МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И
ПРИЛОЖЕНИЙ

И. К. Козлов, Д. А. Федосеев

Дифференциальная геометрия и тензорный анализ в задачах

Москва 2022 год

Оглавление

I Тензоры **9**

1 Понятие тензора и его компонент **13**

1.1 Введение 13

1.1.1 Определение тензора 13

1.1.2 Компоненты тензора на линейном пространстве 15

1.1.3 Тензоры на многообразиях 17

1.1.4 Несколько слов о тензорных полях . . 19

1.2 Нахождение компонент тензора 20

1.3 Тензоры и матрицы 23

1.4 Инвариантные тензоры 28

1.5 Тензоры и производные функции 34

1.6 Отображение тензорных пространств 38

2 Операции над тензорами **41**

2.1 Алгебраические операции над тензорами . . . 41

2.2 Задачи на применение тензорных операций . 45

2.3 Теоретические задачи 51

2.4 Определитель как тензорная операция 53

3 Симметричные и кососимметричные тензоры **57**

3.1 Симметрическая и внешняя алгебры 57

3.1.1 Симметрическая алгебра 58

3.1.2 Внешняя алгебра 61

3.2 Операции Sym и Alt 64
3.3 Внешнее и симметрическое произведения . . . 68
3.4 Линейные дифференциальные формы 69
3.4.1 Разложимость дифференциальных форм 69
3.4.2 Форма объёма 72
3.4.3 Оператор двойственности Ходжа . . . 74

II Тензорные поля 81

4 Векторные поля 85
4.1 Определение касательного вектора 85
4.1.1 Вектор как тензор типа $(1, 0)$ 86
4.1.2 Касательный вектор кривой 87
4.1.3 Векторы как дифференциальные операторы 88
4.1.4 Взаимосвязь трех определений 90
4.2 Градиент функции 93
4.3 Коммутатор векторных полей 97
4.4 Тензор Нийенхейса 102

5 Дифференциальные формы 105
5.1 Операции над дифференциальными формами 106
5.1.1 Внешнее произведение 106
5.1.2 Внешний дифференциал 107
5.1.3 Прообраз дифференциальной формы . 111
5.1.4 Интеграл 116
5.2 Формула для внешнего дифференциала . . . 119
5.3 Производная Ли 121
5.4 Локальная интегрируемость форм 126
5.5 Формула Стокса 129
5.6 Геометрический смысл операций $\mathrm{grad}, \mathrm{rot}, \mathrm{div}$ 132

III Аффинная связность и ковариантная производная 137

6 Символы Кристоффеля 141
6.1 Введение понятия символов Кристоффеля . . 141
6.2 Вычисление символов Кристоффеля 143
6.3 Некоторые свойства символов Кристоффеля . 146
6.4 Символы Кристоффеля для стандартных метрик 149

7 Аффинная связность 153
7.1 Определение аффинной связности 153
7.2 Ковариантная производная векторных полей 155
7.3 Тензор кручения 157

8 Ковариантная производная 161
8.1 Определение ковариантной производной тензорных полей 161
8.2 Вычисление ковариантной производной 163
8.3 Свойства ковариантной производной 168
8.3.1 Ковариантная производная на подмногообразии 168
8.3.2 Ковариантная дивергенция 171
8.3.3 Ковариантная и внешняя производные 173

IV Геометрия многообразий с аффинной связностью 175

9 Параллельный перенос и геодезические 179
9.1 Параллельный перенос 179
9.1.1 Определение понятие параллельного переноса 179
9.1.2 Параллельный перенос на конкретных многообразиях 181

9.1.3 Ковариантное постоянство формы объема 183
9.2 Геодезические 185
9.2.1 Определение понятия геодезической . 185
9.2.2 Нахождение геодезических 187
9.2.3 Геодезические на поверхности Лиувилля 189
9.2.4 Геодезические на подмногообразиях . . 192
9.2.5 Изометрии многообразий 194

10 Экспоненциальное отображение 197
10.1 Определение экспоненциального отображения 197
10.2 Нормальные (геодезические) координаты . . . 199
10.3 Полугеодезические координаты 202
10.4 Геодезические как локально кратчайшие . . . 205

11 Тензор кривизны Римана 207
11.1 Определение и свойства тензора Римана . . . 207
11.2 Тензор Римана кривых и поверхностей 210
11.3 Тензор Римана и плоскость метрики 217
11.4 Тензор Эйнштейна 219
11.4.1 Второе тождество Бьянки 219
11.4.2 Тензор Эйнштейна и его бездивергентность 221
11.4.3 Пространство Эйнштейна 222

V Степень отображения и когомологии де Рама 223

12 Гомотопия и гомотопическая эквивалентность 227

13 Степень отображения 233
13.1 Понятие степени отображения 233

13.2 Степень отображения в некоторых конкретных случаях 235
13.2.1 Простейшие задачи на степень отображения 235
13.2.2 Примеры вычисления степени отображения 238
13.2.3 Степень отображения сферы 244
13.3 Другие применения степени отображения . . 247
13.3.1 Теорема Борсука-Улама и теорема о еже 247
13.3.2 Отображение матричных групп 249
13.3.3 Индексы особых точек 250
13.3.4 Степень отображения и интеграл . . . 254

14 Когомологии де Рама 257
14.1 Определение когомологий де Рама 257
14.2 Некоторые задачи на вычисление групп когомологий 262
14.2.1 Замкнутые и точные формы 262
14.2.2 Вычисление первых когомологий . . . 264
14.2.3 Теорема Майера–Вьеториса 268
14.2.4 Когомологии простейших пространств 271
14.3 Точные симплектические многообразия 275

A Соглашения и договорённости 279

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящей книги — изложить основной материал курса дифференциальной геометрии и тензорного анализа через призму теоретических и практических задач. Дифференциальная геометрия — важный раздел математики, идеи и результаты которого находят широкое применение в математике, механике, физике. Тем не менее — или, возможно, именно поэтому — курс может оказаться достаточно сложен для восприятия с первой встречи. Решения задач играет потому важнейшую роль в освоении материала, позволяя не только столкнуться с формально доказанными общими утверждениями, но и пощупать изучаемые объекты на конкретных примерах.

Каждый раздел книги открывается необходимым теоретическим материалом, включающим в себя определения и некоторые факты, доказательство которых выходит за рамки целей данной книги. Затем следуют задачи с подробными решениями. В каждом разделе мы будем стараться давать основные задачи по данной тематике. Дополнительные задачи по каждой теме можно найти в [1] или [2]. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями линейной алгебры, математического анализа и топологии.

Часть I

Тензоры

В первой части книги речь пойдет о тензорах — естественных обобщениях понятия вектора и ковектора, играющих существенную роль в геометрии и механике. Мы начнем с рассмотрения тензоров на произвольном векторном пространстве, а затем сосредоточимся на более конкретном случае тензоров на многообразии. Подобно векторам, тензор может быть рассмотрен с двух эквивалентных позиций: как полилинейное отображение из определенного линейного пространства в фиксированное поле и как набор компонент, меняющихся определенным образом при замене координат. В этой части мы рассмотрим и будем пользоваться обоими определениями тензора.

Структура настоящей части такова.

В теме 1 будет введено понятие тензора и его компонент, изучено, как компоненты меняются при замене базиса пространства. Кроме того, будет установлена связь между тензорами и известными понятиями из линейной алгебры, такими как линейный оператор или определитель матрицы.

Тема 2 посвящена основным алгебраическим операциям над тензорами (дифференциальные операции будут рассмотрены в последующих частях).

В теме 3 будут рассмотрены два важных подпространства тензоров: симметричные и кососимметричные тензоры.

Тема 1

Понятие тензора и его компонент

1.1 Введение

1.1.1 Определение тензора

Рассмотрим векторное пространство V над полем $\mathbb{K}$. Обычно мы будем рассматривать тензоры на конечномерных вещественных или комплексных пространствах (иными словами, для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Как будет видно из дальнейшего, при изучении тензоров на многообразиях в качестве пространства V берется касательное пространство $T_P M$ к многообразию M в точке P.

Напомним, что *двойственное пространство* V^* — это пространство линейных функционалов на пространстве V, то есть линейных отображений $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$. Элементы двойственного пространства называются *ковекторами*.

Из линейной алгебры известно, что в конечномерном случае $(V^*)^* \cong V$. Отсюда следует, что эти два пространства можно отождествить, а потому можно говорить, что не только ковектора действуют на векторах по правилу

$$\alpha\colon v \mapsto \alpha(v),$$

но и вектора действуют на ковекторах, причем по определению полагают

$$v(\alpha) := \alpha(v).$$

Эта двойственность будет в дальнейшем играть важную роль в тензорном анализе.

Определение 1.1. Тензор T типа (p,q) на линейном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ — это полилинейное отображение

$$T\colon \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q} \to \mathbb{K}.$$

Число $r = p + q$ называется **валентностью** или **рангом**[1] тензора T.

Приведем несколько простых и базовых примеров тензоров.

(0) Тензор типа $(0,0)$ — скаляр $c \in \mathbb{K}$.

(1) Тензор типа $(1,0)$ — вектор $v\colon V^* \to \mathbb{K}$.

(2) Тензор типа $(0,1)$ — ковектор $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$.

(3) Тензор типа $(0,2)$ — билинейная форма

$$B\colon V \times V \to \mathbb{K}.$$

(4) Тензор типа $(2,0)$ — билинейная форма на V^*, т.е.

$$Q\colon V^* \times V^* \to \mathbb{K}.$$

[1] Термин "ранг" не очень удачен — для билинейных форм и операторов нужно отличать ранг тензора и ранг соответствующей матрицы.

(5) Тензор типа $(1,1)$ — линейный оператор

$$A\colon V^* \times V \to \mathbb{K}.$$

(6) Линейная форма объёма на линейном пространстве V^n

$$\Omega : \underbrace{V^n \times \cdots \times V^n}_{n} \to \mathbb{K}$$

является (абсолютно кососимметричным) тензором типа $(0,n)$ на V^n.

Комментарий 1.1. Как видно из определения, ранг тензора определяет количество аргументов этого полилинейного отображения. В частности, скаляр, не берущий ни одного аргумента, является тензором нулевого ранга, а потому тензором типа $(0,0)$.

В линейной алгебре линейный оператор определялся как линейное отображение $A\colon V \to V$, а потому не являлся тензором. Тем не менее, линейные операторы могут рассматриваться как тензоры типа (1,1). Мы вернемся к этому в замечании 1.6 и задаче 1.16.

Термин "(абсолютно) кососимметричный тензор" станет ясен, когда мы обсудим операции на тензорах, в частности, перестановку индексов, см. тему 3 и определение 1.4 ниже.

1.1.2 Компоненты тензора на линейном пространстве

Поскольку линейная комбинация полилинейных отображений из одного и того же пространства в $\mathbb{K}$ является, очевидно, полилинейным отображением, множество всех тензоров типа (p,q) на фиксированном векторном пространстве V образует линейное пространство, обозначаемое T^p_q. Введём базис в этом пространстве. Пусть

- $e_1, \ldots, e_n$ — базис V,
- $e^1, \ldots, e^n$ — двойственный базис V^*, т.е.

$$e^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Любой тензор задаётся набором из n^{p+q} своих **компонент** — значений на всевозможных наборах базисных векторов и ковекторов

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = T\left(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}\right). \tag{1.1}$$

Таким образом, каждый вектор оказался представлен в виде

$$T = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p,\\ j_1,\ldots,j_q}} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q},$$

где через $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$ обозначен тензор, который

- принимает значение 1 на наборе $\left(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}\right)$,
- равен 0 на любом другом наборе базисных векторов и ковекторов.

Базис пространства T^p_q состоит из тензоров $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$ для всевозможных значений индексов: $i_k, j_l \in \{1, \ldots, n\}$.

Замечание 1.1. Обратим внимание на следующий вопрос обозначений и записи. Из формулы (1.1) видно, что чтобы получить i_1 в качестве первого *верхнего* индекса компоненты тензора T, следует поставить i_1-ый базисный ковектор e^{i_1}

первым аргументом этого тензора. Аналогично, чтобы получить *нижний* индекс j_1, нужно применить тензор к j_1-му базисному вектору e_{j_1}.

Базисные вектора принято нумеровать нижними индексами, базисные ковектора, — чтобы они отличались от векторов, — верхними. Рассмотрим некоторый ковектор α. В силу того, что ковектор — это тензор типа $(0, 1)$, и формулы (1.1) имеем

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i)e^i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^i.$$

Соответсвенно, *компоненты* ковектора имеют один *нижний* индекс. Аналогично, компоненты вектора имеют один *верхний* индекс.

1.1.3 Тензоры на многообразиях

Рассмотрим гладкое многообразие M и точку $P \in M$. В этой точке определено касательное пространство $T_P M$ к многообразию M.

Определение 1.2. *Тензором типа* (p, q) *на многообразии* M *в точке* P называют тензор типа (p, q) на векторном пространстве $T_P M$.

Напомним, что если в окрестности точки P введены локальные координаты $(x^1, \ldots, x^n)$, то в касательном пространстве выделяет базис, называемый *каноническим* и обозначаемый

$$\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}.$$

Двойственный базис в кокасательном пространстве $T_P^* M$ обозначается $dx^1, \ldots, dx^n$. В дальнейшем мы увидим, чем обусловлены эти обозначения и почему дифференциалы координат действительно являются ковекторами (см. раздел 1.5 ниже).

Соответственно, каждый тензор $T \in T^p_q$ на многообразии может быть разложен по базису и представлен в виде

$$T = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_p,\\ j_1,\dots,j_q}} T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}.$$

Рассмотрим теперь замену координат $x^i \to x^{i'}$ (такое обозначение подразумевает, что $x^{i'}$ — новые координаты, причем i' — новые индексы, то есть если $i = 1$, это не означает, что $i' = 1$). Можно вычислить, как меняются базисные вектора и ковектора при такой замене, а отсюда вывести, как меняются компоненты тензора T. Оказывается, их преобразование не произвольно, но подчиняется **тензорному закону**

$$T^{i'_1\dots i_p'}_{j_1{}'\dots j_q{}'} = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_p,\\ j_1,\dots,j_q}} T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \frac{\partial x^{i_1{}'}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p{}'}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1{}'}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q{}'}}, \qquad (1.2)$$

где $T^{i'_1\dots i_p'}_{j_1{}'\dots j_q{}'}$ — компоненты тензора в “новых” координатах $x^{i'}$.

Договорённость 1.1 (**Правило суммирования Эйнштейна**). Изобилие индексов в тензорном анализе привело к необходимости введения соглашения, которое упрощает запись и работу с ними. А именно, принято, что в выражениях предполагается *суммирование по обозначенным буквами повторяющимся верхним и нижним индексам.* Эти индексы пробегают все свои возможные значения. Знак суммы при этом опускается.

Например, формула (1.2) записывается как

$$T^{i_1{}'\dots i_p{}'}_{j_1{}'\dots j_q{}'} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} \frac{\partial x^{i_1{}'}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p{}'}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1{}'}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q{}'}}.$$

Замечание 1.2. При работе с тензорами для самопроверки полезно держать в голове следующее мнемоническое правило “баланса индексов”: *если в левой части равенства есть некоторый верхний (нижний) индекс, то и в правой части также должен иметься такой верхний (соответственно, нижний) индекс.* Так, например, в левой части тензорного закона есть верхний индекс ${i_1}'$, значит он должен иметься и в правой. В самом деле, он возникает в множителях вида $\frac{\partial x^{{i_1}'}}{\partial x^{i_1}}$.

1.1.4 Несколько слов о тензорных полях

До сих пор мы работали с тензором как с единичным объектом. В самом деле, тензор на векторном пространстве V — это фиксированное полилинейное отображение. Однако, при работе с тензорами на многообразии ситуация несколько меняется. В самом деле, в каждой точке многообразия определено касательное пространство. Соответственно, имеет смысл рассматривать не один, но целое семейство тензоров: в каждой точке многообразия (или его области) фиксируется тензор. Аналогично понятию векторного поля возникает понятие *тензорного поля на многообразии*:

Определение 1.3. Тензорным полем типа (p, q) на гладком многообразии M называется семейство тензоров T_x, заданных на касательных пространствах T_xM, компоненты которых $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(x)$ гладко зависят от точки x в любых локальных координатах на M.

Замечание 1.3. Тензорное поле также определяют как соответствие, которое любым локальным координатам $x^1, \ldots, x^n$ сопоставляет набор гладких функций $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(x)$, которые при замене локальных координат $x^i \to x^{i'}$ меняются по тензорному закону (1.2).

Из замечания 1.3 следует, что на тензорное поле можно смотреть двояко: как на семейство полилинейных отображений и как на набор функций, меняющихся при замене координат по определенному закону. Подробнее мы к этому вернемся в части II. Сейчас отметим только, что второе определение дает рецепт проверки того, что набор функций задает тензор: нужно проверить, выполняется ли тензорный закон при замене координат.

1.2 Нахождение компонент тензора

Первый тип задач, возникающих при работе с тензорами на векторных пространствах, имеет следующий вид: зная компоненты тензора T для некоторого базиса пространства V и матрицу замены базиса, найти компоненты тензора в новом базисе.

Задача 1.1. Найти компоненту T_1^{11} тензора

$$T = e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2$$

в базисе

$$f_1 = 3e_2, \qquad f_2 = -e_1.$$

Ответ в Задаче 1.1. $T_1^{11} = \frac{2}{3}$.

Решение Задачи 1.1. Искомая компонента — коэффициент при базисном элементе $f^1 \otimes f_1 \otimes f_1$ в разложении тензора T по базису, иными словами, по формуле (1.1),

$$T_1^{11} = T(f_1, f^1, f^1).$$

Поскольку нам дан явный вид тензора T в базисе (e_1, e_2), мы можем вычислить его значение на любых векторах и ковекторах, записанных в этом базисе. Следовательно, для решения задачи необходимо выразить новые базисные элементы через старые.

Выражение f_i через e_i мы знаем. Остаётся выразить f^j через e^j.

Лемма 1.2. *Если матрица перехода между базисами равна A, то матрица перехода между двойственными базисами равна $(A^T)^{-1}$. Иными словами,*

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, & \ldots, & e_n \end{pmatrix} A \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} f^1, & \ldots, & f^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1, & \ldots, & e^n \end{pmatrix} (A^T)^{-1}.\end{gathered}$$

Доказательство Леммы 1.2. Нужно доказать, что

$$\begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1, & \ldots, & e_n \end{pmatrix} A \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}.$$

Достаточно рассмотреть значения базиса из ковекторов на базисе из векторов. С одной стороны,

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1, & \ldots, & e_n \end{pmatrix} A = EA = A.$$

С другой стороны, если

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_n \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1, & \ldots, & f_n \end{pmatrix} = X.$$

Таким образом, $X = A$. Лемма 1.2 доказана. $\square$

В данном случае

$$(f_1, \quad f_2) = (e_1, \quad e_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix}.$$

Получаем,

$$\begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix}.$$

Находим компоненту тензора

$$T_1^{11} = T(f_1, f^1, f^1) =$$

$$= \left(e^1 \otimes e_2 \otimes e_2 + 2e^2 \otimes e_2 \otimes e_2\right) \left(3e_2, \frac{1}{3}e^2, \frac{1}{3}e^2\right) =$$

$$= e^1 (3e_2) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) +$$

$$+2e^2 (3e_2) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) \cdot e_2 \left(\frac{1}{3}e^2\right) =$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Задача 1.1 решена. □

Определение 1.4. Тензор **(абсолютно) кососимметричен**, если при перестановке любых двух индексов он меняет знак. Иными словами, тензор кососимметричен, если для любой перестановки индексов σ

$$T_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(k)}} = \operatorname{sgn}(\sigma) T_{i_1 \ldots i_k}.$$

В частности, компонента кососимметричного тензора равна нулю, если какие-либо его индексы совпадают.

Задача 1.2. Пусть T_{ijk} — кососимметричный тензор в пространстве $\mathbb{R}^3$, у которого компонента T_{123} равна 2 в базисе e_1, e_2, e_3. Вычислить его компоненты в базисе

$$f_1 = e_2, \qquad f_2 = -e_3, \qquad f_3 = e_1 + e_2.$$

Ответ в Задаче 1.2.

$$T_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot(-2),$$

остальные компоненты равны нулю.

Решение Задачи 1.2. После замены координат кососимметричный тензор останется кососимметричным, поэтому в данном случае достаточно найти компоненту $T_{1'2'3'}$.

$$\begin{gathered}T_{1'2'3'} = T(f_1, f_2, f_3) = T(e_2, -e_3, e_1 + e_2) = \\ = -T_{231} - T_{232} = -T_{123} - 0 = -2.\end{gathered}$$

Задача 1.2 решена. □

1.3 Тензоры и матрицы

Чтобы проверить, что набор функций определяет тензор, нужно проследить, как эти функции меняются при замене координат (в случае многообразия) или базиса (в случае векторного пространства).

Задача 1.3. Доказать, что символы Кронекера δ^i_j, то есть числа

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

являются компонентами некоторого тензора типа $(1,1)$.

Первое решение Задачи 1.3. Отметим, что по условию задачи компоненты тензора должны оставаться неизменными в любой системе координат. Чтобы доказать, что δ^i_j — тензор, проверим, что при замене координат компоненты меняются по тензорному закону, т.е. что

$$\delta^{i'}_{j'} = \delta^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Действительно,

$$\delta^i_j \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j'}} = \begin{cases} 1, & \text{если } i' = j', \\ 0, & \text{если } i' \neq j'. \end{cases}$$

В предпоследнем равенстве мы воспользовались формулой для производной сложной функции:

$$\frac{\partial f(y(x))}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

Задача 1.3 решена. □

Второе решение Задачи 1.3. δ^i_j — это компоненты тождественного оператора id. Этот оператор в любом базисе задаётся единичной матрицей. Задача 1.3 решена. □

Задача 1.4. Образует ли набор чисел

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

тензор типа $(0, 2)$?

Решение Задачи 1.4. Покажем, что δ_{ij} — не тензор.

Лемма 1.3. *Пусть C — матрица замены координат. Тогда в матричном виде тензорный закон для тензоров валентности 2 записывается следующим образом:*

- *для тензоров типа* $(1, 1)$ *(т.е. для линейных операторов)*
$$A' = CAC^{-1}, \tag{1.3}$$
- *для тензоров типа* $(0, 2)$ *(т.е. для билинейных форм)*
$$B = C^T B' C \qquad \Leftrightarrow \qquad B' = \left(C^{-1}\right)^T BC^{-1}, \tag{1.4}$$

- *для тензоров типа* $(2,0)$ *(т.е. для билинейных форм на* V^**)*
$$Q' = CQC^T. \tag{1.5}$$

Здесь во всех пунктах штрихом обозначены матрицы тензоров в новых координатах.

Доказательство. В формулах (1.3) – (1.5) мы считаем, что координаты векторов и ковекторов (записанные в столбик) связаны соответственно по формулам

$$v' = Cv, \qquad \alpha = C^T\alpha'.$$

Формулы (1.3) – (1.5) несложно проверить, воспользовавшись тем, что значение тензора на наборе векторов и ковекторов не зависит от выбора базиса. Например, для билинейных форм получаем

$$(u')^T B' v' = u^T C^T B' C v = u^T B v.$$

□

Вернемся к решению задачи 1.4. Легко видеть, что если в каком-то базисе матрица билинейной формы единичная $Q = E$, то она не обязана быть единичной во всех остальных базисах[2]. Например, при гомотетии $C = \frac{1}{\lambda}E$ все коэффициенты билинейной формы умножатся на λ^2. Задача 1.4 решена. □

Замечание 1.4. В этой задаче ключевую роль играло условие неизменности компонент δ_{ij} при замене координат. Если это условие опустить, такой набор чисел будет задавать тензор. Например, именно такие компоненты имеет евклидова метрика на пространстве $\mathbb{R}^n$.

[2]Единственное исключение — одномерное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$.

Замечание 1.5. Тензоры ранга 2 задаются матрицами, и полезно помнить, что некоторые тензорные выражения суть покомпонентная запись операций над матрицами. Например:

- выражение $a^i_j v^j$ соответствует умножению матрицы a^i_j на вектор-столбец v^j:
$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \dots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \dots & a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_i v^i \\ \vdots \\ a^n_i v^i \end{pmatrix},$$
- а равенство
$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'}$$
является покомпонентной записью тождества
$$JJ^{-1} = E,$$
где J — матрица Якоби:
$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^1} & \dots & \dfrac{\partial x^{n'}}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Задача 1.5. Если $G = (g_{ij})$ — невырожденный тензор типа $(0,2)$ на V (т.е. невырожденная билинейная форма), то элементы обратной матрицы $G^{-1} = (g^{ij})$ являются компонентами тензора типа $(2,0)$.

Первое решение Задачи 1.5. Обратная матрица G^{-1} меняется при замене координат по тому же закону, что и матрица билинейной формы на V^*:
$$\left(\left(C^{-1}\right)^T GC^{-1}\right)^{-1} = CG^{-1}C^T,$$
что следует из формул (1.4) и (1.5). Задача 1.5 решена. □

Второе решение Задачи 1.5. Компоненты g^{ij} задаются формулой

$$g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j, \tag{1.6}$$

что является покомпонентной записью формулы $G^{-1}G = E$. Матрица G^{-1} определена однозначно, поэтому достаточно проверить, что формула останется верной, если g_{kj} и g^{ik} меняются как тензоры типа $(0,2)$ и $(2,0)$ соответственно. Тогда

$$g^{i'k'}g_{k'j'} = g^{ip}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^p}g_{qj}\frac{\partial x^q}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Суммируя по k', получаем

$$g^{i'k'}g_{k'j'} = g^{ip}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}g_{qj}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\delta^q_p = g^{ip}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}g_{pj}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Используя исходное равенство (1.6), получаем, что

$$g^{i'k'}g_{k'j'} = \delta^i_j\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'},$$

что и требовалось доказать. Задача 1.5 решена. □

Третье решение Задачи 1.5. Билинейная форма на V (т.е. тензор типа $(0,2)$) задаётся линейным отображением[3]

$$G\colon V \to V^*.$$

Поэтому обратное отображение

$$G^{-1}\colon V^* \to V$$

будет билинейной формой на V^* (т.е. тензором типа $(2,0)$). Задача 1.5 решена. □

[3]Отметим, что если e_i — базис V, а e^i — двойственный базис в V^*, то матрица этого отображения совпадает с матрицей Грамма g_{ij} в базисе e_i.

Замечание 1.6. Для любых линейных пространств V и W (над одним полем $\mathbb{K}$) существует естественная биекция между билинейными отображениями

$$P\colon V \times W \to \mathbb{K}$$

и линейными отображениями

$$\hat{P}\colon V \to W^*.$$

Отображения P и $\hat{P}$ связаны формулой

$$P(v, w) = \hat{P}(v)(w), \qquad \forall v \in V, w \in W.$$

Здесь словосочетание “естественная биекция” означает, что отображения P и $\hat{P}$ имеют одинаковые компоненты, то есть задаются одной и той же матрицей.

Рассмотрим линейное отображение $\hat{A}\colon V \to V$, то есть линейный оператор. По вышесказанному ему соответствует полилинейное отображение $A\colon V \times V^* \to \mathbb{K}$, то есть тензор типа $(1, 1)$.

Аналогично, линейному отображению $\hat{B}\colon V \to V^*$ соответствует тензор типа $(0, 2)$ (билинейная форма на V) $B\colon V \times V \to \mathbb{K}$.

1.4 Инвариантные тензоры

Определение 1.5. Тензор называется **инвариантным**, если его компоненты не меняются при замене координат.

В этом разделе будем считать[4], что $\operatorname{char}\mathbb{K} = 0$ (например, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Задача 1.6. Описать все инвариантные тензоры ранга 2.

[4]Для полей конечной характеристики, например $\mathbb{Z}_2$, ответы могут быть другими.

Ответ в Задаче 1.6.

- Только нулевые тензоры типа $(0,2)$ и $(2,0)$ являются инвариантными.
- Инвариантные тензоры типа $(1,1)$ — это скалярные операторы $\lambda\delta^i_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Решение Задачи 1.6. Пусть C — матрица замены базиса. Тогда по лемме 1.3 матрица A, задающая тензор типа $(1,1)$, и матрица Q, задающая тензор типа $(2,0)$ или $(0,2)$, должны удовлетворять условиям

$$CAC^{-1} = A \qquad \text{и} \qquad CQC^T = Q, \qquad \forall C \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \tag{1.7}$$

Заметим, что законы преобразования для тензоров типа $(2,0)$ и $(0,2)$ в общем виде отличаются, но дают одно и то же условие на матрицу тензора в случае его инвариантности.

Единственные матрицы, удовлетворяющие условиям (1.7), — это нулевая матрица $Q = 0$ и скалярная $A = \lambda E$. Действительно, для диагональных матриц

$$C = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\,,$$

тождество (1.7) имеет вид

$$a^i_j = a^i_j \frac{\lambda_i}{\lambda_j}, \qquad q_{ij} = q_{ij}\lambda_i\lambda_j.$$

Получаем, что $Q = 0$, а A диагональна. Элементы на диагонали у A равны, т.к. она инвариантна относительно перестановки базисных векторов. Задача 1.6 решена. □

Задача 1.7. Доказать, что все ненулевые инвариантные тензоры имеют тип (p,p).

Решение Задачи 1.7. При гомотетии $x' = \lambda x$ компоненты $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$ тензора типа (p, q) умножаются на λ^{p-q}. Поэтому при $p \neq q$ единственный инвариантный тензор — нулевой. Задача 1.7 решена. $\square$

Следствие 1.1. *Ненулевые инвариантные тензоры имеют четный ранг.*

Задача 1.8. Доказать, что ненулевыми инвариантными тензорами ранга ≤ 4 являются

(1) скаляры $c \in \mathbb{K}$;

(2) скалярные операторы $T^i_j = \lambda\delta^i_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$;

(3) и тензоры ранга 4 вида

$$T^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \alpha\delta^{i_1}_{j_1}\delta^{i_2}_{j_2} + \beta\delta^{i_1}_{j_2}\delta^{i_2}_{j_1}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \tag{1.8}$$

Указание. Тензор инвариантен тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно элементарных преобразований. Их три типа.

(1) Перестановка местами двух координат:

$$x^i \leftrightarrow x^j.$$

(2) Умножение координаты на ненулевое число:

$$x^i \to \lambda x^i.$$

(3) Прибавление к одной координате другой, умноженной на некоторую константу:

$$x^i \to x^i + \lambda x^j.$$

Решение Задачи 1.8. Скаляры очевидно не меняются при замене координат, а потому инвариантны. Тензоры ранга 2 уже были рассмотрены в задаче 1.6. Осталось рассмотреть случай тензоров типа $(2, 2)$. В этом доказательстве в формулах нет суммирования по повторяющимся верхним и нижним индексам.

(1) *У инвариантного тензора ненулевыми могут быть только компоненты вида*

$$T_{ii}^{ii}, \qquad T_{ij}^{ij}, \qquad T_{ij}^{ji}, \tag{1.9}$$

где $i \neq j$.

Действительно, при замене координат, заданной диагональной матрицей

$$x^i \to \lambda^i x^i,$$

все компоненты тензора умножаются на соответствующую константу

$$T_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \to \frac{\lambda^{i_1} \lambda^{i_2}}{\lambda^{j_1} \lambda^{j_2}} T_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}.$$

Если все λ^i — различные числа, то остаются неизменными только компоненты с одинаковыми наборами верхних и нижних индексов, то есть перечисленные в формуле (1.9).

(2) *Все компоненты одного вида из* (1.9) *равны:*

$$T_{ii}^{ii} = T_{i'i'}^{i'i'}, \qquad T_{ij}^{ij} = T_{i'j'}^{i'j'}, \qquad T_{ij}^{ji} = T_{i'j'}^{j'i'},$$

для любых $i \neq j, i' \neq j'$.

Это так, потому что тензор T инвариантен относительно перестановок базисных векторов.

Обозначим $\alpha := T^{ij}_{ij}, \beta := T^{ji}_{ij}$ при $i \neq j$. Из доказанного следует, что для произвольных i_1, i_2, j_1, j_2 компонента инвариантного тензора T имеет вид

$$T^{i_1 i_2}_{j_1 j_2} = \alpha \delta^{i_1}_{j_1} \delta^{i_2}_{j_2} + \beta \delta^{i_1}_{j_2} \delta^{i_2}_{j_1} + \gamma \delta^{i_1}_{i_2} \delta^{j_1}_{j_2} \delta^{i_1}_{j_1}.$$

Последнее слагаемое может быть ненулевым только когда все четыре индекса совпадают. Иными словами, для любого i компонента $T^{ii}_{ii} = \alpha + \beta + \gamma$.

(3) *Покажем, что инвариантные тензоры ранга* 4 *имеют вид* (1.8), *т.е. что*

$$\gamma = 0.$$

Очевидно, что указанные в ответе тензоры (1.8) инварианты. Прибавляя к инвариантному тензору T линейную комбинацию тензоров вида (1.8), всегда можно добиться того, что у полученного тензора $\hat{T}$ все коэффициенты, отличные от $\hat{T}^{ii}_{ii}$, равны нулю:

$$\hat{T}^{ij}_{ij} = 0, \qquad \hat{T}^{ji}_{ij} = 0.$$

При этом коэффициент при $e^i \otimes e^i \otimes e_i \otimes e_i$ будет иметь вид

$$\hat{T}^{ii}_{ii} = \gamma.$$

Если $\gamma \neq 0$, то, деля на него, мы получаем тензор

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^{n} e^i \otimes e^i \otimes e_i \otimes e_i. \tag{1.10}$$

Остаётся показать, что тензор (1.10) не является инвариантным. Действительно, прибавление к i-тому базисному вектору j-того, умноженного на константу

$$e_i \to e_i + \lambda e_j,$$

не сохраняет тензор $\tilde{T}$:

$$e^j \otimes e^j \otimes e_j \otimes e_j + e^i \otimes e^i \otimes e_i \otimes e_i \neq$$
$$\neq \left(e^j - \lambda e^i\right) \otimes \left(e^j - \lambda e^i\right) \otimes e_j \otimes e_j +$$
$$+ e^i \otimes e^i \otimes (e_i + \lambda e_j) \otimes (e_i + \lambda e_j)\,.$$

Задача 1.8 решена. $\square$

Задача 1.9. Пусть $T_{ij}v^iv^j$ — инвариант (т.е. в каждом базисе задан набор чисел T_{ij} так, что для любого вектора v число $T_{ij}v^iv^j$ не зависит от базиса). Доказать, что $T_{ij} + T_{ji}$ — тензор типа $(0, 2)$.

Решение Задачи 1.9. В каждом базисе набор чисел T_{ij} задаёт квадратичную форму

$$Q(v) = T_{ij}v^iv^j.$$

По условию форма $Q(v)$ не зависит от выбора базиса. Любая квадратичная форма определяет симметричную билинейную форму по формуле

$$B(u, v) + B(v, u) = Q(u + v) - Q(u) - Q(v).$$

Остаётся заметить, что $T_{ij} + T_{ji}$ — это компоненты билинейной формы $2B(u, v)$. Задача 1.9 решена. $\square$

Задача 1.10. Пусть для каждого базиса в $\mathbb{R}^n$ задан набор чисел

$$S^1, \ldots, S^n,$$

причем для любого тензора T типа $(0, 1)$ “свёртка” S^iT_i не зависит от базиса. Доказать, что числа S^i образуют тензор типа $(1, 0)$.

Первое решение Задачи 1.10. По условию корректно определено линейное отображение

$$S\colon V^* \to \mathbb{K},$$

заданное формулой

$$S(T) = S^i T_i.$$

S — вектор, т.к. линейный функционал на ковекторах — это вектор (для конечномерных пространств $V^{**} \cong V$). Задача 1.10 решена. $\square$

Второе решение Задачи 1.10. По условию для любого ковектора T_i выполнено

$$S^{i'} T_{i'} = S^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} T_i = S^i T_i.$$

Поскольку числа T_i — произвольные, коэффициенты при них должны быть равны:

$$S^i = S^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

Это доказывает, что при замене координат числа S^i меняются как тензор типа $(1,0)$. Задача 1.10 решена. $\square$

1.5 Тензоры и производные функции

Пусть M — гладкое многообразие (поскольку утверждения в следующих задачах локальны, можно считать $M = \mathbb{R}^n$).

Задача 1.11. Пусть f — гладкая функция на многообразии M. Определить, тензором какого типа является дифференциал df.

Первое решение Задачи 1.11. Для решения задачи изучим, как меняются компоненты дифференциала при замене координат.

По формуле производной сложной функции имеем:

$$(df)^{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} = (df)^{i} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}.$$

Следовательно, дифференциал является тензором типа $(0,1)$.

Задача 1.11 решена. $\square$

Второе решение Задачи 1.11. Напомним, что если имеются гладкие многообразия M, N и гладкое отображение

$$f\colon M \to N,$$

то его дифференциал — это линейное отображение касательных пространств:

$$df_x\colon T_xM \to T_{f(x)}N,$$

задаваемое матрицей Якоби отображения f.

В нашем случае, когда f — гладкая функции на многообразии M, имеем $N = \mathbb{R}$. Следовательно,

$$df_x\colon T_xM \to T_{f(x)}\mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Таким образом, дифференциал функции f в каждой точке является линейным отображением касательного пространства к многообразию M в действительные числа, то есть ковектором или, иначе, тензором типа $(0,1)$. Более того, он гладко зависит от точки, а потому в окрестности точки x образует тензорное поле типа $(0,1)$. Задача 1.11 решена. $\square$

Из второго решения задачи становится понятно, почему dx^i — ковекторы. В самом деле, координата — это сопоставление точке многообразии действительного числа, то есть отображение $x^i\colon M \to \mathbb{R}$. Следовательно, dx^i — ковектор.

Замечание 1.7. В курсе математического анализа обычно говорят о *векторе градиента* функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ как о векторе, составленном из частных производных функции f. С другой стороны, частные производные функции — это компоненты ее дифференциала, а, как было показано выше, он является ковектором, а не вектором. Это кажущееся противоречие будет разрешено, когда мы познакомимся с операциями поднятия и опускания индекса тензора, см. раздел 2 и определение 4.4.

Задача 1.12. Пусть x — критическая точка гладкой функции f на M:

$$df|_x = 0.$$

Доказать, что гессиан[5] функции

$$\operatorname{Hess} f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right)$$

является тензором типа $(0,2)$ в точке $x \in M$ (т.е. на T_xM).

Решение Задачи 1.12. Рассмотрим две системы локальных координат x^i и $x^{i'}$. Два раза применяя формулу замены компонент дифференциала функции, получаем формулу для второго дифференциала

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} + \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}.$$

Второе слагаемое, меняющееся не по тензорному закону, исчезает, т.к. $\dfrac{\partial f}{\partial x^k} = 0$. Задача 1.12 решена. □

Задача 1.13. Пусть f — гладкая функция от переменных $x^1, \ldots, x^n$, а P — точка, в которой все её производные до

[5] Гессианом мы называем квадратичную форму, соответствующую матрице Гессе — матрице вторых производных функции. Иногда в литературе гессианом также называют определитель матрицы Гессе.

порядка $(k-1)$ включительно равны нулю. Доказать, что числа

$$A_{i_1\dots i_k}=\left.\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_k}}\right|_P$$

являются компонентами некоторого тензора типа $(0,k)$.

Решение Задачи 1.13. Так же, как и в Задаче 1.12, мы получаем, что в точке P

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1'}\dots\partial x^{i_k'}}=\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_k}}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}}\dots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i_k'}}.$$

Все остальные слагаемые будут равны нулю, т.к. в них присутствуют частные производные меньшего порядка (это легко доказать по индукции). Задача 1.13 решена. □

Задача 1.14. Пусть $F(x^1,\dots,x^n)$ — однородный многочлен степени k в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что числа

$$A_{i_1\dots i_k}=\frac{\partial^k F}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_k}}$$

являются компонентами тензора типа $(0,k)$.

Решение Задачи 1.14. Немедленно следует из Задачи 1.13, если взять начало координат в качестве точки P. Задача 1.14 решена. □

Задача 1.12 является частным случаем следующего общего факта.

Задача 1.15. Доказать, что если тензорное поле T типа (p,q) на многообразии M обращается в ноль в точке x:

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x)=0,$$

то частные производные $\dfrac{\partial T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}{\partial x^k}$ образуют тензор типа $(p,q+1)$ на T_xM.

Решение Задачи 1.15. Аналогично Задаче 1.12. Задача 1.15 решена. $\square$

Замечание 1.8. Из задач 1.12 и 1.15 видно, что если тензорное поле не обращается в ноль в точке P, частные производные его компонент уже могут не образовывать тензор. Отсюда следует, что задача определения производной тензора вполне нетривиальна. Она будет решена позже в ходе настоящего курса, когда будет введено понятие аффинной связности и ковариантного дифференцирования (см. часть III).

1.6 Отображение тензорных пространств

Выше (см. замечание 1.6) было сформулировано утверждение о том, что линейные отображения

$$A\colon V \to V, \qquad B\colon V \to V^*$$

задают тензоры типа $(1,1)$ и $(0,2)$ соответственно. Его можно немного обобщить.

Задача 1.16. Пусть T^m_n — пространство всех тензоров типа (m,n). Показать, что для любого линейного отображения тензорных пространств

$$F\colon T^m_n \to T^p_q$$

его компоненты в стандартном базисе образуют тензор типа $(p+n, q+m)$.

