ГЕОМЕТРИЯ

А.О.Иванов, А.А.Тужилин, А.И.Шафаревич

Геометрия – раздел математики, изучающий пространственные отношения и формы, а также любые другие отношения и формы, сходные с пространственными.

В русском языке (как и во многих других) термин «геометрия» используется не только для соответствующей науки, но и для совокупности пространственных или аналогичных форм и свойств рассматриваемого объекта.

Современная геометрия подразделяется, как по основным объектам изучения, так и по используемым методам, на многие дисциплины, см. раздел Основные разделы геометрии, имеющие как фундаментальное, так и прикладное значение. Все их объединяет единый геометрический подход, состоящий в том, что внимание уделяется в первую очередь качественным характеристикам рассматриваемых объектов, а также в стремлении к наглядности на всех стадиях исследования, от постановки задачи, до формулировки результата. Геометрия имеет многочисленные приложения, см. раздел Место геометрии в современном мире, которые, в свою очередь, стимулируют ее развитие.

Геометрия пронизывает практически все сферы человеческой деятельности. С геометрией неразрывно связаны наши представления о красоте и гармонии, о строгом доказательстве, о безупречной логической структуре. Наконец, богатство человеческого зрения сильно увеличивает возможности анализа, позволяет обнаруживать сложные взаимосвязи, не очевидные без наглядного изображения исследуемых объектов. Вероятно, именно поэтому, решая сложную задачу, мы часто стремимся нарисовать картинку (схему, план, диаграмму). Другими словами, мы стремимся найти удачную визуализацию, построить геометрическую модель, т.е. свести задачу к геометрической.

Содержание.

1. Развитие геометрии.

Геометрия – один из древнейших видов человеческой деятельности. Ещё в доисторические времена люди изображали на стенах пещер схемы охоты, а также довольно сложные геометрические орнаменты. Позднее, с зарождением земледелия в Древнем Египте и Вавилоне, возникла необходимость делить земельные участки. По-видимому, именно тогда в геометрии стали формироваться зачатки науки: были открыты и осознаны некоторые общие закономерности и соотношения между такими геометрическими величинами как площадь и длина. Отметим, что по сути это были эмпирические факты, доказательства в те времена или отсутствовали вовсе, или находились на примитивном уровне.

Наконец, около двух с половиной тысяч лет назад, по свидетельству историков, геометрия была занесена из Египта в Грецию. Здесь геометрия не только получает свое современное название (слово «геометрия» происходит из греческого языка и означает «мерить землю»), но и постепенно складывается в стройную систему знаний, накапливаются новые факты, вырабатываются некоторые требования к доказательствам, возникают первые абстрактные понятия о геометрических фигурах и движениях. Появляются научные школы (самая известная из них – школа **Пифагора**). В результате происходит качественный скачок, и геометрия становится отдельной математической наукой, утверждения которой снабжаются доказательствами. Блестящим итогом греческого периода явились «Начала» **Евклида** (около 300 г. до н.э.). В изложении Евклида геометрия (точнее, элементарная геометрия) предстает перед нами, практически, в современном виде, как наука о простейших пространственных формах и отношениях, развиваемая исходя из явно сформулированных основных положений — аксиом и постулатов, в строгой логической последовательности. Также в Древней Греции возникает учение о конических сечениях (**Аполлоний**), зачатки тригонометрии (**Гиппарх**) и др.

В эпоху Возрождения интерес к геометрии обусловлен, главным образом, практическими потребностями. Развиваются картография (**Меркатор**), астрономия (**Кеплер**), теория перспективы (**Леонардо да Винчи**, **Ветрувий**). Однако, принципиально новый шаг был сделан только в начале XVII века **Рене Декартом** (*René Descartes*; *Renatus Cartesius*), который в своем фундаментальном труде «Рассуждение о методе…» (1637 г.) впервые использовал в геометрических исследованиях алгебраические методы. Для этого Декарт ввел в рассмотрение системы координат и представил кривые и поверхности как множества решений (алгебраических) уравнений. С помощью своего метода Декарту удалось открыть целый ряд новых фактов, что сделало его подход очень популярным. Говоря современным языком, Декарт создал аналитическую геометрию и вплотную подошел к созданию алгебраической геометрии. Также в XVII веке **Дезарг** (*Gérard Desargues*) и его ученик **Паскаль** (*Blaise Pascal*) заложили основы проективной геометрии и начертательной геометрии.

