**АКАДЕМИК А.Т.ФОМЕНКО**

**ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

**Годовой спецкурс для студентов, начиная с 1 курса - до аспирантов.**

**1.Осенний семестр**

**ВВЕДЕНИЕ**

**Кривые на плоскости и в пространстве.**

**Тема 1. ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ**

**Двумерные поверхности. Погружения и вложения двумерных поверхностей в евклидово пространство. Сфера Александера. Теорема классификации двумерных поверхностей. Связная сумма. Ориентируемость и неориентируемость. Свойства проективной плоскости, бутылки Клейна, сфер с ручками.**

**Тема 2. МНОГОМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ (МНОГООБРАЗИЯ).**

**Многомерные многообразия как поверхности в евклидовом пространстве. Задание гладкого многообразия при помощи локальных карт и атласа. Теоремы Уитни и вложении и погружении многообразий в евклидово пространство. Трехмерные многообразия. Разложение трехмерной сферы в сумму двух полноторий. Расслоение Хопфа. Многомерные проективные пространства. Матричные группы как гладкие многообразия.**

**Тема 3. КЛЕТОЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА (КОМПЛЕКСЫ)**

**Симплициальные пространства. Триангуляции и клетки. Гомотопия, гомотопическая эквивалентность. Изотопия. Теория накрытий. Степень отображения гладких многообразий. Фундаментальная группа клеточного комплекса (образующие и соотношения). Накрытия и фундаментальная группа. Теорема о накрывающей гомотопии. Универсальные накрытия. Теорема ван Кампена (без док-ва). Разветвленные накрытия. Римановы поверхности алгебраических функций и их связь с накрытиями и двумерными многообразиями.**

**Тема 4. ГОМОЛОГИИ**

**Симплициальные гомологии. Клеточные гомологии. Теорема об их совпадении для "хороших пространств" (без док-ва). Эйлерова характеристика. Основные**

**свойства групп гомологий. Примеры вычисления. Точная гомологическая последовательность пары.**

**Тема 5. ТЕОРИЯ МОРСА**

**Невырожденные критические точки, их индекс. Лемма Морса. Основные**

**свойства функций Морса. Перестройки поверхностей уровня функций Морса.**

**Операция приклейки ручек. Основная теорема теории Морса (связь между клеточной структурой многообразия и критическими точками функции).**

**Простые и сложные функции Морса. Понятие атома-бифуркации.**

**Молекулы и функции Морса. Послойная классификация функций Морса на**

**двумерных поверхностях. Категория Люстерника-Шнирельмана. Точки бифуркаций функций. Теорема Люстерника-Шнирельмана (связь между категорией и числом точек бифуркации функции.**

**2. Весенний семестр**

**Тема 6. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГРУППАХ ЛИ И АЛГЕБРАХ ЛИ**

**Матричные группы как гладкие многообразия и как группы Ли. Алгебра Ли**

**и ее связь с группой Ли. Матричные группы малых размерностей.**

**Тема 7. СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

**Линейная симплектическая структура. Изотропность, лагранжевость. Группа симплектических преобразований.**

**Тема 8. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ**

**Симплектическая структура на многообразии. Теорема Дарбу. Канонические симплектические координаты. Примеры симплектических многообразий (кокасательные расслоения и т.п.). Косой градиент и гамильтоновы векторные поля (динамические системы). Связь с потенциальными векторными полями. Лемма Пуанкаре. Несжимаемые потоки идеальной жидкости. Комплексные потенциалы. Скобка Пуассона и ее основные свойства. Тождество Якоби для скобки Пуассона.**

**Тема 9. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ**

**Интегралы гамильтоновых полей. Инволютивность. Теорема Лиувилля. Полная**

**интегрируемость по Лиувиллю. Отображение момента интегрируемой системы.**

**Бифуркации торов Лиувилля и топология интегрируемой системы. Уравнения**

**движения тяжелого твердого тела в трехмерном пространстве (уравнения**

**Эйлера-Пуассона). Знаменитые случаи интегрируемости: случаи Эйлера, Лагранжа, Ковалевской.**