Минимальная поверхность – поверхность нулевой средней кривизны, более обще, экстремаль функционала площади или объема. Интерес к минимальным поверхностям восходит к работам **Пуассона** и **Плато**. Согласно теореме Пуассона, средняя кривизна поверхности раздела двух физических сред, находящихся в равновесии, пропорциональна разности давлений в этих средах. Примерами таких поверхностей могут служить мыльные пузыри (разность давлений отлична от нуля, средняя кривизна постоянна и отлична от нуля) и мыльные пленки, затягивающие проволочные контуры (давления одинаковы, средняя кривизна равна нулю). Мыльные пленки впервые были подробно изучены Жозефом Плато.

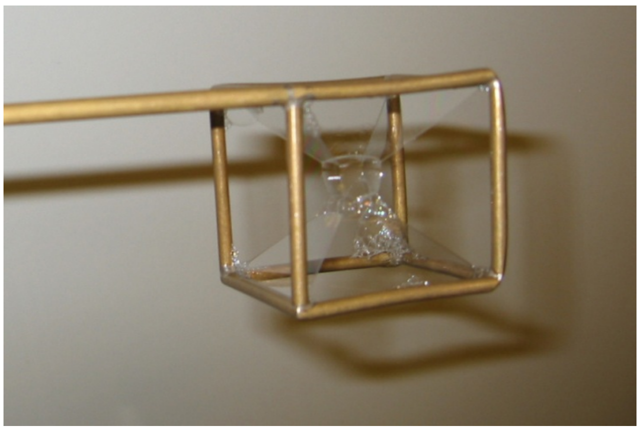

Рис.1. Мыльная пленка на сложном проволочном контуре. Содержит фрагменты поверхности нулевой средней кривизны, а также фрагменты пузырей.

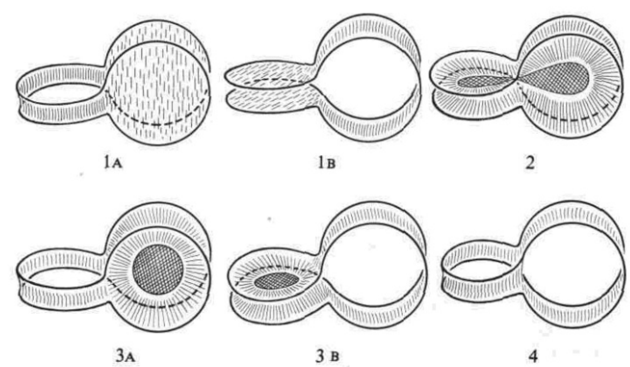

Рис. 2. Несколько разных минимальных поверхностей, затягивающих один и тот же проволочный контур (так называемый контур Дугласа).

С физической точки зрения ясно, что мыльная пленка стремится занять в пространстве положение, соответствующее экстремуму энергии, которая в данном случае пропорциональна площади поверхности. Поэтому, с математической точки зрения, мыльные пленки описываются как критические точки функционала площади. Минимальные поверхности – критические точки функционала площади, рассматриваемого на классе поверхностей, затягивающих один и тот же контур (граничная задача), относительно малых деформаций поверхности. Не сложно показать, что в этом случае условие экстремальности – это в точности условие равенства нулю средней кривизны поверхности.

Поиск поверхностей наименьшей площади (глобально минимальных поверхностей), затягивающих данный контур, – это существенно более сложная задача, известная как проблема Плато. Трудности, возникающие здесь, связаны с тем, что один и тот же контур могут затягивать совсем разные поверхности (рис. 2). В классическом случае двумерной поверхности, гомеоморфной диску в трехмерном пространстве, проблема Плато была успешно решена (т.е. было доказано существование решения) **Дж Дугласом**, получившим за это одну из двух первых Филдсовских премий.

В случае многомерной поверхности в многомерном пространстве ситуация оказалась существенно более сложной. Сложность задачи обусловлена, в частности, тем, что в процессе минимизации площади у многомерной поверхности могут возникать сложные особенности. Для решения многомерной проблемы Плато пришлось переосмыслить сами понятия поверхности, ее границы и площади. Соответствующие обобщения были получены Федерером и Флемингом (теория целочисленных потоков), Альмгреном (варифолды), Фоменко (спектральные многообразия и экстраординарные когомологии), Дао Чонг Тхи (мультиварифолды).

В последнее время также возрос интерес к одномерному аналогу проблемы Плато – задаче о поиске одномерного континуума (сети) наименьшей (или экстремальной) длины, соединяющего данное множество точек. Эта задача называется проблемой Штейнера и также имеет многочисленные приложения.

Рекомендованная литература.

А.Т.Фоменко, Вариационные методы в топологии. М.: Наука, 1982.

А.О. Иванов, А.А.Тужилин, Теория экстремальных сетей. Москва, Ижевск, ИКИ, 2003.