Метод координат Декарта позволил связать геометрию с быстро развивавшейся в то время алгеброй и зародившимся в работах **Лейбница** и **Ньютона** математическим анализом. В результате, в XVIII веке **Эйлер** (*Leonhard Euler*), **Монж** (*Gaspard Monge*) и **Понселе** (*Jean-Victor Poncelet*) изучают уже кривые и поверхности, заданные произвольными достаточно гладкими функциями (не обязательно алгебраическими). Так родилась дифференциальная геометрия, обязанная своим названием, главным образом, методам, основанным на использовании дифференциального исчисления. В этом качестве она достигает расцвета в работах **Гаусса** (*Johann Carl Friedrich Gauß*) и **Бонне** (*Pierre Ossian Bonnet*).

Следующий качественный скачок произошел уже в XIX веке. По-видимому, изучение поверхностей общего вида и сравнение полученных результатов с элементарной (евклидовой) геометрией привело геометров к пониманию возможности существования других, не евклидовых геометрий. Краеугольным камнем развития неевклидовых геометрий стал знаменитый «пятый постулат» Евклида, гласящий (в формулировке **Прокла**), что в плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную исходной. Начиная с глубокой древности и вплоть до XVIII века, время от времени предпринимались попытки вывести это утверждение из других аксиом евклидовой геометрии. Среди математиков, обращавшихся к этой теме, были **Птоломей** (II век) и **Прокл** (V век), **Ибн аль-Хайсам** и **Омар Хайам** (XI век), **Саккери** и **Лежандр** (XVIII век). Наконец, к началу XIX века стало возникать понимание того, что возможно построить содержательную теорию без пятого постулата. Честь открытия новой геометрии принадлежит **Н.И.Лобачевскому**, опубликовавшему в 1829 году работу «О началах геометрии», в которой утверждается невозможность доказательства пятого постулата и существование непротиворечивой теории, основанной на противоположном утверждении. К такому же выводу независимо пришел венгерский математик **Бояйи** (*János Bolyai*), опубликовавший свой труд в 1832 году. Позднее выяснилось, что **Гаусс** понял возможность существования неевклидовых геометрий несколько раньше, но не публиковал работ на эту тему. Созданная Лобачевским геометрия называется теперь геометрией Лобачевского.

Открытие **Лобачевского** и **Бояйи** стимулировало интерес к общей теории поверхностей. Становится понятно, что «воображаемая геометрия» Лобачевского реальна в искривленных пространствах. Понятие кривизны возникло в работах **Гаусса** по теории поверхностей в 20е годы XIX века. **Гаусс** изучает внутреннюю геометрию поверхности, т.е. геометрию, не зависящую от расположения поверхности в объемлющем пространстве и не меняющуюся при изгибании. Доказанная **Гауссом** Theorema Egregium («Блистательная Теорема») утверждает, что (гауссова) кривизна поверхности не меняется при ее изгибании. В частности, отсюда вытекает, что никакой кусок сферы не может быть уложен на плоскость без искажения расстояний, что важно, например, в картографии.

Теория поверхностей получила свое дальнейшее развитие в работах **Римана** (*Georg Friedrich Bernhard Riemann*), который заложил основы современной многомерной римановой геометрии («многомерной теории поверхностей»). Именно в работах **Римана** впервые появляются такие фундаментальные понятия как многообразие, риманова метрика, тензор кривизны. Он одним из первых осознал связь метрики, кривизны пространства и физических сил, чем предвосхитил создание общей теории относительности. **Риман** понимал, что геометрии микромира и макромира могут существенно отличаться от евклидовой, что хорошо согласуется с современными физическими данными. **Риман** также активно занимался комплексным анализом. В его работах впервые построены римановы поверхности многозначных комплексных функций.

В это же время зарождается топология. Первые результаты топологического характера были получены еще в XVIII веке (например, формула Эйлера для выпуклого многогранника, эйлеровы графы). Изучение многообразий, в частности, римановых поверхностей, привело к открытию таких их свойств, как связность, ориентируемость, которые не определяются ни метрикой, ни кривизной. Соображения топологического характера использовались уже в работах **Гаусса**, **Римана**, **Мебиуса**, **Жордана** и **Кантора**. Однако как самостоятельная наука топология сформировалась уже в XX веке, благодаря трудам **Хаусдорфа** (описал важный класс топологических пространств, называющихся сегодня хаусдорфовыми), **Куратовского** (определил общее топологическое пространство), **Пуанкаре** (заложил основы теории гомотопий и гомологий, ввел в рассмотрение фундаментальную группу и числа Бетти), **Александрова** и **Урысона** (создали современную теорию размерностей и теорию компактных пространств).

Таким образом, XIX век можно охарактеризовать как век расцвета геометрии. В результате было открыто много различных геометрий, которые, активно развиваясь, казалось все дальше отходили друг от друга. **Феликс Клейн** в своей знаменитой Эрлангенской программе (1872 год) предложил единый алгебраический подход, который сводит геометрические исследования к описанию инвариантов заранее заданной группы преобразований многообразия. Меняя группу преобразований, мы меняем рассматриваемую геометрию. Например, с этой точки зрения, евклидова геометрия отвечает группе движений евклидова пространства, проективная геометрия – группе проективных преобразований, топология – группе гомеоморфизмов и т.д. Отметим, что за свои работы по основаниям геометрии **Клейн** был удостоен премии Лобачевского (1897 год).

Значительный вклад в теорию инвариантов внес **Гильберт** (знаменитая Теорема об инвариантах). **Гильберт** занимался также проблемами формализации математики в целом, в частности, он создал современную аксиоматику евклидовой геометрии (фундаментальный труд «Основания геометрии», 1899 год). Кроме того, **Гильберт** подвел определенный итог развития геометрии (и математики в целом) к началу XX века. Выступая на II Международном математическом конгрессе (1900 год, Париж), **Гильберт** сформулировал 23 проблемы, которые, по его мнению, должны были стать наиболее актуальными для математиков грядущего века. Среди них, по крайней мере шесть геометрических задач, которые действительно во многом определили направления дальнейшего развития геометрии в XX веке.

Основные направления развития и разделы геометрии XX века мы опишем в следующем разделе. Здесь мы лишь подчеркнем, что геометрия продолжала и продолжает активно развиваться и занимает одно из ведущих мест среди математических наук. В качестве иллюстрации, приведем следующие любопытные факты. Как известно, на сегодняшний день у математиков имеется два аналога Нобелевской премии – премия Филдса и премия Абеля. Филдсовская премия ведет свою историю с 1936 года. Ее первые два лауреата (1936 год) геометры: **Ларс Альфорс** (теория римановых поверхностей) и **Джесси Дуглас** (решение проблемы Плато о минимальных поверхностях). С тех пор, среди филдсовских лауреатов *всегда были геометры*. Премия Абеля существенно моложе, ее начали присуждать в XXI веке. Всего на 2010 год присуждено 8 абелевских премий, из них три по геометрии (**Жан Пьер Серр** 2003, **Майкл Атья** и **Изадор Зингер** 2004, **Михаил Громов** 2009) и две за геометрические методы в других науках (**Питер Лакс** 2005, **Ленар Карлесон** 2006).

Одним из аналогов списка Гильберта в XXI веке стали так называемые задачи тысячелетия (*Millennium Prize Problems*), сформулированные институтом Клэя, основанным в 1998 году бизнесменом по имени **Лэндон Клэй** (*Landon T. Clay*) и математиком **Артуром Джеффи** (*Arthur Jaffe*) с целью пропаганды математических знаний. Из 7 задач тысячелетия три – по геометрии, а именно, гипотеза Ходжа (устройство классов когомологий проективного многообразия, реализуемых алгебраическими подмногообразиями), гипотеза Пуанкаре (о гомологической сфере, решена **Г.Перельманом**), гипотеза Берча и Свиннертона-Дайера (о рациональных точках эллиптических кривых). Также к геометрическим может быть отнесена задача, касающаяся исследования полей Янга-Миллса.

2. Основные разделы современной геометрии.

В современной Универсальной Десятичной Классификации (http://udk-codes.net/) имеется более 50 наименований, включающих в свое название слово «геометрия». Здесь мы перечислим лишь некоторые из них, отвечающие наиболее значимым и активно развивающимся на наш взгляд разделам геометрии.

- Алгебраическая геометрия изучает решения систем уравнений вида P=0, где P – многочлен от нескольких переменных. При этом исследуются как вопросы существования таких решений, так и свойства множества всех решений. Такие множества называются алгебраическими множествами или алгебраическими многообразиями. Основное отличие алгебраической геометрии от прочих разделов геометрии заключается в том, что она, кроме прочих геометрических методов, очень сильно использует идеи и методы абстрактной алгебры, особенно таких ее подразделов как коммутативная алгебра и гомологическая алгебра. Одним из наиболее известных достижений алгебраической геометрии является доказательство Великой Теоремы Ферма.
- Аналитическая геометрия, созданная **Декартом**, задумывалась им как алгебраическая геометрия в современном понимании. Сегодня аналитическая геометрия представляет собой подраздел алгебраической геометрии, изучающей решения систем линейных или квадратных уравнений на плоскости и в пространстве. Таким образом, объекты аналитической геометрии – это прямые, плоскости, а также кривые и поверхности второго порядка. Задача классификации этих объектов полностью решена, однако, аналитическая

геометрия не утратила своего значения. Она важна как для конкретных расчетов, так и для процесса обучения, поскольку содержит в себе основы таких важных методов, как метод координат и метод инвариантов.

- Выпуклая геометрия занимается изучением геометрии выпуклых множеств, прежде всего в евклидовых пространствах. Начиная с работ **Минковского** (*Hermann Minkowski*) и **Бруна** (*Hermann Brunn*) стало ясно, что свойство выпуклости позволяет строить самостоятельную теорию, без дополнительных предположений о дифференцируемости. Одним из наиболее ярких результатов выпуклой геометрии является теорема Минковского-Александрова о восстановлении выпуклого многогранника по свойствам его граней. Выпуклая геометрия имеет многочисленные приложения в оптимизационных задачах, прежде всего в выпуклом программировании и линейном программировании.
- Вычислительная геометрия занимается построением и изучением комбинаторных алгоритмов решения геометрических задач, а также геометрическим моделированием, т.е. исследованием дискретных моделей непрерывных кривых и поверхностей. К классическим результатам вычислительной геометрии относятся алгоритмы построения выпуклой оболочки, евклидового минимального остовного дерева, триангуляции Делоне, диаграммы Вороного, решения задачи о ближайших соседях, и др. Наиболее известные методы геометрического моделирования используют сплайны и кривые Безье. Вычислительная геометрия имеет многочисленные приложения, прежде всего в робототехнике, распознавании образов, машинной графике и пр.
- Геометрия банаховых и гильбертовых пространств изучает бесконечномерные аналоги нормированных и евклидовых пространств. Тесно связана с функциональным анализом, теорией меры, теорией вероятности, вариационным исчислением. Использует идеи выпуклого анализа, линейной алгебры, топологии и, конечно, теории функций. К наиболее ярким результатам относятся теорема Хана-Банаха о продолжении непрерывного линейного функционала, теорема **Банаха** о неподвижной точке, теорема Риса-Фреше об изоморфизме двойственного гильбертова пространства исходному.
- Геометрия групп и алгебр Ли изучает геометрию многообразий, снабженных дополнительной алгебраической структурой, а именно, структурой группы. При этом групповые операции предполагаются гладкими. Эта алгебраическая операция порождает на касательном пространстве в единице группы дополнительную алгебраическую структуру и превращает его в алгебру Ли. Названы по имени норвежского математика **Софуса Ли** (*Marius Sophus Lie*). Простейшими примерами групп Ли являются группы преобразований, такие как, скажем, группы движений евклидова пространства или пространства Лобачевского. Богатство внутренней структуры групп Ли позволяет с одной стороны, получать глубокие нетривиальные результаты, типа теоремы классификации компактных групп Ли, а с другой стороны проводить до конца многие конкретные вычисления. Группы Ли также часто появляются в приложениях, прежде всего в механике и физике.
- Геометрия динамических систем изучает качественные (т.е. геометрические и топологические) свойства динамических систем различного вида. Примерами таких свойств динамической системы могут служить количество положений равновесия или периодических решений, их устойчивость или неустойчивость, хаотичность или регулярность поведения решений, топология инвариантных многообразий системы или всего ее фазового пространства. Обычно при качественном исследовании динамических систем они рассматриваются с точностью до некоторой эквивалентности (траекторной, топологической, гладкой, и т. п.), и задача заключается в нахождении инвариантов, соответствующих данной эквивалентности (в частности, в нахождении полного набора

инвариантов, т.е. классификации систем с точностью до соответствующей эквивалентности).

- Геометрия чисел имеет дело геометрическими аспектами теории чисел. Типичной задачей геометрии чисел является расположение целочисленных векторов по отношению к выпуклым телам в многомерном пространстве. Впервые возникла в работах **Минковского**, доказавшего наличие целочисленной точки (целочисленного базиса) в симметричном теле достаточно большого объема. Тесно связана с функциональным анализом, диофантовыми и рациональными приближениями.
- Геометрия оптимизационных задач изучает геометрические объекты, являющиеся критическими точками тех или иных геометрических функционалов, таких как длина кривой, площадь поверхности, функционал энергии. К объектам такого типа относятся минимальные и гармонические поверхности, геодезические, экстремальные сети, минимальные заполнения и др. К наиболее ярким результатам этой теории относится решение проблемы Плато о минимальных поверхностях, доказательство существования трех замкнутых вложенных геодезических на многообразии, гомеоморфном двумерной сфере, классификация замкнутых локально минимальных сетей на поверхностях постоянной неотрицательной кривизны. Задачи такого типа имеют многочисленные приложения в физике, механике, химии, биологии, логистике, и т.п.
- Дискретная и комбинаторная геометрия объединяет геометрические задачи, в которых изучаются комбинаторные свойства дискретных геометрических объектов, таких как наборы точек, прямых, шаров и т.п. При этом, как правило, рассматриваются вопросы о взаимном расположении или об оптимальном расположении этих объектов в объемлющем пространстве. Среди наиболее известных задач такого типа задача Кеплера и Ньютона о максимальном возможном количестве сфер, касающейся данной, задача об оптимальной упаковке шаров в пространстве или в ограниченном объеме, проблема Тамма о сферическом коде. К дискретной геометрии также относят вопросы, связанные с тем или иным расположением графов в объемлющих пространствах. Сюда же можно отнести ряд задач вычислительной геометрии, связанных, например, с диаграммами Вороного, триангуляциями Делоне и пр.
- Дифференциальная геометрия изучает гладкие многообразия с теми или иными дополнительными структурами. Выделяется, прежде всего, своими методами, тесно связанными с математическим анализом, в частности, с дифференциальными свойствами функций. Развилась из классической теории кривых и поверхностей, созданной **Гауссом** и Монжем. Дифференциальная геометрия условно разделяется на локальную, т.е. изучающую свойства многообразия в малой окрестности точки, и глобальную (так называемую геометрию «в целом»), которая изучает связи между свойствами малых фрагментов многообразия и характеристиками всего многообразия. В некотором смысле, часть выделенных нами отдельных разделов геометрии, такие как риманова геометрия, симплектическая геометрия, можно рассматривать также как подразделы дифференциальной геометрии.
- Интегральная геометрия изучает задачи, обратные к классическому интегрированию, а именно, исследует возможность восстановления функции по набору значений ее интегралов по тем или иным подмножествам области определения исходной функции. Термин «интегральная геометрия» возник в 30е годы XX века в работах **Бляшке** и первоначально означал совсем другое: вычисление интегралов от функций по тем или иным подмножествам многообразий или, более общо, пространств с мерой. Современная интегральная геометрия тесно связана с теорией однородных пространств, теорией

расслоенных пространств, теорией представлений, теорией меры. Имеет многочисленные приложения, например, в компьютерной томографии.

- Комплексная геометрия изучает геометрию многообразий с комплексной структурой. Ее начальная ветвь – теория римановых поверхностей, созданная **Риманом** и изучающая свойства одномерных комплексных многообразий. Для комплексной геометрии характерны тесные связи с комплексным анализом и алгеброй. В последнее время обнаружились тесные связи комплексной геометрии (в частности, геометрии **пространств Тейхмюллера**) с современной теоретической физикой.
- Компьютерная геометрия занимается общим компьютерным моделированием, связанным с визуализацией геометрических моделей. Компьютерная геометрия включает в себя вычислительную геометрию, однако, не ограничивается ей. В рамках компьютерной геометрии создаются модели таких сложных объектов, как многообразия, неевклидовы геометрии, геодезический поток на поверхности, множество решений дифференциального уравнения и др. Компьютерная геометрия дает современному исследователю мощный инструмент для проведения разнообразных компьютерных экспериментов, в результате которых формируются или отвергаются те или иные гипотезы.
- Метрическая геометрия изучает геометрию классических объектов, таких как кривые и поверхности, с точки зрения естественно определенной на них функции расстояния. При этом свойства, определенные в дифференциальных терминах, такие как кривизна, получают интерпретацию в терминах некоторых соотношений на функцию расстояния. В результате, с одной стороны, удается перенести многие результаты дифференциальной геометрии на случай существенно более общих объектов без предположений о гладкости, что позволяет во многих случаях добиться полноты пространств рассматриваемых объектов. Как следствие, возникают неожиданные связи между далекими, на первый взгляд, математическими объектами. Например, свойства конечно порожденной дискретной группы удается описать в терминах геометрии пространства с так называемой манхеттенской метрикой (**Громов**). С другой стороны, такая интерпретация позволяет переосмыслить дифференциально-геометрические результаты, продвинуться в понимании таких сложных объектов как, скажем, тензор кривизны.
- Начертательная геометрия изучает пространственные фигуры с помощью их нескольких ортогональных проекций. Возникла в инженерном деле как основной инструмент для построения и чтения чертежей. Основы начертательной геометрии были заложены **Монжем**, преподававшим тогда в инженерной школе и выполнявшим заказ на расчет крепостных сооружений. В последнее время, в связи с развитием автоматизированных систем проектирования, роль начертательной геометрии все больше сводится к чисто образовательной.
- Некоммутативная геометрия изучает свойства некоммутативных аналогов алгебр функций на тех или иных классах пространств. Отправной точкой, которая вызвала эту идею к жизни, служит теорема Гельфанда-Наймарка, доказанная в начале 1940х годов, об эквивалентности категории компактных топологических пространств и коммутативных C^*-алгебр. Оказалось, что возникающие здесь алгебраические структуры остаются содержательными и после отказа от свойства коммутативности. В рамках некоммутативной геометрии объединились методы из различных отделов современной математики: топологии, дифференциальной геометрии, функционального анализа, теории меры, теории представлений и некоторых других. Идея некоммутативного обобщения является фундаментальной, поскольку, благодаря ей, не только оказались решены многие важнейшие задачи, но и упомянутые выше области взаимно обогатились новыми методами и результатами. Термин «некоммутативная геометрия», по всей видимости, возник благодаря монографии **А.Конна** «Некоммутативная геометрия».

- Риманова и финслерова геометрия изучает многообразия, на которых задана дополнительная структура, позволяющая вычислять длины касательных векторов. Основными примерами таких структур являются риманова и псевдориманова метрики (гладко зависящие от точки многообразия невырожденные симметричные билинейные формы на касательных пространствах) и финслерова структура (гладко зависящее от точки многообразия семейство норм на касательных пространствах, обладающее рядом дополнительных свойств). Основы римановой геометрии были заложены **Риманом**, который обобщил теорию поверхностей на многомерный случай, перенеся на него классические результаты **Гаусса**, **Бонне** и др. В рамках римановой геометрии удается получать ограничения на глобальную структуру многообразий в терминах его локальных характеристик, аналогичных кривизне двумерной поверхности (секционная кривизна, кривизна Риччи, кривизна Римана).
- Симплектическая геометрия изучает симплектические многообразия, т.е. многообразия, на которых задана замкнутая невырожденная 2-форма (симплектическая структура). Фактически, симплектическая геометрия как отдельный раздел геометрии возникла около 200 лет назад в качестве удобного языка для задач классической механики. И сейчас одним из основных стимулов изучения симплектических многообразий является то, что их естественно рассматривать как фазовые пространства динамических систем, описывающих различные задачи механики, математической физики, геометрии. Однако начиная с 1970х-80х годов (после работ **В.И.Арнольда**, **А.Вайнштейна** (A.Weinstein), **М.Л.Громова**) симплектическая геометрия превратилась в отдельную независимую область математики, развитие которой стимулируется тесными связями с математической физикой, маломерной топологией, теорией динамических систем, алгебраической геометрией, комплексным анализом.
- Стохастическая геометрия является разделом стохастического анализа. Она изучает случайные процессы в бесконечномерных гильбертовых пространствах и на гладких гильбертовых многообразиях, описываемые стохастическими уравнениями Ито. Исследуются свойства гладкости переходных вероятностей таких процессов, вводится конструкция квазиинвариантных мер на бесконечномерных группах Ли. Основы стохастической дифференциальной геометрии заложены **Ю.Л.Далецким** и **Я.И.Белопольской** в 70-х годах XX века
- Фрактальная геометрия изучает так называемые фракталы (самоподобные множества). Первые примеры таких множеств с необычными свойствами появились в XIX веке (например, множество Кантора). Термин «фрактал» был введён **Б.Мандельбротом** в 1975 году и получил широкую популярность с выходом в 1977 году его книги «Фрактальная геометрия природы». Однако «фрактал» (лат. *fractus* — дробленый, сломанный, разбитый) не является математическим термином и не имеет общепринятого строгого математического определения. Фракталом называется сложная геометрическая фигура, обладающая свойством самоподобия, то есть составленная из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. В более широком смысле, под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность (в смысле **Минковского** или **Хаусдорфа**), либо метрическую размерность, строго большую топологической. В современной фрактальной геометрии изучаются также случайные фракталы. Фрактальная геометрия имеет глубокие связи с теорией чисел и современной физикой

Все эти очень разные области знания объединяют *геометрические методы*.

3. Геометрические методы исследования.

Важнейшей особенностью геометрических объектов является их инвариантность (независимость от системы координат). В этом отношении геометрия формирует особую, характерную для нее картину мира, основанную в первую очередь не на формулах и вычислениях, а на качественном анализе; для такой картины характерно сочетание полной математической строгости с широким использованием интуиции. Перечислим некоторые, на наш взгляд фундаментальные, методы исследования геометрических объектов.

- Определение и описание свойств пространства однородных объектов (точек), снабженное той или иной дополнительной структурой. Например, описание геометрии евклидовых пространств, регулярных поверхностей, гладких многообразий (в частности, многообразий с различными структурами – римановой, псевдоримановой, комплексной, алгебраической, симплектической, контактной, финслеровой келеровой и т.д.), гильбертовых пространств, групп Ли, общих топологических пространств, клеточных комплексов и др.
- Один из центральных методов геометрии (и математики вообще) – метод координатизации. Для исследования геометрического объекта вводится система координат, позволяющая описывать его свойства при помощи аналитического или алгебраического аппарата. Сами термины «аналитическая геометрия», «дифференциальная геометрия», «алгебраическая геометрия», «симплектическая геометрия» связаны, в частности, с теми вариантами метода координат, которые применяются в этих разделах геометрии. При таком подходе наличие различных геометрических структур отражается в различных классах координатных систем и замен координат (скажем, в симплектической геометрии рассматриваются симплектические координаты и канонические преобразования, в комплексной геометрии – аналитические координаты и голоморфные замены и т.д.). Поскольку сами геометрические объекты по своей сути инвариантны, важная часть координатного метода состоит в описании того, как меняются те или иные формулы при заменах координат.
- Важнейшая характеристика геометрического объекта – набор его «симметрий», т.е. группа преобразований, сохраняющая его свойства. Так, с евклидовым пространством связана группа ортогональных операторов, с гладким многообразием – группа диффеоморфизмов, с римановым многообразием – группа изометрий и т.д. Изучение группы преобразований позволяет получать важную информацию о самом объекте; например, при изучении однородных пространств свойства группы преобразований играют ключевую роль.
- Метрический подход в геометрии связан с введением аналога расстояния между точками и исследовании свойств этого расстояния (общая теория метрических пространств, геометрия банаховых пространств и свойства операторов в них, полунормы и пространства Фреше и т.д.).
- Аксиоматический метод применяется в геометрии с о времен ее возникновения. Он состоит в том, что геометрические структуры описываются при помощи списка аксиом, из которых впоследствии выводятся остальные свойства. Например, евклидова геометрия определяется в линейном пространстве (т.е. множестве с операциями сложения и умножения на число, которые удовлетворяют определенному набору аксиом) со скалярным произведением (функцией от пары векторов, также удовлетворяющей некоторым аксиомам). Другой пример: аффинная связность на многообразии определяется как операция дифференцирования векторных полей, удовлетворяющее аксиомам линейности и правилу Лейбница.

- В последние десятилетия активно развивается компьютерное геометрическое моделирование. Разработано много программ, позволяющих визуализировать геометрические объекты, возникающие при моделировании самых разных процессов, наглядно демонстрировать их свойства и ставить компьютерные эксперименты с целью проверки математических, физических, биологических, экономических и других гипотез. Более того, компьютерное моделирование используется и для доказательств математических теорем (впрочем, такие доказательства неизменно вызывают сомнения у многих математиков); известные примеры – доказательство **Аппелем** и **Хакеном** в 1976 году гипотезы о четырех красках и доказательство в 1989 году **Лэмом** несуществования конечной проективной плоскости 10-го порядка.

4. Место геометрии в современном мире.

Математика. Геометрический взгляд на мир пронизывает всю современную математику; в большинстве ее разделов используется геометрический язык и применяются геометрические методы. Часто проникновение геометрических идей приводит к созданию новых теорий, постановке новых задач и к неожиданным результатам: в частности, геометрические идеи в теории обыкновенных дифференциальных уравнений привели к созданию качественной теории и теории динамических систем; в теории уравнений в частных производных – к микролокальному анализу, теории нестандартных характеристик, теории солитонов и полей Янга-Миллса; в вариационном исчислении – к геометрическим вариационным задачам, теории геодезических потоков.

Естественные науки. Современная физика теснейшим образом связана с геометрией. Классическая механика использует язык, методы и результаты римановой и симплектической геометрии, оптика и термодинамика – симплектической и контактной геометрии, в квантовой механике используется комплексная геометрия, симплектическая геометрия и геометрия гильбертовых пространств, в квантовой теории поля – дифференциальная, комплексная, алгебраическая и симплектическая геометрия. Практически во всех разделах теоретической физики так или иначе встречаются геометрические идеи, методы или конструкции. Отметим, что физические идеи, в свою очередь, проявляются в геометрии; часто анализ физических теорий давал толчок развитию геометрических конструкций (например, симплектическая и контактная геометрия напрямую связаны с физикой).

География всегда использовала геометрический язык; в частности, идея описания поверхности с помощью карт и координат тесно связывает эти науки. Сферическая геометрия используется при разработке маршрутов кораблей и самолетов.

Геометрия применяется в химии и молекулярной биологии; сложные соединения (например, белки) обладают богатой геометрической структурой, которая, как оказалось, существенно влияет на химические и биологические свойства рассматриваемого вещества; геометрия применяется также при описании энергетических и квантовых свойств молекул.

Техника. Современная техника активно использует геометрические методы и результаты. Компьютерная геометрия применяется при проектировании автомобилей, самолетов, мостов и многих других технических объектов; геометрические задачи возникают при огранке драгоценных камней, в вопросах мобильной навигации и т.д. Широко применяются геометрические методы распознавания образов, также современные шифры и коды зачастую основаны на алгебраических свойствах эллиптических кривых.

Медицина. Задача восстановления картины внутренних органов по их проекциям, видным на снимках (медицинская томография) имеет геометрический характер и связана с интегральной геометрией (описанием свойств функции на многообразии по интегралам от нее по заданным семействам подмногообразий). В медицине применяются геометрические модели различных частей скелета (например, движущейся челюсти при протезировании зубов, коленных и локтевых суставов и др.). Развитие современных 3D технологий сделало возможным создание индивидуальных протезов костей, созданных по результатам 3D-сканирования пациента. Также большую роль в современной медицине играют компьютерные модели отдельных органов и их систем. Например, при разработке серьезных операций на сердце часто используется его геометрическая компьютерная модель.

Искусство. Геометрические образы издавна использовались в изобразительном искусстве и архитектуре. Геометрическая наука о перспективе встречается у **Эсхила** и **Демокрита** (хотя, конечно, ее элементы использовались гораздо раньше – например, при строительстве египетских храмов и пирамид). В дальнейшем этот раздел геометрии развивался многими художниками и учеными (в частности, большой вклад в его развитие внесли **Леонардо да Винчи**, **Дюрер**, **Дезарг**, **Монж** и другие). Сейчас геометрия перспективы и начертательная геометрия – стандартные инструменты художников, архитекторов и дизайнеров. Скажем, крыша аэровокзала в Шарм-аль-Шейхе (Египет) представляет собой модель минимальной поверхности. Геометрия важна и в музыке: форма музыкального инструмента, концертного зала, храма – это результат тонких геометрических и акустических расчетов. Наконец, 3D технологии, в основе которых лежит проективная и вычислительная геометрия, все чаще используется в кино и телевидении, поднимая их на следующую ступень развития.

Гуманитарные науки. Геометрия применяется и в гуманитарных науках: экономике (транспортные задачи, задачи оптимизации, геометрические модели производства, применение свойств непрерывных отображений к нахождению экономического равновесия); лингвистике (геометрия пространств слов) и др.

Религия. Сакральная геометрия – система религиозных представлений о формах и пространстве мира, отражающих его пропорциональность и гармонию – присутствует в большинстве мировых религий. Она проявляется в священной архитектуре, живописи и музыке, в иконографии. Геометрические формы используются практически всеми религиями как священные символы.

Образование. В современном школьном образовании геометрия играет исключительную роль. Именно на уроках геометрии дети узнают, что такое строгое доказательство, учатся логически мыслить и получать из предпосылок обоснованные выводы. Вместе с тем школьная геометрия демонстрирует наглядную (т.е. инвариантную) математику, основанную не столько на формулах, сколько на детальном изучении качественных свойств геометрических объектов. Такое соединение строгости с наглядностью лежит в основе естественно-научной картины мира; тем самым, изучение геометрии – важнейший этап во всем научном образовании.

5. Литература.

Б.А. Дубровин, С.П.Новиков, А.Т. Фоменко, Современная геометрия, в 2х т., М.: Наука, 1979, 1984.

П.К.Рашевский, Курс дифференциальной геометрии, М.:Гостехиздат,1956.

А. Т. Фоменко. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. — Москва, МГУ, 1988.

М.М.Постников, Лекции по геометрии, семестры 1-5, М.: Наука, 1979, 1986, 1987, 1988, 1998.

Стройк Д.Я., Краткий очерк истории математики, пер. с нем., 2 изд., М., 1969; 4 изд. М., 1984.

Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, пер. с нем., М.- Л., 1937.