Указание. Речь идет о полилинейном отображении

$$F_T\colon \underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{p+n}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{q+m}\to\mathbb{K},$$

которое на базисных элементах задаётся формулой

$$\begin{gathered}F_T\left(e^{i_1},\ldots,e^{i_{n+p}},e_{j_1},\ldots,e_{j_{m+q}}\right)=\\=F\left(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_n}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_m}\right)\\\left(e^{i_{n+1}},\ldots,e^{i_{n+p}},e_{j_{m+1}},\ldots,e_{j_{m+q}}\right).\end{gathered}\tag{1.11}$$

Решение Задачи 1.16. Отображение F_T является тензором типа $(p+n,q+m)$, поскольку формулу (1.11) можно записать инвариантно, чтобы она не зависела от выбора базиса:

$$\begin{gathered}F_T\left(\alpha^1,\ldots,\alpha^{n+p},v_1,\ldots,v_{m+q}\right)=\\=F\left(\alpha^1\otimes\cdots\otimes\alpha^n\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_m\right)\\\left(\alpha^{n+1},\ldots,\alpha^{n+p},v_{m+1},\ldots,v_{m+q}\right)\end{gathered}$$

для любых $\alpha^i\in V^*, v_j\in V$. Отображение F_T соответствует отображению F, поскольку согласно (1.11) компонента

$$(F_T)^{i_1\ldots i_{p+n}}_{j_1\ldots j_{m+q}}$$

равна компоненте образа базисного тензора

$$F\left(e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_n}\otimes e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_m}\right)^{i_{p+1}\ldots i_{p+n}}_{j_{m+1}\ldots j_{m+q}}.$$

Задача 1.16 решена. □

Компоненты $(F_T)^{s_1\ldots s_p\; j_1\ldots j_n}_{t_1\ldots t_q\; i_1\ldots i_m}$ тензора из Задачи 1.16 задаются формулой

$$F(T)^{s_1\ldots s_p}_{t_1\ldots t_q}=\sum_{i_\alpha,j_\beta}(F_T)^{s_1\ldots s_p\; j_1\ldots j_n}_{t_1\ldots t_q\; i_1\ldots i_m}T^{i_1\ldots i_m}_{j_1\ldots j_n}.$$

Несложно доказать даже чуть более общее утверждение.

Утверждение 1.4. *Если для каждого базиса задан набор чисел*

$$B^{s_1\ldots s_p\; j_1\ldots j_n}_{t_1\ldots t_q\; i_1\ldots i_m},$$

и для любого тензора $C \in T^{m+k}_{n+l}$ *"свёртка"*

$$A^{s_1\ldots s_p\ u_1\ldots u_k}_{t_1\ldots t_q\ v_1\ldots v_l} = \sum_{i_\alpha, j_\beta} B^{s_1\ldots s_p\ j_1\ldots j_n}_{t_1\ldots t_q\ i_1\ldots i_m} C^{i_1\ldots i_m\ u_1\ldots u_k}_{j_1\ldots j_n\ v_1\ldots v_l}$$

является тензором типа $(p+k, q+l)$, *то набор чисел*

$$B^{s_1\ldots s_p\ j_1\ldots j_n}_{t_1\ldots t_q\ i_1\ldots i_m}$$

задаёт тензор типа $(p+n, q+m)$.

Замечание 1.9. Частным случае этого утверждения для $n = 1, p = q = m = k = l = 0$ является задача 1.10.

Тема 2

Операции над тензорами

В настоящем разделе мы обсудим алгебраические операции над тензорами: линейные комбинации, тензорное умножение, перестановку индексов одного типа, свертку и их композиции. Дифференциальные операции устроены сложнее и требуют дополнительной подготовки, поэтому им будут посвящены дальнейшие разделы.

2.1 Алгебраические операции над тензорами

Опишем основные операции над тензорами. Здесь мы будем смотреть на тензор как на объект, заданный набором своих компонент. Перечисленные операции одинаково определяются как для тензора, так и для тензорного поля.

(1) **Сложение тензоров одного типа и умножение тензора на скаляр**.

$$S, T \to S + T \qquad \text{и} \qquad T \to \alpha T, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Операции выполняются покомпонентно:

$$(\alpha S + \beta T)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \alpha S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \beta T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

Иными словами, *пространство T^p_q тензоров типа (p, q) является линейным пространством.* Заметим, что ранее мы уже видели это утверждение, когда рассматривали тензор как полилинейное отображение.

(2) **Тензорное произведение**. Тензору S типа (p, q) и тензору T типа (k, l) сопоставляется тензор $S \otimes T$ типа $(p + k, q + l)$:

$$(S \otimes T)(\alpha^1, \dots \alpha^p,\ \beta^1, \dots \beta^k;\ u_1, \dots, u_q,\ v_1, \dots v_l) =$$
$$= S(\alpha^1, \dots \alpha^p,\ u_1, \dots, u_q)\ T(\beta^1, \dots \beta^k;\ v_1, \dots v_l),$$

для любых ковекторов α^i, β^j и любых векторов u_k, v_l. Проще говоря, часть аргументов подставляется в S, оставшиеся аргументы — в T, и получившиеся числа перемножаются.

Компоненты тензорного произведения суть произведения соответствующих компонент множителей:

$$(S \otimes T)^{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+k}}_{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots j_{q+l}} = S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\ T^{i_{p+1} \dots i_{p+k}}_{j_{q+1} \dots j_{q+l}}.$$

Заметим, что элементы базиса пространства тензоров T^p_q, которые мы обозначили через

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q},$$

в самом деле являются тензорным произведением базисных векторов и ковекторов.

Тензорное произведение, конечно, некоммутативно. Отметим, однако, что при записи элементов базиса пространства тензоров можно писать как сначала базисные вектора, а потом — ковектора, так и наоборот. В зависимости от формы записи первыми аргументами тензора либо будут ковектора, а вторыми — вектора, либо наоборот.

(3) **Перестановка нижних индексов**[1]:

$$(T^\sigma)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_{\sigma(1)}\dots j_{\sigma(q)}}, \qquad \sigma \in S_q.$$

Обратите внимание, что перестановка σ применяется не к значениям индексов компоненты тензора, а к местам, на которых они стоят.

Аналогично определяется **перестановка верхних индексов**[2].

Наличие этих операций позволяет говорить о *симметричных и кососимметричных тензорах* (см. тему 3).

(4) **Свёртка** тензора сопоставляет тензору типа (p, q) тензор типа $(p-1, q-1)$. Компоненты свёртки получаются из компонент старого тензора суммированием по одному верхнему и одному нижнему индексу:

$$T^{i_1\dots\underline{i_k}\dots i_p}_{j_1\dots\underline{j_l}\dots j_q} \to T^{i_1\dots\underline{s}\dots i_p}_{j_1\dots\underline{s}\dots j_q}.$$

Свертка имеет важный смысл в тензорном исчислении:

(a) значение вектора на ковекторе[3] — это свёртка их тензорного произведения

$$\langle\alpha, v\rangle = \alpha_i v^i = (\alpha \otimes v)^i_i\,;$$

(b) след оператора — простейший пример свёртки

$$\operatorname{tr} A = A^i_i.$$

[1]Обозначение оправдано тем, что $(T^\sigma)^\tau = T^{\sigma\tau}$ для любых перестановок σ, τ. Также встречается обозначение $\sigma(T)$.

[2]Перестановка верхних индексов с нижними не является тензорной операцией, см. задачу 2.4.

[3]Свёртка возникает именно благодаря наличию естественного отображения $V^* \times V \to \mathbb{K}$, $(\alpha, v) \mapsto \alpha_i v^i$.

Замечание 2.1. Если даны два тензора S и T, то их свёрткой иногда называют свёртку их тензорного произведения $S \otimes T$.

Следующие операции выражаются через ранее описанные:

(1) **Симметризация и кососимметризация (альтернирование)**. Тензору сопоставляется симметричный или кососимметричный (по верхним или нижним индексам) тензор того же типа:

$$\operatorname{Sym} T_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}},$$

$$\operatorname{Alt} T_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \cdot T_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}}.$$

Наличие нормировочного множителя обусловлено следующим свойством этих операций: *симметричные (кососимметричные) тензоры при симметризации (соответственно альтернировании) переходят в себя*[4].

Аналогично определяются симметризация и альтернирование по любому набору нижних (или верхних) индексов.

Симметризацию по некоторому набору индексов мы также иногда будем обозначать круглыми скобками, а альтернирование — квадратными:

$$T_{(i_1 \dots i_k)} := \operatorname{Sym} T_{i_1 \dots i_k}, \qquad T_{[i_1 \dots i_k]} := \operatorname{Alt} T_{i_1 \dots i_k}. \quad (2.1)$$

(2) **Поднятие и опускание индекса.** Операция опускания индекса — это свёртка тензора с данной билинейной формой g_{ij} на V. Пример — опускание первого

[4] См. Задачу 3.5.

индекса на первое место:

$$S^{i_2\ldots i_p}_{ij_1\ldots j_q} = g_{ik}T^{ki_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}.$$

Аналогично, поднятие индекса — это свёртка тензора с данной билинейной формой q^{ij} на V^*. Пример — поднятие последнего индекса на последнее место:

$$S^{i_1i_2\ldots i_pj}_{j_1\ldots j_{q-1}} = T^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}k}q^{kj}.$$

Поднимать и опускать можно любой индекс на любое место. Желательно чётко указывать, какой индекс на какое место поднимается/опускается[5].

Замечание 2.2. Билинейная форма на V — это линейное отображение

$$G\colon V \to V^*.$$

Невырожденная форма g_{ij} устанавливает изомофизм между V и V^*. Поэтому, *если на V задана невырожденная билинейная форма*[6]*, то можно и поднимать, и опускать индексы.* Компоненты q^{ij} соответствующей билинейной формы на V^* — это элементы g^{ij} обратной матрицы[7] G^{-1}:

$$q^{ij} = g^{ij}, \qquad g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k.$$

2.2 Задачи на применение тензорных операций

Задача 2.1. Для векторов

$$u = e_1 - 3e_2 + e_3, \qquad v = 3e_1 + e_3$$

[5]Этот момент иногда опускается, если порядок индексов не принципиален и подойдет любой тип операции.

[6]Например, если V — евклидово, псевдоевклидово или симплектическое пространство.

[7]См. Задачу 1.5.

и ковекторов

$$\xi = e^2 + e^3, \qquad \eta = e^1 - e^2 + 2e^3$$

(1) вычислить $\xi \otimes \eta(u, v)$,

(2) проальтернировать тензор $\xi \otimes \eta$,

(3) просимметрировать тензор $u \otimes v$.

Ответ в Задаче 2.1.

(1) $\xi \otimes \eta(u, v) = -10$.

(2) Искомый тензор:

$$\mathrm{Alt}(\xi \otimes \eta) = -\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1) -$$
$$-\frac{1}{2}(e^1 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^1) + \frac{3}{2}(e^2 \otimes e^3 - e^3 \otimes e^2).$$

Короче этот ответ записывается как

$$\mathrm{Alt}(\xi \otimes \eta) = -\frac{1}{2}e^1 \wedge e^2 - \frac{1}{2}e^1 \wedge e^3 + \frac{3}{2}e^2 \wedge e^3.$$

(3) Компоненты тензора $S = \mathrm{Sym}(u \otimes v)$ имеют вид (у симметричного тензора $S^{ij} = S^{ji}$)

$$S^{11} = 3, \quad S^{12} = -\frac{9}{2}, \quad S^{13} = 2,$$
$$S^{22} = 0, \quad S^{23} = -\frac{3}{2}, \quad S^{33} = 1.$$

Решение Задачи 2.1. (1) По определению

$$\xi \otimes \eta(u, v) = \xi(u) \cdot \eta(v).$$

Поскольку значение ковектора $\alpha_i e^i$ на векторе $v^j e_j$ равно $\alpha_i v^i$, получаем

$$\xi(u) = (e^2 + e^3)(e_1 - 3e_2 + e_3) = -2,$$
$$\eta(v) = (e^1 - e^2 + 2e^3)(3e_1 + e_3) = 5,$$
$$\xi(u) \cdot \eta(v) = (-2) \cdot 5 = -10.$$

(2) По определению операции альтернирования $\operatorname{Alt} T$

$$T_{[ij]} = \frac{1}{2}\,(T_{ij} - T_{ji}).$$

В данном случае компоненты тензора $T = \xi \otimes \eta$:

$$T_{21} = 1, \quad T_{22} = -1, \quad T_{23} = 2,$$
$$T_{31} = 1, \quad T_{32} = -1, \quad T_{33} = 2.$$

Так как $T_{[ij]}$ — кососимметричный тензор

$$T_{[ji]} = -T_{[ij]},$$

и достаточно вычислить коэффициенты при $i < j$. Получаем

$$T_{[12]} = -\frac{1}{2}, \quad T_{[13]} = -\frac{1}{2}, \quad T_{[23]} = \frac{3}{2}.$$

Тот же ответ получится, если заметить, что тензор $\xi \otimes \eta$ задаётся матрицей[8]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

а тензор $\operatorname{Alt}(\xi \otimes \eta)$ — матрицей $\frac{A - A^T}{2}$.

[8]Здесь элемент T^{ij} стоит в i-той строке и j-том столбце матрицы A. Эта матрица получается при умножении вектора-столбца ξ на вектор-строку η.

(3) По определению операции симметризации $\operatorname{Sym} T$

$$T^{(ij)} = \frac{1}{2}\left(T^{ij} + T^{ji}\right).$$

В данном случае компоненты тензора $T = u \otimes v$:

$$\begin{gathered} T^{11} = 3, \quad T^{13} = 1, \quad T^{21} = -9, \\ T^{23} = -3, \quad T^{31} = 3, \quad T^{33} = 1. \end{gathered}$$

Тот же ответ можно получить, если заметить, что тензор $u \otimes v$ задаётся матрицей[9]

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а тензор $\operatorname{Sym}(u \otimes v)$ — матрицей $\frac{A+A^T}{2}$.

Задача 2.1 решена. □

Задача 2.2. Поднять (опустить) индекс у тензора

$$T = e_1 \otimes e^2 + 3e_2 \otimes e^1$$

с помощью скалярного произведения, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ в Задаче 2.2.

$$T_{11} = 6, \quad T_{12} = 9, \quad T_{21} = 1, \quad T_{22} = 1,$$

$$T^{11} = -1, \quad T^{12} = 1, \quad T^{21} = 9, \quad T^{22} = -6.$$

[9] Для симметричных матриц не нужно думать о порядке индексов — ответ для матриц A и A^T одинаковый.

Решение Задачи 2.2. По определению операции опускания индекса[10]

$$T_{ij} = g_{ik} T^k_j. \tag{2.2}$$

В данном случае,

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 2, \quad g_{21} = 1, \quad g_{22} = 3,$$

$$T^1_1 = 0, \quad T^1_2 = 1, \quad T^2_1 = 3, \quad T^2_2 = 0.$$

Получаем,

$$T_{11} = g_{11} T^1_1 + g_{12} T^2_1 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6.$$

Аналогично находятся остальные индексы.

Формула (2.2) — это формула для компонент матричного произведения[11]

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому ответ так же получится, если перемножить матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

По определению операции поднятия индекса[12]

$$T^{ij} = T^i_k g^{kj}. \tag{2.3}$$

где g^{ij} — компоненты обратной матрицы к (g_{ij}). В данном случае

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

[10] Опускаем верхний индекс на первое место.

[11] Надёжней находить ответ через индексы — не нужно думать о порядке матриц и их транспонировании.

[12] Поднимаем нижний индекс на последнее место.

поэтому

$$g^{11} = 3, \quad g^{12} = -2, \quad g^{21} = -1, \quad g^{22} = 1.$$

Получаем,

$$T^{11} = T^1_1 g^{11} + T^1_2 g^{21} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) = -1.$$

Аналогично находятся остальные индексы.

Формула (2.3) — это формула для компонент матричного произведения

$$\begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 \\ T^2_1 & T^2_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}.$$

Поэтому ответ так же получится, если перемножить матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Задача 2.2 решена. $\square$

Задача 2.3. Найти свёртку тензора

$$2e_1 \otimes e^2 - 3e_2 \otimes e^2 + e_3 \otimes e^2 - e_3 \otimes e^3.$$

Ответ в Задаче 2.3. $T^i_i = -4$.

Решение Задачи 2.3. Задача решается прямым вычислением. Например, можно посмотреть на матрицу компонент этого тензора (верхний индекс обозначает номер строки, нижний — столбца):

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Искомая свертка тензора равна следу этой матрицы:

$$T^i_i = \operatorname{tr} T = 0 - 3 - 1 = -4.$$

Отметим, что свёртка произвольного тензора вида

$$T = \sum_{j=1}^{N} \alpha^j \otimes v_j$$

находится по формуле

$$T_i^i = \sum_{j=1}^{N} \langle \alpha^j, v_j \rangle.$$

Задача 2.3 решена. □

2.3 Теоретические задачи

Задача 2.4. Доказать, что перестановка индексов для тензоров типа $(1, 1)$ не является тензорной операцией.

Решение Задачи 2.4. Несложно подобрать матрицы C и A такие, что

$$\left(CAC^{-1}\right)^T = \left(C^T\right)^{-1} A^T C^T \neq CA^T C^{-1}.$$

Задача 2.4 решена. □

Эта задача демонстрирует, что переставлять можно только индексы одного типа, в противном случае результат может оказаться не тензором.

Задача 2.5. Пусть u и v — два вектора. Доказать, что

$$u \otimes v = v \otimes u \tag{2.4}$$

тогда и только тогда, когда u и v линейно зависимы.

Первое решение Задачи 2.5 . Условие (2.4) эквивалентно тому, что

$$u^i v^j - v^j u^i = 0$$

для всех i, j, т.е. что все 2×2 миноры матрицы (u, v) равны нулю. Это означает, что ранг этой матрицы равен 1, т.е. векторы линейно зависимы. Задача 2.5 решена. $\square$

Второе решение Задачи 2.5 . Тензорные произведения определены инвариантно и не зависят от выбора координат. Если вектора u, v линейно независимы, то их можно включить в базис в качестве первых двух векторов e_1 и e_2. Однако

$$e_1 \otimes e_2 \neq e_2 \otimes e_1$$

(например потому, что их значения на паре базисных ковекторов (e^1, e^2) различны). Задача 2.5 решена. $\square$

Задача 2.6. Доказать, что если тензор симметричен по индексам i и j и кососимметричен по индексам j и k, то он равен нулю.

Решение Задачи 2.6. Действительно,

$$T_{ijk} = -T_{ikj} = -T_{kij} = T_{kji} = T_{jki} = -T_{jik} = -T_{ijk}.$$

Задача 2.6 решена. $\square$

Задача 2.7. Доказать, что полная свёртка $A_{ij}B^{ij}$ симметричного тензора A_{ij} и кососимметричного тензора B^{ij} равна нулю.

Решение Задачи 2.7. Очевидно, что

$$A_{ij}B^{ij} = A_{ji}B^{ij} = -A_{ji}B^{ji}.$$

В то же время сумма не зависит от обозначения индексов, по которым производится суммирование. Задача 2.7 решена. $\square$

2.4 Определитель как тензорная операция

Выше след матрицы был представлен как тензорная операции (свертка соответствующего тензора). Подобная связь имеется и для другой операции над матрицами.

Задача 2.8. Представить определитель линейного оператора как результат выполнения последовательности элементарных тензорных операций[13].

Ответ в Задаче 2.8.

$$\det(a^i_j) = \Big(\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n}\Big)^{i_1,\ldots,i_n}_{[i_1,\ldots,i_n]}.$$

Иными словами, нужно

(1) взять $n = \dim V$ раз тензорное произведение оператора A на себя;

(2) проальтернировать полученный тензор типа (n, n) по всем нижним индексам;

(3) свернуть получившийся тензор n раз, чтобы получить $\det A$.

Указание. Достаточно проверить эту формулу для полупростых (т.е. диагонализуемых) операторов — они образуют всюду плотное множество в пространстве всех операторов.

Решение Задачи 2.8. Проверим формулу для полупростых операторов. Все операции тензорные, поэтому вычисленное

[13] Линейные комбинации, перестановка индексов, тензорное произведение и свёртка.

число не зависит от базиса, можно сразу рассматривать базис, в котором матрица оператора диагональна.

Пусть $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Тогда

(1) $$\Bigl(\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n}\Bigr)^{i_1,...,i_n}_{j_1,...,j_n} = \begin{cases} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n}, & \text{если все } i_k = j_k, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(2) $$\Bigl(\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n}\Bigr)^{i_1,...,i_n}_{[1,...,n]} = \begin{cases} \frac{1}{n!}\operatorname{sgn}(\sigma)\lambda_1 \ldots \lambda_n, \\ \text{если } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix} \in S_n, \\ 0, \qquad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(3) Из-за кососимметричности все нижние индексы должны быть различны.

$$\Bigl(\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n}\Bigr)^{i_1,...,i_n}_{[i_1,...,i_n]} = \sum_{\sigma \in S_n} \Bigl(\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n}\Bigr)^{\sigma(1),...,\sigma(n)}_{[\sigma(1),...,\sigma(n)]} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \Bigl(\underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n}\Bigr)^{\sigma(1),...,\sigma(n)}_{[1,...,n]} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \lambda_1 \ldots \lambda_n = \lambda_1 \ldots \lambda_n.$$

Задача 2.8 решена. □

Другое решение Задачи 2.8. “Увидеть” ответ к этой задаче можно и не прибегая к рассмотрению диагонализуемых операторов. Для этого рассмотрим оператор A, в некотором фиксированном базисе заданный матрицей (a^i_j). По определению имеем

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a^1_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a^n_{\sigma(n)},$$

где σ — всевозможные подстановки на n элементах. Анализ этой формулы позволяет заподозрить, что в ней задействованы следующие тензорные операции:

(1) поскольку каждое слагаемое суть произведение n компонент тензора A, оно является некоторой компонентой тензора $A^{\otimes n}$;

(2) поскольку суммируются компоненты тензора $A^{\otimes n}$, мы имеем дело с некоторой его сверткой;

(3) знак подстановки перед каждый слагаемым подсказывает, что мы имеем дело к альтернированием тензора по нижним индексам.

Осталось получить тензорную формулу, используя эти соображения. Начнем с рассмотрения тензора $A^{\otimes n} = A \otimes \cdots \otimes A$ и его компонент $(A \otimes \cdots \otimes A)^{i_1,\dots,i_n}_{j_1,\dots,j_n}$. Соображение (2) указывает, что набор верхних индексов должен совпадать с набором нижних, а соображение (3) — что по нижним нужно альтернировать. Получим выражение вида $(A \otimes \cdots \otimes A)^{i_1,\dots,i_n}_{[i_1,\dots,i_n]}$. Этот тензор кососимметричен, поэтому ненулевыми будут лишь те слагаемые, в которых все индексы различны. Имеем

$$(A \otimes \cdots \otimes A)^{i_1,\dots,i_n}_{[i_1,\dots,i_n]} = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \operatorname{sgn}(\sigma) (A \otimes \cdots \otimes A)^{i_1,\dots,i_n}_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(n)}}.$$

Теперь заметим, что поскольку все индексы различны, среди индексов $i_1, \dots, i_n$ (и, соответственно, их перестановки $i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}$) встречаются по одному разу все числа от 1 до n, то есть $(i_1, \dots, i_n) = \eta(1, \dots, n)$ для некоторой подстановки $\eta \in S_n$. Таким образом,

$$(A \otimes \cdots \otimes A)^{i_1,\dots,i_n}_{[i_1,\dots,i_n]} = \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\sum_{\eta \in S_n} (A \otimes \cdots \otimes A)^{\eta(1),\dots,\eta(n)}_{\eta(\sigma(1)),\dots,\eta(\sigma(n))} \right). \quad (2.5)$$

Далее, заметим, что $(A\otimes\dots\otimes A)^{i_1,\dots,i_n}_{j_1,\dots,j_n} = a^{i_1}_{j_1}\dots a^{i_n}_{j_n} = (A\otimes\dots\otimes A)^{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(n)}}_{j_{\sigma(1)},\dots,j_{\sigma(n)}}$ для любой подстановки $\sigma\in S_n$, поскольку правая часть равенства получается соответствующей перестановкой сомножителей $A^{i_k}_{j_k}$. Следовательно, во внутренней сумме правой части равенства (2.5) все слагаемые равны между собой и равны, например, $(A\otimes\dots\otimes A)^{1,\dots,n}_{\sigma(1),\dots,\sigma(n)}$. Более того, слагаемых в сумме ровно $n!$. Отсюда получаем

$$(A\otimes\dots\otimes A)^{i_1,\dots,i_n}_{[i_1,\dots,i_n]} = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)(A\otimes\dots\otimes A)^{1,\dots,n}_{\sigma(1),\dots,\sigma(n)} =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a^1_{\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a^n_{\sigma(n)} = \det A.$$

Задача 2.8 решена. $\square$

Тема 3

Симметричные и кососимметричные тензоры

В предыдущем разделе мы выделили два класса тензоров: симметричные и кососимметричные. Линейная комбинация (косо)симметрических тензоров одинакового типа — снова (косо)симметрический тензор, поэтому они образуют линейные подпространства в пространстве T_q^p. В настоящем разделе мы изучим эти подпространства подробнее и определим умножение (косо)симметрических тензоров.

3.1 Симметрическая и внешняя алгебры

Симметричные и kососоcимметричные тензоры можно перемножать, и они образуют две очень простые алгебры. Выше мы показали, что переставлять индексы разных типов нельзя. В связи с этим естественно при рассмотрении (косо)симметрических тензоров ограничиться тензорами, у которых есть индексы только одного типа. В следующем параграфе мы будем работать с тензорами типа $(k, 0)$ (их еще называют *поливекторами*), однако все определения и конструкции могут быть переформулированы для тензоров типа $(0, k)$.

3.1.1 Симметрическая алгебра

Обозначим через $S^k(V)$ пространство симметричных тензоров типа $(k, 0)$ на линейном пространстве V. Тензорное произведение симметричных тензоров, очевидно, не обязано быть симметричным тензором. В самом деле, тензор симметричен, если перестановка индексов умножает его компоненту на знак перестановки. Рассмотрим симметриченые тензоры $S^{i_1,\ldots,i_p}, W^{j_1,\ldots,j_k}$. Их тензорное произведение имеет компоненты

$$(S \otimes W)^{i_1,\ldots,i_p,j_1\ldots,j_k}.$$

В силу симметричности тензоров S и W перестановка индексов внутри набора $(i_1, \ldots, i_p)$ или набора $(j_1, \ldots, j_k)$ в самом деле умножит компоненту на соответствующий знак. Однако перестановка индексов i_l и j_q этим свойством может не обладать.

Тем не менее, симметрические тензоры можно перемножать разумным образом.

Определение 3.1. *Симметрическое произведение* $\odot$ симметричных тензоров $T_1 \in S^{k_1}(V), T_2 \in S^{k_2}(V)$ — это тензор

$$T_1 \odot T_2 = \mathrm{Sym}(T_1 \otimes T_2).$$

По определению $T_1 \odot T_2 \in \mathrm{S}^{k_1+k_2}(V)$.

Задача 3.1. Найти размерность пространства симметричных тензоров типа $(k, 0)$ на n-мерном пространстве.

Ответ в Задаче 3.1.

$$\dim S^k(V^n) = C^k_{n+k-1}.$$

Базис образуют симметрические произведения

$$e_{i_1} \odot \cdots \odot e_{i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}},$$

где $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$.

Решение Задачи 3.1. Для начала поймем, какие тензоры могут претендовать на роль базиса в пространстве S^k. Вспомним, что любой тензор T типа $(k, 0)$ может быть разложен по базису пространства T^k_0: $T = T^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$. Чтобы задать произвольный тензор нам нужно указать n^k его компонент. Однако, работая с симметрическими тензорами, мы можем сократить их число. В самом деле, если нам известна компонента $T^{i_1 \dots i_k}$ мы автоматически знаем и все компоненты вида $T^{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}}$, которые ей равны в силу симметричности тензора T.

Выделим все слагаемые в разложении тензора по базису с этим коэффициентом. Получим

$$T^{i_1 \dots i_k} \sum_{\sigma \in S_k} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}}.$$

Легко видеть, что коэффициент $T^{i_1 \dots i_k}$ стоит в точности при мономе $k!(e_{i_1} \odot \cdots \odot e_{i_k})$. Значит мономы $e_{i_1} \odot \cdots \odot e_{i_k}$ образуют базис пространства S^k. В самом деле,

- любой симметричный тензор может быть представлен как их линейная комбинация;

- указанные тензоры линейно независимы, так как существуют наборы ковекторов, на которых только один элемент не равен нулю.

Чтобы вычислить размерность пространства осталось посчитать число базисных элементов. Иначе на это можно посмотреть так: размерность подпространства равна числу коэффициентов в разложении тензора по базису всего пространства T_0^k, которые необходимо и достаточно задать, чтобы однозначно определить изучаемый тензор. В нашем случае необходимо выбрать ровно по одному представителю из класса эквивалентности компонент, где две компоненты эквивалентны, если их наборы индексов получаются друг из друга перестановкой. Например, можно выбрать такие компоненты $T^{i_1 \ldots i_k}$, что $i_1 \leq \cdots \leq i_k$.

Их число равно числу выборок k элементов из n с повторениями без учета порядка. Напомним, как найти это число.

Рассмотрим кортеж чисел $(a_1, \ldots, a_k)$, где $a_i \leq a_{i+1}$ и $a_i \in \{1, \ldots, n\}$. Построим по нему кортеж $(b_1, \ldots, b_k)$, где $b_i = a_i + i - 1$. Здесь каждое $b_i \in \{1, \ldots, n + k - 1\}$ и $b_i < b_{i+1}$. Очевидно, между кортежами имеется биекция, а значит, кортежей $(a_1, \ldots, a_k)$ столько же, сколько и кортежей $(b_1, \ldots, b_k)$. С другой стороны, среди b_i нет повторяющихся, а потому их число равно числу выборок k элементов из $n + k - 1$ без повторений без учета порядка.

Отсюда получаем окончательный ответ: $\dim S^k(V^n) = C_{n+k-1}^k$.

Задача 3.1 решена. $\square$

Теорема 3.1. *Прямая сумма всех пространств симметричных тензоров*

$$S(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(V)$$

*образует **симметрическую алгебру** $(S(V), \odot)$. Это (градуированная[1]) коммутативная алгебра, изоморфная алгеб-*

[1] Алгебра **градуирована**, если она представлена в виде прямой

ре многочленов от $n = \dim V$ *переменных. При этом одночлену* $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ *ставится в соответствие элемент*

$$e_{i_1} \odot \dots \odot e_{i_k} = \mathrm{Sym}\left(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}\right).$$

3.1.2 Внешняя алгебра

Перейдем теперь к кососимметрическим тензорам. Обозначим через $\Lambda^k(V)$ пространство кососимметричных тензоров типа $(k, 0)$ на линейном пространстве V. Аналогично случаю симметрических тензоров, тензорное умножение не является хорошей операцией на Λ^k. Поэтому вводится следующее определение.

Определение 3.2. Внешнее произведение $\wedge$ кососимметричных тензоров $S \in \Lambda^p(V), T \in \Lambda^q(V)$ — это тензор

$$S \wedge T = \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathrm{Alt}(S \otimes T). \tag{3.1}$$

По определению $S \wedge T \in \Lambda^{p+q}(V)$.

Задача 3.2. Найти размерность пространства кососимметричных тензоров типа $(k, 0)$ на n-мерном пространстве.

Ответ в Задаче 3.2.

Для кососимметричных тензоров

$$\dim \Lambda^k(V^n) = C_n^k.$$

Базис образуют внешние произведения

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(k)}},$$

где $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$.

суммы линейных подпространств $A = \oplus_{i \ge 0} A_i$, таких что $A_i A_j \subset A_{i+j}$. Пример: любой многочлен является суммой однородных, в данном случае индекс i — степень однородного многочлена.

Решение Задачи 3.2. Задача решается строго аналогично задаче 3.1. Однако в данном случае следует дополнительно учесть, что в силу кососимметричности тензоров все компоненты, имеющие повторяющиеся индексы, равны нулю, а потому их не нужно дополнительно специфицировать для задания тензора. Как следствие, элементов в базисе будет столько же, сколько строго возрастающих наборов из k чисел, каждое из которых принимает значение от 1 до n, то есть C_n^k.

Элементами базиса будут внешние произведения

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \quad i_1 < \ldots < e_{i_k}.$$

Задача 3.2 решена. □

Теорема 3.2. *Прямая сумма всех пространств кососимметричных тензоров*

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V)$$

образует ***внешнюю алгебру*** $(\Lambda(V), \wedge)$.

- *Это косокоммутативная градуированная алгебра: если $S \in \Lambda^p(V), T \in \Lambda^q(V)$, то*

$$T \wedge S = (-1)^{pq} S \wedge T. \tag{3.2}$$

- *Если $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства V, то элементы*

  $$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}, \qquad \text{где} \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n,$$

  образуют базис $\Lambda^k(V)$.

Замечание 3.1. Формализм для внешней алгебры $\Lambda(V)$ почти такой же, как для алгебры многочленов.

- Любой элемент $\Lambda(V)$ может быть представлен в виде суммы[2]

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} A^{i_1 \ldots i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \right).$$

- Умножение ассоциативно и дистрибутивно, но не коммутативно, поэтому при раскрытии скобок следует помнить, что

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i,$$

  или, более общо, выполнено (3.2).

Замечание 3.2. Коэффициент в формуле (3.1) выбран таким образом, что

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = k!\,\mathrm{Alt}\,(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}) = \\ = \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}}.$$

Иными словами, значение внешнего произведения набора векторов v_i на наборе ковекторов α^j (или, аналогично, внешнего произведение набора ковекторов на наборе векторов) — это определитель $\det\left(\langle \alpha^j, v_i \rangle\right)$:

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \left(\alpha^1, \ldots, \alpha^k\right) = \begin{vmatrix} \langle \alpha^1, v_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha^1, v_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha^k, v_1 \rangle & \ldots & \langle \alpha^k, v_k \rangle \end{vmatrix},$$

где угловые скобки обозначают спаривание — применение ковектора к вектору.

Это хорошо согласуется с результатом Задачи 2.8, если ее применить к оператору A, компоненты которого $a^i_j = \langle \alpha^i, v_j \rangle$.

[2] При рассмотрении внешнего произведения нужно писать знак суммы, потому что суммирование идет не по всем наборам индексов, а только по упорядоченным.

3.2 Операции Sym и Alt

Как было сказано выше, все определения и конструкции предыдущих параграфов могут быть дословно повторены для тензоров типа $(0, k)$. В данном параграфе мы будем работать именно с ними. Пространства симметричных и кососимметричных тензоров будем, как и раньше, обозначать символами S^k и Λ^k, соответственно.

Задача 3.3. Доказать, что операция перестановки индексов коммутирует с операциями альтернирования и симметрирования:

$$\operatorname{Sym}\left(T^{\sigma}\right) = \left(\operatorname{Sym} T\right)^{\sigma}, \qquad \operatorname{Alt}\left(T^{\sigma}\right) = \left(\operatorname{Alt} T\right)^{\sigma}.$$

Решение Задачи 3.3. Докажем для альтернирования, для симметрирования доказательство аналогично. Пусть $\sigma \in S_k$ — перестановка индексов, а T — произвольный тензор типа $(0, k)$. Тогда

$$\operatorname{Alt}\left(T^{\sigma}\right)_{i_1 \dots i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \operatorname{sgn} \tau \left(T^{\sigma}\right)_{i_{\tau(1)} \dots i_{\tau(k)}} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} \operatorname{sgn} \tau \, T_{i_{\sigma\tau(1)} \dots i_{\sigma\tau(k)}}.$$

Если обозначить $\zeta = \sigma\tau$, то полученное выражение равно

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \frac{1}{k!} \sum_{\zeta \in S_k} \operatorname{sgn} \zeta \, T_{i_{\zeta(1)} \dots i_{\zeta(k)}} = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{Alt} T_{i_1 \dots i_k} = \left(\operatorname{Alt} T\right)^{\sigma}_{i_1 \dots i_k},$$

что и требовалось доказать. Задача 3.3 решена. □

Задача 3.4. Доказать, что полное альтернирование “поглощает” частичное:

$$T_{[[i_1, \dots, i_k], j_1, \dots, j_l]} = T_{[i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l]}.$$

Доказать аналогичное утверждение для симметрирования:

$$T_{((i_1, \dots, i_k), j_1, \dots, j_l)} = T_{(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)}.$$

Решение Задачи 3.4. Операции полного и частичного альтернирования легко переставить местами, воспользовавшись Задачей 3.3:

$$T_{[[i_1,\dots,i_k],j_1,\dots,j_l]} = \mathrm{Alt}\left(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}\sigma\, T_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(k)},j_1\dots j_l}\right) =$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}\sigma\ (\mathrm{Alt}\, T)_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(k)},j_1\dots j_l} = \mathrm{Alt}\, T_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(k)},j_1\dots j_l}.$$

Последнее равенство верно, поскольку все слагаемые в сумме равны.

Для симметрирования доказательство аналогично. Задача 3.4 решена. $\square$

Задача 3.5. Для операторов симметризации Sym и альтернирования Alt доказать, что

(1) они являются проекторами, т.е. что

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}) = \mathrm{Sym} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}) = \mathrm{Alt};$$

(2) их композиция равна нулю (если ранг тензора больше 1)

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{Alt}) = \mathrm{Alt}(\mathrm{Sym}) = 0.$$

Решение Задачи 3.5 . Все утверждения легко следуют из Задачи 3.3.

(1) Равенство $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}) = \mathrm{Alt}$ является утверждением Задачи 3.4 при $l = 0$. Равенство $\mathrm{Sym}(\mathrm{Sym}) = \mathrm{Sym}$ доказывается аналогично.

(2) Оба равенства доказываются аналогично, докажем последнее

$$\mathrm{Alt}(\mathrm{Sym}\, T)_{i_1\dots i_k} = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}\sigma\ (\mathrm{Sym}\, T)_{i_{\sigma(1)}\dots i_{\sigma(k)}} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \ (\operatorname{Sym} T)_{i_1 \dots i_k} = 0,$$

т.к. в группе S_k поровну чётных и нечётных перестановок.

Задача 3.5 решена. $\square$

Задача 3.6. Доказать, что если тензор типа $(0, k)$, где $k > 1$, представляется в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров, то это разложение единственно.

Решение Задачи 3.6. В самом деле, пусть $T \in T_k^0$ представляется в виде $T = S + A$, где $S \in S^k, A \in \Lambda^k$. Применяя к этому равенству операцию симметрирования, получаем, что $\operatorname{Sym}(T) = \operatorname{Sym}(S) + \operatorname{Sym}(A) = S$ по доказанному выше.

Аналогично, применяя альтернирование, имеем $A = \operatorname{Alt}(T)$. Таким образом, оба тензора S и A однозначно определяются по тензору T.

Задача 3.5 решена. $\square$

Следствие 3.1. *Если любой тензор из пространства $T_k^0, k > 1$ представляется в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров, имеет место равенство $T_k^0 = S^k \oplus \Lambda^k$. В частности,* $\dim T_k^0 = \dim S^k + \dim \Lambda^k$.

Задача 3.7. Доказать, что любой тензор типа $(0, 2)$ однозначно представляется в виде суммы симметричного и кососимметричного тензоров.

Решение Задачи 3.7. Для любой матрицы A

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}.$$

Задача 3.7 решена. $\square$

Задача 3.8. Доказать, что для тензоров ранга, отличного от 2, утверждение задачи (3.7), вообще говоря, неверно[3].

Указание. Посчитать размерности подпространств.

Решение Задачи 3.8. Воспользуемся следствием 3.1 и покажем, что сумма размерностей $\dim \Lambda^k(V^n)$ и $\dim S^k(V^n)$ не равна $\dim T_0^k(V^n)$:

$$C_n^k + C_{n+k-1}^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \\ + \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} \neq n^k$$

при $k \neq 2$. Заметим, что при $k = 2$ достигается равенство, а при $k > 1, n > 1$ выполнено неравенство

$$\frac{n-k+1}{k} < \frac{n+k-1}{k} < n,$$

поэтому левая часть растет медленее правой. Остаётся разобрать особые случаи:

- При $k = 1$ все тензоры одновременно симметричны и кососимметричны:

$$\Lambda^1(V^n) = S^1(V^n) = V^n.$$

- Если $n = 1$ и $k > 1$, то ненулевых кососимметричных тензоров нет, и все тензоры симметричны:

$$\Lambda^k(V^1) = 0, \qquad \dim S^k(V^1) = 1.$$

Задача 3.8 решена. $\square$

[3]Единственное исключение — тензоры ранга больше 2 на одномерном пространстве.

3.3 Внешнее и симметрическое произведения

Задача 3.9. Доказать, что для любых симметричных тензоров

$$S_i \in S^{k_i}(V), \qquad i = 1, \dots, m$$

выполнено равенство

$$S_1 \odot \dots \odot S_m = \operatorname{Sym}\left(S_1 \otimes \dots \otimes S_m\right).$$

Аналогично для любых кососимметричных тензоров

$$A_i \in \Lambda^{k_i}(V), \qquad i = 1, \dots, m$$

выполнено равенство

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_m = \frac{(k_1 + \dots + k_n)!}{k_1! \dots k_n!} \operatorname{Alt}\left(A_1 \otimes \dots \otimes A_m\right).$$

Эти равенства выполнены вне зависимости от расстановки скобок в левой части, и как следствие симметрическое и внешние произведения ассоциативны.

Указание. Согласно Задаче 3.4

$$\operatorname{Sym}\left(\operatorname{Sym}(A_1) \otimes A_2\right) = \operatorname{Sym}\left(A_1 \otimes A_2\right),$$
$$\operatorname{Alt}\left(\operatorname{Alt}(A_1) \otimes A_2\right) = \operatorname{Alt}\left(A_1 \otimes A_2\right).$$

Решение Задачи 3.9 . Согласно указанию

$$(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3 =$$
$$= \frac{(k_1 + k_2 + k_3)!}{(k_1 + k_2)! k_3!} \operatorname{Alt}\left(\frac{(k_1 + k_2)!}{k_1! k_2!} \operatorname{Alt}\left(A_1 \otimes A_2\right) \otimes A_3\right) =$$
$$= \frac{(k_1 + k_2 + k_3)!}{k_1! k_2! k_3!} \operatorname{Alt}\left(A_1 \otimes A_2 \otimes A_3\right).$$

Аналогично доказываются утверждения для симметричного произведения и большего числа сомножителей. $\square$

3.4 Линейные дифференциальные формы

В этом разделе k-формами мы называем кососимметричные тензоры типа $(0, k)$. Подчеркнём, что речь идет о тензорах, а не о тензорных полях. Линейные пространства предполагаются конечномерными.

3.4.1 Разложимость дифференциальных форм

Задача 3.10. Доказать, что 1-формы $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ линейно независимы тогда и только тогда, когда

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \neq 0. \tag{3.3}$$

Решение Задачи 3.10. Если ковектора α^i линейно независимы, то их можно дополнить до базиса $\alpha^1, \ldots \alpha^n$ пространства V^*. Форма объёма $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^n \neq 0$.

