЛОГИИ

Симплициальные гомологии. Клеточные гомологии. Теорема об их совпадении для "хороших пространств" (без док-ва). Эйлерова характеристика. Основные свойства групп гомологий. Примеры вычисления. Точная гомологическая последовательность пары.

Тема 5. ТЕОРИЯ МОРСА

Невырожденные критические точки, их индекс. Лемма Морса. Основные свойства функций Морса. Перестройки поверхностей уровня функций Морса. Операция приклейки ручек. Основная теорема теории Морса (связь между клеточной структурой многообразия и критическими точками функции). Простые и сложные функции Морса. Понятие атома-бифуркации. Молекулы и функции Морса. Послойная классификация функций Морса на двумерных поверхностях.

Весенний семестр

Категория Люстерника-Шнирельмана. Точки бифуркаций функций. Теорема Люстерника-Шнирельмана (связь между категорией и числом точек бифуркации функции).

Тема 6. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГРУППАХ ЛИ И АЛГЕБРАХ ЛИ

Матричные группы как гладкие многообразия и как группы Ли. Алгебра Ли и ее связь с группой Ли. Матричные группы малых размерностей.

Тема 7. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Линейная симплектическая структура. Изотропность, лагранжевость. Группа симплектических преобразований.

Тема 8. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Симплектическая структура на многообразии. Теорема Дарбу. Канонические симплектические координаты. Примеры симплектических многообразий (касательные расслоения и т.п.). Косой градиент и гамильтоновы векторные поля (динамические системы). Связь с потенциальными векторными полями. Лемма Пуанкаре. Несжимаемые потоки идеальной жидкости. Комплексные потенциалы. Скобка Пуассона и ее основные свойства. Тожество Якоби для скобки Пуассона.

Тема 9. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Интегралы гамильтоновых полей. Инволютивность. Теорема Лиувилля. Полная интегрируемость по Лиувиллю. Отображение момента интегрируемой системы.

Бифуркации торов Лиувилля и топология интегрируемой системы. Уравнения движения тяжелого твердого тела в трехмерном пространстве (уравнения Эйлера-Пуассона). Знаменитые случаи интегрируемости: случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской.