

# Лекция 1. Введение.

*В пакет Mathematica встроено подробное описание (help). Чтобы в него попасть, нажмите F1 или войдите через меню Help/Documentation Center.*

## Элементарные операции для работы с Mathematica

### ■ Ввод выражения

После запуска программы, на экране появляется несколько независимых окон. Вдоль верхней части экрана расположено меню. Слева - рабочее окно. Можно открыть много рабочих окон, выполнив в меню команду File/New/Notebook(.nb). Рабочее окно называется Notebook.

Если в рабочее окно ввести произвольный символ, то этот символ отобразится в окне, а справа появится вертикальная **скобка**, ограничивающая текущее **рабочее поле**. При дальнейшем вводе новые символы будут также отображаться в рабочем поле. Если произойдет переход на следующую строку, правая скобка расширится. Эта скобка указывает на независимую область, в которой можно расположить команды языка и одновременно их выполнить. Область, ограниченная скобкой, называется **клеткой** (Cell). Если стать на последней строке клетки и нажать на стрелочку вниз, или же стать первой строке клетки и нажать на стрелочку вверх, то курсор превратится в вертикальную линию, расположенную рядом с клеткой. Если опять ввести символ, то появится новая клетка, в которую также можно вводить текст. Кроме того, переходить от клетки к клетке, а также позиционировать курсор между клетками можно с помощью мышки.

В клетки можно вводить произвольные **выражения** (Expression) и **вычислять** (Evaluate) их. Для вычисления нужно, находясь внутри клетки, выполнить команду Shift+Enter. При этом выполняются все команды из текущей клетки. Поместите курсор внутрь следующей клетки, в которой написано 2+2, и выполните Shift+Enter.

```
In[1]:= 2 + 2
Out[1]= 4

In[2]:= 2 + 2
         2 - 3
Out[2]= 4

Out[3]= - 1
```

После выполнения команды Shift+Enter слева от выражения появится In[1], нумерующее последовательно выполняющиеся команды. Кроме того, возникнет еще одна клетка с результатом, который будет помечен Out[1]. Заметим, что клетка ввода и вывода объединены в одну большую клетку. Вы можете манипулировать результатом многими способами. Один из них - использование символа %, которому присвоен результат последней выполненной команды; последовательности %% - результат выполнения предпоследней команды; %%% - предпредпоследней и т.д. , а также %n - результат выполнения команды с номером n.

In[4]:=

%

Out[4]=

- 1

In[5]:=

%%

Out[5]=

- 1

Объекты, которыми оперирует Mathematica :

- 1) числа (Numbers), например, 5, 2/3, 2.35
- 2) символы (Symbols), например, x, abc5
- 3) строки (Strings), например, "это - строка"
- 4) выражения (Expressions), например, (x + 2)/(y - 2.3)

### Замечание.

Имеется несколько способов записи одного и того же выражения, например,

$$(1 + 2. - 5.77*3.8)/((3.2 - 0.1)^(1/2) + 6^2)$$

$$\frac{1+2.-5.77 \times 3.8}{\sqrt{3.2-0.1} + 6^2}$$

Times[

Plus[1, 2.`, Times[-1, Times[5.77`, 3.8`]]],

Power[Plus[Power[Plus[3.2`, -0.1`], Times[1, Power[2, -1]]], Power[6, 2]], -1]

]

В последнем случае Times[x,y] обозначает произведение x и y, Plus[x,y] - их сумму, Power[x,y] - x в степени y

### ■ Три типа визуализации выражений:

(станьте в клетку, вид которой хотите изменить, и выполните соответствующую команду)

#### □ InputForm (CtrlShift+i):

In[6]:=

$$(1 + 2. - 5.77 * 3.8) / (\text{Sqrt}[3.2 - 0.1] + 6^2)$$

Out[6]=

- 0.501209

#### □ StandardForm (CtrlShift+n):

In[7]:=

$$\frac{1 + 2. - 5.77 \times 3.8}{\sqrt{3.2 - 0.1} + 6^2}$$

Out[7]=

- 0.501209

### ▣ TraditionalForm (CtrlShift + t) :

```
In[8]:= 
$$\frac{1 + 2. - 5.77 \times 3.8}{\sqrt{3.2 - 0.1} + 6^2}$$

Out[8]:= -0.501209
```

### ■ Ввод с клавиатуры в StandardForm : использование Ctrl, Esc, Palletes

Ctrl + / – дробь  $\frac{a}{b}$ ; Ctrl + 2 – радикал  $\sqrt{x}$ ; Ctrl + ^ – верхний индекс  $x^2$ ,

Ctrl + \_ – нижний индекс  $x_2$  Esc pi Esc – число  $\pi$ ; Esc ee Esc – число  $e$ ; Esc ii Esc – мнимая единица  $i$ ;

Esc int Esc – интеграл  $\int$ ; Esc sum Esc – сумма  $\sum$ ; Esc a Esc – альфа  $\alpha$ ; Esc g Esc – гамма  $\gamma$  ...

### ■ Строчные (маленькие) и прописные (заглавные, большие) буквы

Mathematica различает строчные и прописные буквы. Встроенные функции и символы всегда начинаются с прописной буквы (полезно обращать внимание на цвет того, что Вы вводите!!!!), поэтому пользовательские символы и выражения рекомендуется начинать со строчных букв.

### ▣ Примеры

```
In[9]:= Pi
E
I
Out[9]=  $\pi$ 

Out[10]=  $e$ 

Out[11]=  $i$ 

In[12]:= pi
e
i
Out[12]=  $\pi$ 

Out[13]=  $e$ 

Out[14]=  $i$ 
```

Чтобы вывести соответствующее десятичное представление для выражения expr, нужно выполнить команду N[expr] или N[expr,n], где n - число цифр в десятичном представлении, например

In[15]:=

```

N[Pi]
N[Pi, 10]
N[100 Pi, 10]
N[E]
N[I]

```

Out[15]=

3.14159

Out[16]=

3.141592654

Out[17]=

314.1592654

Out[18]=

2.71828

Out[19]=

0. + 1. i

- **Присвоение значений командой Set или "=" (создание правила замены символа на присвоенное значение) и снятие присвоений командой Unset или "=."**

In[20]:=

**x = 2**

Out[20]=

2

In[21]:=

**x**

Out[21]=

2

In[22]:=

**x = .**

In[23]:=

**x**

Out[23]=

x

In[24]:=

```

Set[x, 17]
x
Unset[x]
x

```

Out[24]=

17

Out[25]=

17

Out[27]=

x

Встроенным символам переписать нельзя

In[28]:= **Pi = 10**

Set::wrsym : Symbol  $\pi$  is Protected. >>

Out[28]= 10

In[29]:= **Pi**  
**N[Pi]**

Out[29]=  $\pi$

Out[30]= 3.14159

In[31]:= **Pi = .**

Unset::wrsym : Symbol  $\pi$  is Protected. >>

Out[31]= \$Failed

In[32]:= **Pi**  
**N[Pi]**

Out[32]=  $\pi$

Out[33]= 3.14159

## ■ Вычисление

Основная работа *Mathematica* - вычисление (Evaluation) выражений. Чтобы вычислить выражение, поместите курсор внутрь содержащей его клетки и выполните команду Shift+Enter)

In[34]:= **(1 + 2. - 5.77 \* 3.8) / ((3.2 - 0.1) ^ (1 / 2) + 6 ^ 2)**

Out[34]= -0.501209

Арифметические операции (+, -, \*, /, ^ ); "\*" можно не писать (вместо нее - пробел, который *Mathematica* в некоторых случаях автоматически заменяет соответствующим значком)

In[35]:= **a b 2 × 3 c d + x y - 2 z**

Out[35]= 6 a b c d + x y - 2 z

Не забывая ставить пробел между перемножаемыми переменными!

## Функции и выражения

### ■ Встроенные функции:

In[36]:=

```
Sin[π / 2]
```

Out[36]=

1

### ■ Создание функций и снятия присвоения

In[37]:=

```
f[x_] := x2
```

In[38]:=

```
f[2]
f[a]
f[Sin[x]] + f[Cos[x]]
```

Out[38]=

4

Out[39]=

a<sup>2</sup>

Out[40]=

 $\text{Cos}[x]^2 + \text{Sin}[x]^2$ 

Значок "!=" называется **SetDelayed** и он отличается от значка "=" **Set** тем, как осуществляется вычисление присвоенного выражения. **Set** вычисляет правую часть rhs формулы lhs = rhs еще до присвоения и результат присваивает левой части lhs; **SetDelayed** присваивает левой части lhs невычисленную правую часть rhs, и при каждом вычислении левой части присвоенная правая часть вычисляется заново с использованием текущих значений связанных с rhs объектов

Для примера используем функцию **Random[]**, которая выдает случайное вещественное число в пределах между 0 и 1. В первом примере перед присвоением вычисляется некоторое случайное число и результат присваивается переменной z, поэтому при каждом появлении z заменяется на одно и то же присвоенное число. Во втором примере z присваивается неотработанная функция **Random[]**, и при каждом появлении z эта функция вычисляется каждый раз заново, чем и объясняется разные результаты вычисления z.

In[41]:=

```
z = Random[]
z
z
```

Out[41]=

0.798765

Out[42]=

0.798765

Out[43]=

0.798765

z присвоено какое-то случайное значение

```
In[44]:= z := Random[]
z
z
```

```
Out[45]= 0.711859
```

```
Out[46]= 0.228175
```

Каждый раз, когда Вы используете `z`, этой переменной присваивается новое случайное значение.

```
In[47]:= z = .
```

Еще один пример.

```
In[48]:= y = 2
f[y_] = y3
g[y_] := y3
f[w]
g[w]
```

```
Out[48]= 2
```

```
Out[49]= 8
```

```
Out[51]= 8
```

```
Out[52]= w3
```

```
In[53]:= f[y_] = y3
```

```
Out[53]= 8
```

```
In[54]:= g[y_] := y3
```

```
In[55]:= f[w]
g[w]
```

```
Out[55]= 8
```

```
Out[56]= w3
```

```
In[57]:= y = .
```

Чтобы очистить сделанное присвоение вида `f[x]=rhs` или `f[x]:=rhs`, выполните команду `Clear[ f ]`

```
In[58]:= Clear[f]
Clear[g]
Clear[f, g]
```

In[61]:=

```
f[x]
g[x]
```

Out[61]=

```
f[x]
```

Out[62]=

```
g[x]
```

Для одновременной очистки нескольких присвоений, сделанных для  $f$ ,  $g$ , ... можно использовать `Clear[f, g, ...]`

In[63]:=

```
f[x_] := x2
g[x_] := x3
f[x]
g[x]
```

Out[65]=

```
x2
```

Out[66]=

```
x3
```

In[67]:=

```
Clear[f, g]
f[x]
g[x]
```

Out[68]=

```
f[x]
```

Out[69]=

```
g[x]
```

### ■ Некоторые другие способы записи выражений $f[x]$

In[70]:=

```
f[x_] := x2
g[x_, y_] := x y2
```

В приведенных ниже первых трех примерах вычисляется значение функции  $f$  на переменной  $x = 2$ ; в четвертом примере вычисляется значение функции  $g$  на переменных  $x = 2$  и  $y = 3$

In[72]:=

```
f[2] (* Standard форма *)
f@2 (* Prefix форма *)
2 // f (* Postfix форма *)
2~g~3 (* Infix форма *)
```

Out[72]=

```
4
```

Out[73]=

```
4
```

Out[74]=

```
4
```

Out[75]=

```
18
```



In[76]:=

```
Clear[f]
Clear[g]
```

■ **Задание функции непосредственно, без присвоения и без имени (безымянные функции, Pure functions)**

Это один из очень важных "трюков" или "приемов", которые часто бывают полезными и упрощают код.

В приводимых ниже примерах значок "#" используется для обозначения единственной переменной задаваемой функции, значки "#1", "#2", ... - соответственно первая, вторая и т.д. переменные для функции многих переменных; значок "&" ставится после описания функции и обозначает, что стоящее слева от него выражение надо рассматривать как определение функции, а все вместе с ним - как саму функцию

In[78]:=

```
(#^2 + 2) & [x]
```

Out[78]=

 $2 + x^2$ 

In[79]:=

```
(#1^2 + #2^4) & [x, y]
```

Out[79]=

 $x^2 + y^4$ 

In[80]:=

```
f = (#^2 + 2) &
```

Out[80]=

 $\#1^2 + 2 \&$ 

In[81]:=

```
f[x]
```

Out[81]=

 $2 + x^2$ 

In[82]:=

```
Clear[f]
```

In[83]:=

```
f = (#1^2 + #2^4) &;
f[2, 3]
f[1, 1]
```

Out[84]=

85

Out[85]=

2

In[86]:=

```
f[x, y]
```

Out[86]=

 $x^2 + y^4$ 

In[87]:=

```
Clear[f]
```

### ■ Подавление вывода результата и расположение команд внутри одной клетки

Если после команды ставится точка с запятой ";", то вывод результата не происходит