Обратно, пусть формы $\alpha^1, \ldots, \alpha^k$ линейно зависимы. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha^1 = \sum_{i=2}^k a_i \alpha^i$, где a_i — некоторые числа. В таком случае

$$\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k = \sum_{i=2}^k a_i \alpha^i \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k.$$

В каждом слагаемом имеются повторяющиеся сомножители, а значит, все слагаемые равны нулю в силу кососимметричности внешнего произведения.

Задача 3.10 решена. □

Задача 3.11. Доказать, что p-форму ω можно представить в виде

$$\omega = \alpha \wedge \theta,$$

где α — ненулевая 1-форма, тогда и только тогда, когда

$$\alpha \wedge \omega = 0.$$

Решение Задачи 3.11. Дополним α до базиса

$$e^1 = \alpha, e^2, \dots e^n$$

пространства V^*. Если $\alpha \wedge \omega = 0$, то в форме ω в каждом слагаемом имеется множеитель e^1, а значит, каждое слагаемое имеет вид $e^1 \wedge \theta_i$, где θ_i — некоторая $(p-1)$-форма. Положив $\theta = \sum_i \theta_i$ получаем, что $\omega = e^1 \wedge \theta = \alpha \wedge \theta$.

Обратное утверждение очевидно: если $\omega = \alpha \wedge \theta$, то $\alpha \wedge \omega = \alpha \wedge \alpha \wedge \theta = 0$.

Задача 3.11 решена. □

Задача 3.12. Доказать, что любая $(n-1)$-форма в n-мерном пространстве разложима (т.е. является внешним произведением 1-форм.)

Указание. Можно воспользоваться задачей 3.11. Любая форма $\eta \in \Lambda^{n-1}(V)$ задаёт линейное отображение

$$L_\eta \colon \Lambda^1(V) \to \Lambda^n(V) \simeq \mathbb{K},$$
$$\alpha \mapsto \alpha \wedge \eta.$$

Решение Задачи 3.12. Т.к. L_η — линейное отображение,

$$\dim \operatorname{Ker} L_\eta \geq n - 1.$$

Возьмем базис $e^1, \dots, e^n$ такой что $e^2, \dots, e^n \in \operatorname{Ker} L_\eta$. Так как любая $(n-1)$-форма имеет вид

$$\eta = \sum_i C_i e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^i} \wedge \dots \wedge \dots e^n,$$

и базис выбран так, что

$$e^2 \wedge \eta = \dots = e^n \wedge \eta = 0,$$

форма η имеет вид

$$\eta = C_1 e^2 \wedge \dots \wedge e^n.$$

Задача 3.12 решена. □

Задача 3.13. Доказать, что 2-форму ω можно представить в виде

$$\omega = \alpha \wedge \beta,$$

где α, β — 1-формы, тогда и только тогда, когда

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

Указание. Воспользоваться следующей теоремой о каноническом виде кососимметричной билинейной формы.

Теорема 3.3. *Для любой кососимметричной билинейной формы Ω на конечномерном линейном пространстве*[4] *V существует базис $e_1, \dots, e_n$, в котором матрица Ω имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ -E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где E_k — единичная $k \times k$ матрица.

Следствие 3.2. *Перенумерацией координат матрицу* (3.4) *можно привести к виду*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

[4] В этой теореме $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, чтобы можно было отличать кососимметричные формы от симметричных.

Решение Задачи 3.13. По следствию 3.2 линейную 2-форму ω всегда можно привести к виду

$$\omega = dx^1 \wedge dx^2 + \dots + dx^{2k-1} \wedge dx^{2k}.$$

В этом базисе легко видно, что для $\omega \neq 0$

$$\omega \wedge \omega = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = e^1 \wedge e^2.$$

Последнее эквивалентно тому, что ранг матрицы равен 2. Задача 3.13 решена. □

3.4.2 Форма объёма

Задача 3.14. Пусть g_{ij} — (невырожденная[5]) билинейная форма на вещественном линейном пространстве V^n. Доказать, что выражение

$$\sqrt{|\det g_{ij}|}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \tag{3.6}$$

меняется как тензор типа $(0, n)$ при замене координат x^i с положительным якобианом[6].

Решение Задачи 3.14. Перейдем от координат (x^i) к координатам $\left(x^{i'}\right)$

$$\sqrt{|\det g_{i'j'}|}dx^{1'} \wedge \dots \wedge dx^{n'} =$$

$$= \sqrt{\left|\det g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right|} \left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1}\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial x^{n'}}{\partial x^{i_n}} dx^{i_n}\right).$$

[5] Вырожденной билинейной форме соответствует нулевая форма объёма.

[6] Якобиан здесь — определитель матрицы Якоби.

- В подкоренном выражении за скобки выносится модуль определителя матрицы $\left(\dfrac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right)$

$$\sqrt{\left|\det g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right|} = \sqrt{|\det g_{ij}|}\left|\det\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right|.$$

  В матричном виде это утверждение ещё нагляднее. Если $B = C^T B' C$, то

$$\det B = \det\left(C^T B' C\right) = (\det C)^2 \det B'.$$

- Во внешнем произведении, если упорядочить координаты $x^{i'}$, возникает определитель матрицы $\left(\dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)$.

$$\left(\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma\prod_{i=1}^{n}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\sigma(i)}}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n =$$
$$= \det\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

- Если определитель якобиана положительный

$$\det\left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\right) > 0,$$

  то полученные два числа сокращаются.

Задача 3.14 решена. □

Замечание 3.3. Утверждение в Задаче 3.14 специально сформулировано таким образом, чтобы оно было верно как для тензоров на линейных пространствах, так и для тензорных полей на многообразиях.

Замечание 3.4. Необычная формулировка Задачи 3.14 связана с тем, что выражение (3.6) задаёт не тензор, а **псевдотензор**. Псевдотензор отличается от тензора наличием знака якобиана в формуле преобразования компонент

$$T^{i'_1 \dots i_p'}_{j_1' \dots j_q'} = \operatorname{sgn}\left(\det \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right) T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial x^{i_1'}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i_p'}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q'}}. \tag{3.7}$$

Следствие 3.3. *Если на пространстве V задана ориентация, то форму объёма* (3.6) *можно считать тензором.*

3.4.3 Оператор двойственности Ходжа

Пусть V^n — n-мерное вещественное линейное пространство, на котором заданы скалярное произведение[7] g и ориентация.

Оператор двойственности Ходжа[8] $*$ — операция, которая отображает (линейные) k-формы на V в $(n-k)$-формы:

$$*\colon \Lambda^k(V^n) \to \Lambda^{n-k}(V^n), \qquad 0 \le k \le n$$

и которая характеризуется следующим свойством. Если $e_1, \dots, e_n$ — положительно ориентированный ортонормированный базис V, то

$$*e^1 \wedge \dots \wedge e^k = e^{k+1} \wedge \dots \wedge e^n.$$

Переставляя индексы, получаем чуть более общую формулу

$$\begin{gathered} *e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = \\ = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_k & j_1 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_{n-k}}, \end{gathered} \tag{3.8}$$

[7]То есть g — симметричный положительно определённый тензор типа $(0,2)$.

[8]Также **звезда Ходжа** или **дуальность Ходжа**.

где индексы $j_1 \dots, j_{n-k}$ дополняют набор индексов $i_1 \dots, i_k$ до полного набора $1, \dots, n$.

Задача 3.15. Доказать следующие утверждения.

(1) Для любой k-формы α

$$*\,(*\alpha) = (-1)^{k(n-k)}\alpha. \tag{3.9}$$

(2) Для любых k-форм α, β

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha. \tag{3.10}$$

Решение Задачи 3.15. Формулы (3.9) и (3.10) линейны по α и β, поэтому достаточно доказывать их для базисных k-форм

$$\alpha = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \qquad \beta = e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}. \tag{3.11}$$

(1) После перенумерации координат можно считать, что базисная k-форма имеет вид

$$\alpha = e^1 \wedge \dots \wedge e^k.$$

Остаётся дважды применить формулу (3.8):

$$\begin{gathered} *\,(*\alpha) = *\left(e^{k+1} \wedge \dots \wedge e^n\right) = \\ = \operatorname{sgn}(\sigma) e^1 \wedge \dots \wedge e^k = (-1)^{k(n-k)}\alpha, \end{gathered}$$

где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n-k & n-k+1 & \dots & n \\ k+1 & \dots & n & 1 & \dots & k \end{pmatrix}$.

(2) Обозначим индексы базисных форм (3.11) через $I = \{i_1 \dots, i_k\}$ и $J = \{j_1 \dots, j_k\}$. Несложно явно проверить, что

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \begin{cases} 0, & I \neq J, \\ e^1 \wedge \dots \wedge e^n, & I = J. \end{cases} \tag{3.12}$$

Задача 3.15 решена. □

Дадим теперь инвариантное определение звезды Ходжа, не зависящее от выбора базиса.

Определение 3.3. Фиксируем форму объема[9] на пространстве (V^n, g):

$$\omega = \sqrt{|\det g_{ij}|}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \tag{3.13}$$

Оператор двойственности Ходжа отображает k-форму α в $(n-k)$-форму $*\alpha$ по формуле:

$$(*\alpha)_{i_{k+1}\dots i_n} = \frac{1}{k!}\omega_{i_1\dots i_k, i_{k+1}\dots i_n}\alpha^{i_1\dots i_k}. \tag{3.14}$$

Здесь $\alpha^{i_1\dots i_k}$ получается из $\alpha_{i_1\dots i_k}$ поднятием индексов при помощи скалярного произведения g:

$$\alpha^{i_1\dots i_k} = g^{i_1 j_1}\dots g^{i_k j_k}\alpha_{j_1\dots j_k}.$$

Задача 3.16. Продолжим скалярное произведение g с V^n на $\Lambda^k(V^n)$, положив его равным

$$(\alpha, \beta) = \det\left((\alpha_i, \beta_j)\right) \tag{3.15}$$

на разложимых k-формах

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k, \qquad \beta = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_k.$$

Доказать, что для любых k-форм α и β

$$\alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta)\omega. \tag{3.16}$$

Также доказать, что звезда Ходжа $*$ — ортогональный оператор:

$$(*\alpha, *\beta) = (\alpha, \beta)\,. \tag{3.17}$$

[9] Форма объёма на ориентированном евклидовом пространстве — это n-форма, см. раздел 3.4.2

Решение Задачи 3.16. Формулы (3.16) и (3.17) также линейны по α и β, поэтому достаточно доказывать их для базисных форм (3.11).

- По формуле (3.15), если $e^1, \ldots, e^n$ — ортономированный базис в $V^* = \Lambda^1(V)$, то базисные k-формы $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ образуют ортонормированный базис $\Lambda^k(V)$.

- Звезда Ходжа переводит ортонормированный базис в ортонормированный, поэтому выполнено (3.17).

- Формула (3.16) следует из формулы (3.12).

Задача 3.16 решена. $\square$

Формула (3.16) может рассматриваться как еще одно определение звезды Ходжа.

Задача 3.17. Выписать явные формулы для оператора $*$ в $\mathbb{R}^3$ (на формах степени $0, 1, 2, 3$) для случая, когда метрика диагональна.

Ответ в Задаче 3.17. Пусть метрика на $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ имеет вид

$$ds^2 = I_x dx^2 + I_y dy^2 + I_z dz^2.$$

Тогда форма объема равна

$$\omega = \sqrt{|I_x I_y I_z|} dx \wedge dy \wedge dz,$$

а звезда Ходжа следующим образом действует на базисных формах

$$
\begin{gathered}
*1=\omega, \quad *\,\omega=1, \\
*dx=\frac{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}{I_x}dy\wedge dz, \quad *\,dy=\frac{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}{I_y}dx\wedge dz, \\
*dz=\frac{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}{I_z}dx\wedge dy, \quad *\,(dy\wedge dz)=\frac{I_x}{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}dx, \\
*\,(dx\wedge dz)=\frac{I_y}{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}dy, \quad *\,(dx\wedge dy)=\frac{I_z}{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}dz.
\end{gathered}
$$

Решение Задачи 3.17. Все формулы можно проверить явно по определению оператора $*$. Заметим, что благодаря тождествам $*1=\omega$ и (3.9) достаточно описать действие оператора $*$ на 1-формах. Для примера явно вычислим $*dx$ (двумя способами).

(1) Применим формулу (3.14). По определению, коэффициент формы объема

$$\omega_{123}=\sqrt{|I_x I_y I_z|}.$$

После поднятия индекса dx переходит в $\dfrac{1}{I_x}\dfrac{\partial}{\partial x}$. Откуда

$$(*dx)_{23}=\frac{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}{I_x}.$$

(2) Применим формулу (3.16). В данном случае метрика диагональна, поэтому

$$(dx,dx)=\frac{1}{I_x}, \qquad (dx,dy)=0, \qquad (dx,dz)=0.$$

Отсюда немедленно получаем, что в $*dx$ только коэффициент при $dy\wedge dz$ не равен нулю, и он равен $\frac{\sqrt{|I_x I_y I_z|}}{I_x}$.

Задача 3.17 решена. $\square$

Замечание 3.5. Оператор двойственности Ходжа можно определить на любом ориентированном римановом многообразии (M^n, g) по формуле (3.14). Формулы (3.9), (3.10), (3.16) и (3.17) останутся выполненными, т.к. они $C^\infty(M)$-линейны по α и β.

Часть II

Тензорные поля

В этой части мы переходим к подробному изучению тензорных полей. Основное отличие тензорного поля от тензора в точке заключается в том, что при наличии тензорного поля можно следить, как тензор меняется при движении точки. Как следствие, осмысленным становится вопрос об определении производной тензорного поля.

Структура данной части такова.

В теме 4 мы внимательно рассмотрим известное понятие векторного поля.

Тема 5 посвящена дифференциальным формам — полям кососимметрических тензоров типа $(0, q)$. Ранее, в разделе 3.4, мы уже сталкивались с такими тензорами, но тогда рассматривали их исключительно в точке (или на векторном пространстве). Теперь же мы изучим тензорные поля такого вида. Дифференциальные формы важны тем, что на них легко определяются дифференциальные операции взятия дифференциала и интегрирования, обобщающие известные из математического анализа операции взятия дифференциала и интегрирования функций.

К изучению дифференцирования произвольных тензорных полей мы перейдем далее, в части III.

Мы предполагаем, что читатели знакомы с понятием гладкого многообразия и с базовыми понятиями топологии. Для ознакомления с ними и получения дополнительной информации рекомендуем обратиться, например, к книгам [3, 5–13].

Тема 4

Векторные поля

4.1 Определение касательного вектора

Напомним, как определяется касательный вектор к гладкому многообразию. Отметим, что эти определения не предполагают, что многообразие вложено в объемлющее пространство.

- **Касательный вектор** к многообразию можно определить тремя эквивалентными способами:

  (1) Как набор чисел, меняющийся по определённому закону при замене координат (т.е. как тензор типа $(1, 0)$).

  (2) Как класс эквивалентных кривых.

  (3) Как дифференциальный оператор на пространстве гладких функций.

  В разных ситуациях удобно использовать различные определения вектора.

- **Касательное пространство** T_pM к многообразию M в точке p — это множество всех касательных векторов в этой точке. Это линейное пространство, причем $\dim T_PM = \dim M$.

- **Векторное поле** — это семейство (касательных) векторов, компоненты которых гладко зависят от точки.

4.1.1 Вектор как тензор типа $(1, 0)$

Определение 4.1. Касательный вектор в точке p гладкого многообразия M — это отображение, которое сопоставляет каждой системе локальных координат в окрестности точки p набор чисел $(v^1, \ldots, v^n)$, которые при замене координат меняются по следующему закону:

$$v^{i'} = \sum_i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i. \tag{4.1}$$

Как и следовало ожидать, (4.1) — это тензорный закон для тензора типа $(1, 0)$.

Задача 4.1. Рассмотрим вектор $(1, 0)$ в точке (x, y) евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$. Найти его компоненты в полярных координатах.

Ответ в Задаче 4.1.[1] $\left(\cos\varphi, -\dfrac{\sin\varphi}{r}\right)$.

Решение Задачи 4.1. Честно применим формулу (4.1). На плоскости в полярных координатах

$$\begin{pmatrix} v^r \\ v^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^x \\ v^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

[1] Лучше использовать запись $\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, чтобы не перепутать, какие компонеты к каким координатам относятся.

Остаётся вспомнить, что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}.$$

Задача 4.1 решена. $\square$

4.1.2 Касательный вектор кривой

Определение 4.2. Рассмотрим кривые $\gamma(t)$, проходящие через точку p при $t = 0$. Будем считать две такие кривые $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ эквивалентными, если их вектора скорости в точке p равны

$$\left.\frac{d\gamma_1}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\gamma_2}{dt}\right|_{t=0}.$$

Касательный вектор в точке p гладкого многообразия M — это класс эквивалентных кривых, проходящих через эту точку.

Задача 4.2. Доказать, что касательное пространство $\mathrm{sl}(n,\mathbb{R})$ в единице E к группе $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ состоит из матриц[2] с нулевым следом

$$\mathrm{sl}(n,\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \quad \mathrm{tr}A = 0\right\}.$$

Решение Задачи 4.2. То, что любой касательный вектор должен удовлетворять этому условию, легко показать, взяв произвольную кривую $X(t) \subset \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, такую что $X(0) = E$. Продифференцировав тождество

$$\det X(t) = E,$$

[2]Поскольку $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ — подмногообразие $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, мы можем считать каждое его касательное пространство подпространством соответствующего касательного пространства $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

можно заключить, что $\frac{d\det X(t)}{dt}|_{t=0} = 0$. С другой стороны, учитывая, что

$$\det(E+tA) = 1 + t\cdot \mathrm{tr}A + O(t^2)$$

при t близких к нулю, заключаем, что $\mathrm{tr}A = 0$, где $A = \frac{dX(t)}{dt}|_{t=0}$.

Размерность этого подпространства совпадает с размерностью подмногообразия

$$\dim \mathrm{sl}(n,\mathbb{R}) = \dim \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1,$$

поэтому это подпространство и касательное пространство совпадают. Задача 4.2 решена. □

4.1.3 Векторы как дифференциальные операторы

Определение 4.3. Касательное векторное поле на гладком многообразии M — это $\mathbb{R}$-линейный[3] оператор на пространстве гладких функций $\mathrm{C}^\infty(M)$:

$$\begin{gathered} v\colon \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathrm{C}^\infty(M), \\ f \mapsto v(f), \end{gathered} \tag{4.2}$$

удовлетворяющий тождеству Лейбница

$$v(fg) = v(f)g + fv(g).$$

Действие $v(f)$ векторного поля на функцию называют *производной функции f по направлению векторного поля v*.

Замечание 4.1. Касательный вектор в точке может быть определён аналогично как удовлетворяющее тождеству Лейбница $\mathbb{R}$-линейное отображение

$$v\colon \mathrm{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}.$$

[3] $\mathbb{R}$-линейность означает, что $v(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1v(f_1) + c_2v(f_2)$ для любых $c_i \in \mathbb{R}, f_i \in C^\infty(M)$.

Такое определение касательных векторных полей имеет следующий геометрический смысл. Рассмотрим кривую $\gamma(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ на многообразии M, такую что $\gamma(0) = P$ и ее вектор скорости $\dot\gamma(0) = v$. Далее, пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Чтобы найти производную функции f по направлению вектора v изучим, как меняется f при движении вдоль кривой γ и применим формулу производной сложной функции многих переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{df(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i}v^i.$$

Заметим, что такое определение $\frac{\partial f}{\partial v}$ корректно, поскольку правая часть равенства не зависит от выбора представителя класса эквивалентности кривой γ.

Таким образом, каждому касательному вектору v (в смысле определения 4.2) поставлен в соответствие дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial v}$, в локальных координатах имеющий вид

$$\frac{\partial}{\partial v} = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Как видно из этой записи, базисными векторами (совокупность которых называется *каноническим базисом* касательного пространства, с которым мы встречались раньше) являются вектора $\frac{\partial}{\partial x^i}$, отвечающие координатным линиям системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Используя такие обозначения, можно записать вектор в уже привычном нам виде $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Задача 4.3. Найти производную функции f в точке P по направлению вектора ξ:

$$f = x^2y + xz^2 - 2, \qquad P = (1, 1, -1), \qquad \xi = (1, -2, 4).$$

Ответ в Задаче 4.3. $\xi(f)(P) = -7$.

Решение Задачи 4.3. Как было обсуждено выше, в локальных координатах производная функции f вдоль v равна

$$v(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

В данном случае

$$\xi = (1, -2, 4) = 1\frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\partial}{\partial y} + 4\frac{\partial}{\partial z},$$

поэтому

$$\xi(f)(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} + 4\frac{\partial f}{\partial z}\right)(P) =$$
$$= \left((2xy + z^2) - 2(x^2) + 4(2xz)\right)(P) = 3 - 2 - 8 = -7.$$

Задача 4.3 решена. $\square$

4.1.4 Взаимосвязь трех определений

В предыдущем разделе мы показали, что каждому касательному вектору в смысле определения 4.2 ставится в соответствие единственный линейный дифференциальный оператор и, очевидно, каждому линейному дифференциальному оператору соответствует касательный вектор. Покажем теперь, что любое касательное векторное поле в смысле определения 4.3 является линейным дифференциальным оператором.

Задача 4.4. Доказать, что любой удовлетворяющий тождеству Лейбница линейный оператор

$$\mathrm{C}^\infty(M) \to \mathrm{C}^\infty(M)$$

в локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ имеет вид

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Задача 4.4 может быть решена при помощи леммы Адамара.

Лемма 4.1 (Лемма Адамара)**.** *Пусть*

$$f\colon U \to \mathbb{R}$$

— гладкая функция, определённая в выпуклой окрестности U *точки* $0 \in \mathbb{R}^n$*. Тогда существуют такие гладкие функции*

$$g_1, \dots, g_n\colon U \to \mathbb{R},$$

что для всех $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ *имеет место равенство*

$$f(x^1, \dots, x^n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i\, g_i(x_1, \dots, x_n). \tag{4.3}$$

Доказательство Леммы 4.1. Лемма Адамара доказывается при помощи формулы Ньютона–Лейбница:

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt}\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} x_i\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x),$$

где

$$g_i(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\, dt.$$

Лемма 4.1 доказана. □

Отметим, что из доказательства леммы Адамара (или, эквивалентно, дифференцированием равенства (4.3)) имеем, что в начале координат справедливо следующее равенство: $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\big|_{x=0}$.

Решение Задачи 4.4. Нужно доказать, что в любых локальных координатах x^i существуют такие функции v^i, что

$$v(f) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Это возможно, только если

$$v^i = v(x^i).$$

Остаётся показать, что

$$v(f) = v(x^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Без ограничения общности, можно считать, что мы доказываем утверждение в начале координат. Дважды используя лемму Адамара и учитывая, что $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}|_{x=0}$, получаем, что любая функция имеет вид

$$f(x) = f(0) + \sum_i x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) + \sum_{i,j} x^i x^j h_{ij}(x).$$

Посмотрим, как действует оператор v на каждом из этих слагаемых:

- $v(f(0)) = 0$. Более того, $v(c) = 0$ для любой константы $c \in \mathbb{R}$, так как

  $$v(c) = cv(1) = cv(1 \cdot 1) = c(v(1) + v(1)) = 2cv(1).$$

- Для второго слагаемого по формуле Лейбница

  $$v\left(x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(0)\right) = v\left(x^i\right)\frac{\partial f}{\partial x^i}(0) + x^i v\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(0)\right).$$

  При $x^i = 0$ второе слагаемое исчезает.

- Производная третьего слагаемого в нуле равна нулю:

  $$v\left(x^i x^j h_{ij}(x)\right) = v(x^i)x^j h_{ij}(x) + x^i v\left(x^j h_{ij}(x)\right),$$

  поскольку в каждом слагаемом будут нулевые сомножители $x^i = 0$.

В производной выжило только одно слагаемое. Мы получили требуемое равенство:

$$v(f)(0) = v\left(x^i\right) \frac{\partial f}{\partial x^i}(0).$$

Задача 4.4 решена. □

Таким образом мы доказали, что определения 4.2 и 4.3 эквивалентны. Остается разобраться с определением 4.2.

Задача 4.5. Доказать, что линейный дифференциальный оператор $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ задает во всех системах координат (x^i) один и тот же вектор v если и только если функции v^i удовлетворяют тензорному закону.

Решение Задачи 4.5. Рассмотрим замену координат $(x^i) \to (x^{i'})$. Нам нужно проверить, что равенство $v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = v^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$ равносильно тензорному закону для тензоров типа $(1, 0)$. Пусть f — произвольная гладкая функция на многообразии M. Тогда имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Следовательно,

$$v^{i'} \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = v^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Правая часть равна $v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$ если и только если $v^i = v^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, что эквивалентно искомому тензорному закону.

Задача 4.5 решена. □

4.2 Градиент функции

Определение 4.4. Пусть f — гладкая функция на римановом[4] многообразии (M, g). **Градиент** функции f — вектор-

[4]**Риманово многообразие** (M, g) — это многообразие, на котором задано симметричное положительно определённое тензорное поле ти-

ное поле $\operatorname{grad} f$, получающееся из дифференциала df поднятием индекса:

$$\operatorname{grad} f^i = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}. \tag{4.4}$$

Замечание 4.2. Поскольку в математическом анализе рассматриваются пространства $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой на них, задающейся единичиной матрицей, компоненты градиента в этом случае имеют вид $(\operatorname{grad} f)^i = \delta^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}$, то есть совпадают с соответствующими компонентами дифференциала df. Этим и обусловлено название "вектор градиента функции" для объекта, задаваемого набором частных производных функии на евклидовом пространстве.

Задача 4.6. Записать градиент функции $\operatorname{grad} f$ в полярных координатах на плоскости $\mathbb{R}^2$ и в сферических координатах в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Ответ в Задаче 4.6. На плоскости в полярных координатах

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

В пространстве в сферических координатах[5]

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Решение Задачи 4.6 . Нужно применить формулу (4.4). В матричном виде формула (4.4) имеет вид

$$\operatorname{grad} f = G^{-1}\mathrm{d}f,$$

где $\operatorname{grad} f$ и $\mathrm{d}f$ записаны как вектор-столбцы.

па $(0,2)$. Иными словами, в каждом касательном пространстве T_xM задано евклидово скалярное произведение, гладко зависящее от точки $x \in M$.

[5]Где θ — угол с осью z.

В полярных координатах метрика $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$, т.е. в координатах (r, φ)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix},$$

т.е.

$$g^{rr} = 1, \qquad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2},$$

откуда легко получается ответ. В сферических координатах вычисления аналогичны. Задача 4.6 решена. □

Задача 4.7. Доказать, что для любой гладкой функции f на римановом многообразии (M, g) её градиент $\operatorname{grad} f$

(1) ортогонален её поверхности уровня[6] $\{f = \mathrm{const}\}$;

(2) задаёт направление наибольшего роста функции f в соответствующей точке.

Указание. В п. 1 нужно доказать, что для любого $u \in T_x N$, где

$$N = \{f = \mathrm{const}\},$$

выполнено тождество

$$(u, \operatorname{grad} f) = g_{ij} u^i \operatorname{grad} f^j = 0.$$

В п. 2 нужно доказать, что среди векторов v длины $\|\operatorname{grad} f\|$, производная функции f вдоль вектора v максимальна при $v = \operatorname{grad} f$:

$$\operatorname{grad} f(f) = \max_{\|v\| = \|\operatorname{grad} f\|} v(f).$$

[6]Мы считаем поверхность уровня неособой, т.е. $\operatorname{grad} f \neq 0$.

Решение Задачи 4.7. (1) Действительно,

$$g_{ij}u^i \operatorname{grad} f^j = g_{ij}u^i g^{jk}\frac{\partial f}{\partial x^k} = \\ = \delta_i^k u^i \frac{\partial f}{\partial x^k} = u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = u(f) = 0,$$

т.к. u — касательный вектор к поверхности уровня, а потому $u(f) = \frac{df(\gamma(t))}{dt}|_{t=0}$ для кривой $\gamma(t)$, лежащей в N, такой что $\gamma(0) = x, \dot{\gamma}(0) = u$. Поскольку $f = \mathrm{const}$ на N, $\frac{df(\gamma(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{d\,\mathrm{const}}{dt}|_{t=0} = 0$.

(2) Из п. 1 следует, что пространство распадается в ортогональную прямую сумму

$$\mathbb{R}^n = T_xN \oplus \langle \operatorname{grad} f \rangle.$$

Поэтому любой вектор v длины $\|v\| = \|\operatorname{grad} f\|$ имеет вид

$$v = \cos\varphi \operatorname{grad} f + \sin\varphi\, u$$

для некоторого вектора $u \in T_xN$. В данном случае

- $u(f) = 0$, т.к. $u \in T_xN$.
- $\operatorname{grad} f(f) > 0$, т.к. метрика g_{ij} положительно определена:

$$\operatorname{grad} f(f) = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} \geq 0.$$

Поэтому

$$v(f) = \cos\varphi \operatorname{grad} f(f) \leq \operatorname{grad} f(f),$$

и равенство достигается только при $\varphi = 0$, т.е. при $v = \operatorname{grad} f$.

Задача 4.7 решена. □

4.3 Коммутатор векторных полей

Определение 4.5. Коммутатор векторных полей — это коммутатор соответствующих дифференциальных операторов, т.е.

$$[u, v](f) := u(v(f)) - v(u(f)).$$

Задача 4.8. Проверить, что коммутатор векторных полей $[u, v]$ — снова векторное поле, и что в локальных координатах x^i компоненты коммутатора задаются формулой

$$[u, v]^i = \left(u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right). \tag{4.5}$$

Решение Задачи 4.8. Достаточно проверить, что в каждой системе локальных координат $(x^1, \ldots, x^n)$ коммутатор $[u, v]$ задаётся дифференциальным оператором вида

$$w^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

и что его компоненты w^i задаются формулой (4.5). Иными словами, нужно показать, что

$$[u, v](f) = \left(u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Это проверяется явно:

$$[u, v](f) = u^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) - v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right).$$

При раскрытии скобок слагаемые

$$u^j v^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j x^i}, \qquad \text{и} \qquad - v^j u^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j x^i}$$

сокращаются, и мы получаем требуемое равенство. Задача 4.8 решена. □

Задача 4.9. Вычислить коммутатор векторных полей

$$u = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right), \qquad v = (-y, x)$$

на плоскости с координатами x, y.

Указание. В полярных координатах

$$u = \partial_r, \qquad v = \partial_\varphi.$$

Ответ в Задаче 4.9. $[u, v] = 0$

Решение Задачи 4.9. Коммутатор — векторное поле, поэтому достаточно доказать равенство $[u, v] = 0$ в полярных координатах, тогда в любых других координатах он тоже будет равен нулю в силу тензорного закона. Это так, потому что коммутатор базисных векторных полей (и вообще любых постоянных векторных полей) равен нулю. Задача 4.9 решена. □

Задача 4.10. Пусть u, v — векторные поля на многообразии M, касающиеся подмногообразия N. Доказать, что векторное поле $[u, v]$ тоже касается подмногообразия N, и что

$$\left[u\big|_N, v\big|_N\right] = [u, v]\big|_N.$$

Указание. Воспользоваться следующим утверждением, характеризующем подмногообразия.

Лемма 4.2. *Если $N^m \subset M^{n+m}$ — подмногообразие, то для любой точки $x \in N^m$ существуют локальные координаты $(x^1, \dots, x^{n+m})$, в которых подмногообразие N^m является подпространством*

$$x^{m+1} = \mathrm{const}, \qquad \dots \qquad x^{n+m} = \mathrm{const}\,.$$

Решение Задачи 4.10. В координатах из Леммы 4.2 векторные поля u и v в точках подмногообразия N имеют вид

$$u = \left(u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0\right), \qquad v = \left(v^1, \dots, v^m, 0, \dots, 0\right).$$

Посмотрим на выражение для коммутатора

$$[u, v]^i = \sum_{j=1}^{n+m} \left(u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right). \tag{4.6}$$

- При $1 \le i \le m$ формулы для компонент коммутатора на M и N совпадают:

  $$[u, v]^i = \sum_{j=1}^{m} \left(u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right),$$

  поскольку по условию

  $$u^{m+j} = v^{m+j} = 0, \qquad 1 \le j \le n. \tag{4.7}$$

- Пусть $i > m$. Покажем, что

  $$[u, v]^i = 0,$$

  это как раз и означает, что коммутатор $[u, v]$ касается N. По условию $u^i = v^i = 0$ на поверхности N:

  $$x^{m+1} = \text{const}, \qquad \dots \qquad x^{n+m} = \text{const}\,.$$

  Вектора $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x^m}$ являются касательными векторами к этой поверхности. Поэтому

  $$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = 0, \qquad i > m, \quad 1 \le j \le m.$$

Отсюда мы заключаем, что для коммутатора полей u и v $[u,v]^i|_N = [u,v]^i|_M$ при $i \leq m$ и $[u,v]^i = 0$ при $i > m$, что и требовалось.

Задача 4.10 решена. $\square$

Задача 4.11. Векторное поле v_A в $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $(x^1, \ldots, x^n)$ называется линейным, если

$$v_A^i(x^1, \ldots, x^n) = A_k^i x^k,$$

где A— некоторая постоянная матрица. Доказать, что коммутатор линейных векторных полей есть снова линейное векторное поле, и что

$$[v_A, v_B] = -v_{[A,B]},$$

где $[A, B]$ — обычный коммутатор матриц.

Решение Задачи 4.11. Доказательство прямым вычислением:

$$\begin{gathered}
[v_A, v_B]^i = \left(A_k^j x^k\right) \frac{\partial \left(B_l^i x^l\right)}{\partial x^j} - \left(B_k^j x^k\right) \frac{\partial \left(A_l^i x^l\right)}{\partial x^j} = \\
= \left(A_k^j B_j^i - B_k^j A_j^i\right) x^k = [B, A]_k^i \, x^k = -\left[A, B\right]_k^i x^k.
\end{gathered}$$

Задача 4.11 решена. $\square$

Задача 4.12. Рассмотрим векторные поля

$$\xi = y\frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{и} \qquad \eta = \frac{\partial}{\partial y}$$

на плоскости. Существуют ли локальные координаты (u, v) в окрестности точки $x = 1, y = 1$ такие, что

$$\xi = \frac{\partial}{\partial u}, \qquad \text{и} \qquad \eta = \frac{\partial}{\partial v}.$$

Иными словами, можно ли одновременно выпрямить векторные поля ξ, η в окрестности точки $x = 1, y = 1$?

Решение Задачи 4.12. Нет, векторные поля ξ и η нельзя выпрямить, потому что их коммутатор не равен нулю

$$\left[y\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x} \neq 0.$$

Коммутатор — векторное поле, поэтому его равенство нулю не зависит от выбора координат. Задача 4.12 решена. □

Замечание 4.3. Верен следующий общий факт.

Теорема 4.3. *Набор ненулевых векторных полей $v_1, \ldots, v_k$ можно одновременно выпрямить в окрестности точки, т.е. можно найти такие локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ что*

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

тогда и только тогда, когда эти векторные поля попарно коммутируют

$$[v_i, v_j] = 0.$$

Задача 4.13. Доказать, что векторные поля на гладком многообразии M удовлетворяют **тождеству Якоби**

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0. \tag{4.8}$$

Указание. Можно доказать более общее утверждение — тождеству Якоби удовлетворяет множество линейных операторов $\mathrm{End}(V)$ на любом линейном пространстве V.

Решение Задачи 4.13. Действительно, для любых линейных операторов A, B, C

$$[A, [B, C]] = ABC - ACB - BCA + CBA,$$
$$[B, [C, A]] = BCA - BAC - CAB + ACB,$$
$$[C, [A, B]] = CAB - CBA - ABC + BAC.$$

Складывая эти выражения, получаем ноль. Векторные поля — линейные операторы на $C^\infty(M)$, поэтому для них тоже выполнено (4.8). Задача 4.13 решена. □

4.4 Тензор Нийенхейса

Задача 4.14. Пусть A^i_j — тензорное поле типа $(1,1)$ на многообразии M. Доказать, что формула

$$N(X,Y) = A^2\,[X,Y] - A\,[AX,Y] - A\,[X,AY] + [AX,AY]\,, \qquad (4.9)$$

где X, Y — векторные поля на M, определяет тензорное поле типа $(1,2)$.

Определение 4.6. Тензор N, заданный формулой (4.9), называется **тензором Нийенхейса** поля эндоморфизмов A.

Решение Задачи 4.14. В локальных координатах $(x^1,\ldots,x^n)$ на M компоненты тензора N задаются по формуле

$$N^k_{ij} = N\left(\partial_i, \partial_j\right)^k. \qquad (4.10)$$

Нужно доказать, что компоненты меняются по тензорному закону:

$$N^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}N^k_{ij}.$$

Для этого достаточно доказать следующее утверждение.

Утверждение 4.4. *Отображение $N(X,Y)$, заданное формулой (4.9), является $C^\infty(M)$ линейным по X и Y, т.е. для любых векторных полей X_i, Y_j*

$$N(X_1 + X_2, Y) = N(X_1, Y) + N(X_2, Y),$$
$$N(X, Y_1 + Y_2) = N(X, Y_1) + N(X, Y_2),$$

и для любых гладких функций f и g выполнено

$$N(fX, gY) = fgN(X,Y). \qquad (4.11)$$

Действительно, формула (4.10) следует из Утверждения 4.4, поскольку тогда

$$N\left(\partial_{i'}, \partial_{j'}\right)^{k'} = N\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\partial_i, \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\partial_j\right)^{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}N\left(\partial_i, \partial_j\right)^k.$$

Доказательство Утверждения 4.4. Нетривиальной является только формула (4.11). Для любых функций f, g и любых векторных полей X, Y выполнена следующая формула для коммутатора:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

Поэтому в данном случае

$$\begin{gathered}
A^2[fX, gY] = fgA^2[X, Y] + fX(g)A^2Y - gY(f)A^2X, \\
A[A(fX), gY] = fgA[AX, Y] + fAX(g)AY - gY(f)A^2X, \\
A[fX, A(gY)] = fgA[X, AY] + fX(g)A^2Y - gAY(f)AX, \\
[A(fX), A(gY)] = fg[AX, AY] + fAX(g)AY - gAY(f)AX.
\end{gathered}$$

Складывая эти равенства с нужными знаками, получаем (4.11). Утверждение 4.4 доказано. □

Задача 4.14 решена. □

Тензор Нийенхейса N_J естественным образом возникает в задачах о том, является ли поле эндоморфизмов J **интегрируемым**, т.е. существуют ли такие локальные координаты, в которых компоненты J постоянны $J^i_j = \mathrm{const}$. Например, хорошо известна следующая Теорема 4.5.

Определение 4.7. Почти комплексная структура на многообразии M — это тензорное поле J типа $(1, 1)$ т.,ч.

$$J^2 = -\operatorname{id}.$$

Теорема 4.5 (Теорема Ньюлендера-Ниренберга)**.** *Почти комплексная структура J интегрируема тогда и только тогда, когда её тензор Нийенхейса N_J равен* 0.

Тема 5

Дифференциальные формы

Дифференциальная форма порядка k или k**-форма** — это кососимметричное тензорное поле типа $(0, k)$. В локальных координатах дифференциальная k-форма задаётся суммой

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \omega_{i_1 \ldots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Пространство k-форм на многообразии M мы будем обозначать через $\Omega^k(M)$. Мы последовательно изучим четыре операции на диффереciальных формах:

- внешнее произведение $\wedge$,
- внешний дифференциал d,
- прообраз при отображении f^*,
- интегрирование $\int$.

Иногда проще вначале научиться работать с этими операциями в локальных координатах, а потом дать их инвариантное определение.

5.1 Операции над дифференциальными формами

5.1.1 Внешнее произведение

В разделе 3.1.2 мы определили операцию внешнего умножения кососимметричных тензоров в точке. Операция **внешнего произведения** $\alpha \wedge \beta$ дифференциальных форм на M выполняется поточечно — в каждом касательном пространстве $T_x M$.

Напомним, что внешнее произведение $\wedge$ кососимметрично:

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i,$$

поэтому для любой p-формы α и q-формы β

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Задача 5.1. Вычислить внешнее произведение форм

$$\alpha = 2dx + 3dy \qquad \text{и} \qquad \beta = dx \wedge dy + dy \wedge dz.$$

Ответ в Задаче 5.1.

$$\alpha \wedge \beta = 2dx \wedge dy \wedge dz.$$

Решение Задачи 5.1. Внешнее произведение дистрибутивно, поэтому можно формально раскрыть скобки. После этого остаётся сгруппировать слагаемые, воспользовавшись кососимметричностью внешнего произведения:

$$\begin{gathered}\alpha \wedge \beta = (2dx + 3dy) \wedge (dx \wedge dy + dy \wedge dz) = \\ = 2dx \wedge dx \wedge dy + 2dx \wedge dy \wedge dz + \\ +3dy \wedge dx \wedge dy + 3dy \wedge dy \wedge dz = \\ = 0 + 2dx \wedge dy \wedge dz + 0 + 0 = 2dx \wedge dy \wedge dz.\end{gathered}$$

Задача 5.1 решена. □

Задача 5.2. Вычислить значение дифференциальной формы $\omega = x^2 dx \wedge dy$ на векторных полях $v = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}, w = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

Ответ в Задаче 5.2. $\omega(v, w) = x^3 + x^2$.

Решение Задачи 5.2. Когда мы вычисляли значение тензора, записанного в виде линейной комбинации тензорных произведений базисных векторов и ковекторов, на наборе аргументов, нам нужно было просто в каждом слагаемом применить $i-$ый сомножитель к $i-$тому аргументу. В случае дифференциальных форм, в разложении которых фигурирует *внешнее* произведение, так действовать нельзя.

Запишем разложение дифференциальной формы ω по базису пространства T_2^0:

$$\omega = x^2 dx \otimes dy - x^2 dy \otimes dx.$$

Теперь вычислим значение этого тензора обычным методом:

$$\omega(v, w) = (x^2)v^1 w^2 - (x^2)v^2 w^1 = x^3 + x^2.$$

Задача 5.2 решена. □

5.1.2 Внешний дифференциал

Как уже говорилось выше, задача определения дифференцирования на произвольных тензорах довольно сложна. Дифференциальные формы хороши тем, что на них можно легко ввести операцию взятия *внешнего дифференциала.*

Определение 5.1. Внешний дифференциал k-формы α — это $(k+1)$-форма $d\alpha$, в локальных координатах определяемая по формуле[1]

$$d\left(\sum f_I d^I\right) = \sum df_I \wedge dx^I.$$

[1]Здесь I — это мультииндекс, т.е. $dx^I = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$.

Иными словами, справедливы следующие утверждения:

(1) дифференциал суммы — это сумма дифференциалов:

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta,$$

(2) дифференциал формы

$$\alpha = f\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

задаётся формулой

$$d\alpha = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Задача 5.3. Вычислить внешний дифференциал формы

$$\omega = xdy \wedge dz + y^3 dx \wedge dz.$$

Ответ в Задаче 5.3.

$$d\omega = (1 - 3y^2) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Решение Задачи 5.3. Доказательство прямым вычислением:

$$d(xdy \wedge dz + y^3 dx \wedge dz) = dx \wedge dy \wedge dz + 3y^2 dy \wedge dx \wedge dz = \\ = (1 - 3y^2) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Задача 5.3 решена. □

Задача 5.4. Доказать, что для произвольной дифференциальной $k-$формы α выполнено $d(d\alpha) = 0$.

Решение Задачи 5.4. Пусть форма α в локальных координатах записывается как $\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1, \ldots, i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. Тогда по определению имеем

$$d\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_i \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Следовательно,

$$d(d\alpha) = \sum_{i_1<\dots<i_k} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \alpha_{i_1\dots i_k}}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Здесь рассмотрим слагаемые двух типов. Во-первых, если $i = j$, то соответствующее слагаемое равно нулю, потому что в нем присутствует выражение $dx^i \wedge dx^i$, равное нулю в силу косой симметрии внешнего умножения.

Для $i \neq j$ все слагаемые разбиваются на пары вида

$$\frac{\partial^2 \alpha_{i_1\dots i_k}}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

и

$$\frac{\partial^2 \alpha_{i_1\dots i_k}}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

При этом коэффициенты равны, поскольку частные производные гладкой функции коммутируют, а произведения дифференциалов отличаются знаком. Следовательно, в сумме такая пара дает ноль.

Задача 5.4 решена. □

Задача 5.5. Доказать, что для любой p-формы α и произвольной формы β выполнено равенство

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta,$$

то есть внешний дифференциал удовлетворяет градуированному правилу Лейбница.

Решение Задачи 5.5. Поскольку обе части искомого равенства линейны по обоим аргументам, достаточно доказать его для мономов. Пусть

$$\alpha = a(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \beta = b(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}.$$

Тогда по определению и в силу правила Лейбница для дифференциала функции левая часть будет иметь вид (мы намеренно не будем упорядочивать базисные ковектора)

$$d(\alpha\wedge\beta) = \left(\frac{\partial a}{dx^i}b + a\frac{\partial b}{\partial x^i}\right) dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_q}.$$

Первое слагаемое правой части равно

$$d\alpha\wedge\beta = \frac{\partial a}{\partial x^i}b\cdot dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_q}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что внешнее произведение 1-формы на *функцию* коммутативно, а потому функцию b можно "вытащить в начало" произведения.

Аналогично, второе слагаемое правой части имеет вид

$$\alpha\wedge d\beta = (-1)^p a\frac{\partial b}{\partial x^i}\cdot dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^i\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_q}.$$

Чтобы сложить эти выражения, необходимо одинаково упорядочить дифференциалы во внешнем произведении. Для этого перенесем dx^i на первое место второго произведения, совершив при этом p транспозиций и тем самым домножив выражение на $(-1)^p$, что убьет уже имеющийся перед произведением знак.

После этой операции легко видеть, что сумма правых частей равна левой. Задача 5.5 решена. □

Замечание 5.1. Внешний дифференциал — это семейство $\mathbb{R}$-линейных отображений

$$d\colon \Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M),$$

которое характеризуется следующими свойствами:

(1) для 0-форм: df — это дифференциал функции f,

(2) для любой формы α

$$d(d\alpha) = 0, \tag{5.1}$$

(3) для любых формы β и p-формы α

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p(\alpha \wedge d\beta). \tag{5.2}$$

Среди всех дифференциальных $k-$форм выделяют следующие два важных класса.

Определение 5.2. Пусть ω — дифференциальная k-форма на многообразии M. Говорят, что

- форма ω *замкнута*, если $d\omega = 0$;
- форма ω *точна*, если существует такая $(k-1)-$форма α, что $\omega = d\alpha$.

Разумеется, и замкнутые, и точные формы образуют группы по сложению, обозначаемые Z^k и B^k, соответственно. Более того, в силу задачи 5.4 всякая точная форма является замкнутой. Следовательно, B^k является подгруппой в группе Z^k. Мы вернемся к этим понятиям при обсуждении *когомологий де Рама*, см. тему 14.

5.1.3 Прообраз дифференциальной формы

Пусть $f\colon M^n \to N^m$ — гладкое отображение гладких многообразий. Напомним, что в каждой точке $p \in M^n$ определён дифференциал отображения

$$d_pf\colon T_pM^n \to T_{f(p)}N^m.$$

Отсюда возникает отображение дифференциальных форм

$$f^*\colon \Omega^k(N^m) \to \Omega^k(M^n)$$

по формуле

$$(f^*\omega)_p(v_1,\dots,v_k) = \omega_{f(p)}\left(d_pf\left(v_1\right),\dots,d_pf\left(v_k\right)\right).$$

Здесь

- ω — это k-форма на M^n,
- $p \in M$ — произвольная точка,
- $v_1,\dots,v_k \in T_pM$ — произвольные вектора в этой точке.

Форма $f^*\omega$ называется **прообразом**[2] k-формы ω при отображении f.

Обратите внимание, что если отображение f действует "слева направо" (из многообразия M в многообразие N), то прообраз f^* действует, наоборот, "справа налево", что и мотивирует название "обратный образ".

Интересно проследить, как обратный образ записывается в локальных координатах. Пусть $x^1,\dots,x^n$ — локальные координаты на M^n, $y^1,\dots,y^m$ — локальные координаты на N^m, причем эти координаты связаны формулами $y^i = f^i(x^1,\dots,x^n)$. Пусть, далее, k-форма на N^m имеет вид

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1\cdots i_k}(y)\,dy^{i_1}\wedge\dots\wedge dy^{i_k}.$$

Тогда

$$f^*\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1\dots i_k}(f(x))df^{i_1}\wedge\dots\wedge df^{i_k}.$$

Иными словами, в локальных координатах индуцированная форма $f^*\omega$ находится формальной подстановкой координатных функций f^i в выражение для формы ω.

[2] Также $f^*\omega$ называют **обратным образом** или **индуцированной** формой.

Отметим, что важным частным случаем применения обратного образа является ситуация, когда $f\colon M \to M$ — замена координат на многообразии M. Тогда форма $f^*\omega$ — ничто иное, как форма ω, записанная в другой системе координат. Разумеется, в этом случае результат такой операции будет совпадать с формой, вычисленной применением тензорного закона.

Задача 5.6. Записать форму

$$\omega = dx \wedge dy \wedge dz$$

в цилиндрических координатах.

Ответ в Задаче 5.6.

$$\omega = r^2 dr \wedge d\varphi \wedge dz.$$

Решение Задачи 5.6. Практически с заменой координат можно работать так же, как и с отображением. Подставляя

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

получаем

$$\begin{gathered} \omega = d\,(r\cos\varphi) \wedge d(r\sin\varphi) \wedge dz = \\ = (\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi) \wedge (\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi) \wedge dz = \\ = \left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right) dr \wedge d\varphi \wedge dz = r^2 dr \wedge d\varphi \wedge dz. \end{gathered}$$

Задача 5.6 решена. □

Замечание 5.2. Рассмотрим следующую ситуацию, известную из классической дифференциальной геометрии поверхностей. Пусть M — поверхность, вложенная в евклидово пространство $\mathbb{R}^N$ при помощи отображения f. Из изложенного выше нетрудно увидеть, что *первая фундаментальная форма* поверхности M — это в точности обратный образ евклидовой метрики объемлющего пространства, определенный отображением f.

Очевидно, что *прообраз формы согласован с операцией внешнего умножения*: для любых форм α и β

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta.$$

Проверим, что прообраз формы также *согласован с операцией внешнего дифференцирования.*

Задача 5.7. Доказать, что для любого гладкого отображения многообразий $f\colon M \to N$ и любой формы α на N

$$d(f^*\alpha) = f^*(d\alpha). \tag{5.3}$$

Решение Задачи 5.7. Тензорные тождества вида (5.3) можно честно проверять в локальных координатах. Пусть

- $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты на M^n,
- $y^1, \ldots, y^m$ — локальные координаты на N^m,
- эти координаты связаны формулами $y^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$.

Формула (5.3) $\mathbb{R}$-линейна по α. Поэтому достаточно доказывать её для базисных k-форм

$$\alpha = g(y)dy^{i_1} \wedge \ldots dy^{i_k}.$$

С одной стороны,

$$f^*d\left(g(y)dy^{i_1} \wedge \ldots dy^{i_k}\right) = f^*\left(\frac{\partial g}{\partial y^i}dy^i\right) \wedge dy^{i_1} \wedge \ldots dy^{i_k} =$$
$$= \left(\frac{\partial g}{\partial y^i}df^i\right) \wedge df^{i_1} \wedge \ldots df^{i_k}.$$

По формуле для производной сложной функции

$$\frac{\partial g}{\partial y^i}df^i = \frac{\partial g}{\partial y^i}\frac{\partial f^i}{\partial x^j}dx^j = \frac{\partial g(f(x))}{\partial x^j}dx^j = dg(f(x)).$$

Таким обазом

$$f^*d\left(g(y)dy^{i_1}\wedge\dots dy^{i_k}\right)=dg(f(x))\wedge df^{i_1}\wedge\dots df^{i_k}=$$
$$=df^*\left(g(y)dy^{i_1}\wedge\dots dy^{i_k}\right).$$

Задача 5.7 решена. $\square$

Второе решение Задачи 5.7. Тождество (5.3) можно вывести из остальных свойств прообраза и внешнего дифференциала. Следующее наблюдение упрощает вычисления.

Заметим, что для любой функции f и любой формы α

$$f\alpha=f\wedge\alpha.$$

Поэтому *любая дифференциальная форма локально суть внешнее произведение функций и дифференциалов функций.*

- Проверим тождество (5.3) для произвольной функции g. Действительно, для любого векторного поля v

  $$\langle d(f^*g),v\rangle=v(f^*g)=df(v)(g)=\langle df(v),dg\rangle=\langle f^*dg,v\rangle.$$

- Проверим тождество (5.3) для дифференциала функции dg. Оно вытекает из свойства $d^2=0$ и тождества (5.3) для функции:

  $$f^*d(dg)=0=d(df^*g)=d(f^*dg). \qquad (5.4)$$

- Покажем, что если тождество (5.3) выполнено для форм α и β, то оно выполнено и для внешнего произведения $\alpha\wedge\beta$:

  $$f^*d\left(\alpha\wedge\beta\right)=df^*\left(\alpha\wedge\beta\right).$$

  Действительно, с одной стороны,

  $$f^*d\left(\alpha\wedge\beta\right)=f^*\left(d\alpha\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge d\beta\right)=$$
  $$=\left(f^*d\alpha\right)\wedge f^*\beta+(-1)^pf^*\alpha\wedge\left(f^*d\beta\right).$$

С другой стороны,

$$df^*(\alpha \wedge \beta) = d(f^*\alpha \wedge f^*\beta) =$$
$$= (df^*\alpha) \wedge f^*\beta + (-1)^p f^*\alpha \wedge (df^*\beta).$$

Выражения равны, т.к. по предположению

$$df^*\alpha = f^*d\alpha, \qquad df^*\beta = f^*d\beta$$

- Таким образом для любых функций $f, g^1, \ldots, g^k$ тождество (5.3) будет выполнено для $f, dg^1, \ldots, dg^k$, а следовательно и для формы

$$fdg^1 \wedge \cdots \wedge dg^k = f \wedge dg^1 \wedge \cdots \wedge dg^k.$$

Поскольку любая форма есть сумма форм такого вида, (5.3) выполнено для всех форм.

Задача 5.7 решена. □

Следствие 5.1. *Ограничение замкнутой формы на подмногообразие является замкнутой формой.*

Доказательство. Пусть α — замкнутая форма на M^n и $i\colon N^m \to M^n$ — вложение подмногообразия. Тогда индуцированная форма на N^m — это форма $i^*\alpha$. По Задаче 5.7

$$d(i^*\alpha) = i^*(d\alpha) = 0.$$

Следствие 5.1 доказано. □

5.1.4 Интеграл

Рассмотрим ориентированное n-мерное многообразие M и дифференциальную n-форму ω на нем. Пусть *носитель*

$$\operatorname{supp} \omega$$

(то есть замыкание множества точек, в которых форма ненулевая) компактен. Например, это всегда так в случае компактности всего многообразия M.

Форму ω можно интегрировать по многообразию M. Если носитель формы целиком содержится в одной из карт на многообразии, то интеграл от формы равен соответствующему кратному интегралу и в локальных координатах записывается в следующем виде:

$$\int_\Omega f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int \cdots \int_\Omega f\, dx^1 \cdots dx^n.$$

В общем случае интеграл $\int_{M^n} \omega$ определяется при помощи подходящего разбиения единицы[3] $\{\varphi_\alpha\}$:

$$\int_{M^n} \omega = \sum_\alpha \int_{M^n} \varphi_\alpha\, \omega.$$

Компактность носителя формы гарантирует, что из атласа можно выбрать конечное количество карт, пересекающихся с $\operatorname{supp} \omega$, а потому сумма в правой части состоит из конечного числа слагаемых.

Задача 5.8. Вычислить интеграл от 1-формы

$$dx + dy$$

по нижней половине эллипса

$$x^2 + 2y^2 = 1.$$

Ответ в Задаче 5.8:

$$\int_\gamma dx + dy = \pm 2.$$

[3]Подробнее определение интеграла от дифференциальной формы см. [3], [6] или [8].

Замечание 5.3. Знак в ответе зависит от направления обхода (т.е. ориентации половинки эллипса). Знак “+” соответствует обходу от левого конца $(-1,0)$ к правому $(1,0)$.

Первое решение Задачи 5.8 . Можно применить формулу Ньютона-Лейбница. Если 1-форма точна, т.е. $\alpha = df$, то её интеграл по пути $\gamma(t)$, где $t \in [a,b]$ равен

$$\int_{\gamma(t)} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

В данном случае $dx + dy = d(x+y)$, поэтому интеграл равен сумме разностей координат x и y в концевых точках. Задача 5.8 решена. $\square$

Второе решение Задачи 5.8 . Параметризуем кривую:

$$\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t), \qquad t \in (\pi, 2\pi).$$

Отметим, что при изменении направления обхода интеграл поменяет знак. Тогда

$$I = \int_{\gamma(t)} dx + dy = \int_{\pi}^{2\pi} d\cos t + d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right).$$

Интегрируя по t, получаем

$$I = \left(\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2.$$

Задача 5.8 решена. $\square$

Замечание 5.4. В данном случае вычисления во втором решении аналогичны первому, но они работают и в том случае, если форма не точна.

В этом решении мы, по сути, рассмотрели интеграл от прообраза формы $dx+dy$, порожденного вложением эллипса в плоскость. Мы вернемся к связи интеграла от формы и ее прообраза, когда обсудим понятие *степени отображения*, см. раздел 13.

5.2 Формула для внешнего дифференциала

Задача 5.9. Доказать формулу

$$d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y]), \qquad (5.5)$$

где α — дифференциальная 1-форма, X, Y — векторные поля, $X(f)$ — производная функции f по направлению векторного поля X, а $[X,Y]$ — коммутатор векторных полей X и Y.

Указание. Многие тензорные тождества можно доказать следующим образом.

(1) Вначале проверяется, что тождество выполняется для базисных тензоров (например, $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ или dx^i).

(2) Затем проверяется, что обе части тождества одинаково меняются при замене аргументов на сумму $X \to X_1 + X_2$ или умножении их на функции $X \to fX$.

Решение Задачи 5.9. • Проверим, что формула (5.5) выполняется для базисных векторов

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Действительно, мы получаем формулу для компоненты дифференциала 1-формы:

$$d\alpha_{ij} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}.$$

Здесь $[X,Y] = \left[\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0.$

- Докажем формулу (5.5) для произвольных векторных полей
$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$
Очевидно, что (5.5) сохраняется при замене X или Y на сумму векторных полей
$$X \to X_1 + X_2, \qquad Y \to Y_1 + Y_2.$$
Поэтому остаётся проверить, что (5.5) сохраняется при умножении X и Y на функции
$$X \to fX, \qquad Y \to gY.$$
В формуле (5.5) слева функции выносятся за скобки
$$d\alpha(fX, gY) = fg d\alpha(X, Y).$$
Справа же мы получаем следующие слагаемые:
$$\begin{gathered} fX(\alpha(gY)) = fgX(\alpha(Y)) + fX(g)\alpha(Y), \\ gY(\alpha(fX)) = fgY(\alpha(X)) + gY(f)\alpha(X), \\ \alpha([fX, gY]) = fg\alpha([X, Y] + fX(g)\alpha(Y) - gY(f)\alpha(X). \end{gathered}$$
Вычитая из первого равенства второе и третье, получаем требуемое равенство
$$fg d\alpha(X, Y) = fg\left(X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y])\right).$$

Задача 5.9 решена. □

Замечание 5.5. Аналогично может быть доказана формула для дифференциальной формы ω степени p:
$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \ldots, X_p) &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i \Big(\omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_p)\Big) \\ &+ \sum_{0 \le i < j \le p} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_p). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Замечание 5.6. Формулу (5.6) можно взять в качестве инвариантного определения внешнего дифференциала.

5.3 Производная Ли

Пусть M — гладкое многообразие, а X — векторное поле на нем. Существует способ определения дифференцирования произвольных тензорных полей по направлению поля X, не требующий никаких дополнительных структур на многообразии (в отличие от конструкции ковариантной производной, которая будет определена в дальнейших разделах). Это дифференцирование носит название *производной Ли* в честь норвежского математика Софуса Ли. Производная Ли может быть определена аксиоматически (что удобнее для вычислений, но требует доказательства существования объекта с такими свойствами) и аналитически.

Конструкция 5.1. Прежде чем двигаться дальше, опишем следующую общую конструкцию. Пусть $\varphi\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразий. Обозначим его дифференциал $d\varphi$ через φ_*[4]. Определим тензорную степень этого отображения следующим образом:

$$(\varphi_*)_P^{\otimes p}\colon T_0^p(M) \to T_0^p(N),$$

причем для $T \in T_0^p(M)$ и $\omega_1, \dots, \omega_p \in T^*_{\varphi(P)}N$

$$(\varphi_*)_P^{\otimes p}(T)(\omega_1, \dots, \omega_p) = T_{\varphi(P)}(\varphi^*\omega_1, \dots, \varphi^*\omega_p),$$

где φ^* обозначает обратный образ форм.

Можно заметить, что данное ранее понятие обратного образа формы устроено очень похожим образом. В самом деле, рассмотрим φ^* как обратный образ 1-форм, то есть ковекторов. Тогда определим тензорную степень $(\varphi^*)_\varphi^{\otimes q}(P)$ следующим образом. Для произвольного тензора $Q \in T_q^0(N)$ и векторов $v_1, \dots, v_q \in T_P M$ положим

$$(\varphi^*)_{\varphi(P)}^{\otimes q}(Q)(v_1, \dots, v_q) = Q_P(\varphi_* v_1, \dots, \varphi_* v_q).$$

[4]Такое обозначение часто встречается в англоязычной литературе и носит название pushforward.

Легко видеть, что для дифференциальных q-форм это определение совпадает с известным нам обратным образом[5].

Наконец, рассмотрим случай, когда отображение φ — диффеоморфизм. В этом случае оба отображения φ^* и φ_* обратимы. Тогда для любых p, q можно определить отображения $\varphi_{(p,q)} \colon T^p_q(M) \to T^p_q(N)$ и $\varphi^{-1}_{(p,q)} \colon T^p_q(N) \to T^p_q(M)$ по правилу

$$(\varphi_{(p,q)})_P = (\varphi_*)^{\otimes p}_P \otimes ((\varphi^*)^{-1}_P)^{\otimes q},$$
$$(\varphi^{-1}_{(p,q)})_P = ((\varphi_*)^{-1}_P)^{\otimes p} \otimes (\varphi^*)^{\otimes q}_P.$$

Перейдем теперь к **аналитическому описанию производной Ли**.

Рассмотрим точку $P \in M$ и ее окрестность U. В силу теоремы о существовании и единственности решения дифференциальных уравнений, окрестность U можно расслоить на такие кривые, что в каждой точке x вектор $X(x)$ совпадает с вектором скорости соответствующей кривой, проходящей через эту точку. Такие кривые называются *интегральными траекториями* векторного поля X.

Для всякого t мы можем определить локальный диффеоморфизм H^t_X многообразия M на себя: он сдвигает каждую точку области многообразия на время t вдоль интегральной траектории поля X. Очевидно, что H^0_X — тождественное отображение. Семейство этих отображений называется *(локальным) потоком поля* X.

Поскольку H^t_X — локальный диффеоморфизм, мы можем применить данную выше конструкцию. Обозначим полученное отображение пространств тензоров через

$$h^t \colon (T^p_q)_P(M) \to (T^p_q)_{H^t_X(P)}(M)$$

для всех p, q. Заметим, что отображение h^{-t} действует обратно, в частности, пространство тензоров $(T^p_q)_{H^t_X(P)}(M)$ отображается в пространство тензоров $(T^p_q)_P(M)$.

[5]В англоязычной литературе для него используют термин pullback.

Определение 5.3. *Производная Ли* тензорного поля T в точке P определяется как

$$\mathcal{L}_X T(P) = \frac{d}{dt} h^{-t}(T(H_X^t(P)))|_{t=0}.$$

Неформально эту конструкцию можно понимать следующим образом. Обычно под производной по направлению понимается производная по времени при движении точки по кривой с заданным вектором скорости. Однако, поскольку тензоры в разных точках действуют на разных векторных пространствах (произведениях касательных и кокасательных пространств в этих — разных — точках), мы не можем совершать с ними алгебраические операции, а потому обычное определение производной по времени (работающее в случае функций, то есть скалярных полей) оказывается неприменимо.

Чтобы справиться с этой проблемой, тензоры в точках интегральной траектории $\gamma(t)$ поля X "возращаются" в точку P. Тем самым, вместо рассмотрения тензоров $T(H_X^t(P))$ в разных точках интегральной траектории для разных значений параметра t, рассматривается эволюция тензора $T(t) := h^t(T(H_X^t(P)))$ в точке P. Все эти тензоры живут в одном пространстве $T_q^p(P)$, а потому для них производная по времени имеет смысл. Она-то (для $t = 0$) и берется в качестве производной Ли.

Производная Ли обладает следующими свойствами, которые можно рассматривать как **аксиомы, задающие производную Ли**.

(0) Производная Ли $\mathbb{R}-$линейна.

Для произвольной функции f, векторных полей X, Y, 1-формы α и тензоров S, T имеют место следующие равенства.

(1) $\mathcal{L}_X f = X(f)$.

(2) $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

(3) $(\mathcal{L}_X \alpha)(Y) = d\alpha(X, Y) + Y(\alpha(X))$.

(4) $\mathcal{L}_X(S \otimes T) = \mathcal{L}_X(S) \otimes T + S \otimes \mathcal{L}_X(T)$.

Задача 5.10. Доказать свойство (1) производной Ли.

Решение Задачи 5.10. Пусть f — гладкая функция на многообразии M, то есть тензор типа $(0,0)$ или, иначе, скалярное поле. Для функции выражение $h^{-t}(f(H^t_X(P)))$ имеет вид $f(\gamma(t))$, где γ — интегральная траектория поля X, такая что $\gamma(0) = P$. При этом, поскольку γ — интегральная траектория, $\dot{\gamma}(0) = X(P)$.

Тогда по определению имеем

$$\mathcal{L}_X f = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{d\gamma^i}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^i}|_{t=0} = X(P)^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X(f).$$

Задача 5.10 решена. □

Определение 5.4. Пусть ω — дифференциальная k-форма на многообразии M, а X — векторное поле. *Контракцией* или *внутренним умножением* формы ω на поле X называется операция, заданная по формуле

$$(\iota_X \omega)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(X, v_1, \ldots, v_{k-1})$$

для произвольных векторных полей $v_1, \ldots, v_k$.

Таким образом, контракция для каждого поля X отправляет k-форму в $(k-1)$-форму, то есть

$$\iota_X \colon \Omega^k \to \Omega^{k-1},$$

подстановкой поля X в качестве первого аргумента формы.

Определение 5.5. Оператор $\partial \colon \Omega^k \to \Omega^{k+p}$ называется *дифференцированием степени p*, если он

(1) линеен,

(2) удовлетворяет градуированному правилу Лейбница

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = (\partial\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (\partial\beta).$$

Пространство дифференцирований степени p обозначается $\mathcal{D}^p$.

Нам уже известны следующие дифференцирования:

- внешний дифференциал $d \in \mathcal{D}^1$;
- производная Ли $\mathcal{L}_X \in \mathcal{D}^0$;
- контракция $\iota_X \in \mathcal{D}^{-1}$.

Можно заподозрить, что эти три операции как-то связаны между собой. В самом деле, имеет место следующее утверждение.

Лемма 5.1 (Волшебная формула Картана[6]). *Для любого векторного поля X и дифференциальной формы ω на многообразии M справедливо равенство*

$$\mathcal{L}_X \omega = (d \circ \iota_X + \iota_X \circ d)\omega. \tag{5.7}$$

Формула Картана может рассматриваться как еще одно определение производной Ли. Формула Картана может быть доказана при помощи стандартного приема: она легко проверяется для базисных полей и дифференциальных форм, а затем может быть показано, что левая и правая части выражения меняются одинаково при замене X и ω на сумму и при умножении их на гладкую функцию.

Задача 5.11. Вычислить производную Ли формы $\omega = y^2(dx \wedge dz)$ вдоль векторного поля $X = z\frac{\partial}{\partial x} + e^x \frac{\partial}{\partial y}$.

[6] В самом деле так: англ. Cartan magic formula.

Ответ в задаче 5.11. $\mathcal{L}_X\omega = 2ye^x dx \wedge dz$.

Решение Задачи 5.11. Воспользуемся формулой Картана (5.7). Имеем

$$\mathcal{L}_X\omega = d(\iota_{z\frac{\partial}{\partial x}+e^x\frac{\partial}{\partial y}}(y^2(dx\wedge dz))) + \iota_{z\frac{\partial}{\partial x}+e^x\frac{\partial}{\partial y}}(d(y^2(dx\wedge dz))) =$$
$$= d(y^2zdz) + \iota_{z\frac{\partial}{\partial x}+e^x\frac{\partial}{\partial y}}(2ydy\wedge dx\wedge dz) =$$
$$= 2yzdy\wedge dz + 2ye^xdx\wedge dz - 2yzdy\wedge dz = 2ye^xdx\wedge dz.$$

Задача 5.11 решена. □

Из формулы Картана можно получить следующее важное утверждение.

Лемма 5.2. *Для произвольной дифференциальной формы* ω *и векторного поля* X *справедливо равенство*

$$d\mathcal{L}_X\omega = \mathcal{L}_X d\omega.$$

Замечание 5.7. В заключение приведем явный вид выражения производной Ли в локальных координатах. Для векторного поля X и тензора T типа (p,q) в координатах (x^i) имеет место выражение:

$$(\mathcal{L}_X T)^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = X(T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}) - \frac{\partial X^{i_1}}{\partial x^s}T^{si_2\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} - \ldots - \frac{\partial X^{i_p}}{\partial x^s}T^{i_1\ldots i_{p-1}s}_{j_1\ldots j_q} +$$
$$+ \frac{\partial X^s}{\partial x^{j_1}}T^{i_1\ldots i_p}_{sj_2\ldots j_q} + \ldots + \frac{\partial X^s}{\partial x^{j_q}}T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}s}.$$

5.4 Локальная интегрируемость форм

Задача 5.12. Верно ли, что любое поле тензоров ранга 1 можно (локально) “выпрямить” в окрестности своей неособой точки[7], т.е. найти систему координат, в которой компоненты этого поля будут постоянны? Разобрать отдельно случаи тензоров типа $(1,0)$ и $(0,1)$.

Ответ в Задаче 5.12.

- Векторные поля выпрямляются.
- 1-формы не выпрямляются (они выпрямляются тогда и только тогда, когда замкнуты[8]).

Решение Задачи 5.12. • Доказательство следующей теоремы можно найти, например, в [14].

Теорема 5.3. *Гладкое векторное поле v выпрямляется в окрестности любой своей неособой точки P. Иными словами, в окрестности точки P существуют локальные координаты $(x^1,\dots,x^n)$, в которых*

$$v = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Доказательство Теоремы 5.3. Без ограничения общности, точка P — это начало координат 0 в $\mathbb{R}^n$. Линейной заменой координат всегда можно добиться

$$v^1(0) = 1, \qquad v^2(0) = \dots = v^n(0) = 0.$$

Обозначим через $g(t,p)$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x}^i = v^i(x), \quad i = 1,\dots,n, \\ x(0) = p. \end{cases}$$

[7] В окрестности нуля “выпрямляется” только нулевое поле.

[8] Это следствие теоремы Пуанкаре, см. Раздел 14.

Возьмём точку $(0, x^2, \ldots, x^n)$ в трансверсальной в начале координат гиперплоскости к v и рассмотрим соответствующее решение задачи Коши:

$$G(x^1, x^2, \ldots, x^n) = g\left(x_1, \left(0, x^2, \ldots, x^n\right)\right).$$

Несложно проверить следующее.

- Отображение G дифференцируемо, по теореме о гладкой зависимости решений задачи Коши от начальных условий.
- Отображение G — локальный диффеоморфизм, поскольку в 0 у G единичный якобиан.
- Отображение G^{-1} — выпрямляющее, по построению.

Теорема 5.3 доказана. $\square$

- Если 1-форма α “выпрямляется”, то в подходящих координатах ее компоненты постоянны, а потому $d\alpha = 0$. Однако внешний дифференциал — тензорная операция, поэтому его равенство нулю не зависит от выбора системы координат.

Задача 5.12 решена. $\square$

Задача 5.13. Доказать, что 1-форму

$$\alpha = dx + ydz$$

в $\mathbb{R}^3$ никакой заменой координат нельзя привести к форме вида fdg.

Указание. 1-форма α на M^{2n+1} называется **абсолютно неинтегрируемой**, если

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} = \alpha \wedge \underbrace{d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha}_{n} \neq 0$$

ни в какой точке.

Решение Задачи 5.13. Если $\alpha = fdg$, то $d\alpha = df \wedge dg$ и $\alpha \wedge d\alpha = 0$, но

$$\alpha \wedge d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz \neq 0.$$

Задача 5.13 решена. □

5.5 Формула Стокса

Интеграл дифференциальной формы является обобщением интеграла Римана. *Формула Стокса* связывает интеграл формы по границе многообразия с интегралом дифференциала формы по всему многообразию и является обобщением формулы Ньютона-Лейбница.

Теорема 5.4 (Теорема Стокса). *Пусть M^n — компактное ориентированное n-мерное многообразие с краем, и пусть ω — $(n-1)$-форма на M^n. Тогда*

$$\int_{M^n} d\omega = \int_{\partial M^n} \omega. \tag{5.8}$$

Замечание 5.8. Ориентация края ∂M согласована с ориентацией M следующим образом:

- если касательные вектора $v_1, \dots, v_{n-1}$ задают положительную ориентацию границы ∂M,
- то положительную ориентацию M задаёт базис

  $$N, v_1, \dots, v_{n-1},$$

  где N — вектор внешней нормали.

При другом выборе ориентации в формуле Стокса возникает множитель $(-1)^n$.

Задача 5.14. Вывести формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

из теоремы Стокса.

Решение Задачи 5.14. В левой части формулы Лейбница стоит интеграл 1-формы $f(x)dx$ по многообразию с краем: отрезку $[a, b]$. Форма $f(x)dx$ точна: $f(x)dx = dF(x)$. Применяя формулу Стокса, получаем:

$$\int_{[a,b]} dF = \int_{\{a,b\}} F(x).$$

В правой части стоит интеграл 0-формы (гладкой функции) по нульмерному многообразию, состоящему из двух точек $\{a, b\}$.

Интеграл 0-формы F — это сумма значений этой функции, взятых с соответствующими знаками, которые определяются следующим образом: будем считать, что точка края одномерного многообразия M имеет положительную ориентацию, если вектор, направленный внутрь M, задает ориентацию, противоположную ориентации M, и отрицательную в противном случае. При таком соглашении точка b имеет положительную ориентацию, а точка a — отрицательную. Следовательно,

$$\int_{\{a,b\}} F(x) = F(b) - F(a).$$

Задача 5.14 решена. □

Отметим здесь, что формула Ньютона-Лейбница не следует из формулы Стокса: она нужна, чтобы *доказать* формулу Стокса. Однако, формула Стокса *обобщает* формулу Ньютона-Лейбница. Известные из анализа формулы Грина и Гаусса-Остроградского также являются частными случаями формулы Стокса.

Задача 5.15. Проверить выполнение формулы Стокса (5.8) для формы $\omega = xdy$ и прямоугольника

$$\{0 \leq x \leq 2, \qquad 0 \leq y \leq 1\}$$

на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$.

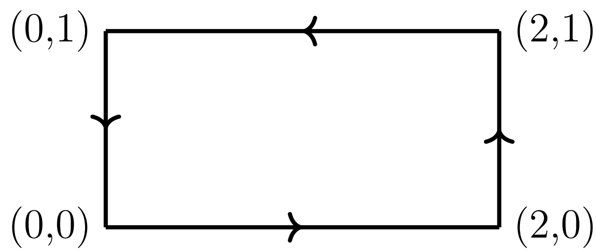

Рис. 5.1: Прямоугольник $0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1$.

Решение Задачи 5.15. Плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$ ориентирована стандартным образом, поэтому граница прямоугольника P ориентирована как на рис. 5.1. Интеграл от $d\omega = dx \wedge dy$ по P равен его площади

$$\int_P d(xdy) = \int_P dx \wedge dy = S(P) = 2.$$

Интеграл по границе равен тому же числу:

$$\int_{(0,0)}^{(2,0)} xdy + \int_{(2,0)}^{(2,1)} xdy + \int_{(2,1)}^{(0,1)} xdy + \int_{(0,1)}^{(0,0)} xdy =$$

$$= 0 + \int_0^1 2dy + 0 + 0 = 2.$$

Задача 5.15 решена. $\square$

Задача 5.16. Доказать, что формула Стокса верна и для многообразий без края (т.е. когда $\partial M = \emptyset$). В этом случае

$$\int_{M^n} d\omega = 0$$

Решение Задачи 5.16. Достаточно вырезать из многообразия маленький замкнутый диск D^n, и два раза применить формулу Стокса для многообразий с краем

$$\int_{M^n} d\omega = \int_{M^n\setminus D^n} d\omega + \int_{D^n} d\omega = \int_{\partial D^n} \omega - \int_{\partial D^n} \omega = 0.$$

У поверхностей $M^n\setminus D^n$ и D^n противоположные внешние нормали, поэтому интегралы по их границам сократятся. Задача 5.16 решена. $\square$

5.6 Геометрический смысл операций $\operatorname{grad}, \operatorname{rot}, \operatorname{div}$

В математическом анализе градиент функции, ротор[9] и дивергенция векторного поля обычно определяют явными формулами[10] в $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right),$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = (\nabla, \vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Выразим $\operatorname{grad}, \operatorname{rot}$ и div через стандартные тензорные операции, чтобы их определения не зависели от выбора координат.

[9] В западной литературе ротор обычно обозначается как curl.

[10] Следующие формулы написаны в традиционных обозначениях, не согласующимися с принятыми в этом тексте. В частности, не следует путать формальный оператор $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\right)$ из этой формулы с ковариантной производной.

Рассмотрим $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ как ориентированное риманово многообразие. При помощи звезды Ходжа $*$ и операций поднятия и опускания индекса отождествим

- 0-формы и 3-формы;
- 1-формы и 2-формы с векторными полями.

Будем использовать “музыкальные” обозначения для операций поднятия и опускания индекса на многообразии M:

$$\sharp : T^*M \to TM, \qquad \flat : TM \to T^*M$$

и с их помощью отождествим 1-формы и вектора.

Тогда все три операции $\mathrm{grad}, \mathrm{rot}$ *и* div *отождествятся с операцией внешнего дифференцирования d на* 0*,* 1 *и* 2*-формах соответственно.* Действительно, если в последовательности

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, equal] \arrow[rrr, leftrightarrow, bend left, "*"] & \Omega^1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, shift right, "\sharp"'] \arrow[r, leftrightarrow, bend left=60, "*"] & \Omega^2 \arrow[r, "d_2"] & \Omega^3 \arrow[r] & 0 \\
 & C^\infty & V \arrow[u, shift right, "\flat"'] & & &
\end{tikzcd}$$

(1) grad переводит функции (0-формы) в векторные поля (1-формы);

(2) rot переводит векторные поля (1-формы) в векторные поля (2-формы);

(3) div переводит векторные поля (2-формы) в функции (3-формы).

Неформально можно представлять операции $\mathrm{grad}, \mathrm{rot}$ и div как хождение по стрелкам на диаграмме, не приводящее к тождественному и нулевому результату. Например, рассмотрим дивергенцию, которая должна переводить векторные поля в функции. Имеем:

$$V \xrightarrow{\ \flat\ } \Omega^1 \xrightarrow{\ *\ } \Omega^2 \xrightarrow{\ d_2\ } \Omega^3 \xrightarrow{\ *\ } \Omega^0 = C^\infty.$$

Задача 5.17. Доказать, что

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\, f) = 0, \qquad \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\, \vec{v}) = 0.$$

Решение Задачи 5.17. Это немедленные следствия того, что

- $*^2 = \pm\,\mathrm{id}$ по (3.9);
- $d^2 = 0$ по (5.1).

Задача 5.17 решена. □

Замечание 5.9. Локально (или глобально на евклидовом пространстве) верны и обратные утверждения: если $\mathrm{rot}\, \vec{v} = 0$, то $\vec{v} = \mathrm{grad}\, f$ для некоторой функции f, и если $\mathrm{div}\, \vec{w} = 0$, то $\vec{w} = \mathrm{rot}\, \vec{v}$ для некоторого векторного поля $\vec{v}$. Это связано с *леммой Пуанкаре*, см. задачу 14.2.

Аналогичные формулы можно определить и для некоторых классов многообразий (в частности, для ориентированных римановых и псевдоримановых многообразий).

(1) **Градиент** функции f — векторное поле $\mathrm{grad}\, f$, получающееся из дифференциала df поднятием индекса:

$$\mathrm{grad}\, f = (df)^\sharp$$

Градиент функции можно определить на любом многообразии, на котором задан произвольный тензор[11]

[11]Поэтому в симплектической геометрии гамильтоновы векторные поля также называют косыми градиентами.

типа $(2,0)$. И уж тем более он определен на любом (псевдо)римановом многообразии (M,g).

В локальных координатах:

$$\operatorname{grad} f^i = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

(2) **Дивергенция** векторного поля v — это функция $\operatorname{div} v$, заданная формулой

$$\operatorname{div} v = *d*(v^\flat).$$

Дивергенцию можно определить на любом ориентированном (псевдо)римановом многообразии (M,g).

(3) **Ротор** векторного поля v можно определить на любом *трёхмерном* ориентированном (псевдо)римановом многообразии (M^3,g) по формуле

$$\operatorname{rot} v = \left(*d(v^\flat)\right)^\sharp.$$

Эта формула корректно определена для любого ориентированного (псевдо)риманова многообразия (M^n,g), но результатом её применения является кососимметричный тензор типа $(n-2,0)$. Только при $n=3$ $\operatorname{rot} v$ является векторным полем.

Определение 5.6. Оператор Лапласа Δ суть композиция градиента и дивергенции:

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f.$$

Таким образом, на любом ориентированном (псевдо)римановом многообразии можно определить Лапласиан функции как функцию

$$\Delta f = *d*df.$$

Замечание 5.10. Оператор Лапласа — очень важный в математике оператор, и его часто рассматривают не только на пространстве гладких функций, но в более общих случаях, например на пространстве $\mathcal{L}^2$-функций.

Часть III

Аффинная связность и ковариантная производная

В этой части мы переходим к определению дифференцирования на произвольных тензорных полях. Поскольку тензоры в разных точках являются отображениями, вообще говоря, разных линейных пространств, их нельзя складывать между собой, а потому знакомые из математического анализа определения производной не имеют смысла. Более того, попытка определить производную тензора как набор производных его компонент, как мы видели, также не приводит к удовлетворительному результату: полученный объект может оказаться не тензором.

Правильным ответом на эту задачу оказалось введение символов Кристоффеля и ковариантной производной.

Настоящая глава имеет следующую структуру.

В теме 6 вводится понятие *символов Кристоффеля*, приведены некоторые их свойства и даны задачи на вычисление символов Кристоффеля в некоторых стандартных случаях.

Тема 7 посвящена понятию *аффинной связности*, задающей дифференцирование векторных полей на многообразии.

В теме 8 дается определение ковариантной производной произвольного тензорного поля.

Тема 6

Символы Кристоффеля

Короткое описание понятий аффинной связности и тензора Римана дано в [15].

6.1 Введение понятия символов Кристоффеля

Определение 6.1. *Символы Кристоффеля* на многообразии M — это набор функций $\Gamma^i_{jk}(x)$ в каждой системе координат $x^1, \dots, x^n$, которые при замене координат $x' = x'(x)$ преобразуются по формуле

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}. \tag{6.1}$$

Важно отметить, что набор символов Кристоффеля *не образует тензор*. Иногда говорят, что символы Кристоффеля задают на многообразии аффинную связность.

Символы Кристоффеля необходимы для определения ковариантной производной тензорного поля, которое будет дано в разделе 8. В этом разделе мы разберем некоторые свойства символов Кристоффеля и вычислим их в ряде стандартных случаев.

Для начала укажем два явных источника символов Кристоффеля.

1. Пусть многообразие M снабжено римановой метрикой, то есть симметричным невырожденным тензором типа $(0,2)$

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j.$$

Тогда формула

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{\alpha} \frac{g^{k\alpha}}{2} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} \right), \tag{6.2}$$

где g^{ij} — компоненты обратной матрицы G^{-1} к матрице Грамма метрики $G = (g_{ij})$, задает символы Кристоффеля. Выполнение закона преобразования может быть проверено непосредственно и требует лишь внимательности.

2. Пусть $r(u^1, \ldots, u^n)$ — регулярная поверхность[1] M^n в $\mathbb{R}^N$. Разложим вторые производные r_{ij} на тангенциальную и нормальную составляющую к поверхности:

$$r_{ij} = \sum_k \Gamma_{ij}^k r_k + n_{ij}, \tag{6.3}$$

где

$$n_{ij} \perp T_x M \qquad \Leftrightarrow \qquad (n_{ij}, r_k) = 0.$$

Коэффициенты Γ_{ij}^k в разложении будут **символами Кристоффеля** поверхности M^n.

Формула (6.2) более общая[2], чем (6.3), но обычно требует чуть больше вычислений.

---

[1] Подчеркнем, что формула (6.3) верна для любого $N \geq n$, не только для гиперповерхностей.

[2] Она годится для любой области с (псевдо)римановой метрикой.

6.2 Вычисление символов Кристоффеля

Задача 6.1. Вычислить символы Кристоффеля на поверхности вращения

$$r(u,v) = \left(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)\right), \qquad f(u) \geq 0.$$

Ответ в Задаче 6.1. Символы Кристоффеля:

$$\Gamma^u_{uu} = \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}, \quad \Gamma^u_{vv} = \frac{-ff'}{(f')^2 + (g')^2}, \quad \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu} = \frac{f'}{f},$$

$$\Gamma^v_{uu} = \Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu} = \Gamma^v_{vv} = 0.$$

Решение Задачи 6.1. Найдём символы Кристоффеля как коэффициенты в разложения вторых производных $r(u,v)$ по базису r_u, r_v, N:

$$r_{ij} = \sum_k \Gamma^k_{ij} r_k + q_{ij} N.$$

- Находим канонические базисные вектора r_u, r_v:

$$r_u = \left(f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)\right),$$
$$r_v = \left(-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0\right).$$

- Вычисляем вторые производные функции для функции $r(u,v)$:

$$r_{uu} = \left(f''\cos v, f''\sin v, g''\right),$$
$$r_{uv} = r_{vu} = \left(-f'\sin v, f'\cos v, 0\right),$$
$$r_{vv} = \left(-f\cos v, -f\sin v, 0\right).$$

- Разложение вектора по базису — стандартная задача по линейной алгебре. Чтобы избавиться от коэффициента при N, рассмотрим скалярные произведения векторов r_{ij} с базисными векторами r_k. Например, для вектора r_{uu} получим

$$\begin{cases} (r_{uu}, r_u) = (r_u, r_u)\Gamma^u_{uu} + (r_u, r_v)\Gamma^v_{uu}, \\ (r_{uu}, r_v) = (r_u, r_v)\Gamma^u_{uu} + (r_v, r_v)\Gamma^v_{uu}. \end{cases} \tag{6.4}$$

- Из системы уравнений (6.4) находим Γ^u_{uu} и Γ^v_{uu}. Аналогично находятся остальные символы Кристоффеля.

- В общем случае уравнения на Γ^k_{ij} будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \vdots \\ \Gamma^n_{ij} \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} (r_{ij}, r_1) \\ \vdots \\ (r_{ij}, r_n) \end{pmatrix},$$

  где матрица G — это матрица первой квадратичной формы. Для поверхности вращения она диагональная, поэтому символы Кристоффеля находятся особенно просто.

Задача 6.1 решена. □

Задача 6.2. Найти символы Кристоффеля метрики

$$ds^2 = \left((f'(u))^2 + (g'(u))^2\right) du^2 + f^2(u)dv^2.$$

Ответ в Задаче 6.2. Такой же, как и в Задаче 6.1.

Решение Задачи 6.2. Применим формулу (6.2). Чтобы не запутаться, будем использовать для координат обозначения u, v (а не x^1, x^2).

- В данном случае матрица Грама имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} (f'(u))^2 + (g'(u))^2 & 0 \\ 0 & f^2(u) \end{pmatrix},$$

и ненулевые коэффициенты метрики равны

$$g_{uu} = (f'(u))^2 + (g'(u))^2, \qquad g_{vv} = f^2(u).$$

- Находим обратную матрицу

$$G = \begin{pmatrix} ((f'(u))^2 + (g'(u))^2)^{-1} & 0 \\ 0 & f^{-2}(u) \end{pmatrix}.$$

Таким образом ненулевые коэффициенты обратной матрицы имеют вид

$$g^{uu} = \frac{1}{((f'(u))^2 + (g'(u))^2)}, \qquad g^{vv} = \frac{1}{f^2(u)}.$$

- Остаётся подставить найденные коэффициенты g_{ij} и g^{ij} в формулу (6.2). Для примера сделаем это для коэффициента Γ^v_{uv}:

$$\Gamma^v_{uv} = \frac{g^{vu}}{2}\left(\frac{\partial g_{vu}}{\partial u} + \frac{\partial g_{uu}}{\partial v} - \frac{\partial g_{uv}}{\partial u}\right) +$$
$$+\frac{g^{vv}}{2}\left(\frac{\partial g_{vv}}{\partial u} + \frac{\partial g_{vu}}{\partial v} - \frac{\partial g_{uv}}{\partial v}\right) =$$
$$= 0 + \frac{1}{2f^2(u)}\left(\frac{\partial f^2(u)}{\partial u} + 0 - 0\right) = \frac{f'}{f}.$$

Многие коэффициенты равны 0, что упрощает вычисление. Остальные символы Кристоффеля находятся аналогично.

Задача 6.2 решена. □

6.3 Некоторые свойства символов Кристоффеля

Задача 6.3. Доказать, что разность

$$\Gamma^k_{ij} - \hat{\Gamma}^k_{ij}$$

символов Кристоффеля двух связностей ∇ и $\hat{\nabla}$ образует тензорное поле типа $(1,2)$ и что любое тензорное поле типа $(1,2)$ может быть представлено таким образом.

Решение Задачи 6.3. Задача следует из определяющего для символов Кристоффеля закона (6.1).

- Разность $\Gamma^k_{ij} - \hat{\Gamma}^k_{ij}$ — тензор типа $(1,2)$, поскольку в формуле (6.1) исчезает нетензорное слагаемое:

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} - \hat{\Gamma}^{i'}_{j'k'} = \left(\Gamma^i_{jk} - \hat{\Gamma}^i_{jk}\right) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}.$$

- Для любого тензора T^i_{jk} типа $(1,2)$ сумма $\Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}$ — тоже символы Кристоффеля, потому что при замене координат они меняются по формуле (6.1)

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} + T^{i'}_{j'k'} = \left(\Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}\right) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}}.$$

Задача 6.3 решена. □

Задача 6.4. Доказать, что линейная комбинация

$$\alpha\Gamma^i_{jk} + \beta\hat{\Gamma}^i_{jk}$$

символов Кристоффеля двух связностей также является символом Кристоффеля если и только если $\alpha + \beta = 1$.

Решение Задачи 6.4. Нам нужно проверить, как меняется выражение $\alpha\Gamma^i_{jk}+\beta\hat{\Gamma}^i_{jk}$ при замене координат. Имеем

$$\alpha\Gamma^{i'}_{j'k'}+\beta\hat{\Gamma}^{i'}_{j'k'}=$$
$$=\alpha\left(\Gamma^i_{jk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\right)+$$
$$+\beta\left(\hat{\Gamma}^i_{jk}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\right)=$$
$$=(\alpha\Gamma^i_{jk}+\beta\hat{\Gamma}^i_{jk})\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}+(\alpha+\beta)\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}.$$

Последнее выражение является законом преобразования для символов Кристоффеля в точности в том случае, когда коэффициент $\alpha+\beta$ при нетензорном добавке равен единице.

Задача 6.4 решена. □

Задача 6.5. Доказать следующее равенство для символов Кристоффеля, определенных по формуле (6.2):

$$\Gamma^i_{ij}=\frac{1}{2}g^{is}\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^j}=\frac{\partial\ln\sqrt{|g|}}{\partial x^j}, \qquad (6.5)$$

где $g=\det(g_{ij})$.

Решение Задачи 6.5 . По очереди докажем требуемые равенства:

- Первое равенство

  $$\Gamma^i_{ij}=\frac{1}{2}g^{is}\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j}$$

  следует из формулы для символов Кристоффеля (6.2). В данном случае

  $$\Gamma^i_{ij}=\frac{g^{i\alpha}}{2}\left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}\right)=\frac{g^{i\alpha}}{2}\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^j}.$$

Слагаемые
$$\frac{g^{i\alpha}}{2}\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^i} \qquad \text{и} \qquad -\frac{g^{i\alpha}}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha}$$
сокращаются, т.к. $g_{ij} = g_{ji}$, и сумма не зависит от обозначения индексов суммирования.

- Докажем второе равенство
$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^j} = g^{is}\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j}.$$
Определитель $g = \det(g_{ij})$ — функция от компонент матрицы g_{ij}. Поэтому по формуле для производной сложной функции
$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial g}{\partial g_{is}}\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j}.$$
Таким образом остаётся доказать, что
$$g^{is} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{is}}. \tag{6.6}$$
Это комбинация следующих известных утверждений о матрицах.

Утверждение 6.1. *Для любой матрицы*
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(1) *определитель* $\det A$ *является многочленом от компонент матрицы* a_{ij}, *при этом*
$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = A_{ij}, \tag{6.7}$$
где A_{ij} *— это алгебраическое дополнение к элементу* a_{ij} *матрицы* A*;*

(2) *элементы обратной матрицы — это алгебраические дополнения A_{ji}, делённые на определитель:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A), \qquad \text{где} \qquad \operatorname{adj}(A)_{ij} = A_{ji}.$$

Доказательство Утверждения 6.1. Формула (6.7) выполнена, потому что определитель можно разложить по строке/столбцу:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Остальные факты общеизвестны. Утверждение 6.1 доказано. □

Формула (6.6) вытекает из Утверждения 6.1, если учесть, что $g_{ij} = g_{ji}$ (и поэтому $g^{ji} = g^{ij}$).

- Третье равенство очевидно.

Все равенства доказаны. Задача 6.5 решена. □

6.4 Символы Кристоффеля для стандартных метрик

Укажем явный вид символов Кристоффеля, вычисленных по формуле (6.2) для евклидовой метрики на $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ в различных стандартных системах координат.

(1) Цилиндрическая система координат (r, φ, z) в $\mathbb{R}^3$:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}.$$

Для полярной системы координат (r, φ) на плоскости $\mathbb{R}^2$ ответ такой же.

(2) Сферическая система координат (r, θ, φ) в $\mathbb{R}^3$:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \qquad \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r},$$
$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r},$$
$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta.$$

(3) Полугеодезическая система координат[3] на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$ds^2 = du^2 + B(u,v)dv^2.$$

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma^u_{vv} = -\frac{B_u}{2}, \qquad \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu} = \frac{B_u}{2B}, \qquad \Gamma^v_{vv} = \frac{B_v}{2B}.$$

(4) Конформная (изотермическая) система координат на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$ds^2 = \lambda(u,v)(du^2 + dv^2).$$

[3]Общее поределение полугеодезической системы координат будет дано в разделе 10.3.

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$
\Gamma^u_{uu} = \frac{\lambda'_u}{2\lambda}, \qquad \Gamma^u_{uv} = \Gamma^u_{vu} = \frac{\lambda'_v}{2\lambda}, \qquad \Gamma^u_{vv} = -\frac{\lambda'_u}{2\lambda},
$$
$$
\Gamma^v_{uu} = -\frac{\lambda'_v}{2\lambda}, \qquad \Gamma^v_{uv} = \Gamma^v_{vu} = \frac{\lambda'_u}{2\lambda}, \qquad \Gamma^v_{vv} = \frac{\lambda'_v}{2\lambda}.
$$

Тема 7

Аффинная связность

В этом разделе мы введем понятие *аффинной связности*, приводящее к корректному определению производной векторного поля. В следующем разделе построенная производная станет частным случаем общего понятия ковариантной производной тензорного поля.

7.1 Определение аффинной связности

Пусть M — гладкое многообразие, а $\Gamma(TM)$ — пространство касательных векторных полей на M.

Определение 7.1. Аффинная связность ∇ на многообразии M — это $\mathbb{R}$-билинейное отображение

$$\nabla\colon \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM),$$
$$X, Y\mapsto \nabla_X Y$$

удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) $C^\infty(M)$-линейность по X:

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y,$$

(2) правило Лейбница по Y:

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y.$$

Определение 7.2. Пусть M — гладкое многообразие, а ∇ — аффинная связность на нем. Пусть X, Y — векторные поля. Векторное поле $\nabla_X Y$ называется *ковариантной производной* векторного поля Y вдоль векторного поля X.

Замечание 7.1.

- В локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ компоненты ковариантной производной имеют вид

  $$(\nabla_X Y)^i = X^j \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} Y^k \right),$$

  где

  $$\Gamma^i_{jk} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^i.$$

- Ковариантную производную вдоль базисного векторного поля $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ также обозначают через ∇_i (“частная ковариантная производная”), поэтому

  $$\nabla_X Y = X^i \nabla_i Y.$$

- В литературе (например, в [3]) можно встретить запись формул ковариантного дифференцирования, отличающееся от нашего перестановкой нижних индексов у символов Кристоффеля. Это связано со следующей стандартной формой записи. Как будет видно из дальнейшего, символы Кристоффеля порождают ковариантное дифференцирование, превращающее тензор типа (p, q) в тензор типа $(p, q+1)$. Компоненты нового тензора принято обозначать $(\nabla T)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q; j}$ — новый индекс ставится последним и отделяется точкой с запятой. В таких обозначениях имеем $\left(\nabla_j \frac{\partial}{\partial x^k}\right)^i = (\nabla \frac{\partial}{\partial x^k})^i_{;j}$, что логично обозначить как Γ^i_{kj}. В настоящей книге мы придерживаем обратного порядка индексов.

- Операцию ковариантного дифференцирования удобно распространить на функции на многообразии, положив, по определению,

$$\nabla_Y(f) = Y(f) = \sum_i Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Тогда правило Лейбница можно записать следующим образом

$$\nabla_X(fY) = \nabla_X(f)Y + f\nabla_X Y.$$

7.2 Ковариантная производная векторных полей

Задача 7.1. На плоскости с координатами (x, y) задана аффинная связность с символами Кристоффеля

$$\Gamma^1_{11} = y, \qquad \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{22} = 1$$

(остальные символы Кристоффеля равны нулю). Найти ковариантную производную векторного поля

$$v = (y, 2y) \quad \text{вдоль} \quad \gamma(t) = (t, 2) \quad \text{в точке} \quad P = (3, 2).$$

Ответ в Задаче 7.1. $\nabla_{\dot\gamma} v|_P = (4, 2)$.

Решение Задачи 7.1. Компоненты искомого вектора находятся по формулам

$$\nabla_{\dot\gamma} v^i = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} \frac{d\gamma^j}{dt} v^k.$$

В данном случае

$$\dot\gamma(t) = (1,0), \qquad v(t) = (y(t), 2y(t)) = (2,4)\,,$$

поэтому

$$\nabla_{\dot\gamma} v^1 = \frac{dv^1}{dt} + \Gamma^1_{11} v^1 = \frac{d\,2}{dt} + y^2 = y^2,$$

$$\nabla_{\dot\gamma} v^2 = \frac{dv^2}{dt} + \Gamma^2_{11} v^1 = \frac{d\,4}{dt} + y = y.$$

Остаётся подставить в полученные компоненты координаты точки P. Задача 7.1 решена. $\square$

Задача 7.2. Пусть ∇ — аффиная связность на многообразии M, и пусть

- $Y \in T_P M$ — касательный вектор в точке $P \in M$,
- $\gamma(t)$ – регулярная кривая на M, такая что

$$\gamma(t_0) = P, \qquad \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = Y,$$

- X — касательное векторное поле на M, заданное в точках кривой $\gamma(t)$.

Доказать, что ковариантная производная $\nabla_Y X$ в точке P корректно определена и не зависит от продолжения вектора Y и поля X до векторных полей в окрестности точки P.

Решение Задачи 7.2 . Посмотрим на выражение для ковариантной производной

$$(\nabla_{\dot\gamma} X)^i = \dot\gamma^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} X^k \right). \tag{7.1}$$

- Первое слагаемое в сумме (7.1) суть производная X вдоль кривой:
$$\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{\partial X^i}{\partial x^j}=\frac{dX^i}{dt}.$$
- Оставшееся слагаемое в сумме (7.1) зависит только от значений $\dot\gamma$ и X в точке кривой.

Поэтому для вычисления формулы (7.1) достаточно знать значения X на кривой $\gamma(t)$. Задача 7.2 решена. □

7.3 Тензор кручения

Определение 7.3. Тензор кручения T аффинной связности ∇ — это тензор типа $(1,2)$, определённый формулой
$$T^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}.$$

Определение 7.4. Связность ∇ называется *симметричной*, если ее тензор кручения равен нулю.

В координатах последнее определение означает, что символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам: $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$ в любой системе координат.

Задача 7.3. Доказать, что если T — тензор кручения связности ∇, то для любых касательных векторных полей X,Y
$$T(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]. \tag{7.2}$$

Следствие 7.1. *Если связность ∇ симметрична, то*
$$[X,Y]=\nabla_XY-\nabla_YX. \tag{7.3}$$

Решение Задачи 7.3. Формулу легко доказать в локальных координатах:

$$(\nabla_X Y)^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j + \Gamma^i_{jk} X^j Y^k,$$
$$(\nabla_Y X)^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j + \Gamma^i_{jk} Y^j X^k,$$
$$[X, Y] = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} Y^j.$$

Формула (7.2) теперь легко следует из определения тензора кручения связности:

$$T(X, Y)^i = \left(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}\right) X^j Y^k.$$

Задача 7.3 решена. □

Задача 7.4. Доказать, что на многообразии с симметричной связностью ∇ коммутатор ковариантно постоянных векторных полей равен нулю:

$$\nabla X = \nabla Y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad [X, Y] = 0.$$

Решение Задачи 7.4. Это немедленное следствие Задачи 7.3. Ковариантная постоянность означает равенство нулю всех ковариантных производных, поскольку

$$(\nabla_X Y)^i = (\nabla Y)^i_{;j} X^j.$$

Поэтому, используя (7.3), получаем

$$\nabla X = \nabla Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_X Y = \nabla_Y X = 0 \quad \Rightarrow \quad [X, Y] = 0.$$

Задача 7.4 решена. □

Определение 7.5. Метрический тензор g на многообразии M с аффинной связностью ∇ **ковариантно постоянен**[1], если для любых касательных векторных полей X, Y и Z

$$\nabla_Z (X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y).$$

[1] В дальнейшем мы убедимся, что указанное условие эквивалентно тому, что ковариантная производная метрического тензора g равна 0, см. раздел 8.

Также говорят, что *связность* ∇ *согласована с метрикой* g.

Теорема 7.1 (Основная теорема римановой геометрии)**.** *Любое риманово (и псевдориманово) многообразие обладает единственной симметричной аффинной связностью, согласованной с метрикой.*

Связность с нулевым кручением, относительно которой метрический тензор ковариантно постоянен, также называют **связностью Леви-Чивиты**. Существование искомой связности нами, на самом деле, уже доказано: символы Кристоффеля, определенные по формуле (6.2), задают именно такую связность. Доказательство ее *единственности* мы проведем немного позже, когда дадим явные формулы для ковариантной производной тензоров типа $(0, 2)$.

Тема 8

Ковариантная производная

8.1 Определение ковариантной производной тензорных полей

Рассмотрим многообразие M с заданной на нём аффинной связностью ∇. Операцию **ковариантной производной вдоль векторного поля** X можно аксиоматически определить для любого тензорного поля T на M по следующим правилам:

(1) Ковариантная производная $\nabla_X T$ тензорного поля T типа (p, q) — снова тензорное поле типа (p, q).

(2) Для функции f ковариантная производная совпадает с обычной производной вдоль векторного поля

$$\nabla_X f = X(f).$$

(3) Для векторных полей Y ковариантная производная $\nabla_X Y$ задаётся аффинной связностью.

(4) Для 1-формы α ковариантная производная определяется так, чтобы свёртка дифференцировалась по правилу Лейбница:

$$(\nabla_X \alpha)\, Y = \nabla_X \left(\alpha(Y)\right) - \alpha\left(\nabla_X Y\right)$$

для любого векторного поля Y.

(5) Тензорное произведение дифференцируется по правилу Лейбница:

$$\nabla_X \left(S \otimes T\right) = \left(\nabla_X S\right) \otimes T + S \otimes \left(\nabla_X T\right)$$

для любых тензорных полей S и T.

В локальных координатах $(x^1, \ldots, x^n)$ ковариантная производная тензорного поля $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)$ задаётся формулой

$$\begin{gathered}(\nabla_X T)^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = X^k \left(\frac{\partial T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}{\partial x^k} + \right. \\ + \Gamma^{i_1}_{ks} T^{s i_2 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + \cdots + \Gamma^{i_p}_{ks} T^{i_1 \ldots i_{p-1} s}_{j_1 \ldots j_q} - \\ \left. - \Gamma^{s}_{k j_1} T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{s j_2 \ldots j_q} - \cdots - \Gamma^{s}_{k j_q} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{q-1} s} \right).\end{gathered} \tag{8.1}$$

Формула (8.1) получается, если “скомбинировать” формулы для ковариантной производной векторных полей

$$(\nabla_X Y)^i = X^j \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} Y^k \right)$$

и ковариантной производной 1-форм

$$(\nabla_X \alpha)_i = X^j \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji} \alpha_k \right).$$

Здесь Γ^i_{jk} — по-прежнему символы Кристоффеля. Отметим однако, что они не обязаны быть получены по формулам (6.2).В частности, на многообразии M может вообще не быть введенной метрики.

Ковариантную производную также можно рассматривать как отображение, сопоставляющее тензорному полю T типа (p, q) тензорное поле ∇T типа $(p, q+1)$, где[1]

$$(\nabla T)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q;k} := (\nabla_k T)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} .$$

Здесь, как и раньше, символ ∇_i обозначает частную ковариантную производную: производную вдоль базисного поля $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Замечание 8.1. Понятие ковариантной производной мотивируется следующими соображениями. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и будем искать на нем такую операцию ∇, что

(1) ∇ является тензорной операцией, переводящей пространство T^p_q в T^p_{q+1};

(2) в декартовых координатах применение ∇ к тензору T совпадает со взятием набора частных производных компонент тензора T.

Непосредственное вычисление с использованием тензорного закона показывает, что такая операция задается в точности формулой (8.1), где Γ^i_{jk} — некоторые функции, меняющиеся по закону преобразования символов Кристоффеля (6.1).

Затем эта формула берется за *определение* операции ∇ на произвольном гладком многообразии M^n.

8.2 Вычисление ковариантной производной

Задача 8.1. Пусть в $\mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой задана соответствующая ей симметричная риманова связность. Най-

[1] Для удобства мы выделяем новый нижний индекс в ∇T точкой с запятой.

ти ковариантные производные тензорных полей, которые в цилиндрических координатах (r, φ, z) имеют компоненты

$$(1) \quad ||g_{ij}|| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2) \quad \left|\left|t^i_j\right|\right| = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ в Задаче 8.1.

(1) $\nabla g = 0$.

(2) Ненулевые компоненты во втором случае:

$$(\nabla t)^r_{r;r} = 1, \qquad (\nabla t)^\varphi_{\varphi;r} = 1.$$

Решение Задачи 8.1. • $\nabla g = 0$, поскольку связность согласована с метрикой, а g — это метрический тензор в цилиндрических координатах:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Замечание 8.2. Можно честно применить формулу для ковариантной производной тензоров типа $(0, 2)$:

$$(\nabla g)_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ki} g_{sj} - \Gamma^s_{kj} g_{is}. \tag{8.2}$$

Вычисления можно немного сократить, если заметить следующее. В цилиндрических координатах ненулевые символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \tag{8.3}$$

Поэтому ненулевыми слагаемыми в формуле (8.2) могут быть только

$$\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} g_{rr}, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi r} g_{\varphi\varphi}, \qquad \Gamma^\varphi_{r\varphi} g_{\varphi\varphi}.$$

Легко проверяется, что соответствующие компоненты ∇T равны нулю:

$$(\nabla g)_{\varphi\varphi;r} = \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} - 2\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} g_{\varphi\varphi} = 2r - 2\frac{r^2}{r} = 0,$$

$$(\nabla g)_{r\varphi;\varphi} = (\nabla g)_{\varphi r;\varphi} = -\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} g_{rr} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} g_{\varphi\varphi} = r - \frac{r^2}{r} = 0.$$

- Применим формулу для ковариантной производной тензоров типа $(1,1)$:

$$(\nabla t)^i_{j;k} = \frac{\partial t^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{ks} t^s_j - \Gamma^s_{kj} t^i_s. \tag{8.4}$$

Ненулевые символы Кристоффеля имеют вид (8.3), поэтому ненулевыми слагаемыми в формуле (8.4) могут быть только

$$\frac{\partial t^r_r}{\partial r}, \qquad \frac{\partial t^{\varphi}_{\varphi}}{\partial r}, \qquad \Gamma^r_{\varphi\varphi} t^r_r,$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} t^{\varphi}_{\varphi}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} t^{\varphi}_{\varphi}, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} t^r_r, \qquad \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} t^{\varphi}_{\varphi}.$$

Остаётся явно вычислить соответствующие компоненты ∇t:

$$(\nabla t)^r_{r;r} = \frac{\partial t^r_r}{\partial r} = 1, \qquad (\nabla t)^r_{\varphi;\varphi} = \Gamma^r_{\varphi\varphi} t^{\varphi}_{\varphi} - \Gamma^r_{\varphi\varphi} t^r_r = 0,$$

$$(\nabla t)^{\varphi}_{\varphi;r} = \frac{\partial t^{\varphi}_{\varphi}}{\partial r} + \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} t^{\varphi}_{\varphi} - \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} t^{\varphi}_{\varphi} = 1,$$

$$(\nabla t)^{\varphi}_{r;\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} t^r_r - \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} t^{\varphi}_{\varphi} = 0.$$

Задача 8.1 решена. $\square$

Задача 8.2. Доказать, что на римановом многообразии (M, g) с аффинной связностью ∇ метрика ковариантно постоянна, то есть

$$\nabla g = 0,$$

если и только если для любых векторных полей X, Y, Z выполнено равенство

$$\nabla_Z(X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y).$$

Решение Задачи 8.2. Рассмотрим точку P на многообразии и введем локальные координаты (x^i) в ее окрестности. Рассмотрим некоторую кривую $\gamma(t)$, такую что $\gamma(0) = P$ и $\dot\gamma(0) = Z(P)$. Поскольку (X, Y) — гладкая функция на многообразии M,

$$\nabla_Z(X, Y) = \frac{d(X(\gamma(t)), Y(\gamma(t)))}{dt}|_{t=0} =$$
$$= Z^k \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} X^i Y^j + g_{ij} \frac{\partial X^i}{\partial x^k} Y^j + g_{ij} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} \right) |_{t=0}.$$

Далее, по формуле ковариантной производной для векторных полей и тензоров типа $(0, 2)$ имеем:

$$(\nabla_Z g)_{ij} = Z^k \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ki} g_{sj} - \Gamma^s_{kj} g_{is} \right),$$

$$(\nabla_Z X)^i = Z^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} X^k \right),$$

$$(\nabla_Z Y)^j = Z^k \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^k} + \Gamma^j_{ki} Y^i \right).$$

Отсюда делаем вывод, что

$$\nabla_Z(X, Y) = (\nabla_Z g)_{ij} X^i Y^j + g_{ij} (\nabla_Z X)^i Y^j + g_{ij} X^i (\nabla_Z Y)^j =$$
$$= (\nabla_Z g)(X, Y) + g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Поскольку скалярное произведение $(X, Y) = g(X, Y)$, равенство $\nabla_Z(X, Y) = (\nabla_Z X, Y) + (X, \nabla_Z Y)$ выполняется для всех X, Y, Z если и только если $\nabla_Z g = 0$ для всех Z, а значит $\nabla g = 0$. Задача 8.2 решена. $\square$

Задача 8.3. Доказать единственность связности Леви-Чивита на римановом многообразии (M, g).

Решение Задачи 8.3. Пусть ∇ — симметричная аффинная связность, согласованная с метрикой g. Чтобы доказать ее единственность, найдем явное выражение для соответствующих символов Кристоффеля. Поскольку связность согласована с метрикой, $\nabla g = 0$. Запишем явный вид этого условия в координатах:

$$0 = (\nabla g)_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^s_{ki} g_{sj} - \Gamma^s_{kj} g_{is}.$$

Рассматривая другие тройки индексов, имеем:

$$0 = (\nabla g)_{jk;i} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma^s_{ij} g_{sk} - \Gamma^s_{ik} g_{js},$$

$$0 = (\nabla g)_{ki;j} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \Gamma^s_{jk} g_{si} - \Gamma^s_{ji} g_{js}.$$

Учитывая симметричность связности и метрического тензора, прибавим к первому равенству второе, вычтем третье и приведем подобные. Получим:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = 2\Gamma^s_{ki} g_{sj}.$$

Умножая на матрицу G^{-1} и деля на 2, получаем

$$\Gamma^s_{ki} = \frac{1}{2} g^{sj} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right),$$

то есть формулу (6.2) с точностью до переобозначения индексов.

Задача 8.3 решена. $\square$

8.3 Свойства ковариантной производной

8.3.1 Ковариантная производная на подмногообразии

Задача 8.4. Пусть дано гладкоее многообразие M, его подмногообразие N и ∇^M и ∇^N — связности Леви-Чивита на M и N соответственно. Пусть, далее, $\gamma(t)$ — гладкая кривая в N и X — гладкое поле на γ, касательное к N.

Доказать, что

$$\nabla^N_{\dot\gamma} X = \mathrm{pr}\left(\nabla^M_{\dot\gamma} X\right), \tag{8.5}$$

где pr — ортогональная проекция на касательное пространство к N.

Указание. Воспользоваться Леммой 4.2.

Решение Задачи 8.4. Фиксируем точку P подмногообразия N. Пусть

$$\dim N = m, \qquad \dim M = n + m.$$

Используя Лемму 4.2 и делая линейную замену координат, найдём локальные координаты $(x^1, \dots, x^{n+m})$ в окрестности точки P на M, в которых

- подмногообразие N^m является подпространством

$$x^{m+1} = 0, \qquad \dots \qquad x^{n+m} = 0,$$

- в точке P метрика задаётся единичной матрицей

$$g_{ij}(P) = \delta_{ij}.$$

В этих координатах оператор проекции просто отбрасывает последние n координат:

$$\operatorname{pr}\left(v^1, \ldots, v^m, v^{m+1}, \ldots, v^{m+n}\right) = \left(v^1, \ldots, v^m\right)$$

Посмотрим теперь внимательно на выражения для ковариантных производных на N и M:

$$\nabla^N_{\dot\gamma} X^i = \sum_{j=1}^{m} \dot\gamma^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{m} \Gamma^{i\,(N)}_{jk} X^k\right), \tag{8.6}$$

$$\nabla^M_{\dot\gamma} X^i = \sum_{j=1}^{n+m} \dot\gamma^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \sum_{k=1}^{n+m} \Gamma^{i\,(M)}_{jk} X^k\right), \tag{8.7}$$

где через $\Gamma^{i\,(N)}_{jk}$ и $\Gamma^{i\,(M)}_{jk}$ обозначены символы Кристоффеля на N и M соответственно. Нужно доказать, что при $1 \le i \le m$ выражения (8.6) и (8.7) совпадают.

- Векторные поля X и $\dot\gamma$ касаются подмногообразия N, поэтому они имеют вид

  $$X = \left(X^1, \ldots, X^m, 0, \ldots, 0\right), \quad \dot\gamma = \left(\dot\gamma^1, \ldots, \dot\gamma^m, 0, \ldots, 0\right).$$

  Поэтому в формуле (8.7) все суммы следует брать *от* 1 *до* m, как и в (8.6).

- Остаётся показать, что

  $$\Gamma^{i\,(N)}_{jk} = \Gamma^{i\,(M)}_{jk}, \qquad 1 \le i, j, k \le m.$$

  Посмотрим внимательно на выражения для символов Кристоффеля через метрику:

$$\Gamma^{i\,(N)}_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{g^{i\alpha}}{2} \left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha}\right), \tag{8.8}$$

$$\Gamma^{i\,(M)}_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{n+m} \frac{g^{i\alpha}}{2} \left(\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha}\right). \tag{8.9}$$

Мы считаем, что в точке P матрица g_{ij} единичная, поэтому

$$g^{ij} = 0, \qquad i \neq j.$$

Следовательно *в формуле* (8.9) *ненулевым будет только слагаемое с* $\alpha = i$, *и сумму можно брать от* 1 *до* m. Формула (8.7) совпадёт с (8.8), а формула (8.6) — с (8.7) (при $1 \leq i \leq m$).

Задача 8.4 решена. $\square$

Замечание 8.3. Символы Кристоффеля из формулы (6.3), возникающие в деривационных формулах Гаусса-Вайнгартена, связаны именно с этим утверждением. Неформально эту связь можно описать следующим образом.

Пусть M — поверхность в евклидовом пространстве с евклидовыми координатами. В евклидовых координатах связность Леви-Чивита — нулевая, а на поверхности M она задается первой квадратичной формой поверхности по формулам (6.2). Рассмотрим теперь касательное векторное поле к M и продифференцируем его вдоль одной из координат на M. Мы снова получим некоторое векторное поле *в объемлющем пространстве* $\mathbb{R}^N$, но оно не обязательно будет касательным полем к M.

Самый простой способ получить касательное поле из произвольного — ортогонально спроецировать его на касательное пространство в каждой точке. Как показывает предыдущая задача, такая операция корректна и в точности совпадает с ковариантным дифференцированием при помощи связности Леви-Чивита на M. Символы Кристоффеля именно этой связности фигурируют в формулах Гаусса-Вайнгартена.

8.3.2 Ковариантная дивергенция

Определение 8.1. Пусть v — векторное поле на многообразии M, на котором задана аффинная связность ∇. Функция

$$\operatorname{div} v = \nabla_i v^i = \sum_i (\nabla v)^i_{;i}$$

называется **(ковариантной) дивергенцией** векторного поля v.

Задача 8.5. Доказать, что для любой (псевдо)римановой связности

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial\left(\sqrt{|g|} v^i\right)}{\partial x^i}, \tag{8.10}$$

где $g = \det(g_{ij})$.

Решение Задачи 8.5 . Это немедленное следствие Задачи 6.5:

$$\nabla_i v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij} v^j = \frac{\partial v^i}{\partial x^i} + \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^j} v^j = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial\left(\sqrt{|g|} v^i\right)}{\partial x^i}.$$

Задача 8.5 решена. □

Задача 8.6. Доказать, на любом ориентированном римановом многообразии ковариантная дивергенция совпадает с дивергенцией, определённой через звезду Ходжа:

$$\operatorname{div} v = \nabla_i v^i = *d * v^\flat. \tag{8.11}$$

Все объекты в формуле (8.11) согласованы с метрикой g_{ij}:

- ∇ — связность Леви-Чивиты (т.е. симметричная риманова связность),

- $v^\flat$ — 1-форма, полученная из векторного поля v опусканием индекса:
$$v^\flat_i = g_{ij} v^j,$$
- $*$ — оператор двойственности Ходжа.

Решение Задачи 8.6. Для решения этой задачи соберем воедино уже известные свойства символов Кристоффеля и звезды Ходжа.

С одной стороны, для $\nabla_i v^i$ выполнена формула (8.10).

С другой стороны,

$$*d*v^\flat = *d\left(\sum_i v^i \sqrt{|g|}(-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n\right) =$$
$$= *\left(\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial v^i \sqrt{|g|}}{\partial x^i} \omega\right) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial v^i \sqrt{|g|}}{\partial x^i},$$

где через ω обозначена форма объема

$$\omega = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Мы использовали то, что для звезды Ходжа

$$*f\omega = f.$$

Чтобы проверить равенство

$$*v^\flat = \sum_i v^i \sqrt{|g|}(-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

можно использовать формулу (3.14), в соответствии с которой
$$\left(*v^\flat\right)_{i_2 \dots i_n} = \omega_{i_1 \dots i_n} v^{i_1},$$
либо можно использовать вытекающее из (3.16) тождество

$$\alpha \wedge *v^\flat = \alpha(v)\omega,$$

выполненное для любой 1-формы α. Задача 8.6 решена. □

8.3.3 Ковариантная и внешняя производные

Задача 8.7. Пусть на многообразии M задана симметричная связность ∇. Доказать, что для любой k-формы ω

$$\frac{(-1)^k}{k+1} d\omega = \mathrm{Alt}\,(\nabla\omega)\,. \tag{8.12}$$

Первое решение Задачи 8.7 . Можно честно расписать формулу для ковариантной производной (8.1).

$$(\nabla\omega)_{i_1\ldots i_k;i_{k+1}} = \frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^{i_{k+1}}} - \Gamma^s_{i_{k+1}i_1}\omega_{si_2\ldots i_k} - \cdots - \Gamma^s_{i_{k+1}i_k}\omega_{i_1\ldots i_{k-1}s}.$$

При альтернировании все слагаемые вида $-\Gamma^s_{i_{k+1}i_1}\omega_{si_2\ldots i_k}$ сократятся с $\Gamma^s_{i_1 i_{k+1}}\omega_{si_2\ldots i_k}$.

Так как Alt $(\nabla\omega)$ — кососимметрический тензор, можно считать, что $i_1 < i_2 < \cdots < i_{k+1}$. Используя кососимметричность ω, получаем, что

$$\mathrm{Alt}\ (\nabla\omega)_{i_1\ldots i_{k+1}} = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\sigma\in S_{k+1}} \mathrm{sgn}(\sigma)\frac{\partial\omega_{i_{\sigma(1)}\ldots i_{\sigma(k)}}}{\partial x^{i_{\sigma(k+1)}}} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\,\frac{\partial\omega_{i_1\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{k+1}}}{\partial x^{i_j}}.$$

Остаётся вспомнить, что коэффициент перед

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k+1}}$$

в $d\omega$ в точности равен

$$\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\,\frac{\partial\omega_{i_1\ldots\widehat{i_j}\ldots i_{k+1}}}{\partial x^{i_j}}.$$

Задача 8.7 решена. $\square$

Второе решение Задачи 8.7 . Заметим, что обе части формулы (8.12)

(1) являются $\mathbb{R}$-линейными по ω:

$$\mathrm{Alt}\left(\nabla c_1\omega_1 + c_2\omega_2\right) = c_1\mathrm{Alt}\left(\nabla\omega_1\right) + c_2\mathrm{Alt}\left(\nabla\omega_2\right),$$
$$d\left(c_1\omega_1 + c_2\omega_2\right) = c_1 d\omega_1 + c_2 d\omega_2;$$

(2) одинаково меняются при умножении на функцию:

$$\begin{aligned}\mathrm{Alt}\left(\nabla f\omega\right) = \mathrm{Alt}\left(f\nabla\omega + \omega\otimes df\right) &= \\ = f\mathrm{Alt}\left(\nabla\omega\right) &+ \frac{1}{k+1}\omega\wedge df,\end{aligned}$$
$$d\left(f\omega\right) = fd\omega + (-1)^k\,\omega\wedge df.$$

Здесь мы воспользовались тем, что для любых p-формы α и q-формы β

$$\alpha\wedge\beta = \frac{p!\,q!}{(p+q)!}\mathrm{Alt}\left(\alpha\otimes\beta\right),$$

и что
$$\alpha\wedge\beta = (-1)^{pq}\,\beta\wedge\alpha.$$

Таким образом, остаётся проверить тождество лишь для форм вида
$$\omega = dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}.$$

Очевидно, что $d\omega = 0$ и

$$(\nabla\omega)_{i_1\ldots i_k;i_{k+1}} = 0 - \Gamma^s_{i_{k+1}i_1}\omega_{si_2\ldots i_k} - \dots - \Gamma^s_{i_{k+1}i_k}\omega_{i_1\ldots i_{k-1}s}.$$

Так же, как и в предыдущем решении, все слагаемые вида $-\Gamma^s_{i_{k+1}i_1}\omega_{si_2\ldots i_k}$ сократятся с $\Gamma^s_{i_1i_{k+1}}\omega_{si_2\ldots i_k}$. Задача 8.7 решена. $\square$

Часть IV

Геометрия многообразий с аффинной связностью

Наличие на многообразии аффинной связности, а значит и операции ковариантного дифференцирования, позволяет многое понять о геометрии этого многообразия. Так, становится осмысленным понятие *параллельного переноса* касательного вектора вдоль кривой: это ковариантно-постоянная экволюция вектора вдоль кривой.

Кроме того, наличие связности позволяет определить *тензор кривизны Римана*, который определяет, в том числе, насколько многообразие "отличается от евклидова пространства": можно ли в окрестности точки ввести локальные евклидовы координаты.

Структура данной части такова.

В теме 9 вводится и изучается понятие параллельного переноса и геодезической.

Тема 10 посвящена *экспоненциальному отображению*, отправляющему касательное пространство $T_P M$ в некоторую окрестность точки P на многообразии. С его помощью строятся удобные в задачах геодезические координаты.

Тензор кривизны Римана изучается в теме 10. Помимо определений, в виде задач в этой теме даются различные свойства тензора кривизны. Например, раскрывается его связь с известными из классической дифференциальной геометрии понятиями скалярной и гауссовой кривизны.

Тема 9

Параллельный перенос и геодезические

9.1 Параллельный перенос

9.1.1 Определение понятие параллельного переноса

Пусть M — многообразие с заданной на нём аффинной связностью ∇.

Определение 9.1. Векторное поле X **параллельно** вдоль кривой $\gamma(t)$ на M, если

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} X = 0.$$

Иными словами, векторное поле параллельно (то есть состоит из “параллельных векторов”), если оно ковариантно постоянно вдоль кривой, то есть его ковариантная производная по направлению поля скоростей кривой равна нулю.

В локальных координатах условие параллельности задаётся системой дифференциальных уравнений первого по-

рядка
$$\frac{dX^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}\dot\gamma^j X^k = 0. \tag{9.1}$$

По теореме Пикара-Лефшеца любой касательный вектор $X_{t_0} \in T_{\gamma(t_0)}M$ может быть единственным образом продолжен до параллельного векторного поля X_t вдоль $\gamma(t)$.

Говорят, что вектор $X_t \in T_{\gamma(t)}(M)$ получен в результате **параллельного переноса** вектора $X_{t_0} \in T_{\gamma(t_0)}(M)$.

Таким образом, чтобы по данному вектору $v \in T_PM$ и кривой $\gamma(t)$, такой что $\gamma(0) = P$, параллельно перенести v в точку $Q = \gamma(1)$, нужно

(1) Встроить v в параллельное вдоль γ векторное поле, решив уравнение параллельного переноса (9.1) с начальными условиями $X(0) = v$;

(2) Взять в качестве искомого вектора вектор $X(1)$.

Задача 9.1. Пусть M — риманово многообразие со связность Леви-Чивита ∇. Рассмотрим два вектора $v, w \in T_PM$ и кривую γ, проходящую через точку P. Доказать, что при параллельном переносе векторов v и w вдоль кривой γ их скалярное произведение не меняется. Отсюда следует, что параллельный перенос сохраняет длины векторов и углы между векторами.

Решение Задачи 9.1. Обозначим через V и W параллельные вдоль γ векторные поля, которым принадлежат вектора v и w, соответственно. Далее, обозначим $V_t = V(\gamma(t)), W_t = W(\gamma(t))$. Нам нужно показать, что $\frac{d(V_t,W_t)}{dt} = 0$.

В самом деле, поскольку связность согласована с метрикой, имеем
$$\frac{d(V_t, W_t)}{dt} = \nabla_{\dot\gamma}(V_t, W_t) = (\nabla_{\dot\gamma}V_t, W_t) + (V_t, \nabla_{\dot\gamma}W_t) = 0.$$
Задача 9.1 решена. $\square$

9.1.2 Параллельный перенос на конкретных многообразиях

Задача 9.2. Найти результат параллельного переноса вектора v вдоль кривой $\gamma(t)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Решение Задачи 9.2. В $\mathbb{R}^n$ все символы Кристоффеля нулевые $\Gamma^i_{jk} = 0$, поэтому любое постоянное векторное поле ковариантно постоянно. Поэтому вектор будет переноситься обычным паралелльным переносом. Задача 9.2 решена. □

Задача 9.3. Описать явно уравнение параллельного переноса вдоль

(1) параллели на сфере;

(2) меридиана на сфере,

и решить их.

Ответ в Задаче 9.3. Рассмотрим сферические координаты (φ, θ) на сфере (где θ — угол с осью z).

(1) Для параллели

$$(\varphi(t) = t, \quad \theta(t) = \theta_0)$$

уравнения параллельного переноса имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{dX^\theta}{dt} - \sin\theta_0 \cos\theta_0 X^\varphi = 0, \\ \dfrac{dX^\varphi}{dt} + \operatorname{ctg}\theta_0 X^\theta = 0. \end{cases} \tag{9.2}$$

Общее решение этих уравнений

$$X^\theta = -C_1 \sin\theta_0 \cos\left(t\cos\theta_0 + C_2\right),$$
$$X^\varphi = -C_1 \sin\left(t\cos\theta_0 + C_2\right).$$

(2) Для меридиана

$$(\varphi(t) = \varphi_0, \quad \theta(t) = t)$$

уравнения параллельного переноса имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{dX^\theta}{dt} = 0, \\ \dfrac{dX^\varphi}{dt} + \operatorname{ctg} t\, X^\varphi = 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Общее решение этих уравнений

$$X^\theta = C_1 \frac{1}{\sin t}, \qquad X^\varphi = C_2.$$

Решение Задачи 9.3. В обоих случаях нужно честно написать уравнения параллельного переноса

$$\frac{dX^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} \dot{\gamma}^j X^k = 0.$$

Для сферы (ненулевые) символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\cos\theta \sin\theta, \qquad \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta,$$

потому что в сферических координатах (φ, θ) метрика на сфере (единичного радиуса) равна

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Дифференциальные уравнения (9.2) и (9.3) решаются стандартными методами. Отметим, что уравнение (9.2) эквивалентно

$$\begin{cases} \ddot{X}^\varphi + \cos^2\theta_0 X^\varphi = 0, \\ X^\theta = -\operatorname{tg}\theta_0\, \dot{X}^\varphi, \end{cases}$$

а нетривиальная часть уравнения (9.3) эквивалентна

$$d \ln X^\theta = d \ln \frac{1}{\sin t}.$$

$\square$

Замечание 9.1. Для меридиана параллельный перенос можно описать, не проводя вычислений:

- Из соображений симметрии единичный касательный вектор к меридиану при параллельном переносе перейдет в себя.

- Как мы показали выше, при параллельном переносе на римановом многообразии сохраняется скалярное произведение (и сохраняется ориентация на ориентированном многообразии). Поэтому при параллельном переносе сохраняются углы и длины векторов.

- Значит вектор длины l, имеющий угол α с параллелью, перейдет в вектор той же длины, имеющий тот же угол.

9.1.3 Ковариантное постоянство формы объема

Задача 9.4. Пусть M — риманово многообразие с метрикой g_{ij}. Доказать, что ковариантная производная n-формы объема

$$\omega = \sqrt{\det g_{ij}}dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

относительно римановой связности на M равна нулю.

Указание. На любой кривой $\gamma(t)$ можно взять набор параллельных векторных полей $X_1, \dots, X_n$. Тогда

$$\nabla_{\dot\gamma} X_i = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla_{\dot\gamma} g(X_i, X_j) = 0 \qquad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \qquad \nabla_{\dot\gamma} \operatorname{vol}(X_1, \dots, X_n) = 0.$$

Решение Задачи 9.4. Нужно доказать, что для любого векторного поля X

$$\nabla_X \omega = 0.$$

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — произвольный набор параллельных (вдоль X) касательных векторных полей:

$$\nabla_X X_i = 0.$$

Так как связность согласована с метрикой,

$$\nabla_X g(X_i, X_j) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad g\left(X_i, X_j\right) = \mathrm{const}.$$

Объём параллелепипеда, натянутого на вектора $X_1, \ldots, X_n$, равен $\sqrt{\det g\left(X_i, X_j\right)}$, поэтому

$$\omega(X_1, \ldots, X_n) = \mathrm{const} \qquad \Rightarrow \qquad \nabla_X(\omega(X_1, \ldots, X_n)) = 0.$$

По свойствам ковариантного дифференцирования

$$\nabla_X(\omega(X_1, \ldots, X_n)) = (\nabla_X \omega)(X_1, \ldots, X_n) +$$
$$+\omega(\nabla_X X_1, X_2, \ldots, X_n) + \cdots + \omega(X_1, X_2, \ldots, \nabla_X X_n).$$

Все слагаемые, кроме $(\nabla_X \omega)(X_1, \ldots, X_n)$, равны нулю, откуда $\nabla_X \omega = 0$, поскольку $X_1, \ldots, X_n$ можно выбрать базисными в касательном пространстве. Задача 9.4 решена. $\square$

Второе решение Задачи 9.4. Честно применим формулу для ковариантной производной (8.1). Так как ω — n-форма, $\nabla_X \omega$ — тоже n-форма, поэтому достаточно найти только одну её компоненту:

$$(\nabla_X \omega)_{1\ldots n} = X^k \left(\frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^k} - \Gamma^s_{k1} \sqrt{|g|} \varepsilon_{s2\ldots n} - \Gamma^s_{kn} \sqrt{|g|} \varepsilon_{12\ldots s} \right) =$$
$$= X^k \left(\frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^k} - \Gamma^i_{ki} \sqrt{|g|} \right).$$

Здесь $g = \det\left(g_{ij}\right)$ и $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ — символ Леви-Чивиты[1]. $\nabla_X \omega = 0$ в силу формулы (6.5). Задача 9.4 решена. $\square$

[1]Т.е. абсолютно антисимметричный единичный тензор.

9.2 Геодезические

9.2.1 Определение понятия геодезической

Определение 9.2. Кривая $\gamma(t)$ — называется **геодезической**, если

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0.$$

Иными словами, кривая $\gamma(t) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ является геодезической тогда и только тогда, когда ее поле скоростей параллельно вдоль этой кривой.

В координатах условие геодезичности записывается в виде уравнения геодезических

$$\frac{d^2\gamma^i}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^k}{dt} = 0, \qquad i = 1\ldots, n \tag{9.4}$$

Отметим, что (9.4) — это система из n дифференциальных уравнений второго порядка. В двумерном случае уравнения геодезических имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \ddot u + \Gamma^u_{uu}\dot u^2 + 2\Gamma^u_{uv}\dot u\dot v + \Gamma^u_{vv}\dot v^2 = 0, \\ \\ \ddot v + \Gamma^v_{uu}\dot u^2 + 2\Gamma^v_{uv}\dot u\dot v + \Gamma^v_{vv}\dot v^2 = 0. \end{cases}$$

Из теоремы существования и единственности решения дифферециального уравнения следует, что через любую точку в любом направлении проходит единственная геодезическая.

Теорема 9.1. *Пусть M — регулярная гиперповерхность, P — ее произвольная точка и $v \in T_PM$ — произвольный касательный вектор к M в точке P. Тогда на M существует геодезическая $\gamma(t)$, такая что*

$$\gamma(0) = P, \qquad \dot\gamma(0) = v.$$

Более того, геодезическая γ единственна в том смысле, что любые две такие геодезических совпадают в пересечении областей определения.

Задача 9.5. Доказать следующие утверждения.

(1) Длина вектора скорости геодезической на римановом многообразии со связностью Леви-Чивита постоянна.

(2) Если $\gamma(t)$ — геодезическая, то для любых констант $l, c \in \mathbb{R}$ кривая $\gamma(ct+l)$ тоже геодезическая.

Решение Задачи 9.5. (1) Достаточно продифференцировать скалярный квадрат вектора скорости и воспользоваться формулой для разложения вектора ускорения

$$\frac{d}{dt}(\dot\gamma, \dot\gamma) = \nabla_{\dot\gamma}(\dot\gamma, \dot\gamma) = 2\left(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma\right) = 0.$$

Иначе можно сказать, что поле скоростей геодезической параллельно вдоль нее, а значит имеет постоянную длину по доказанному свойству сохранения скалярного произведения при параллельном переносе.

(2) Легко видеть, что

$$\nabla_{\dot\gamma(ct+l)}\dot\gamma(ct+l) = c^2 \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0.$$

Задача 9.5 решена. □

Отметим, что если параллельный перенос вдоль кривой был инвариантен относительно замены параметризации кривой (т.е. если поле X было параллельно вдоль кривой $\gamma(t)$, то оно будет параллельно и вдоль кривой $\gamma(\tau)$, получаемой заменой параметра t на τ), то уравнение геодезических может перестать выполняться после замены параметра. Таким образом, геодезическая — это *параметризованная* кривая. Как видно из задачи 9.5, линейные замены параметризации сохраняют геодезичность кривой.

9.2.2 Нахождение геодезических

Следующая задача дает удобный инструмент, позволяющий в некоторых случаях находить геодезические без вычислений.

Задача 9.6. Пусть $F\colon M \to M$ — некоторая изометрия, переводящая риманово многообразие M в себя, и регулярная кривая $\gamma \subset M$ совпадает со множеством неподвижных точек изометрии F, т.е. $\gamma = \{x \in M | F(x) = x\}$. Докажите, что в этом случае кривая γ — геодезическая на M.

Решение Задачи 9.6. Через любую точку риманова многообразия в любом направлении проходит единственная геодезическая. Рассмотрим геодезическую $\hat{\gamma}$, проходящую через точку кривой $\gamma(t)$ в направлении её касательного вектора $\dot{\gamma}(t)$.

Изометрия переводит геодезические в геодезические[2]. Поэтому $F(\hat{\gamma})$ — тоже геодезическая. С другой стороны, изометрия сохраняет точку геодезической $\gamma(t)$ и её касательный вектор $\dot{\gamma}(t)$. Значит, геодезическая перешла в себя. Все точки геодезической $\hat{\gamma}$ неподвижны, и, значит, $\hat{\gamma} = \gamma$. Задача 9.6 решена. □

Сечение сферы плоскостью, проходящей через центр сферы, называется **большой окружностью**[3].

Задача 9.7. Доказать, что геодезические сферы — это большие окружности и только они.

Уравнения геодезических — довольно непростое дифференциальное уравнение. Для его решения на практике обычно нужно либо найти хорошие координаты, либо воспользоваться симметриями многообразия, либо угадать первый интеграл.

[2] Изометрия сохраняет метрику, а, следовательно, и символы Кристоффеля с уравнениями геодезических.

[3] Иногда используется другой термин — “большой круг”.

Первое решение Задачи 9.7 . Попробуем честно решить уравнения геодезических.

В сферических координатах (Θ, φ) метрика имеет вид $ds^2 = d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2$. Символы Кристоффеля при этом равны

$$\Gamma^{\Theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\Theta\cos\Theta, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\varphi\Theta} = \Gamma^{\varphi}_{\Theta\varphi} = \operatorname{ctg}\Theta$$

Получаем уравнения геодезических

$$\begin{cases} \ddot{\Theta} - \sin\Theta\cos\Theta\dot{\varphi}^2 = 0, \\ \ddot{\varphi} + 2\operatorname{ctg}\Theta\dot{\varphi}\dot{\Theta} = 0. \end{cases}$$

Можно (хотя и не так просто) показать, что общее решение уравнений геодезических имеет вид

$$\operatorname{ctg}\Theta = a\cos(\varphi - \varphi_0)$$

Чтобы не возиться с этим уравнением, воспользуемся симметричностью сферы:

- Угадываем частное решение. Легко видно, что при

  $$\Theta(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad \dot{\Theta}(0) = 0$$

  геодезическая — это кривая $\Theta = \frac{\pi}{2}$, т.е. экватор.

- Вращения задают изометрии сферы. Группа вращений пространства $\mathrm{SO}(3)$ транзитивно действует на сфере (любую точку можно перевести в любую другую). Более того, при помощи вращения можно перевести любой касательный вектор на сфере в любой другой касательный вектор. Поэтому все остальные геодезические получаются из экватора вращениями. Значит, геодезические — большие круги и только они.

Задача 9.7 решена. □

Второе решение Задачи 9.7 . Можно воспользоваться задачей 9.6. Каждая большая окружность — это множество точек сферы, остающихся неподвижными при симметрии относительно соответствующей плоскости, проходящей через начало координат. Задача 9.7 решена. □

Задача 9.8. Привести пример многообразия M, у которого

(1) существуют две точки, через которые проходят различные геодезические;

(2) существуют две точки, которые нельзя соединить геодезической.

Решение Задачи 9.8. (1) Можно взять сферу S^2 и полюса на ней.

(2) Можно взять кольцо на плоскости, и точки, которые нельзя в кольце соединить отрезком.

Задача 9.8 решена. □

Задача 9.9. Доказать, что любые две точки связного многообразия можно соединить "ломаной" (т.е. кривой, состоящей из конечного числа отрезков геодезических).

Решение Задачи 9.9. Любые две достаточно близкие точки можно соединить (кратчайшей) геодезической. Поэтому множество точек Ox, куда можно прийти из точки $x \in M$ по "геодезической ломаной" — открытое множество. Связное многообразие не может распасться в дизъюнкное объединение нескольких нетривиальных открытых множеств. Задача 9.9 решена. □

9.2.3 Геодезические на поверхности Лиувилля

Задача 9.10. Показать, что на области с метрикой

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v))(du^2 + dv^2)$$

(**поверхность Лиувилля**) геодезические определяются уравнением
$$\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)+a}} \pm \frac{dv}{\sqrt{\psi(v)-a}} = 0, \tag{9.5}$$
где a — произвольная постоянная.

Замечание 9.2. Это "симметричная" форма записи выполнения одного из двух уравнений
$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{\psi(v)-a}{\varphi(u)+a}, \qquad \text{или} \qquad \left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \frac{\varphi(u)+a}{\psi(v)-a}.$$

Решение Задачи 9.10. Символы Кристоффеля:
$$\begin{aligned}
\Gamma^u_{uu} &= \frac{\varphi'_u}{2(\varphi+\psi)}, & \Gamma^u_{uv} &= \Gamma^u_{vu} = \frac{\psi'_v}{2(\varphi+\psi)},\\
\Gamma^u_{vv} &= -\frac{\varphi'_u}{2(\varphi+\psi)}, & \Gamma^v_{uu} &= -\frac{\psi'_v}{2(\varphi+\psi)},\\
\Gamma^v_{vv} &= \frac{\psi'_v}{2(\varphi+\psi)}, & \Gamma^v_{uv} &= \Gamma^v_{vu} = \frac{\varphi'_u}{2(\varphi+\psi)}.
\end{aligned}$$

Получаем уравнения геодезических
$$\begin{cases}
\ddot u + \dfrac{\varphi'_u}{2(\varphi+\psi)}\dot u^2 + \dfrac{\psi'_v}{\varphi+\psi}\dot u\dot v - \dfrac{\varphi'_u}{2(\varphi+\psi)}\dot v^2 = 0,\\[2ex]
\ddot v - \dfrac{\psi'_v}{2(\varphi+\psi)}\dot u^2 + \dfrac{\varphi'_u}{\varphi+\psi}\dot u\dot v + \dfrac{\psi'_v}{2(\varphi+\psi)}\dot v^2 = 0.
\end{cases} \tag{9.6}$$

Будем считать, что $v = v(u)$ (случай $u = u(v)$ разбирается аналогично и приводит к тому же результату). Вспомним формулу для второго дифференциала:
$$\frac{d^2v(u)}{dt^2} = \frac{d^2v}{du^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{dv}{du}\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Исходя из формулы для второго дифференциала, вычтем из второго уравнения системы (9.6) первое уравнение этой системы, помноженное на $\dfrac{dv}{du}$. Если воспользоваться формулой для производной сложной функции $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{du}\dfrac{du}{dt}$, то $\left(\dfrac{du}{dt}\right)^2$ удастся вынести за скобки

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \left(\frac{d^2v}{du^2} - \frac{\psi'_v}{2(\varphi+\psi)} + \frac{\varphi'_u}{2(\varphi+\psi)}\frac{dv}{du} - \right.$$
$$\left. - \frac{\psi'_v}{2(\varphi+\psi)}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \frac{\varphi'_u}{2(\varphi+\psi)}\left(\frac{dv}{du}\right)^3\right) = 0.$$

Таким образом мы получаем дифференциальное уравнение

$$2(\varphi+\psi)\frac{d^2v}{du^2} = \psi'_v - \varphi'_u\frac{dv}{du} + \psi'_v\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \varphi'_u\left(\frac{dv}{du}\right)^3. \quad (9.7)$$

После этого несложно проверить, что уравнение (9.7) эквивалентно следующему уравнению

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\psi - \varphi\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{dv}{du}\right)^2}\right) = 0.$$

Таким образом

$$\psi - \varphi\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = a\left(1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right), \qquad (9.8)$$

где a — некоторая константа. Уравнения (9.5) — это другая форма записи равенства (9.8). Задача 9.10 решена. □

9.2.4 Геодезические на подмногообразиях

Определение 9.3. Говорят, что два подмногообразия M_1 и M_2 **касаются вдоль кривой** γ, если $\gamma \subset M_1 \cap M_2$ и в каждой точке $P \in \gamma$ у них совпадают касательные плоскости

$$T_P M_1 = T_P M_2.$$

Задача 9.11. Доказать, что если два подмногообразия M_1, M_2 риманова многообразия M касаются вдоль некоторой кривой γ, и γ является геодезической на одном из подмногообразий, то γ — геодезическая и на другом подмногообразии:

$$\nabla^{M_1}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla^{M_2}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Указание. Использовать формулу (8.5).

Решение Задачи 9.11. Ковариантные производные равны:

$$\nabla^{M_1}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \nabla^{M_2}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma},$$

поскольку согласно формуле (8.5)

$$\nabla^{M_i}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \mathrm{pr}_{TM_i} (\nabla^{M}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}),$$

т.е. они будут проекцией одного и того же вектора $\nabla^{M}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ на одно и то же пространство $T_P M_1 = T_P M_2$. Следовательно, они одновременно обращаются в ноль.

Задача 9.11 решена. $\square$

Замечание 9.3. По тем же соображениям параллельный перенос вдоль кривой, по которой касаются два подмногообразия, дает одинаковый результат вне зависимости от того, на каком из этих подмногообразий его рассматривать.

Это позволяет существенно упростить работу с параллельными векторными полями, если найти удобную поверхность, касающуюся данной по изучаемой кривой. Например, параллельный перенос вдоль параллели на сфере легко вычислить, если заметить, что по параллели сфера касается конуса, который изометричен плоскости, а потому на нем параллельные поля постоянны. Теперь достаточно перенести вектор параллельно по конусу и найти его компоненты в координатах на сфере, для чего достаточно найти угол между вектором, параллельным данному на плоскости, и кривой γ на конусе, которая соответствует параллели на сфере, см. рис. 9.1.

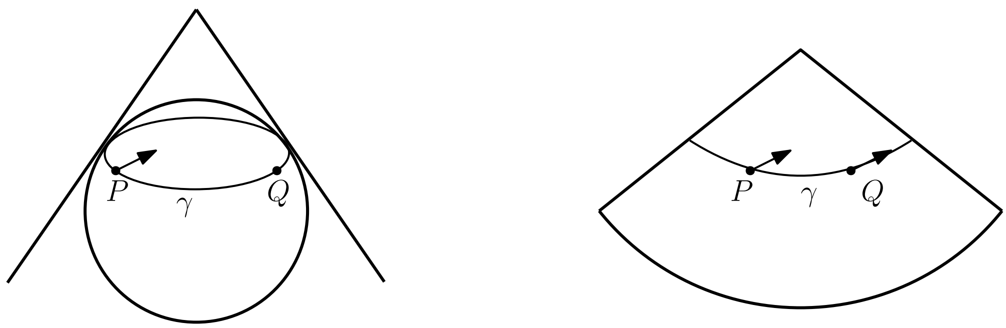

Рис. 9.1: Иллюстрация параллельного переноса вектора вдоль параллели γ на сфере из точки P в точку Q. Справа изображена развертка конуса, который касается сферы по параллели γ. На развертке конуса параллельные поля являются постоянными.

Задача 9.12. Пусть M — регулярная поверхность в евлидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Доказать, что кривая $\gamma(t)$ на M является геодезической тогда и только тогда, когда

(1) параметр на ней линейно зависит от натурального,

(2) ускорение кривой ортогонально поверхности:

$$\ddot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)}M.$$

Решение Задачи 9.12. Как мы уже показали, длина вектора скорости геодезической постоянна. Это возможно только если параметр на ней линейно зависит от натурального.

Второе условие будет выполнено, так как в евклидовом пространстве
$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \mathrm{pr}_{TM}\,(\ddot\gamma).$$
Задача 9.12 решена. $\square$

Следствие 9.1. *Любая прямая (с параметризацией, линейно зависящей от натурального параметра) на регулярной поверхности в евклидовом пространстве является геодезической.*

9.2.5 Изометрии многообразий

Задача 9.13. Доказать,что

- любая изометрия плоскости является аффинным преобразованием
$$x \mapsto Ax + b, \qquad A \in \mathrm{O}(n),$$
- любая изометрия сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является ограничением некоторого ортогонального преобразования $\mathbb{R}^{n+1}$.

Для решения Задачи 9.13 можно воспользоваться следующим утверждением.

Теорема 9.2. *Если изометрия связного риманова многообразия $f\colon M^n \to M^n$ оставляет на месте точку $f(P) = P$ и тождественно действует на соответствующем касательном пространстве*
$$df|_P = \mathrm{id}\colon T_PM \to T_PM,$$
то она является тождественным преобразованием $f = \mathrm{id}$.

Это немедленное следствие того факта, что через любую точку в любом направлении проходит единственная геодезическая.

Следствие 9.2. *Любая изометрия (связных) римановых многообразий*

$$f\colon M_1 \to M_2$$

полностью определяется изометричным отображением одного касательного пространства

$$df\colon T_P M_1 \to T_{f(P)} M_2.$$

Решение Задачи 9.13. Легко видеть, что указанные преобразования реализуют всевозможные изометрии произвольного касательного пространства. Задача 9.13 решена. $\square$

Тема 10

Экспоненциальное отображение

Геодезические позволяют определить удобные для вычислений локальные координаты. Для этого используется *экспоненциальное отображение* (области) касательного пространства на многообразие.

10.1 Определение экспоненциального отображения

Рассмотрим точку p на многообразии M с аффинной связностью ∇. Для любого вектора $v \in T_p M$ существует единственная геодезическая $\gamma_v(t)$ такая, что

$$\gamma_v(0) = p, \qquad \dot{\gamma}_v(0) = v.$$

Определение 10.1. *Экспоненциальное отображение* — это отображение, которое сопоставляет касательному вектору $v \in T_P M$ точку $\gamma_v(1)$, т.е.

$$\exp_P(v) = \gamma_v(1).$$

Экспоненциальное отображение заведомо определено на некоторой окрестности нуля $U \subset T_P M$ (по теореме существования и единственности решения дифференциальных уравнений).

Теорема 10.1. *Существует такая окрестность нуля в касательном пространстве $U \subset T_P M$, что экспоненциальное отображение*

$$\exp_P \colon U \to M$$

диффеоморфно отображает эту окрестность на окрестность точки $P \in M$.

Доказательство. По теореме об обратном отображении достаточно доказать, что якобиан отображения невырожден (в нуле касательного пространства).

Задача 10.1. Рассмотрим многообразие M с аффинной связностью ∇. Пусть

- $(x^1, \ldots, x^n)$ — локальные координаты в окрестности точки $P \in M$;
- $e_i = \partial_{x^i}$ — соответствующий канонический базис $T_P M$;
- $v^1, \ldots, v^n$ — линейные координаты на $T_P M$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Доказать, что якобиан экспоненциального отображения в нуле $0 \in T_p M$ является единичной матрицей:

$$\frac{\partial \left(\exp_P\right)^i}{\partial v^j} = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Решение Задачи 10.1. По определению частной производной

$$\frac{\partial}{\partial v^i} \exp_p(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma_{te_i}(1).$$

Остаётся воспользоваться тем, что геодезические, проходящие через одну точку в одном направлении, отличаются лишь параметризацией:

$$\gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

Задача 10.1 решена. $\square$

Таким образом, и теорема 10.1 доказана. $\square$

10.2 Нормальные (геодезические) координаты

Экспоненциальное отображение

$$\exp_P \colon U \to M, \qquad U \subset T_P M$$

позволяет отождествить окрестности

$$U \subset T_P M \qquad \text{и} \qquad \exp_P(U) \subset M.$$

Рассмотрим линейные координаты на касательном пространстве $T_P M$.

Определение 10.2. Соответствующие координаты в окрестности точки P называются **геодезическими** или **нормальными**.

Задача 10.2. Пусть связность ∇ симметрична. Доказать, что в нормальных координатах с центром в точке P все символы Кристоффеля обращаются в 0 в этой точке:

$$\Gamma^k_{ij}(P) = 0.$$

Решение Задачи 10.2. Для любого вектора v геодезическая $\gamma(t) = \exp tv$ является прямой в нормальных координатах. Уравнение геодезических для этих прямых имеет вид

$$\Gamma^k_{ij}(x)v^i v^j = 0.$$

Все эти уравнения одновременно выполняются в начале координат для всех векторов v. Таким образом, при каждом фиксированном k числа $\Gamma^k_{ij}(0)$ задают нулевую квадратичную форму[1], и, следовательно, все они равны нулю. Задача 10.2 решена. □

Задача 10.3 (Лемма Гаусса)**.** Доказать, что для любой точки p риманова многообразия M образ любой достаточно малой сферы в T_pM под действием экспоненциального отображения $\exp_p$ ортогонален всем геодезическим, проходящим через точку p.

Короткая формулировка леммы Гаусса: Геодезическая сфера ортогональна всем геодезическим радиусам.

Решение Задачи 10.3. Рассмотрим сферу радиуса r в касательном пространстве

$$S_r \subset T_pM$$

с центром в начале координат. Рассмотрим отображение

$$F(s,t) = \exp_p(tv(s)),$$

где $v(s) \in S_r$. Тогда вектора

$$F_t = \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad F_s = \frac{\partial F}{\partial s}$$

[1]Здесь мы используем симметричность Γ^k_{ij} по нижним индексам.

будут касательными к геодезическому радиусу и геодезической сфере соответственно. Нужно доказать, что

$$(F_t, F_s) = 0.$$

Это равенство очевидно выполнено при $t = 0$, поскольку $F(s, 0) = p$. Поэтому остаётся доказать, что

$$\frac{d}{dt}\,(F_t, F_s) = 0.$$

Будем доказывать это равенство в точке (s_0, t_0). Обозначим

- $\gamma(t) = F(s_0, t)$ — кривая при фиксированном $s = s_0$,
- $\delta(t) = F(s, t_0)$ — кривая при фиксированном $t = t_0$,
- $\nabla_t = \nabla_{\dot\gamma(t)}$ и $\nabla_s = \nabla_{\dot\delta(s)}$.

В таком случае

$$\frac{d}{dt}\,(F_t, F_s) = \nabla_t\,(F_t, F_s)\,.$$

Так как связность согласована с метрикой,

$$\nabla_t\,(F_t, F_s) = (\nabla_t F_t, F_s) + (F_t, \nabla_t F_s)\,.$$

Так как $\gamma(t)$ — геодезическая,

$$\nabla_t F_t = 0.$$

Утверждение 10.2. *Для симметричной связности*

$$\nabla_s F_t = \nabla_t F_s.$$

Доказательство Утверждения 10.2. Достаточно явно написать выражения в локальных координатах:

$$(\nabla_s F_t)^i = \frac{\partial^2 F^i}{\partial s \partial t} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial F^j}{\partial s} \frac{\partial F^k}{\partial t},$$
$$(\nabla_s F_t)^i = \frac{\partial^2 F^i}{\partial s \partial t} + \Gamma^i_{jk} \frac{\partial F^j}{\partial t} \frac{\partial F^k}{\partial s}.$$

Очевидно, что выражения равны, если $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Утверждение 10.2 доказано. $\square$

Переставляя индексы местами и вынося ковариантную производную за скобки, получаем

$$\nabla_t (F_t, F_s) = (F_t, \nabla_s F_t) = \frac{1}{2} \nabla_s (F_t, F_t) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \|v\|^2 = 0,$$

где последнее равенство выполнено, так как все вектора v лежат на сфере фиксированного радиуса. Задача 10.3 решена. $\square$

Следствие 10.1. *Рассмотрим обобщённые сферические координаты*

$$(r\,, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1})$$

*в касательном пространстве $T_P M$. В соответствующих координатах в окрестности точки $P \in M$ (которые называются **полярными координатами**) метрика будет иметь вид*

$$ds^2 = dr^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij} d\varphi^i d\varphi^j. \qquad (10.1)$$

10.3 Полугеодезические координаты

Координаты $(u^1, \ldots, u^n)$ в окрестности точки риманова многообразия $P \in M^n$ называются **полугеодезическими**, если в них метрика имеет вид

$$ds^2 = (du^1)^2 + \sum_{i,j \geq 2} g_{ij} du^i du^j. \tag{10.2}$$

Задача 10.4. Показать, что в полугеодезических координатах $(u^1, \ldots, u^n)$ первые координатные линии

$$\{u^2 = \mathrm{const}, \ldots, u^n = \mathrm{const}\}$$

являются геодезическими, ортогональными поверхностям уровня $u^1 = \mathrm{const}$.

Решение Задачи 10.4. Утверждение про ортогональность очевидно. Чтобы доказать, что координатные линии

$$\gamma(t) = \bigl(t, u_0^2, \ldots, u_0^n\bigr)$$

являются геодезическими, достаточно доказать, что $\Gamma_{11}^i = 0, i = 1, \ldots, n$. В данном случае

$$\Gamma_{11}^i = \frac{g^{i\alpha}}{2} \left(\frac{\partial g_{1\alpha}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{\alpha 1}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^\alpha} \right) = -\frac{g^{i\alpha}}{2} \frac{\partial 1}{\partial u^\alpha} = 0.$$

Задача 10.4 решена. □

Теорема 10.3. *В окрестности любой точки риманова многообразия существуют полугеодезические координаты.*

Доказательство. Теорема доказывается конструктивно. Построим полугеодезические координаты $(u^1, \ldots, u^n)$.

(1) Рассмотрим произвольную гиперповерхность

$$P^{n-1} \subset M^n.$$

(2) Выпустим из каждой точки гиперповерхности P^{n-1} ортогональную ей геодезическую.

(3) Тогда $(u^2, \ldots, u^n)$ — локальные координаты на гиперповерхности P^{n-1} (продолженные до функций, постоянных на геодезических).

(4) Координата u^1 — натуральный параметр на геодезических, ортогональных к P^{n-1} (равный нулю на P^{n-1}).

Замечание 10.1. Пусть $N(x)$ — гладкое поле единичных нормалей на P^{n-1}. Тогда точка с построенными координатами $(u^1, \ldots, u^n)$ — это точка

$$\exp_Q \left(u^1 N(Q)\right),$$

где Q — точка $(u^2, \ldots, u^n)$ на гиперповерхности P^{n-1}.

Задача 10.5. Проверить, что построенные координаты — полугеодезические, т.е., что метрика имеет вид (10.2).

Решение Задачи 10.5. Несложно показать (честно посчитав якобиан отображения), что $(u^1, \ldots, u^n)$ — корректно определенные локальные координаты.

Нужно доказать, что

$$g_{11} = 1, \qquad g_{1i} = 0.$$

По построению метрика будет иметь вид (10.2) на гиперповерхности P^{n-1}. Остаётся проверить, что

$$\nabla_1 \left(\partial_{u^1}, \partial_{u^i}\right) = 0.$$

Последнее равенство будет выполнено, так как связность согласована с метрикой

$$\nabla_1 \left(\partial_{u^1}, \partial_{u^i}\right) = \left(\nabla_1 \partial_{u^1}, \partial_{u^i}\right) + \left(\partial_{u^1}, \nabla_1 \partial_{u^i}\right),$$

первая координатная линия — геодезическая

$$\nabla_1 \partial_{u^1} = 0,$$

и связность симметрична

$$\nabla_i \partial_{u^j} = \nabla_j \partial_{u^i}.$$

Задача 10.5 решена. □

Итак, построенные координаты — полугеодезические. Теорема 10.3 доказана. □

Задача 10.6. Доказать, что для любой геодезической $\gamma(t)$ и любой точки x_0 на ней в окрестности этой точки существуют такие полугеодезические координаты $u^1, \ldots, u^n$, что в них геодезическая $\gamma(t)$ является координатной линией

$$\{u^2 = 0, \ldots, u^n = 0\}.$$

Решение Задачи 10.6. Достаточно взять гиперповерхность P^{n-1}, ортогональную в точке x_0 кривой $\gamma(t)$:

$$T_{x_0} P \perp \dot{\gamma}|_{x_0}.$$

Задача 10.6 решена. □

10.4 Геодезические как локально кратчайшие

Можно определить **расстояние** ρ между двумя точками риманова многообразия $x, y \in M^n$ как инфинум по длинам всех гладких дуг, соединяющих эти точки:

$$\rho(x,y) = \inf \{ l(\gamma) \,|\, \gamma \colon [a,b] \to M^n, \quad \gamma(a) = x, \quad \gamma(b) = y \}.$$

Задача 10.7 (Геодезическая — локально кратчайшая)**.** Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая. Доказать, что для любых двух достаточно близких точек $x_1, x_2 \in \gamma$ отрезок геодезической γ является кратчайшей кривой, соединяющей эти точки x_1 и x_2.

Решение Задачи 10.7. Рассмотрим полугеодезические координаты из Задачи 10.6, в которых $\gamma(t)$ — первая координатная линия. Без ограничения общности $u^1(x_2) > u^1(x_1)$. Тогда длина любой другой кривой $\hat{\gamma} = (u^1(t), \ldots, u^n(t))$ удовлетворяет оценкам

$$l = \int_{\hat{\gamma}} \sqrt{(\dot{u}^1)^2 + \sum_{i,j \geq 2} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dt \geq$$
$$\geq \int_{\hat{\gamma}} \left\| \dot{u}^1 \right\| dt \geq \int_{\hat{\gamma}} \dot{u}^1 dt = u^1(x_2) - u^1(x_1),$$

причем равенство возможно только при $u^2 = \cdots = u^n = 0$ и $u^1 > 0$, т.е. для отрезка геодезической $\gamma(t)$. Задача 10.7 решена. $\square$

Можно доказать следующее утверждение.

Теорема 10.4. *У любой точки x риманова многообразия M существует окрестность Ox, такая что любые две точки этой окрестности можно соединить единственной минимальной геодезической, т.е. геодезической, длина которой равна расстоянию между этими точками.*

Замечание 10.2. В теореме не утверждается, что две точки можно соединить ровно одной геодезической. Но если окрестность мала, то любая другая геодезическая будет выходить за пределы этой окрестности и не будет минимальна.

Тема 11

Тензор кривизны Римана

В этом разделе мы займемся изучение тензора кривизны Римана — дифференциально-геометрического объекта, тесно связанного с известными понятиями скалярной и гауссовой кривизны. Тензор Римана в некотором смысле измеряет, насколько многообразие искривлено, то есть отличается от евклидова: существуют ли в окрестности точки многообразия евклидовы координаты, в которых все символы Кристоффеля обращаются в ноль.

11.1 Определение и свойства тензора Римана

Пусть на многообразии M задана связность ∇. Тогда **тензор кривизны Римана** — это тензор типа $(1,3)$, определяемый по формуле[1]

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \qquad (11.1)$$

[1]В некоторых книжках перед всем этим выражением ставится знак "$-$".

Замечание 11.1. Доказать, что тензор кривизны Римана $R^i_{j,kl}$, является тензором типа $(1,3)$ можно аналогично решению задачи 4.14. Для этого вновь достаточно доказать, что выражение (11.1) будет $C^\infty(M)$-линейно по всем своим аргументам.

Замечание 11.2. В случае, когда X и Y — базисные векторные поля, тензор кривизны приобретает очень наглядный вид:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) Z = [\nabla_i, \nabla_j] Z.$$

Задача 11.1. Показать, что в локальных координатах компоненты тензора Римана[2] $R^i_{j,kl}$, заданные формулой

$$R(X,Y)Z = R^i_{j,kl} X^k Y^l Z^j \frac{\partial}{\partial x^i},$$

имеют вид

$$R^i_{j,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ks}\Gamma^s_{lj} - \Gamma^i_{ls}\Gamma^s_{kj}. \qquad (11.2)$$

Замечание 11.3. Формула (11.2) верна для любой аффинной связности ∇, не обязательно симметричной. Мы считаем, что $\Gamma^i_{jk} = (\nabla_j \partial_k)^i$, или, иными словами, что

$$\nabla_X Y^i = X^j \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} Y^k\right).$$

Решение Задачи 11.1. Задача 11.1 решается прямым вычислением. □

Перечислим некоторые свойства тензора Римана:

[2]Чтобы не запутаться, в нижних индексах тензора Римана мы будем ставить запятую $R^i_{j,kl}$ (хотя в книжках она обычно не ставится).

(1) $R(u,\ v) = -R(v,\ u)$.

Следующие три свойства выполнены, если связность не имеет кручения.

(2) $R(u,\ v)w + R(v,\ w)u + R(w,\ u)v = 0$.

Если связность согласована с метрикой, то

(3) $(R(u,\ v)w,\ z) = -(R(u,\ v)z,\ w)$.

(4) $(R(u,\ v)w,\ z) = (R(w,\ z)u,\ v)$.

Отметим, что последнее свойство вытекает из предыдущих трех.

Если связность согласована с метрикой g_{ij}, то можно опустить индекс у тензора Римана

$$R_{ij,kl} = g_{is}R^s_{j,kl}.$$

В этом случае свойства тензора Римана можно записать следующим образом[3].

(1) Кососимметричность

$$R_{ij,kl} = -R_{ji,kl} = -R_{ij,lk}. \tag{11.3}$$

(2) Первое тождество Бьянки

$$R_{i[j,kl]} = R_{ij,kl} + R_{il,jk} + R_{ik,lj} = 0. \tag{11.4}$$

(3) Симметричность относительно пар индексов

$$R_{ij,kl} = R_{kl,ij}. \tag{11.5}$$

[3]Здесь некоторые свойства собраны воедино.

При помощи тензора Римана $R^i_{j,kl}$ можно построить следующие важные тензоры:

- **тензор Риччи**
$$R_{ij} = R^s_{i,sj}$$
получается при свёртке тензора Римана по паре индексов;

- **скалярная кривизна**
$$R = R^i_i = g^{ij} R_{ji}$$
получается из тензора Риччи после поднятия индекса и последующей свёртки.

11.2 Тензор Римана кривых и поверхностей

Задача 11.2. Вычислить тензор кривизны одномерного многообразия с произвольной метрикой.

Решение Задачи 11.2. Тензор Римана нулевой
$$R^1_{1,11} = 0,$$
из-за кососимметричности по нижним индексам (11.4). Задача 11.2 решена. □

Теорема 11.1. *Для двумерного риманова многообразия*
$$R = 2K,$$
где R — это скалярная кривизна многообразия, а K — гауссова кривизна.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Задача 11.3. Доказать, что для двумерных многообразий тензор Римана имеет вид

$$R_{ij,kl} = K(x)(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \qquad (11.6)$$

для некоторой функции $K(x)$.

Решение Задачи 11.3. Поскольку $\det g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \neq 0$, мы можем положить

$$K(x) = \frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Остаётся заметить, что

- обе части (11.6) одновременно меняют знак при перестановке индексов[4],
- а в остальных случаях, когда $R_{ij,kl}$ не получается из $R_{12,12}$ перестановкой индексов, обе части (11.6) равны нулю.

Задача 11.3 решена. □

Задача 11.4. Если на n-мерном многообразии тензор Римана удовлетворяет условию

$$R_{ij,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

то тензор Риччи и скалярная кривизна имеют вид

$$R_{ij} = (n-1)Kg_{ij}, \qquad R = n(n-1)K.$$

В частности, для двумерных многообразий

$$R_{ij} = Kg_{ij}, \qquad R = 2K.$$

[4] В соотвествии с формулами (11.4) и (11.5).

Решение Задачи 11.4. Доказательство прямым вычислением.

- Тензор Римана задаётся формулой
$$R^i_{j,kl} = g^{is} R_{sj,kl} = K\left(\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}\right).$$
- Тензор Риччи в данном случае имеет вид
$$R_{ij} = R^s_{i,sj} = K\left(\delta^s_s g_{ij} - \delta^s_j g_{is}\right) = (n-1)K g_{ij}.$$
- Скалярная кривизна имеет вид
$$R = R_{ij} g^{ij} = (n-1)K\delta^i_i = (n-1)nK.$$

Задача 11.4 решена. □

Таким образом остаётся показать, что для двумерных многообразий функция $K(x)$ совпадает с гауссовой кривизной поверхности. Гауссова кривизна (и тем более скалярная кривизна) не меняется при движении объемлющего пространства, поэтому поверхность можно реализовать любым удобным для нас способом.

Задача 11.5. Доказать, что для поверхности-графика
$$z = f(x, y),$$
удовлетворяющей условиям
$$f(0,0) = 0, \qquad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0,$$
тензор Римана имеет вид
$$R_{ij,kl} = f_{ik} f_{jl} - f_{il} f_{jk}, \tag{11.7}$$
а гауссова кривизна равна
$$K = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2. \tag{11.8}$$

Решение Задачи 11.5 . Задача решается прямым вычислением. Вычисления упрощаются за счет того, что $f_x(0) = f_y(0) = 0$.

- Канонические базисные векторы:

$$r_x = (1, 0, f_x), \qquad r_y = (0, 1, f_y).$$

Получаем матрицу первой квадратичной формы:

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}.$$

Обратная к ней:

$$G^{-1} = \frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2} \begin{pmatrix} 1 + f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 + f_x^2 \end{pmatrix}.$$

- Вторые производные:

$$r_{ij} = (0, 0, f_{ij}).$$

Поэтому в начале координат матрицы первой и второй квадратичных форм:

$$G(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q(0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Получаем формулу (11.8) для гауссовой кривизны:

$$K(0) = \frac{\det Q(0)}{\det G(0)} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

- Символы Кристоффеля регулярной поверхности находятся по формуле

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^x \\ \Gamma_{ij}^y \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} (r_{ij}, r_x) \\ (r_{ij}, r_y) \end{pmatrix}.$$

Поэтому в данном случае

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{f_{ij} f_k}{1 + f_x^2 + f_y^2}.$$

В частности,

$$\Gamma^i_{jk}(0) = 0.$$

- Символы Кристоффеля $R^i_{j,kl}$ находятся по формуле (11.2). В начале координат $f_x = f_y = \Gamma^i_{jk} = 0$ и $g_{ij} = \delta_{ij}$, поэтому вычисления упрощаются:

$$R_{ij,kl}(0) = R^i_{j,kl}(0) = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k}(0) - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}(0) = f_{ik} f_{jl} - f_{il} f_{jk}.$$

Формула (11.7) доказана.

Задача 11.5 решена. □

Поскольку в начале координат $\det g = 1$, функция $K(x) = \frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ совпадает с гауссовой кривизной, что и требовалось.

Теорема 11.1 доказана. □

Задача 11.6. Вычислить тензор кривизны для двумерной сферы (единичного радиуса) в сферических координатах.

Указание. В двумерном случае у тензора кривизны только одна нетривиальная компонента: *все компоненты* $R_{ij,kl}$ *выражаются через* $R_{12,12}$ *по формулам* (11.4) *и* (11.5).

Ответ в Задаче 11.6 Ненулевые компоненты тензора Римана:

$$R^{\theta}_{\varphi,\theta\varphi} = \sin^2\theta, \quad R^{\theta}_{\varphi,\varphi\theta} = -\sin^2\theta, \quad R^{\varphi}_{\theta,\varphi\theta} = 1, \quad R^{\varphi}_{\theta,\theta\varphi} = -1.$$

Решение Задачи 11.6. • В сферических координатах (φ, θ) метрика

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

- Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\cos\theta\sin\theta, \qquad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \operatorname{ctg}\theta.$$

- Вычислим компоненту $R_{\theta\varphi,\theta\varphi}$. Для этого найдём компоненту $R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi}$ по формуле (11.2) и опустим индекс.

$$R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = \frac{\partial\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} - \frac{\partial\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \Gamma^{\theta}_{\theta s}\Gamma^{s}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{\theta}_{\varphi s}\Gamma^{s}_{\theta\varphi} =$$
$$= -\frac{\partial\left(\cos\theta\sin\theta\right)}{\partial\theta} - \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} =$$
$$= \sin^2\theta - \cos^2\theta + \cos^2\theta = \sin^2\theta.$$

  Матрица метрики диагональна, поэтому в данном случае

$$R_{\theta\varphi,\theta\varphi} = g_{\theta s}R^{s}_{\varphi\theta\varphi} = R^{\theta}_{\varphi\theta\varphi} = \sin^2\theta.$$

- Все компоненты тензора Римана с опущенным индексом выражаются через $R_{\theta\varphi,\theta\varphi}$ по формулам (11.4) и (11.5):

$$R_{\theta\varphi,\theta\varphi} = R_{\varphi\theta,\varphi\theta} = \sin^2\theta, \qquad R_{\varphi\theta,\theta\varphi} = R_{\theta\varphi,\varphi\theta} = -\sin^2\theta.$$

- Компоненты самого тензора $R^{i}_{j,kl}$ получаются из $R_{ij,kl}$ поднятием индекса.

Задача 11.6 решена. □

Задача 11.7. Доказать, что тензор Риччи симметричен

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

Решение Задачи 11.7. Это следует из (11.5), поскольку

$$R_{ij} = R^{s}_{i,sj} = g^{st}R_{ti,sj} = g^{st}R_{sj,ti} = R^{t}_{j,ti} = R_{ji}.$$

Задача 11.7 решена. □

Задача 11.8. Доказать, что если связность согласована с (псевдо)римановой метрикой, то свёртка тензора Римана по выделенному нижнему индексу тривиальна:

$$R^i_{i,kl} = 0.$$

Решение Задачи 11.8. Действительно, свёртка тривиальна, т.к.

$$R^i_{i,kl} = g^{is} R_{si,kl} = -g^{si} R_{is,kl}.$$

Мы использовали симметричность метрики $g^{is} = g^{si}$ и (11.4). Задача 11.8 решена. $\square$

Задача 11.9. Вычислить тензор Римана, тензор Риччи и скалярную кривизну для многообразия с метрикой

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2).$$

Ответ в Задаче 11.9. Укажем только ненулевые компоненты тензоров.

- Тензор кривизны Римана

$$R_{xy,xy} = R_{yx,yx} = -R_{xy,yx} = -R_{yx,xy} = -\frac{\lambda \Delta \ln |\lambda|}{2}.$$

- Тензор Риччи

$$R_{xx} = R_{yy} = -\frac{\Delta \ln |\lambda|}{2}.$$

- Скалярная кривизна

$$R = -\frac{\Delta \ln |\lambda|}{\lambda}.$$

Решение Задачи 11.9. Решение аналогично Задаче 11.6. Отметим, что в данном случае ненулевые символы Кристоффеля имеют вид

$$\Gamma^x_{xx} = \Gamma^y_{xy} = \Gamma^y_{yx} = \frac{\lambda_x}{2\lambda}, \qquad \Gamma^x_{yy} = -\frac{\lambda_x}{2\lambda},$$
$$\Gamma^y_{yy} = \Gamma^x_{xy} = \Gamma^x_{yx} = \frac{\lambda_y}{2\lambda}, \qquad \Gamma^y_{xx} = -\frac{\lambda_y}{2\lambda},$$

а, например, компонента R^x_{yxy} тензора кривизны находится по формуле

$$R^x_{yxy} = \frac{\partial \Gamma^x_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma^y_{xy}}{\partial y} + \Gamma^x_{xs}\Gamma^s_{yy} - \Gamma^x_{ys}\Gamma^s_{xy} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)_x - \left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)_y - \left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_y}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_x}{\lambda}\right)^2\right) =$$
$$= -\frac{\partial^2 \ln|\lambda|}{2\partial x^2} - \frac{\partial^2 \ln|\lambda|}{2\partial y^2} = -\frac{\Delta \ln|\lambda|}{2}.$$

Задача 11.9 решена. □

Следствие 11.1. *Плоскость Лобачевского — поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны. В модели в верхней полуплоскости с метрикой*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

гауссова кривизна $K = -1$.

11.3 Тензор Римана и плоскость метрики

Задача 11.10. Доказать, что риманово многообразие локально изометрично евклидову тогда и только тогда, когда тензор Римана обращается в ноль.

Иными словами, в окрестности точки риманова многообразия существуют локальные координаты, в которых метрика имеет вид $g_{ij} = \delta_{ij}$, тогда и только тогда, когда в окрестности этой точки $R^i_{j,kl} = 0$.

Решение Задачи 11.10. Рассмотрим формулу, по которой меняются символы Кристоффеля при замене координат

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{i'}_{j'k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}.$$

Мы хотим найти такие координаты $x^{i'}$, что $\Gamma^{i'}_{j'k'} = 0$, т.е., что

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k}.$$

Введём функции

$$F^{i'}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$$

Получаем систему дифференциальных уравнений на $F^{i'}_j$:

$$\frac{\partial F^{i'}_j}{\partial x^k} = \Gamma^i_{jk} F^{i'}_i.$$

Чтобы эта система дифференциальных уравнений была разрешима, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial^2 F^{i'}_j}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial^2 F^{i'}_j}{\partial x^l \partial x^k}.$$

Это равенство приводит к тому, что $R^i_{j,kl} = 0$.

Остаётся построить координаты по функциям $F^{i'}_j$, т.е. решить

$$F^{i'}_j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}.$$

Эта система будет иметь решение, если

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^j},$$

что равносильно симметричности связности.

Задача 11.10 решена.

$\square$

11.4 Тензор Эйнштейна

11.4.1 Второе тождество Бьянки

Есть ещё одно тождество, в котором уже участвуют ковариантные производные тензора Римана.

Теорема 11.2. *Пусть связность* ∇ *согласована с римановой или псевдоримановой метрикой. Тогда*

$$\nabla_u R(v,\ w) + \nabla_v R(w,\ u) + \nabla_w R(u,\ v) = 0.$$

Это тождество называется **вторым тождеством Бьянки**.

Введём обозначение

$$\nabla_i T^{i_1,\ldots i_p}_{j_1,\ldots,j_q} = T^{i_1,\ldots i_p}_{j_1,\ldots,j_q;i}.$$

Тогда второе тождество Бьянки запишется в виде

$$R_{ij,[kl;m]} = R_{ij,kl;m} + R_{ij,mk;l} + R_{ij,lm;k} = 0.$$

Доказательство Теоремы 11.2. Это тождество удобно доказывать в геодезических координатах. В этих координатах $\Gamma^i_{jk}(0) = 0$, поэтому

$$R^i_{j,kl}(0) = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k}(0) - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}(0),$$

$$\nabla_m R^i_{j,kl}(0) = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k \partial x^m}(0) - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l \partial x^m}(0).$$

При суммировании все смешанные производные сократятся — каждое слагаемое будет входить в формулу дважды с разными знаками. □

Теорема 11.3. *Тензор Риччи и скалярная кривизна удовлетворяют тождеству*

$$\nabla_l R^l_m = \frac{1}{2}\nabla_m R. \tag{11.9}$$

Доказательство Теоремы 11.3. Это тождество вытекает из второго тождества Бьянки после двукратного поднятия и сворачивания индексов.

$$g^{il}g^{nk}\left(R_{ni,kl;m} + R_{ni,mk;l} + R_{ni,lm;k}\right) = 0.$$

Связность согласована с метрикой, поэтому $\nabla_m g = 0$, а значит метрический тензор g_{ij} (а также производные от него тензоры g^{ij}, g^i_j) можно свободно вносить и выносить из-под знака ковариантной производной.

Поднимем один индекс. У первых двух слагаемых сделаем это при помощи g^{nk}, у последнего — при помощи g^{il}. Нужно следить за знаками, пользуясь кососимметричностью тензора Римана, — поднимать следует именно первый индекс.

$$g^{il}R^k_{i,kl;m} - g^{il}R^k_{i,km;l} - g^{nk}R^l_{n,lm;k} = 0.$$

Сворачивая тензоры Римана, получаем тензоры Риччи

$$g^{il}R_{il;m} - g^{il}R_{im;l} - g^{nk}R_{nm;k} = 0.$$

Ещё раз поднимем индекс

$$R^l_{l;m} - R^l_{m;l} - R^k_{m;k} = 0.$$

Первое слагаемое даёт нам скалярную кривизну, остальные два слагаемых — ковариантную производную тензора Риччи (эти слагаемые равны). Получаем требуемое равенство

$$R_{;m} = 2R^l_{m;l}.$$

Теорема 11.3 доказана. □

Доказанное тождество (11.9) позволяет доказать следующие два факта, описанные ниже.

11.4.2 Тензор Эйнштейна и его бездивергентность

Тензор

$$G_{lm} = R_{lm} - \frac{1}{2} R g_{lm}$$

называется **тензором Эйнштейна**.

Теорема 11.4. *Тензор Эйнштейна бездивергентный*

$$\nabla_l G^{lm} = 0.$$

Доказательство Теоремы 11.4. Формула (11.9) может быть записана в виде

$$\nabla_l R^l_m - \frac{1}{2} \delta^l_m \nabla_l R = 0.$$

Остаётся заметить, что

$$\delta^l_m = g^l_m,$$

и внести g^l_m под знак ковариантной производной:

$$\nabla_l (R^l_m - \frac{1}{2} g^l_m R) = 0.$$

Теорема 11.4 доказана. □

11.4.3 Пространство Эйнштейна

Задача 11.11. Риманово многообразие, в котором

$$R_{ij} = \lambda(x) g_{ij},$$

называется **пространством Эйнштейна**. Доказать, что:

(1) любое двумерное риманово многообразие является пространством Эйнштейна.

(2) если размерность многообразия больше двух ($n > 2$), то $\lambda(x) = \text{const}$ (в частности, скалярная кривизна пространства Эйнштейна $R = \frac{1}{n}\lambda(x)$ постоянна).

Решение Задачи 11.11. (1) Двумерный случай вытекает из Задач 11.3 и 11.4.

(2) Подставляем выражение для тензора Риччи и скалярной кривизны в тождество (11.9):

$$\nabla_l R^l_m - \frac{1}{2}\nabla_m R = \nabla_l \left(\lambda \delta^l_m\right) - \frac{n}{2}\nabla_m \lambda = \frac{2-n}{2}\nabla_m \lambda = 0.$$

Получаем

$$(n-2)\nabla_m \lambda(x) = 0,$$

что при $n > 2$ возможно лишь при $\lambda(x) = \text{const}$.

Задача 11.11 решена. $\square$

Часть V

Степень отображения и когомологии де Рама

В заключительной части книги мы поговорим о нескольких геометрических понятиях: гомотопии и гомотопической эквивалентности, степени отображения и когомологиях де Рама гладкого многообразия. Понятие гомотопии (деформации в пространстве отображений с заданными свойствами) и гомотопической эквивалентности (более слабой эквивалентности многообразий, чем гомеомоморфизм, которая может не сохранять размерность) могут рассматриваться в рамках этой части как вспомогательные. Понятия степени отображения и когомологий де Рама важны и тесно связаны с материалом предыдущих частей книги.

Данная часть имеет следующую структуру.

Тема 12 дает краткое введение понятия гомотопии и гомотопической эквивалентности. В ней даются задачи на доказательство гомотопической эквивалентности некоторых распространенных топологических пространств.

В теме 13 вводится понятие степени отображения, изучаются ее свойства и даются задачи на вычисление степени в простых, но важных случаях.

Тема 14 посвящена группам когомологий де Рама — семейству групп, строящихся по пространствам дифференциальных форм на многообразии и являющихся гомотопическим инвариантом.

Тема 12

Гомотопия и гомотопическая эквивалентность

Пусть X, Y — топологические пространства.

Определение 12.1. Два непрерывных отображения топологических пространств $f, g\colon X \to Y$ называются **гомотопными** (обозначается $f \sim g$), если существует непрерывное отображение
$$F\colon [0,1] \times X \to Y,$$
такое что для любого $x \in X$
$$F(0,x) = f(x), \qquad F(1,x) = g(x).$$

Само отображение F называют **гомотопией**, связывающей отображения f и g. Часто отображение $F(t,x)$ обозначают через $F_t(x)$. Гомотопию можно представлять себе как непрерывное семейство отображений $F_t(x)$, реализующее деформацию отображения f в отображение g в пространстве отображений.

На гомотопию могут накладываться дополнительные условия. В этом случае соответствующему условию должны удовлетворять все промежуточные отображения $F_t(x)$. Например, если $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — регулярные кривые, то *регулярная гомотопия* подразумевает, что все промежуточные отображения также являются регулярными кривыми.

Задача 12.1. Доказать, что любое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ гомотопно постоянному отображению (т.е. отображению в точку), если

(1) $X = \mathbb{R}^n$, Y произвольно,

(2) $Y = \mathbb{R}^n$, X произвольно.

Решение Задачи 12.1. Искомые гомотопии, связывающие отображения $f\colon X \to Y$ с отображением в точку:

(1) $F(\vec{x}, t) = f(t\vec{x})$,

(2) $F(\vec{x}, t) = tf(\vec{x})$.

Задача 12.1 решена. □

Задача 12.2. Доказать, что гомотопия является отношением эквивалентности на множестве непрерывных отображений.

Решение Задачи 12.2. Проверим непосредственно выполнение аксиом отношения эквивалентности.

(1) Рефлексивность: $f \sim f$. Полагаем $F_t(x) = f(x), \quad \forall t$.

(2) Симметричность: $f \sim g \Rightarrow g \sim f$. Если гомотопия $F(x, t)$ связывает f и g, то гомотопия $F(x, 1-t)$ связывает g и f.

(3) Транзитивность: $f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$. Если гомотопия $F_1(x,t)$ связывает f с g, а гомотопия $F_2(x,t)$ связывает g с h, то гомотопия

$$F(x,t) = \begin{cases} F_1(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F_2(x, 2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

связывает f с h.

Задача 12.2 решена. □

Определение 12.2. Два топологических пространства X и Y называются **гомотопически эквивалентными** (обозначается $X \sim Y$), если существуют отображения

$$f\colon X \to Y, \qquad g\colon Y \to X$$

такие, что

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g \sim \mathrm{id}_Y\,.$$

Задача 12.3. Доказать, что гомеоморфные топологические пространства гомотопически эквивалентны.

Решение Задачи 12.3. В самом деле, пусть пространства X и Y гомеоморфны, то есть существует непрерывная вместе со своим обратным биекция $f\colon X \to Y$. Положим $g := f^{-1}$.

В таком случае $g \circ f = \mathrm{id}_X, f \circ g = \mathrm{id}_Y$, то есть выполнено даже более сильное свойство, чем гомотопность композиций соответствующим тождественным отображениям.

Задача 12.3 решена. □

Следующая задача показывает, что обратное, вообще говоря, не верно: в отличие от гомеоморфизма гомотопическая эквивалентность не обязана сохранять размерность многообразия.

Задача 12.4. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ **стягиваемо** (т.е. гомотопически эквивалентно точке).

Решение Задачи 12.4. Для доказательства стягиваемости пространства достаточно построить гомотопию тождественного отображения и отображения в точку. В самом деле, рассмотрим пространство $X = \{*\}$ и произвольное пространство Y. Определим отображение $f\colon X \to Y$ как $f\colon * \mapsto y_0$, где y_0 — произвольная фиксированная точка пространства Y. Далее, пусть $g\colon Y \to X$ единственное возможное отображение, определенное как $g\colon y \mapsto *$ для всех $y \in Y$.

Тогда $g \circ f\colon X \to X$ заведомо гомотопно (и даже равно) тождественному на X, поскольку других отображений на одноточечном пространстве не существует. С другой стороны, $f \circ g$ переводит все точки Y в одну выделенную точку $y_0 \in Y$. Таким образом, для доказательства гомотопической эквивалентности X и Y необходимо и достаточно показать, что отображение в точку гомотопно тождественному на Y.

Для $\mathbb{R}^n$ можно взять гомотетию

$$F(\vec{x}, t) = t\vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1].$$

В силу задачи 12.1 она и является искомой гомтопией. Задача 12.4 решена. □

Задача 12.5. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ без точки гомотопически эквивалентно $(n-1)$-мерной сфере.

Решение Задачи 12.5.

$$\mathbb{R}^n \backslash \{*\} \simeq S^{n-1} \times \mathbb{R} \sim S^{n-1} \times \{*\},$$

поскольку $\mathbb{R} \sim \{*\}$. Здесь мы воспользовались следующим утверждением.

Утверждение 12.1. *Если пространства гомотопически эквивалентны $X_1 \sim X_2, Y_1 \sim Y_2$, то их прямые произведения тоже гомотопически эквивалентны*

$$X_1 \times Y_1 \sim X_2 \times Y_2.$$

Доказательство Утверждения 12.1. Гомотопия для произведения — произведение гомотопий. Утверждение 12.1 доказано. □

Задача 12.5 решена. □

Задача 12.6. Доказать, что $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^k$ гомотопически эквивалентно $(n-k-1)$-мерной сфере.

Решение Задачи 12.6.

$$\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^k \simeq \left(\mathbb{R}^{n-k} \backslash \{*\}\right) \times \mathbb{R}^k \sim S^{n-k-1} \times \{*\}$$

по задаче 12.5. Задача 12.6 решена. □

Тема 13

Степень отображения

13.1 Понятие степени отображения

Определение 13.1. Пусть M^n, N^n — гладкие компактные ориентированные многообразия одинаковой размерности n. Тогда **степень отображения** $f\colon M^n \to N^n$ определяется как
$$\deg f := \sum_{y \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} \det Df(y), \tag{13.1}$$
где

- p — произвольное регулярное значение отображения f,
- $Df(y)$ — якобиан отображения f в точке y.

Замечание 13.1. Поясним формулу (13.1).

(1) По теореме Сарда множество критических значений отображения f имеет меру ноль. Как следствие, существует регулярное значение $p \in N^n$.

(2) Так как многообразие M^n компактно, в прообразе регулярного значения p лежит конечное число точек

$$f^{-1}(p) = \{y_1, \ldots, y_k\}.$$

(3) Так как все точки y_i регулярны, отображение f задаёт диффеоморфизмы

$$f_i \colon U_i \to V$$

малых окрестностей U_i точек y_i на малую окрестность V точки p.

(4) Каждый из диффеоморфизмов f_i либо сохраняет ориентацию, либо меняет её. Степень отображения равна количеству f_i, сохраняющих ориентацию, минус количество f_i, меняющих её.

Замечание 13.2. Ключевые свойства степени отображения:

(1) Степень отображения не зависит от выбора регулярного значения p в формуле (13.1) (т.е. определение 13.1 корректно).

(2) Если отображения f и g гомотопны[1], то их степени равны

$$f \sim g \qquad \Rightarrow \qquad \deg f = \deg g.$$

Замечание 13.3. Если многообразия M^n и N^n не ориентированы, то можно рассматривать **степень отображения**

[1] Мы предполагаем, что все отображения гладкие, но утверждения останутся верными для непрерывных отображений. Для них степень отображения $f \colon X \to Y$ определяется через гомологии по формуле $f_*([X]) = \deg(f)[Y]$, где $[X]$ — фундаментальный класс многообразия X.

по модулю 2. Эта степень является элементом $\mathbb{Z}_2$ и определяется по аналогичной формуле

$$\deg_2 f := \sum_{y\in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn}\det Df(y) \pmod 2 \tag{13.2}$$

для произвольного гладкого отображения $f\colon M^n \to N^n$ компактных многообразий одинаковой размерности. Как и ранее, $p \in N$ — произвольное регулярное значение f.

Легко видеть, что

- $\deg_2 f$ — количество элементов $\pmod 2$ в прообразе любого регулярного значения p;
- для ориентированных многообразий

$$\deg_2 f = \deg f \pmod 2.$$

Для степени отображения по модулю 2 выполнены свойства, аналогичные описанным в Замечании 13.2.

13.2 Степень отображения в некоторых конкретных случаях

13.2.1 Простейшие задачи на степень отображения

Задача 13.1. Пусть X, Y, Z — гладкие замкнутые ориентированные многообразия одинаковой размерности, а $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — гладкие отображения. Доказать, что

$$\deg(g\circ f) = \deg g \cdot \deg f.$$

Решение Задачи 13.1. Достаточно честно посчитать степень отображения. Пусть

- $z \in Z$ — регулярное значение функции $h = g \circ f$;
- $y_1, \ldots, y_k$ — точки в прообразе $g^{-1}(z)$;
- $x_{i,j}$, $j = 1, \ldots, n_i$ — точки в прообразе $f^{-1}(y_i)$ при $i = 1, \ldots, k$.

Так как z — регулярное значение для h, то y_i и $x_{i,j}$ — регулярные точки для g и f соответственно. По определению степени отображения

$$\deg(g \circ h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \operatorname{sgn} \det Dh(x_{i,j}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} \operatorname{sgn} (\det Df(x_{i,j}) \det Dg(f(x_{i,j}))) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \operatorname{sgn} \det Df(x_{i,j}) \right) \operatorname{sgn} \det Dg(y_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \deg f \cdot \operatorname{sgn} \det Dg(y_i) =$$

$$= \deg f \left(\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} \det Dg(y_i) \right) = \deg f \deg g.$$

Задача 13.1 решена. □

Задача 13.2. Доказать, что замкнутое многообразие ненулевой размерности не стягиваемо (т.е. тождественное отображение не гомотопно отображению в точку).

Указание. У тождественного отображения и отображения в точку разные степени (по модулю 2).

Решение Задачи 13.2. Тождественное отображение $\mathrm{id}\colon X \to X$ не может быть гомотопно отображению в точку $\pi\colon X \to$

$pt \in X$, поскольку у них разные степени отображения:

$$\deg_2 \mathrm{id} = 1, \qquad \deg_2 \pi = 0$$

(у тождественного отображения у любой точки ровно одна точка в прообразе и якобиан является единичной матрицей, у отображения в точку прообраз всех точек, кроме одной, пуст). Задача 13.2 решена. □

Задача 13.3. Доказать, что замкнутые многообразия разных размерностей гомотопически не эквивалентны.

Решение Задачи 13.3. Доказательство от противного. Пусть для многообразий M^n, N^m, где $m \neq n$, существуют непрерывные отображения

$$f\colon M^n \to N^m, \qquad g\colon N^m \to M^n,$$

такие что

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_M, \qquad g \circ f \sim \mathrm{id}_N\,.$$

Пусть $m > n$. Тогда с одной стороны,

$$\deg_2 \mathrm{id}_M = 1.$$

С другой стороны

$$\deg_2 g \circ f = 0,$$

так как для любой лежащей в образе точки композиция якобианов Dg и Df будет вырожденным оператором. Действительно,

$$\mathrm{rk}\ (D(g \circ f)) = \mathrm{rk}\ (DgDf) \leq \min\left(\mathrm{rk}\, Dg, \mathrm{rk}\, Df\right) \leq n < m.$$

Задача 13.3 решена. □

13.2.2 Примеры вычисления степени отображения

Задача 13.4. Доказать, что два отображения

$$f, g\colon S^1 \to S^1$$

гомотопны тогда и только тогда, когда равны их степени.

Указание. Вместо отображений $f\colon S^1 \to S^1$ можно рассматривать квазипериодические функции $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие свойству

$$\hat{f}(x + 2\pi) = \hat{f}(x) + 2\pi m$$

для некоторого натурального $m \in \mathbb{N}$. Такие квазипериодические функции гомотопны при равных m, и гомотопия задаётся отрезком в пространстве функций.

Решение Задачи 13.4. Для любого отображения

$$f\colon S^1 \to S^1$$

обозначим через

$$\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

поднятие отображения f на универсальные накрытия, т.е. отображение, для которого следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{R} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Через π обозначена стандартная проекция $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Отображение $\hat{f}$ определено однозначно с точностью до прибавления константы.

Задача будет следовать из следующего утверждения.

Утверждение 13.1. *Отображения* $f, g\colon S^1 \to S^1$ *гомотопны тогда и только тогда, когда для их поднятий* $\hat{f}, \hat{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\hat{f}(2\pi) - \hat{f}(0) = \hat{g}(2\pi) - \hat{g}(0). \tag{13.3}$$

Как следствие, степень отображения f *равна* k *тогда и только тогда, когда*

$$\hat{f}(2\pi) - \hat{f}(0) = 2\pi k.$$

Доказательство Утверждения 13.1.

- Если отображения f и g гомотопны, то $\hat{f}$ и $\hat{g}$ гомотопны в классе 2π-линейно периодических функций[2]. Разница значений функций $\hat{f}, \hat{g}$ в точках 0 и 2π принадлежит $2\pi\mathbb{Z}$ и следовательно, не меняется при гомотопии.

- Если выполнено (13.3), то гомотопия

  $$F(x,t) = t\hat{f}(x) + (1-t)\hat{g}(x)$$

  задаёт гомотопию отображений f и g.

- Для доказательства последнего утверждения достаточно заметить, что отображению

  $$z^k\colon S^1 \to S^1, \qquad e^{i\varphi} \to e^{ik\varphi}$$

  соответствует поднятие $x \mapsto kx$, и что отображение z^k имеет степень k. Действительно, у каждой (регулярной) точки будет k прообразов, и в каждой точке знак якобиана равен $\operatorname{sgn} k$.

Утверждение 13.1 доказано. $\square$

Задача 13.4 решена. $\square$

---

[2]Формально, здесь используется теорема о накрывающей гомотопии. Для накрытия окружности прямой утверждение тривиально.

Задача 13.5. Привести пример отображения

(1) $f\colon S^n \to S^n$, для которого $\deg f = k$;

(2) двумерного тора $\mathbb{T}^2$ в двумерную сферу S^2, степень которого равна k;

(3) степени 0, не гомотопного тождественному отображению (т.е. отображению в точку).

Указание. Явную формулу для "обмотки" одной сферы другой несложно описать в (гипер)сферических координатах.

Решение Задачи 13.5. (1) Рассмотрим гиперсферические координаты $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ на сфере $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} x^1 &= R\cos(\varphi_1), \\ x^2 &= R\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2), \\ \ldots \\ x^n &= R\sin(\varphi_1)\cdots\sin(\varphi_{n-1})\cos(\varphi_n), \\ x^{n+1} &= R\sin(\varphi_1)\cdots\sin(\varphi_{n-1})\sin(\varphi_n)\,. \end{aligned}$$

Искомое отображение $f_k\colon S^n \to S^n$ степени k задаётся в этих координатах формулой

$$f_k(\varphi_i) = \varphi_i, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$f_k(\varphi_n) = k\varphi_n.$$

Гиперсферические координаты образуют систему координат почти всюду на сфере S^n. Легко видеть, что у точки общего положения в этих координатах будет ровно k прообразов и определитель якобиана отображения всегда одного знака (он постоянен и равен k).

(2) Пусть $(\varphi^1, \varphi^2) \pmod{2\pi}$ — координаты на торе $\mathbb{T}^2$, а (φ, ψ) — сферические координаты на сфере, где φ рассматривается $\operatorname{mod} 2\pi$, а $\psi \in [0, \pi]$.

Искомое отображение

$$f_k\colon \mathbb{T}^2 \to S^2$$

степени k задаётся формулой

$$\varphi = k\varphi^1, \qquad \psi = \frac{\varphi^2}{2}.$$

Отображение, очевидно, непрерывно. Сферические координаты являются гладкими координатами почти всюду на сфере. В этих координатах легко видеть, что у точки общего положения будет k точек в прообразе и определитель якобиана отображения всегда одного знака (он постоянен и равен $\frac{k}{2}$).

(3) Подойдёт проекция тора $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ на один из своих сомножителей $S^1 \subset \mathbb{T}^2$:

$$\pi\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2, \qquad (\varphi^1, \varphi^2) \to (\varphi^1, 0).$$

Приведём два доказательства того, что отображение не гомотопно отображению в точку.

(a) Окружность $S^1(\varphi^1) = \{\varphi^2 = 0\}$ остаётся при отображении π на месте. Покажем, что её нельзя стянуть в точку при непрерывной деформации. Представим тор $\mathbb{T}^2$ как фактор плоскости $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Любой замкнутый путь γ на $\mathbb{T}^2$ поднимается до кривой на плоскости, идущей из точки $(0, 0)$ в точку $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Поскольку множество $\mathbb{Z}^2$ дискретно, числа (m, n) сохраняются при непрерывной деформации. У стягиваемого пути они равны $(0, 0)$, а у $S^1(\varphi^1)$ они равны $(1, 0)$, поэтому $S^1(\varphi^1)$ нестягиваемо.

(b) Второе доказательство использует технику когомологий де Рама, подробно рассматриваемых в разделе 14. По теореме 14.2, если бы π было гомотопно отображению в точку, то $[\pi^* d\varphi^1] = 0$, но $\pi^* d\varphi^1 = d\varphi^1$ и класс когомологий формы не ноль, так как её интеграл по окружности $S^1(\varphi^1)$ не равен нулю:

$$\int_{S^1(\varphi^1)} d\varphi^1 = 2\pi \neq 0.$$

Задача 13.5 решена. □

Замечание 13.4. Отображение, гомотопное отображению в точку, тривиально действует на всех группах (ко)гомологий (и гомотопий), а отображение нулевой степени — только на старших (ко)гомологиях.

Задача 13.6. Вычислить степень отображения

$$f\colon S^2 \to S^2,$$

где S^2 — это пополненная комплексная плоскость, а

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

— (несократимое) отношение полиномов степени k и l.

Ответ в Задаче 13.6: $\deg f = \max(k, l)$.

Замечание 13.5. Ответ в задаче не случаен. Так как функция $f(z)$ продолжается до голоморфного отображения

$$\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1,$$

можно воспользоваться следующим общим соображением:

(1) Комплексные многообразия обладают естественной ориентацией.

(2) (Би)голоморфные отображения сохраняют эту ориентацию.

(3) Как следствие, степень отображения биголоморфного отображения комплексных многообразий

$$f\colon P^n_{\mathbb{C}} \to Q^n_{\mathbb{C}}$$

равна количеству точек в прообразе точки общего положения.

Решение Задачи 13.6. Функция $f(z)$ продолжается до (гладкого) отображения

$$\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$$

по формуле

$$(z:w) \mapsto \left(w^{k+l} P\left(\frac{z}{w}\right) : w^{k+l} Q\left(\frac{z}{w}\right)\right).$$

Функция $f(z)$ голоморфна

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$$

поэтому её якобиан во всех регулярных точках положителен. Действительно, если $f'(z) = a + ib$, то в координтах $(x, y) = (\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z)$ матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Остаётся заметить, что у точки общего положения $w_0 \in \mathbb{C}$ будет $\max(k, l)$ прообразов, заданных формулой

$$P(z) - w_0 Q(z) = 0.$$

Задача 13.6 решена. □

13.2.3 Степень отображения сферы

Задача 13.7. Пусть f и g — непрерывные отображения пространства X в n-мерную сферу S^n. Доказать, что если $f(x)$ и $g(x)$ ни для какой точки x не являются диаметрально противоположными на сфере S^n, то отображения f и g гомотопны.

Решение Задачи 13.7. Представим сферу S^n как единичную сферу в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с центром в начале координат. Тогда искомая гомотопия задаётся формулой

$$F(x,t) = \frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{||tf(x) + (1-t)g(x)||}.$$

Знаменатель не обращается в ноль, т.к. $f(x) \neq -g(x)$, и, следовательно, векторы $f(x)$ и $g(x)$ либо неколлинеарны, либо совпадают. Задача 13.7 решена. $\square$

Задача 13.8. Доказать, что отображение $f\colon S^n \to S^n$, не имеющее неподвижных точек, гомотопно центральной симметрии на сфере S^n.

Решение Задачи 13.8. Немедленно следует из задачи 13.7. Задача 13.8 решена. $\square$

Задача 13.9. Пусть $i\colon S^n \to S^n$ — центральная симметрия.

(1) Вычислить $\deg i$.

(2) Доказать, что при нечётных n отображение i гомотопно тождественному отображению.

Указание. Нечётномерную сферу можно представить в виде

$$S^{2k-1} = \left\{(z_0, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid \quad |z_0|^2 + \ldots |z_k|^2 = R^2\right\}.$$

Решение Задачи 13.9. (1) $\deg i = (-1)^{n+1}$.

Без ограничения общности, можно считать, что базис касательного пространства

$$e_1, \dots, e_n \in T_x S^n$$

задаёт положительную ориентацию сферы S^n, тогда и только тогда, когда вместе с вектором внешней нормали N в точке x набор

$$N, e_1, \dots, e_n$$

задаёт положительную ориентацию $\mathbb{R}^{n+1}$.

При центральной симметрии вектор внешней нормали N в точке x переходит в вектор внешней нормали $-N$ в точке $i(x) = -x$. Поэтому знак якобиана инволюции i равен знаку определителя отображения

$$(N, e_1, \dots, e_n) \to (-N, -e_1, \dots, -e_n),$$

который равен $(-1)^{n+1}$.

(2) Рассмотрим нечётномерную сферу

$$S^{2k-1} = \left\{(z_0, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid \quad |z_0|^2 + \dots |z_k|^2 = R^2\right\}.$$

Тогда гомотопия между тождественным отображением и центральной симметрией задаётся формулой

$$F(z,t) = \left(e^{2\pi i t} z_0, \dots, e^{2\pi i t} z_k\right), \qquad t \in [0,1].$$

Задача 13.9 решена. □

Задача 13.10. Пусть f — отображение n-мерной сферы

$$S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \, ||x||^2 = 1\right\}$$

в себя такое, что

$$f(x) \neq -x$$

для всех точек $x \in S^n$.

(1) Доказать, что $\deg f = 1$.

(2) Доказать, что если n чётно, то существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(x) = x$.

Решение Задачи 13.10. (1) По задаче 13.7 отображение f гомотопно тождественному отображению id.

(2) Если бы $f(x) \neq x$, то по задаче 13.7 отображение f было гомотопно инволюции $i(x) = -x$. Но по задаче 13.9 при чётном n выполнено $\deg i = -1$. Получаем противоречие с тем, что $f \sim \mathrm{id}$.

Задача 13.10 решена. □

Задача 13.11. Пусть отображение $f\colon S^n \to S^n$ имеет нечётную степень. Доказать, что существует пара диаметрально противоположных точек на сфере S^n, которая переходит при отображении f в пару диаметрально противоположных точек.

Указание. Рассмотреть отображение

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{||f(x) + f(-x)||} \tag{13.4}$$

и его степень (по модулю 2).

Решение Задачи 13.11 . Предположим противное т.е., что

$$f(-x) \neq -f(x). \tag{13.5}$$

Заметим, что $g(-x) = g(x)$ для отображения (13.4), поэтому

$$\deg_2 g = 0$$

(прообраз точки распадается на пары диаметрально противоположных точек).

С другой стороны, отображения f и g гомотопны. Гомотопия задаётся формулой

$$F(x,t) = \frac{tf(x) + (1-t)f(-x)}{||tf(x) + (1-t)f(-x)||}, \qquad t \in [0, \frac{1}{2}].$$

Знаменатель не обращается в ноль, так как выполнено (13.5). Поэтому

$$\deg g = \deg f \neq 0 \pmod 2.$$

Получаем противоречие. Задача 13.11 решена. □

13.3 Другие применения степени отображения

13.3.1 Теорема Борсука-Улама и теорема о еже

Задача 13.12. Доказать, что на поверхности Земли всегда найдутся две диаметрально противоположные точки, в которых давление P и температура T одинаковы (обе функции P и T считаются непрерывными).

Решение Задачи 13.12. Вначале докажем следующее утверждение.

Утверждение 13.2. *Не существует нечётного непрерывного отображения $g\colon S^2 \to S^1$ т.е. такого отображения, что*

$$g(-x) = -g(x)$$

для всех точек $x \in S^2$.

Доказательство Утверждения 13.2. Рассмотрим ограничение отображения g на экватор $\hat{g}\colon S^1 \to S^1$.

(1) С одной стороны, $\deg \hat{g} = 0$, т.к. ограничение g на любую полусферу задаёт гомотопию $\hat{g}$ и отображения в точку.

(2) С другой стороны, $\deg \hat{g}$ нечётно, т.к. $\hat{g}$ — нечётное отображение. Действительно, параметризуем S^1 стандартным параметром $\varphi \in [0, 2\pi]$.

- Поскольку $\hat{g}(\pi) = -\hat{g}(0)$, половинка окружности $\varphi \in [0, \pi]$ "намотается" на образ $n + \frac{1}{2}$ раз.
- Поскольку отображение нечётно, вторая половинка окружности $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ тоже "намотается" на образ $n + \frac{1}{2}$ раз.
- В итоге при обходе всей окружности мы "обойдём" образ $2n + 1$ раз.

Утверждение 13.2 доказано. □

Если существует такое отображение $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$, что $f(-P) \neq f(P)$, то корректно определено отображение $g\colon S^2 \to S^1$, заданное формулой

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{||f(x) - f(-x)||}.$$

Но $g(-x) = -g(x)$, что противоречит утверждению 13.2.

Задача 13.12 решена. □

Замечание 13.6. Задача 13.12 — это частный случай теоремы Бо́рсука–У́лама .

Теорема 13.3 (Теорема Борсука-Улама)**.** *Для любого непрерывного отображения $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ существует такая точка $x \in S^n$, что $f(-x) = f(x)$.*

Задача 13.13 (Теорема о причесывании ежа)**.** Доказать, что на четномерной сфере не существует векторного поля, нигде не обращающегося в ноль.

Решение Задачи 13.13. Без ограничения общности будем считать сферу единичной. Предположим противное: пусть существует такое поле v, что $v(x) \neq 0$ для всех $x \in S^{2n}$.

Поскольку поле невырождено, его можно отнормировать, а потому считать, что длина всех векторов единична, то есть для каждого x вектор $v(x)$ задает некоторую точку на сфере. Тогда рассмотрим следующее семейство отображений сферы в себя (каждую точку x на сфере мы отождествляем с единичным вектором в евклидовом пространстве):

$$F_t(x) = \cos(t\pi)x + \sin(t\pi)v(x), \quad t \in [0, 1].$$

Это гомотопия тождественного отображения и центральной симметрии на сфере. Однако степень тождественного отображения равна 1, а у симметрии, как мы показали ранее, степень равна $(-1)^{2n+1}$. Противоречие.

Задача 13.13 решена. □

13.3.2 Отображение матричных групп

Задача 13.14. Вычислить степень отображения

$$f_n\colon \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{SO}(3),$$
$$f_n(A) = A^n.$$

Ответ в Задаче 13.14. $\deg f_n = n$.

Решение Задачи 13.14. Напомним, что любой элемент группы SO(3) — это поворот вокруг некой оси l на угол α.

(1) Для отображения $A \to A^n$ в прообразе точки общего положения лежит n элементов. Повороту на угол α соответствуют повороты вокруг той же оси на углы $\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}$, где $k = 1, \ldots, n$.

(2) Знак каждого якобиана совпадает с $\operatorname{sgn} n$. Если мы возьмем на $\mathrm{SO}(3)$ локальные координаты, две из которых задают ось l поворота, а последняя — угол поворота α, то в этих координатах отображение просто умножает последнюю координату на n (по модулю 2π).

Задача 13.14 решена. □

13.3.3 Индексы особых точек

Определение 13.2. Пусть x — изолированная особая точка векторного поля v на многообразии M^n, т.е.

$$v\big|_x = 0,$$

и в окрестности точки x нет других особых точек. Рассмотрим достаточно малую сферу $S_x(\varepsilon)$ с центром в точке x. Векторное поле задаёт отображение $S^n \to S^n$ по формуле

$$y \to \frac{v\big|_y}{\left|\left|v\big|_y\right|\right|}.$$

Индекс векторного поля v в особой точке x — это степень этого отображения.

Задача 13.15. Найти индекс особой точки для линейного векторного поля

$$v^i(x^1, \ldots, x^n) = A^i_k x^k$$

в $\mathbb{R}^n$, где A — постоянная невырожденная матрица.

Ответ в Задаче 13.15. Индекс равен ± 1, знак совпадает с $\operatorname{sgn}\det A$.

Решение Задачи 13.15. • Особая точка изолирована, т.к. матрица A невырождена.

- Поскольку индекс особой точки — целое число, оно не изменится при гомотопии векторного поля, оставляющего особую точку особой и изолированной. Будем непрерывно менять матрицу A в пространстве невырожденных матриц.

- Группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ невырожденных матриц состоит из двух компонент: матриц с положительным определителем

$$\mathrm{GL}^{+}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) |\, \det A > 0\}$$

и матриц с отрицательным определителем

$$\mathrm{GL}^{-}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) |\, \det A < 0\}.$$

- Таким образом гомотопией можно привести матрицу A либо к единичной E, либо к симметрии относительно плоскости. Легко видеть, что в первом случае индекс поля равен 1, а во втором -1.

Задача 13.15 решена. $\square$

Задача 13.16. Найти особые точки и вычислить их индексы для следующих векторных полей на плоскости:

(1) $v(x, y) = (x + 2y, 3x + y)$,

(2) $v(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$,

(3) $v(x, y) = \operatorname{grad} \operatorname{Re}(z^n)$, где $z = x + iy$ и $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ в Задаче 13.16.

(1) Особая точка: $(0, 0)$. Индекс: -1.

(2) Особая точка: $(0, 0)$. Индекс: 2.

(3) При $n > 1$ особая[3] точка: $(0,0)$. Индекс: $1-n$.

Решение Задачи 13.16. Нужно посчитать, сколько раз повернётся (против часовой стрелки) векторное поле при обходе против часовой стрелки вокруг каждой изолированной особой точки.

Иногда полезно посмотреть на картинки векторных полей.

(1) Это частный случай задачи 13.15.

Другое решение. В координатах

$$x' = x + 2y, \qquad y' = -3x - y$$

векторное поле имеет вид

$$(x', -y').$$

Замена координат положительно ориентирована, поэтому индекс векторных полей в обоих системах координат совпадает.

Третье решение.[4] Рассмотрим, в каких точках векторное поле горизонтально, в каких — вертикально, и куда при этом направлено векторное поле.

- Поле горизонтально при $3x+y=0$. На единичной окружности
  - в точке $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$ поле направлено влево;
  - в точке $\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ поле направлено вправо.

[3] При $n = 1$ нет особых точек, при $n = 0$ поле $v = 0$, при $n < 0$ начало координат — полюс.

[4] Это решение достаточно эффективно для вычисления индексов особых точек векторных полей на плоскости.

- Поле вертикально при $x + 2y = 0$. На единичной окружности
  - в точке $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ поле направлено вверх;
  - в точке $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ поле направлено вниз.

При обходе против часовой стрелки мы легко находим углы, на которые поворачивается касательный вектор, а именно мы получаем следующую последовательность направлений и углов:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \rightarrow & \downarrow & \leftarrow & \uparrow & \rightarrow \\ \varphi = 0 & \varphi = -\frac{\pi}{2} & \varphi = -\pi & \varphi = -\frac{3\pi}{2} & \varphi = -2\pi. \end{array}$$

Итоговый индекс $\operatorname{ind}_0 v = \frac{-2\pi}{2\pi} = -1$.

(2) В координатах

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy$$

векторное поле имеет вид

$$(u, v).$$

Якобиан положителен везде, кроме начала координат. Точке (u, v) соответствуют две точки $\pm(x, y)$, где

$$x^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}, \qquad y^2 = \frac{-u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}.$$

Поэтому в координатах (u, v) нужно дважды обойти начало координат.

Другое решение. На окружности $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ векторное поле имеет вид $r^2(\cos 2\varphi, \sin 2\varphi)$.

(3) Особые точки векторного поля $\operatorname{grad}\operatorname{Re} f(z)$ для голоморфной функции $f(z)$ — это точки[5], где $f'(z) = 0$.

Для $f(z) = z^n$ при $n > 1$ получаем одну особую точку: $z = 0$.

В полярных координатах (ρ, φ) имеем

$$z^n = \rho^n \cos n\varphi + i\rho^n \sin n\varphi.$$

Получаем

$$\operatorname{grad}\operatorname{Re} z^n = n\rho^{n-1}\cos n\varphi \frac{\partial}{\partial\rho} - n\rho^{n-2}\sin n\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

При обходе $\varphi \in [0, 2\pi]$ этот вектор поворачивается n раз по часовой стрелке, но сам базис $\partial_r, \partial_\varphi$ поворачивается в декартовых координатах один раз против часовой стрелки. Окончательно имеем число обходов $1 - n$.

Задача 13.16 решена. □

13.3.4 Степень отображения и интеграл

Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение ориентированных компактных связных многообразий, ω — дифференциальная форма на многообразии N, причем $\deg\omega = \dim M = \dim N$. Тогда

$$\int_M f^*(\omega) = \deg f \int_N \omega.$$

---

[5]Используем условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Вернемся к задача 5.8: вычислить интеграл от 1-формы $dx + dy$ по нижней половине S_- эллипса $x^2 + 2y^2 = 1$.

Рассмотрим отрезок $I = [\pi, 2\pi]$, параметризованный параметром t, и отображение $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$, определенное по формуле $\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t)$. Это отображение переводит отрезок I в точности в S_-, а степень этого отображения равна 1.

По сформулированной выше теореме,

$$\int_{S_-} dx + dy = \frac{1}{\deg \gamma} \int_I \gamma^*(dx + dy) =$$
$$= \int_\pi^{2\pi} d\cos t + d\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\right) = 2.$$

Тема 14

Когомологии де Рама

Более подробная информация о связи дифференциальных форм и когомологий может быть найдена, например, в [16].

14.1 Определение когомологий де Рама

(Ко)гомологии — алгебраические инварианты топологических пространств.

Напомним следующие термины из теории дифференциальных форм:

- k-форма α **замкнута**, если $d\alpha = 0$; их множество обозначается Z^k;
- k-форма α **точна**, если $\alpha = d\beta$; их множество обозначается B^k.

Определение 14.1. Группа k**-мерных когомологий** (де Рама) $H^k(M^n)$ $n-$мерного многообразия M^n — это фактор-группа Z^k/B^k.

Формы α_1 и α_2 называются **когомологичными**, если их разность точна: $\alpha_1 - \alpha_2 = d\beta$. Когомологичные формы являются представителями одного и того же класса когомологий.

Иными словами, если мы рассмотрим **цепной комплекс**

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(M) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(M) \xrightarrow{d_2}$$
$$\xrightarrow{d_2} \Omega^3(M) \xrightarrow{d_3} \quad \cdots \quad \xrightarrow{d_{n-1}} \Omega^n(M) \xrightarrow{d_n} 0,$$

то когомологии де Рама определяются как

$$H^k_{deRham}(M) = \operatorname{Ker} d_k / \operatorname{Im} d_{k-1}.$$

Перечислим некоторые свойства когомологий.

(1) Любое отображение многообразий

$$f\colon M \to N$$

индуцирует отображение когомологий

$$f^*\colon H^i(M,\mathbb{R}) \to H^i(M,\mathbb{R}).$$

При этом
$$[f^*\alpha] = f^*[\alpha]$$

для любой (замкнутой) k-формы α.

В самом деле, поскольку обратный образ коммутирует с внешним дифференциалом, то если две формы были когомологичны, то есть $\alpha_1 - \alpha_2 = d\beta$, то и их обратные образы когомологичны: $f^*(\alpha_1) - f^*(\alpha_2) = f^*(\alpha_1 - \alpha_2) = f^*(d\beta) = df^*\beta$.

(2) Когомологии образуют **градуированное кольцо**. Для когомологий де Рама умножение в когомологиях (так

называемое $\smile$-умножение[1] или умножение Колмогорова-Александера) порождается операцией внешнего произведения:

$$[\alpha] \smile [\beta] := [\alpha \wedge \beta].$$

Задача 14.1. Доказать, что

(1) Если многообразие M состоит из N компонент связности, то

$$H^0(M) \cong \mathbf{R}^N.$$

В частности, если многообразие M связно, то

$$H^0(M) \cong \mathbb{R};$$

(2) Если $i > n$, то $H^i(M^n) = 0$.

Решение Задачи 14.1. (1) По определению

$$H^0(M) = \operatorname{Ker} d_0 / \operatorname{Im} d_{-1} = \operatorname{Ker} d_0,$$

то есть нулевая группа когомологий состоит из всех 0-форм (то есть гладких функций) с нулевым дифференциалом. Это в точности функции, постоянные на каждой компоненте связности многообразия. Значит каждый элемент группы задается N числами — значениями функции на каждой компоненте связности.

(2) Действительно, на n-мерном многообразии не существует ненулевых i-форм при $i > n$, а потому искомая факторгруппа равна нулю.

Задача 14.1 решена. □

Следующая теорема содержит менее тривиальный факт о когомологиях.

---

[1] англ. cup product

Теорема 14.1. • *Если M^n — компактное ориентируемое многообразие, то отображение*

$$\omega \mapsto \int_{M^n} \omega$$

устанавливает изоморфизм

$$H^n(M^n) \cong \mathbb{R}.$$

• *В противном случае (если M некомпактно или неориентируемо)*

$$H^n(M^n) \cong 0.$$

Группы когомологий являются гомотопическим инвариантом многообразий. Более точно:

Теорема 14.2. *Если два отображения $f, g\colon M \to N$ гомотопны, то они индуцируют одинаковые отображения в когомологиях $f^* = g^*$.*

Замечание 14.1. Для когомологий де Рама утверждение имеет смысл, если f и g — гладкие. Утверждение верно и для произвольных непрерывных отображений для достаточно хороших классов пространств (например, для многообразий). Нужно только переопределить понятие когомологий: по **теореме де Рама** *когомологии де Рама изоморфны сингулярным когомологиям* (см., например, [17]), определённым для произвольного топологического пространства.

Следствие 14.1. *У гомотопически эквивалентных пространств $X \sim Y$ когомологии совпадают: $H^k(X) \cong H^k(Y)$.*

Доказательство. Пусть пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то есть существуют отображения

$$g \circ f \sim \mathrm{id}_X, \qquad f \circ g \sim \mathrm{id}_Y .$$

В силу теоремы 14.2 и свойств обратного образа, имеем

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \mathrm{id}_X^*$$

и аналогично для $g^* \circ f^*$.

Таким образом, f^* и g^* — взаимно обратные гомомрфизмы групп $H^k(X)$ и $H^k(Y)$, а значит эти группы изоморфны.

Следствие доказано. $\square$

Отсюда в частности следует, что

$$H^k(M \times I^m) \cong H^k(M).$$

Задача 14.2 (Лемма Пуанкаре)**.** Доказать, что когомологии **евклидова пространства** $\mathbb{R}^n$ имеют вид:

$$H^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k \neq 0. \end{cases}$$

Решение Задачи 14.2. Для начала заметим, что при $n = 0$ утверждение леммы очевидно.

С другой стороны, ранее было доказано, что $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^0$ для всех n. Но группы когомологий гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

Задача 14.2 решена. $\square$

Группы когомологий определяют, когда замкнутая форма точна, то есть имеет первообразную. С подобным вопросом мы уже сталкивались, когда обсуждали операции $\mathrm{grad}, \mathrm{rot}$ и div. Из леммы Пуанкаре становится понятно, почему на $\mathbb{R}^n$ (или в окрестности точки любого гладкого многообразия) если $\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$, то $\vec{v} = \mathrm{grad}\, f$ для некоторой функции f, и если $\mathrm{div}\,\vec{w} = 0$, то $\vec{w} = \mathrm{rot}\,\vec{v}$ для некоторого векторного поля $\vec{v}$.

14.2 Некоторые задачи на вычисление групп когомологий

14.2.1 Замкнутые и точные формы

Задача 14.3. Привести пример замкнутой, но не точной 1-формы на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Решение Задачи 14.3. Подойдёт форма $d\varphi$.

- $d\varphi$ — замкнутая форма

  $$d(d\varphi) = 0,$$

  потому что $d^2 = 0$, замкнутость — локальное свойство, и локально мы можем рассматривать φ как гладкую (однозначную) функцию.

- $d\varphi$ — не точна

  $$d\varphi \neq df.$$

  Приведём два доказательства этого факта.

  (1) Пусть $d\varphi = df$. Первообразная 1-формы определена с точностью до константы. Поэтому локально $f = \varphi + \mathrm{const}$, но φ не продолжается до однозначной функции на всём $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Получаем противоречие.

  (2) Интеграл $d\varphi$ по единичной окружности

  $$S^1 = \left\{x^2 + y^2 = 1\right\}$$

  не равен нулю:

  $$\int_{S^1} d\varphi = 2\pi \neq 0.$$

Но по формуле Ньютона-Лейбница интеграл от точной 1-формы по любому замкнутому пути равен нулю

$$\int_{S^1} df = 0.$$

Поэтому $d\varphi \neq df$.

Задача 14.3 решена. $\square$

Задача 14.4. Привести пример замкнутой, но не точной $(n-1)$-формы на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Указание. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \sim S^{n-1}$.

Решение Задачи 14.4. Подойдёт форма $\pi^*\omega$, где

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$$

— это радиальная проекция на единичную сферу $S^{n-1} = \{\sum x_i^2 = 1\}$, а ω — форма объема на S^{n-1}.

- Форма $\pi^*\omega$ замкнута, поскольку по Задаче 5.7
$$d\pi^*\omega = \pi^* d\omega = \pi^* 0 = 0.$$
Во втором равенстве $d\omega = 0$, так как на S^{n-1} нет нетривиальных n-форм.

- $\pi^*\omega$ — не точна, потому что её интеграл по S^{n-1} не равен нулю. Пусть $i\colon S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ — стандартное вложение сферы. Тогда
$$\int_{S^{n-1}} i^*(\pi^*\omega) = \int_{S^{n-1}} \omega > 0,$$
так как ω — форма объёма на S^{n-1}. С другой стороны, если бы $\pi^*\omega = d\beta$, то по формуле Стокса и Задаче 5.7
$$\int_{S^{n-1}} i^*(d\beta) = \int_{S^{n-1}} d(i^*\beta) = 0.$$

Задача 14.4 решена. $\square$

14.2.2 Вычисление первых когомологий

Задача 14.5. Доказать, что 1-форма α на многообразии точна тогда и только тогда, когда её интеграл по любому замнутому пути равен нулю.

Решение Задачи 14.5. В одну сторону утверждение очевидно: если форма точна $\alpha = dF$, то по формуле Ньютона-Лейбница для любой кривой γ с концами P и Q

$$\int_\gamma \alpha = F(Q) - F(P). \tag{14.1}$$

И следовательно $\int_\gamma \alpha = 0$, если кривая замкнута (т.е. если $P = Q$).

В другую сторону. Пусть $\int_\gamma \alpha = 0$ для любого замкнутого пути γ. Фиксируем $x_0 \in M$. Положим $f(x_0) = 0$ и

$$f(x) = \int_\gamma \alpha,$$

где $\gamma\colon [0,1] \to M$ — это произвольный (кусочно-гладкий) путь с концами $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x$.

- Покажем, что *определение корректно: интегралы по любым двум путям* γ_1, γ_2 *равны.* Это так, потому что интеграл по замкнутому пути $\gamma_1\gamma_2^{-1}$, получающемуся при движении вначале по γ_1, а потом по γ_2 в обратную сторону, будет равен нулю:

  $$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_2} \alpha = 0.$$

- Покажем, что *построенная функция* $f(x)$ *гладкая.*

  Вначале покажем, что для любого пути γ с концами P и Q

  $$\int_\gamma \alpha = f(Q) - f(P). \tag{14.2}$$

Действительно, рассмотрим произвольный путь γ_0 из x_0 в P. Тогда по определению функции f

$$f(Q) - f(P) = \int_{\gamma_0 \cup \gamma} \alpha - \int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma} \alpha.$$

Далее, фиксируем произвольную точку y_0 и рассмотрим её окрестность U, гомеоморфную диску $U \simeq D^n$. По лемме Пуанкаре любая замкнутая форма на U точна, поэтому $\alpha = dF$ для некоторой гладкой функции F. По формуле Ньютона-Лейбница для любого пути γ в U выполнены (14.1) и (14.2). Поэтому функции f и F отличаются на константу. Но F — гладкая функция, поэтому f — тоже гладкая.

Задача 14.5 решена. $\square$

Отсюда следует, например, что 1-форма на окружности точна (то есть ее первообразная есть фнукция на окружности), если и только если ее интеграл по окружности равен нулю. Значит любая 1-форма на окружности однозначно разлагается в сумму точной и формы с постоянным коэффициентом (равным значению интеграла по окружности). Отсюда следует, что пространство $\Omega^1(S^1) = \operatorname{Im} d_0 \oplus \mathbb{R}$, следовательно $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

Замечание 14.2. Результат Задачи 14.5 можно улучшить. Не обязательно рассматривать все пути.

- По формуле Стокса *интегралы от замкнутой формы по гомотопным циклам равны*

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\gamma_1} \alpha = \int_{\gamma_2} \alpha.$$

- В частности, *когомологии односвязного пространства равны нулю*

$$\pi_1(M) = \{e\} \qquad \Rightarrow \qquad H^1(M) = 0.$$

- На практике класс 1-формы $\alpha \in H^1(M)$ определяется её интегралами по некоторому *конечному* числу циклов (например, по порождающим фундаментальной группы).

Задача 14.6. Вычислить первые когомологии плоскости без двух точек $H^1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}\right)$.

Ответ в Задаче 14.6.

$$H^1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}\right) \cong \mathbb{R}^2. \tag{14.3}$$

Более того, если $S^1_P, S^1_Q \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$ — две окружности с центрами в точках P и Q, то отображение

$$\alpha \mapsto \left(\int_{S^1_P} \alpha, \int_{S^1_Q} \alpha\right), \tag{14.4}$$

задаёт изоморфизм (14.3).

Решение Задачи 14.6. Без ограничения общности,

$$P = (-1, 0), \qquad Q = (1, 0).$$

Рассмотрим гомоморфизм

$$H^1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}\right) \to \mathbb{R}^2, \tag{14.5}$$

заданный формулой (14.4).

- *Покажем, что гомоморфизм* (14.5) *инъективен.* Пусть α — замкнутая форма. Нужно показать, что если
$$\int_{S^1_P} \alpha = \int_{S^1_Q} \alpha = 0, \tag{14.6}$$
то форма α точна. Рассмотрим три области в $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$:
$$U_1 = \{x < 0\} \setminus \{y = 0, -1 < x < 0\},$$
$$U_2 = \{-1 < x < 1\},$$
$$U_3 = \{x > 0\} \setminus \{y = 0, 0 < x < 1\}.$$
Все они односвязны (более того, гомеоморфны диску), поэтому α на них точна
$$\alpha = dF_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$
Первообразные F_i на областях U_i определены с точностью до константы
$$F_i' = F_i + c_i, \qquad c_i = \mathrm{const}.$$
На пересечении областей $U_i \cap U_j$ первообразные тоже отличаются на константу
$$dF_i = dF_j \qquad \Rightarrow \qquad F_i - F_j = d_{ij}, \qquad d_{ij} = \mathrm{const}.$$
Благодаря (14.6) можно подобрать константы c_i т.,ч. $d_{ij} = 0$ и функции F_i "склеятся" в единую функцию F на $\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}$. По построению $\alpha = dF$.

- *Покажем, что гомоморфизм* (14.5) *сюръективен.* Рассмотрим только случай, когда окружности S^1_P, S^1_Q не содержат внутри себя вторую выкинутую точку плоскости (остальные случаи рассматриваются аналогично). Пусть (ρ_1, φ_1) и (ρ_2, φ_2) — полярные координаты с центрами в точках P и Q соответственно. Тогда
$$\alpha = c_1 d\varphi_1 + c_2 d\varphi_2, \qquad \Rightarrow \qquad \int_{S^1_P} \alpha = c_1, \qquad \int_{S^1_Q} \alpha = c_2,$$

для любых констант $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 14.6 решена. $\square$

Замечание 14.3. Упомянем несколько фактов из алгебраической топологии, проясняющих, почему класс 1-формы определяется её интегралами по некоторым циклам (подробнее см. [18] или [19]).

(1) Первая группа гомологий $H_1(X, \mathbb{Z})$ — это абелинизация фундаментальной группы:

$$H_1(M, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(X) / \left[\pi_1(X), \pi_1(X)\right].$$

(2) По формуле универсальных коэффициентов

$$H^1(X; \mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}\left(\left(H_1(X; \mathbb{Z}\right), \mathbb{R}\right).$$

(3) Когомологии де Рама — это когомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$:

$$H^i_{deRham}(X) \cong H^i(X; \mathbb{R}).$$

14.2.3 Теорема Майера–Вьеториса

Следующая теорема предоставляет достаточно эффективный способ вычисления когомологий.

Определение 14.2. Последовательность групп G_k и гомоморфизмов f_k

$$G_0 \xrightarrow{f_0} G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \longrightarrow \cdots .$$

точна, если $\operatorname{Ker} f_k = \operatorname{Im} f_{k-1}$.

Теорема 14.3 (Теорема Майера-Вьеториса)**.** *Пусть* $M = U_1 \cup U_2$*, где* U_1, U_2 *— открытые подмножества многообразия* M*. Тогда короткая точная последовательность коцепей*

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i^*} \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \xrightarrow{j^*} \Omega^k(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

где

$$i^*(\omega) = (\omega|_{U_1}, \omega|_{U_2}), \qquad j^*(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1 - \omega_2)|_{U_1 \cap U_2},$$

порождает длинную точную последовательность когомологий:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & H^i(M) & \xrightarrow{i^*} & H^i(U_1) \oplus H^i(U_2) & \xrightarrow{j^*} \\ \xrightarrow{j^*} & H^i(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & H^{i+1}(M) & \longrightarrow \cdots \end{array} \tag{14.7}$$

Доказательство. ШАГ 1. Проверим точность короткой последовательности:

- $\operatorname{Ker} i^* = 0$, так как форма ω однозначно определяется своими ограничениями на U_1 и U_2.

- Покажем, что $\operatorname{Im} i^* = \operatorname{Ker} j^*$. Очевидно, что $\operatorname{Im} i^* \subset \operatorname{Ker} j^*$. В другую сторону, если $j^*(\omega_1, \omega_2) = 0$, то формы ω_1 и ω_2 совпадают на $U_1 \cap U_2$, и их можно "склеить" в форму на всем M.

- Проверим, что j^* — сюръективно. Рассмотрим гладкое разбиение единицы $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, подчинённое покрытию $\{U_1, U_2\}$. Тогда

  $$\omega = (\lambda_1 \omega)|_{U_1} + (\lambda_2 \omega)|_{U_2}$$

  Формы удается корректно ограничить благодаря тому, что $\lambda_i = 0$ на $U_j \backslash (U_1 \cap U_2)$.

ШАГ 2. Построим по короткой точной последовательности длинную. Главное — построить отображение

$$H^k(U_1 \cap U_2) \to H^{k+1}(M).$$

- Рассмотрим замкнутую форму $\omega \in \Omega^k(U_1 \cap U_2)$.
- Пусть $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2)$ т.,ч.
$$j^*(\omega_1, \omega_2) = \omega.$$
- Рассмотрим $(d\omega_1, d\omega_2) \in \Omega^{k+1}(U_1) \oplus \Omega^{k+1}(U_2)$.
- Заметим, что $j^*(d\omega_1, d\omega_2) = 0$, так как $dj^* = j^*d$ и $d\omega = 0$.
- Так как $\operatorname{Ker} j^* = \operatorname{Im} i^*$, существует форма $\alpha \in \Omega^{k+1}(M)$ т.,ч.
$$i^*\alpha = (d\omega_1, d\omega_2).$$
- Классу $[\omega] \in H^{k+1}(M)$ соответствует класс $[\alpha] \in H^k(U_1 \cap U_2)$.

За построением удобно следить на следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
 & & \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "d"] & \Omega^k(U_1 \cap U_2) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^{k+1}(M) \arrow[r, "i^*"] & \Omega^{k+1}(U_1) \oplus \Omega^{k+1}(U_2) \arrow[r, "j^*"] & \Omega^{k+1}(U_1 \cap U_2) &
\end{tikzcd}$$

ШАГ 3. Проверка корректности построения и точности построенной последовательности — элементарное упражнение.

Теорема доказана. □

В силу точности последовательность Майера-Вьеториса позволяет вычислять когомологии многообразий, если их удается разбить на более простые куски, когомологии которых уже известны.

14.2.4 Когомологии простейших пространств

Задача 14.7. Вычислить группы когомологий следующих пространств:

(1) евклидова пространства $\mathbb{R}$,

(2) окружности S^1,

(3) двумерного тора $\mathbb{T}^2$,

(4) плоскости без k точек $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$.

Замечание 14.4. Некоторые из этих когомологий мы вычислим при помощи теоремы Майера-Вьеториса. Во всех случаях первые когомологии также можно посчитать по аналогии с Задачей 14.5.

Решение Задачи 14.7. (1) По лемме Пуанкаре получаем

$$H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad H^1(\mathbb{R}) = 0.$$

То же утверждение можно получить и непосредственно: первообразная любой 1-формы — её интеграл по прямой, а значит всякая 1-форма точна.

(2) Когомологии n**-мерной сферы** S^n (при $n > 0$):

$$H^k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } k = 0, n, \\ 0, & \text{если } k \neq 0. \end{cases}$$

При $n = 1$ утверждение элементарно. Рассмотрим накрытие

$$\pi\colon \mathbb{R} \to S^1, \qquad \pi(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi) \in S^1.$$

Первообразная прообраза $\pi^*\alpha$ для 1-формы α на S^1 будет 2π-периодичной функцией тогда и только тогда, когда $\int_{S^1} \alpha = 0$.

Замечание 14.5. В общем случае утверждение может быть доказано при помощи последовательности Майера-Вьеториса (сфера разбивается на дополнения к полюсам D_1^n и D_2^n). Последовательность (14.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow\ & H^{i-1}(D_1^n) \oplus H^{i-1}(D_2^n) \longrightarrow \\ \longrightarrow\ & H^{i-1}(D_1^n \cap D_2^n) \longrightarrow H^i(S^n) \longrightarrow \\ \longrightarrow\ & H^i(D_1^n) \oplus H^i(D_2^n) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Заметим, что $D_i^n \approx \mathbb{R}^n$ и $D_n^1 \cap D_2^n \sim S^{n-1}$ (сфера без полюсов гомотопотически эквивалентна пересечению полусфер). Поэтому $H^i(D_1^n) \oplus H^i(D_2^n) = 0$ при $i \geq 1$ и, так как последовательность точна,

$$H^i(S^n) = H^{i-1}(S^{n-1}), \qquad i \geq 2.$$

При $i = 1, n > 1$ получаем

$$H^1(S^n) = 0,$$

потому что последовательность

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(S^n) \longrightarrow\ & H^0(D_1^n) \oplus H^0(D_2^n) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^0(D_1^n \cap D_2^n) \longrightarrow\ & H^1(S^n) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(D_1^n) \oplus H^1(D_2^n) \longrightarrow\ & \cdots \end{aligned}$$

точна и имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

(3) Когомологии n-**мерного тора** $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}}_{n}$:

$$\dim H^k(\mathbb{T}^n) = C_n^k.$$

Если представить тор $\mathbb{T}^n$ как произведение n окружностей с координатами

$$\varphi^1, \dots \varphi^n \pmod{2\pi},$$

то *кольцо* когомологий порождается классами 1-когомологий

$$[d\varphi^1], \dots, [d\varphi^n].$$

Иными словами, базис k-когомологий задают классы форм

$$d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}, \qquad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$$

Указанные классы некогомологичны: по формуле Стокса интегралы когомологичных форм по любому (компактному) подмногообразию совпадают — в то же время формы

$$d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}$$

являются формами объема для разных k-мерных торов

$$\mathbb{T}(\varphi^{i_1}) \times \dots \times \mathbb{T}(\varphi^{i_k}).$$

То, что других классов когомологий нет, можно доказать при помощи последовательности Майера-Вьеториса.

Замечание 14.6. Тор $\mathbb{T}^n$ обладает структурой абелевой группы. Все формы $d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}$ инвариантны относительно этого действия.

Это общий факт: *когомологии компактной группы Ли совпадают с её эквивариантными когомологиями*. Это так, так как любую форму на компактной группе Ли можно усреднить по действию этой группы.

(4) Когомологии **многообразия, из которого выкинули точку** $M^n\setminus\{P\}$ (при $n \geq 1$).

$$H^k(M\setminus\{P\}) \cong \begin{cases} H^k(M), & \text{если } k \neq n-1, n, \\ 0, & \text{если } k = n, \\ H^{n-1}(M), & \text{если } k = n-1 \\ & \text{ и } M \text{ — компактно}, \\ H^{n-1}(M) \oplus \mathbb{R}, & \text{если } k = n-1 \\ & \text{ и } M \text{ — некомпактно}. \end{cases}$$

Достаточно рассмотреть последовательность Майера-Вьеториса для пары окрестностей U, V, где V — окрестность точки P, диффеоморфная диску D^n.

Задача 14.7 решена. □

Мы уже знаем, что старшие когомологии любого компактного ориентируемого многообразия равны $\mathbb{R}$. Докажем это непосредственно для случая двумерной сферы.

Задача 14.8. Доказать, что $H^2(S^2) = \mathbb{R}$.

Решение Задачи 14.8. Нам нужно доказать, что 2-форма ω точна, если и только если $\int_{S^2}\omega = 0$. Тогда, как и в случае вычисления когомологий окружности, всякая 2-форма однозначно разложится в сумму точной и формы с постоянным коэффициентом, а потому $H^2(S^2) = \mathbb{R}$.

Разобьем сферу на две половины S_- и S_+, пересекающиеся по экватору γ.

(1) Пусть ω точна: $\omega = d\alpha$. Тогда по формуле Стокса

$$\int_{S^2}\omega = \int_{S_-} d\alpha + \int_{S_+} d\alpha = \int_\gamma \alpha - \int_\gamma \alpha = 0.$$

(2) Обратно, пусть $\int_{S^2}\omega = 0$. Поскольку S_- и S_+ — диски, на них ω точна, то есть $\omega = d\beta_1$ на S_- и $\omega = d\beta_2$ на

S_+. При этом формы β_1 и β_2 определены на всей сфере, но эти равенства выполняются лишь на соответствующих половинках.

Рассмотрим их разность $\beta_1 - \beta_2$. На пересечении полусфер $d(\beta_1 - \beta_2) = \omega - \omega = 0$, то есть разность замкнута. В силу условия и формулы Стокса имеем

$$\int_\gamma \beta_1 - \beta_2 = \int_{S^2} \omega = 0.$$

Следовательно, эта разность точна: $\beta_1 - \beta_2 = df$.

Определим форму $\tilde{\beta}$ как

$$\tilde{\beta} = \begin{cases} \beta_1 + df & \text{на } S_-, \\ \beta_2 & \text{на } S_+. \end{cases}$$

Это гладкая форма на всей сфере, причем $d\tilde{\beta} = \omega$, что и требовалось доказать.

Задача 14.8 решена. □

14.3 Точные симплектические многообразия

Дифференциальная 2-форма ω **невырождена**, если её матрица (ω_{ij}) невырождена во всех точках M.

Задача 14.9. Пусть на многообразии M задана невырожденная 2-форма

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

Доказать, что

(1) размерность M четна

$$\dim M = 2n,$$

(2) справедлива формула

$$\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n} = \pm n! \sqrt{\det(\omega_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}. \qquad (14.8)$$

Указание. Воспользоваться теоремой о каноническом виде линейной симплектической структуры (это частный случай теоремы 3.3):

Теорема 14.4 (Линейная теорема Дарбу)**.** *Для любой невырожденной линейной 2-формы ω на конечномерном векторном пространстве V существуют такие линейные координаты $p^1, \ldots, p^n, q^1, \ldots, q^n$ на V, в которых*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp^i \wedge dq^i. \qquad (14.9)$$

Решение Задачи 14.9. Многообразие чётномерно, потому что по Теореме 14.4 только на чётномерных линейных пространствах существует невырожденная 2-форма. Остаётся доказать формулу (14.8).

Заметим, что $\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n}$ является $2n$-формой. По Задаче 3.14 выражение справа тоже локально можно рассматривать как $2n$-форму. Поэтому достаточно доказать равенство (14.8) в одной точке x в подходящих координатах.

Рассмотрим локальные координаты в окрестности точки x и линейной заменой координат приведём форму ω в точке x к виду (14.9). Таким образом остаётся доказать формулу (14.8) для формы (14.9), т.е. что

$$\underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n} = n! dp^1 \wedge dq^1 \wedge \cdots \wedge dp^n \wedge dq^n.$$

Действительно, все ω во внешнем произведении должны давать разные сомножители $dp^i \wedge dq^i$. Для 2-форм внешнее произведение коммутативно, поэтому будет $n!$ одинаковых слагаемых. Формула(14.8) доказана.

Задача 14.9 решена. $\square$

Определение 14.3. Симплектическое многообразие (M^{2n}, ω) — это многообразие M^{2n} с заданной на нём невырожденной замкнутой 2-формой ω.

Условия на форму ω можно записать так:

- $d\omega = 0$ (замкнутость),
- $\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n} \neq 0$ (невырожденность[2]).

Симплектическое многообразие (M^{2n}, ω) будем называть **точным**, если $\omega = d\alpha$.

Задача 14.10. Доказать, что не существует точных замкнутых (т.е. компактных и без границы) симплектических многообразий.

Указание. Воспользоваться формулой Стокса для формы объёма.

Решение Задачи 14.10. От противного. Пусть $\omega = d\alpha$, тогда

$$\omega \wedge \dots \wedge \omega = d(\alpha \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega).$$

- С одной стороны, $\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n}$ — невырожденная форма объёма (см. задачу 14.9). Поэтому

$$\int_{M^n} \omega \wedge \dots \wedge \omega > 0.$$

[2]Здесь неравенство нулю должно выполняться в каждой точке.

- С другой стороны, по формуле Стокса

$$\int_{M^n} \omega \wedge \cdots \wedge \omega = \int_{M^n} d(\alpha \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega) = 0,$$

  так как у многообразия M^n нет границы (см. Задачу 5.16).

Получаем противоречие. Задача 14.10 решена. $\square$

Замечание 14.7. Так как на компактном симплектическом многообразии (M, ω) форма объема задаёт нетривиальный класс когомологий и

$$0 \neq [\omega \wedge \cdots \wedge \omega] = [\omega] \smile \cdots \smile [\omega] = [\omega]^n,$$

мы получаем, что *все чётномерные когомологии компактного симплектического многообразия нетривиальны*

$$0 \neq [\omega]^k \in H^{2k}(M, \omega).$$

Отсюда, например, немедленно следует, что *среди сфер S^n только на двумерной сфере S^2 существует симплектическая структура.*

Приложение A

Соглашения и договорённости

В различных книгах и статьях в некоторых формулах могут использоваться другие знаки или коэффициенты.

(1) Операции **внешнего произведения** и альтернирования связаны следующим образом:

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = k!\,\mathrm{Alt}\left(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}\right) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) dx^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes dx^{i_{\sigma(k)}}.$$

Другими словами, значение внешнего произведения ковекторов α^i на наборе векторов v_j — это определитель $\det\left(\langle \alpha^i, v_j \rangle\right)$:

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k \left(v_1, \dots, v_k\right) = \begin{vmatrix} \langle \alpha^1, v_1 \rangle & \dots & \langle \alpha^1, v_k \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha^k, v_1 \rangle & \dots & \langle \alpha^k, v_k \rangle \end{vmatrix}.$$

(2) С другой стороны, **симметрическое произведение** определяется как

$$e^{i_1} \odot \dots \odot e^{i_k} = \mathrm{Sym}\left(e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_k}\right),$$

где

$$(\mathrm{Sym}\ T)_{i_1\dots i_k} = \sum_{\sigma\in S_k} \frac{1}{k!} T_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k)}}.$$

Как следствие

$$T_1 \odot T_2 = \mathrm{Sym}(T_1 \otimes T_2).$$

(3) **Коммутатор векторных полей** — это коммутатор соответствующих дифференциальных операторов:

$$[u,v](f) := u(v(f) - v(u(f)).$$

(4) **Ориентация** края ∂M согласована с ориентацией M следующим образом: если касательные вектора $v_1,\dots,v_{n-1}$ задают положительную ориентацию границы ∂M, то положительную ориентацию M задаёт базис

$$N, v_1, \dots, v_{n-1},$$

где N — вектор внешней нормали.

Как следствие, **формула Стокса** имеет вид

$$\int_{M^n} d\omega = \int_{\partial M^n} \omega.$$

(5) **Символы Кристоффеля** для аффинной связности ∇ в локальных координатах $(x^1,\dots,x^n)$ определяются как

$$\Gamma^i_{jk} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}\right)^i.$$

Как следствие, мы получаем следующие формулы:

(a) **Ковариантная производная** векторного поля имеет вид

$$(\nabla_X Y)^i = X^j \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} Y^k\right).$$

(b) **Тензор кручения** $T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ задаётся формулой

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

(6) **Тензор Римана** задаётся формулой

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Компоненты $R^i_{j,kl}$, заданные формулой

$$R(X,Y)Z = R^i_{j,kl} X^k Y^l Z^j \frac{\partial}{\partial x^i},$$

имеют вид

$$R^i_{j,kl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ks}\Gamma^s_{lj} - \Gamma^i_{ls}\Gamma^s_{kj}.$$

(a) **Тензор Риччи**

$$R_{ij} = R^s_{i,sj}.$$

(b) **Скалярная кривизна**

$$R = R^i_i = g^{ij} R_{ji}.$$

Литература

[1] Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. *Сборник задач по дифференциальной геометрии.* Москва, URSS. 2016.

[2] Скопенков А. Б. *Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах.* — М.: МЦНМО, 2008.

[3] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Курс дифференциальной геометрии и топологии.* Факториал Пресс, 2000. Издание 4, переработанное и дополненное. — Москва, изд-во УРСС, Издательская группа URSS. 2020 год.

[4] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.* Издание 2-е, исправленное и дополненное. Москва, URSS, ЛЕЛАНД, 2016.

[5] Иванов А. О., Тужилин А.А.: *Лекции по классической дифференциальной геометрии.* Логос, 2009.

[6] Иванов А. О., Тужилин А.А.: *Лекции по дифференциальной геометрии и топологии.* 2011, `http://dfgm.math.msu.su/files/lect2.pdf`

[7] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. *Современная геометрия. Методы и приложения.* — М.: Наука, 1986.

[8] Новиков С. П., Тайманов И. А. *Современные геометрические структуры и поля.* — М.: МЦНМО, 2014.

[9] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* — М.: Наука, 1981.

[10] Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.* — М.: Наука, 1987.

[11] Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия.* — М.: Наука, 1988.

[12] Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли.* — М.: Наука, 1982.

[13] Постников М. М. *Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия* — М.: Факториал, 1998.

[14] Арнольд В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — М.: Наука, 1971.

[15] Милнор Дж. *Теория Морса.* М., “Мир”, 1965.

[16] Ботт Р., Ту Л. В. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии.* — М.: Наука, 1989.

[17] Прасолов В. В. *Элементы теории гомологий.* — М.: МЦНМО, 2006.

[18] Хатчер А. *Алгебраическая топология.* — Москва: Издательство МЦНМО, 2011.

[19] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. *Курс гомотопической топологии.* — М.: Наука, 1989. Издание 2-е. В серии: Классический учебник МГУ. - Москва, изд-во URSS, ЛЕЛАНД, 2014.

[20] Фоменко А. Т. *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы.* — М., изд-во МГУ, 1983. — Издание 2-е, исправленное и дополненное. — Редакция журнала “Регулярная и хаотическая динамика”, Библиотека “Математика”, том 3. Ижевск, Ижевская республиканская типография, 1999. — В серии “Классический учебник МГУ”. Издание третье, исправленное и дополненное. Москва, изд-во ЛЕЛАНД, URSS, 2019.

[21] Фоменко А. Т. *Топологические вариационные задачи.* — В серии “Классический учебник МГУ”. Издание второе, исправленное и дополненное. Москва, изд-во ЛЕЛАНД, URSS, 2019.

И. К. Козлов, Д. А. Федосеев
Дифференциальная геометрия и тензорный анализ в задачах