In[88]=

`2 + 2`

Out[88]=

4

In[89]=

`2 + 2;`

На одной строке можно писать сразу несколько команд, разделяя их ";" (выводы результатов этих команд производиться не будут); можно писать одну команду сразу на нескольких строках

In[90]=

`f[x_] := x2; g[x_, y_] := x2 + y3; h[x_, y_] := 3 x y;`

In[91]=

`f[a]  
g[b, c]  
h[d, e]`

Out[91]=

 $a^2$ 

Out[92]=

 $b^2 + c^3$ 

Out[93]=

3 d e

In[94]=

`Clear[f, g, h]`

### ■ Преобразование выражений, упрощение

In[95]=

`(x + y)5`

Out[95]=

 $(x + y)^5$ 

In[96]=

`(x + y)5 // Expand`

Out[96]=

 $x^5 + 5 x^4 y + 10 x^3 y^2 + 10 x^2 y^3 + 5 x y^4 + y^5$ 

In[97]=

 `$\frac{1}{x} + \frac{x - 2}{x^2 + 3}$` 

Out[97]=

 $\frac{1}{x} + \frac{-2 + x}{3 + x^2}$ 

In[98]=

 `$8 x^2 - 6 x^3 + x^4 - 2 x^2 y + x^3 y - 8 y^3 + 6 x y^3 - x^2 y^3 + 2 y^4 - x y^4$  // Factor`

Out[98]=

 $(-2 + x) (-4 + x + y) (x^2 - y^3)$

In[99]:=

$$\text{Apart}\left[\frac{3 - 2x + 2x^2}{x(3 + x^2)}\right]$$

Out[99]=

$$\frac{1}{x} + \frac{-2 + x}{3 + x^2}$$

In[100]:=

$$\frac{1}{x} + \frac{x - 2}{x^2 + 3} \text{ // Together}$$

Out[100]=

$$\frac{3 - 2x + 2x^2}{x(3 + x^2)}$$

In[101]:=

$$\text{Sin}[x]^2 + \text{Cos}[x]^2$$

Out[101]=

$$\text{Cos}[x]^2 + \text{Sin}[x]^2$$

In[102]:=

$$\text{Sin}[x]^2 + \text{Cos}[x]^2 \text{ // Simplify}$$

Out[102]=

1

In[103]:=

$$\text{Sin}[x]^2 + \text{Cos}[x]^2 \text{ // Simplify}$$

Out[103]=

1

## Списки List[x,y,...] или {x,y,...}, матрицы, операции, векторная алгебра

### ■ Примеры списков и доступ к элементам

In[104]:=

```
{1, 2, 3}
{1, Pi, r}
{2, "я - элемент списка", Sin[y]}
{x, {a, b}, z}
{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}}
```

Out[104]=

```
{1, 2, 3}
```

Out[105]=

```
{1, π, r}
```

Out[106]=

```
{2, я - элемент списка, Sin[y]}
```

Out[107]=

```
{x, {a, b}, z}
```

Out[108]=

```
{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}}
```

Доступ к элементам списка (команда Part или [[ ...]])

In[109]:=

```
{4, 5, 6}[[3]]
Part[{x, w, b}, 3]
```

Out[109]=

6

Out[110]=

b

In[111]:=

```
{x, {a, b}, z}[[2, 1]]
Part[{x, {a, b}, z}, 2, 1]
{x, {a, b}, z}[[{2, 1}]]
```

Out[111]=

a

Out[112]=

a

Out[113]=

```
{a, b}, x
```

In[114]:=

```
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}[[2 ;; 5]]
```

Out[114]=

```
{2, 3, 4, 5}
```

In[115]:=

```
{x, {a, b}, z}[[{1, 3, 1, 2, 3, 3}]]
```

Out[115]=

```
{x, z, x, {a, b}, z, z}
```

Для удобства чтения кода вместо скобок "[ [ " и "]" ]" можно использовать "[[" и "]]", которые получаются набором последовательностей "Esc [ [ Esc" и "Esc ] ] Esc" соответственно

In[116]:=

```
{x, {a, b}, z}[[3]]
```

Out[116]=

z

## ■ Операции

### ▣ Покомпонентные арифметические операции

In[117]:=

```
{1, 2, 3} + {x, y, z}
```

Out[117]=

```
{1 + x, 2 + y, 3 + z}
```

In[118]:=

```
{1, 2, 3} x
```

Out[118]=

```
{x, 2 x, 3 x}
```

In[119]:=

```
{1, 2, 3} {x, y, z}
{1, 2, 3} * {x, y, z}
{a, b, c} * {x, y, z}
```

Out[119]=

```
{x, 2 y, 3 z}
```

Out[120]=

```
{x, 2 y, 3 z}
```

Out[121]=

```
{a x, b y, c z}
```

In[122]:=

```
{1, 2, 3} / {x, y, z}
```

Out[122]=

```
{1/x, 2/y, 3/z}
```

### ▣ Скалярное произведение векторов

In[123]:=

```
{1, 2, 3} . {x, y, z}
```

Out[123]=

```
x + 2 y + 3 z
```

### ▣ Умножение матриц, умножение матрицы на вектор

Матрица записывается по строкам: {{1,2},{3,4},{5,6}}

Для умножения матриц используется специальная команда:

In[124]:=

```
{{1, 2}, {3, 4}, {5, 6}} . {{-1, 2, -3, 4}, {5, -6, 7, -8}}
```

Out[124]=

```
{{9, -10, 11, -12}, {17, -18, 19, -20}, {25, -26, 27, -28}}
```

Для умножения матрицы на вектор используется та же команда.

In[125]:=

```
{{a, b}, {c, d}} . {x, y}
```

Out[125]=

```
{a x + b y, c x + d y}
```

Обратите внимание на отличие:

In[126]:=

```
{{1, 2}, {3, 4}} . {x, y}
{{1, 2}, {3, 4}} . {{x}, {y}}
```

Out[126]=

```
{x + 2 y, 3 x + 4 y}
```

Out[127]=

```
{{x + 2 y}, {3 x + 4 y}}
```

Список {{a, b}, {c, d}} представляет собой матрицу и может быть визуализирован в привычной форме  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  с использованием палетки

In[128]:=  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \{x, y\}$

Out[128]= {a x + b y, c x + d y}

In[129]:=  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Out[129]= {{a x + b z, b t + a y}, {c x + d z, d t + c y}}

Чтобы вывести список в матричной форме, можно использовать команду MatrixForm

In[130]:=  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} // \text{MatrixForm}$

Out[130]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} a x + b z & b t + a y \\ c x + d z & d t + c y \end{pmatrix}$$

### ■ Создание списков (векторов и матриц) с помощью команды Table

In[131]:= **Table**[i<sup>2</sup>, {i, 5}]  
**Table**[(-1)<sup>i</sup> i<sup>2</sup>, {i, 2, 5}]  
**Table**[i<sup>2</sup>, {i, 2, 10, 2}]  
**Table**[i<sup>2</sup>, {i, 2, 11, 2}]

Out[131]= {1, 4, 9, 16, 25}

Out[132]= {4, -9, 16, -25}

Out[133]= {4, 16, 36, 64, 100}

Out[134]= {4, 16, 36, 64, 100}

In[135]:= **Table**[i + j, {i, 3}, {j, 4}]  
**Table**[i - j, {i, 4}, {j, 4}]  
**DiagonalMatrix**[**Table**[k, {k, 3, 7}]]  
**IdentityMatrix**[5]  
**ConstantArray**[0, {3, 4}]

Out[135]= {{2, 3, 4, 5}, {3, 4, 5, 6}, {4, 5, 6, 7}}

Out[136]= {{0, -1, -2, -3}, {1, 0, -1, -2}, {2, 1, 0, -1}, {3, 2, 1, 0}}

Out[137]= {{3, 0, 0, 0, 0}, {0, 4, 0, 0, 0}, {0, 0, 5, 0, 0}, {0, 0, 0, 6, 0}, {0, 0, 0, 0, 7}}

Out[138]= {{1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}

Out[139]= {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}

Обратите внимание, что применение к матрице команды `MatrixForm` приводит к результату, который в вычислениях поведет себя не так, как мы бы хотели. Сможете объяснить почему?

```
In[140]:=
A = {{1, 2}, {3, 4}}
B = MatrixForm[A]
A.A
% // MatrixForm
B.B
A = .
B = .
```

```
Out[140]=
{{1, 2}, {3, 4}}
```

```
Out[141]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

```
Out[142]=
{{7, 10}, {15, 22}}
```

```
Out[143]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

```
Out[144]=
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 
```

### ■ Извлечение из матрицы частей, вычисление угловых миноров

```
In[147]:=
NN = 7
A = Table[i - 2 j, {i, 1, NN}, {j, 1, NN}]
A[[1 ;; 3, 1 ;; 2]] // MatrixForm
A[[1 ;; 3, 1 ;; 3]] // MatrixForm
Table[Det[A[[1 ;; k, 1 ;; k]]], {k, NN}]
```

```
Out[147]=
7
```

```
Out[148]=
{{-1, -3, -5, -7, -9, -11, -13}, {0, -2, -4, -6, -8, -10, -12},
 {1, -1, -3, -5, -7, -9, -11}, {2, 0, -2, -4, -6, -8, -10},
 {3, 1, -1, -3, -5, -7, -9}, {4, 2, 0, -2, -4, -6, -8}, {5, 3, 1, -1, -3, -5, -7}}
```

```
Out[149]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

```
Out[150]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

```
Out[151]=
{-1, 2, 0, 0, 0, 0, 0}
```

## ■ Определитель, обратная матрица, решение систем линейных уравнений

In[152]=

```

A1 = {{1, 2, 3}, {2, 4, 6}, {1, 2, 3}};
Det[A1]
A2 = {{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, -10, 11, -12}};
Det[A2]
LinearSolve[A1, {2, 3, 4}]
LinearSolve[A2, {1, 2, 3}]
A3 = {{1, 3, -1}, {-2, 4, 6}, {1, 2, 3}};
Det[A3]
Inverse[A3] // MatrixForm

```

Out[153]=

0

Det::matsq : Argument {{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, -10, 11, -12}} at position 1 is not a non-empty square matrix. >>

Out[155]=

```
Det[{{1, 2, 3, 4}, {5, 6, 7, 8}, {9, -10, 11, -12}}]
```

LinearSolve::nosol : Linear equation encountered that has no solution. >>

Out[156]=

```
LinearSolve[{{1, 2, 3}, {2, 4, 6}, {1, 2, 3}}, {2, 3, 4}]
```

Out[157]=

$$\left\{-\frac{1}{8}, 0, \frac{3}{8}, 0\right\}$$

Out[159]=

44

Out[160]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{1}{44} & \frac{5}{22} \end{pmatrix}$$



### ■ Размерность пространства решений, базис ядра, ранг матрицы

In[161]:=

```

NN = 7;
A = Table[i - 2 j, {i, 1, NN}, {j, 1, NN}];
RowReduce[A] // MatrixForm
NullSpace[A] // MatrixForm
MatrixRank[A]

```

Out[163]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[164]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Out[165]=

2

### ■ Транспонирование, расширенная матрица системы

In[166]:=

```

A = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}};
B = {-1, -2, 3};
Solve[A.{x, y, z} == B, {x, y, z}]
A = .
B = .

```

Out[168]=

{}

Соединение двух списков:

плохой способ получения расширенной матрицы системы

In[171]:=

```

A = {{1, 2, 3}, {4, 5, 6}, {7, 8, 9}};
B = {-1, -2, 3};

```

In[173]:=

```
Join[A, B] // MatrixForm
A~Join~B // MatrixForm
```

Out[173]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \{1, 2, 3\} \\ \{4, 5, 6\} \\ \{7, 8, 9\} \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Out[174]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \{1, 2, 3\} \\ \{4, 5, 6\} \\ \{7, 8, 9\} \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Еще один не очень хороший способ :

In[175]:=

```
Join[A, {B}] // MatrixForm
```

Out[175]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

хороший способ:

In[176]:=

```
Join[A, Transpose[{B}], 2] // MatrixForm
```

Out[176]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

## ■ Характеристический многочлен, собственные векторы и собственные числа

```
In[177]:=
A = {{5, 1, 1}, {1, 5, 1}, {1, 1, 5}};
% // MatrixForm
CharacteristicPolynomial[A, t]
Eigenvalues[A]
Eigenvectors[A]
Eigensystem[A]
```

Out[178]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Out[179]=  $112 - 72 t + 15 t^2 - t^3$

Out[180]= {7, 4, 4}

Out[181]= {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}

Out[182]= {{7, 4, 4}, {{1, 1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}}}

Обратите внимание на нулевой вектор в выводе, в том случае, когда собственное значение кратное, но собственных векторов "меньше", чем кратность собственного значения

```
In[183]:=
A = {{5, 1, 0}, {0, 5, 0}, {0, 0, 2}};
% // MatrixForm
CharacteristicPolynomial[A, t]
Eigenvalues[A]
Eigenvectors[A]
Eigensystem[A]
```

Out[184]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Out[185]=  $50 - 45 t + 12 t^2 - t^3$

Out[186]= {5, 5, 2}

Out[187]= {{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 1}}

Out[188]= {{5, 5, 2}, {{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 1}}}

## Использование *Mathematica* для стандартных вычислений

### ■ Дифференцирование и интегрирование

In[189]:=

```
f[x_] := x^2 Sin[x];
D[f[x], x]
f'[x]
```

Out[190]=

$$x^2 \cos[x] + 2 x \sin[x]$$

Out[191]=

$$x^2 \cos[x] + 2 x \sin[x]$$

In[192]:=

```
F[x_, y_] := x^2 y^3 + Sin[x] + Cos[y];
D[F[x, y], x]
D[F[x, y], y]
```

Out[193]=

$$2 x y^3 + \cos[x]$$

Out[194]=

$$3 x^2 y^2 - \sin[y]$$

In[195]:=

```
Clear[f, F]
```

### ■ Интегрирование

In[196]:=

```
Integrate[f[x], x]

$$\int f[x] dx$$

Integrate[x^2, {x, a, b}]

$$\int_a^b x^2 dx$$

```

Out[196]=

$$\int f[x] dx$$

Out[197]=

$$\int f[x] dx$$

Out[198]=

$$-\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}$$

Out[199]=

$$-\frac{a^3}{3} + \frac{b^3}{3}$$

Интегрирование функции двух и более переменных

In[200]:= `Integrate[x y^2, {x, 0, 2}, {y, 0, x}]` (\*x - внешний интеграл,  
y - внутренний, поэтому у интеграла по y верхний предел может зависеть от x\*)

Out[200]=  $\frac{32}{15}$

То же самое, но в несколько шагов

In[201]:= `a = Integrate[x y^2, y]`  
`b = (a /. {y -> x}) - (a /. {y -> 0})`  
`Integrate[b, {x, 0, 2}]`

Out[201]=  $\frac{x y^3}{3}$

Out[202]=  $\frac{x^4}{3}$

Out[203]=  $\frac{32}{15}$

In[204]:= `c = Integrate[x y^2, {y, 0, x}]`  
`Integrate[c, {x, 0, 2}]`

Out[204]=  $\frac{x^4}{3}$

Out[205]=  $\frac{32}{15}$

In[206]:= `Clear[f]`  
`a = .`  
`b = .`  
`c = .`

## ■ Численное интегрирование

In[210]:= `NIntegrate[Sin[Cos[x]], {x, 1, 2}]`

$$\int_1^2 \sin[\cos[x]] dx$$

$$N\left[\int_1^2 \sin[\cos[x]] dx\right]$$

Out[210]= 0.0652202

Out[211]=  $\int_1^2 \sin[\cos[x]] dx$

Out[212]= 0.0652202

## ■ Решение уравнений и систем уравнений

Вид, в котором Математика выдает ответ, довольно специфичен; позже мы обсудим, как им пользоваться

```
In[213]:= Solve[x^2 + 5 x + 6 == 0, x]
Solve[x^2 + 5 x + a == 0, x]
```

```
Out[213]:= {{x -> -3}, {x -> -2}}
```

```
Out[214]:= {{x -> 1/2 (-5 - Sqrt[25 - 4 a])}, {x -> 1/2 (-5 + Sqrt[25 - 4 a])}}
```

```
In[215]:= Solve[{2 x + 3 y == 5, x - y == 0}, {x, y}]
Solve[{x + y == 1, x - y == 2, 2 x + 3 y == 0}, {x, y}]
Solve[{2 x + 3 y + 2 z == 5, x - y == 0, 2 x + 3 y + 2 z == 5}, {x, y, z}]
```

```
Out[215]:= {{x -> 1, y -> 1}}
```

```
Out[216]:= {}
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>

```
Out[217]:= {{y -> x, z -> 5/2 - 5 x/2}}
```

## Замена фрагментов выражения expr по правилам rules (ReplaceAll): expr /. rules

### ■ Основные примеры

Это важный пункт, его следует очень хорошо проработать (значок "→" получается последовательным набором - и > или с использованием палетки (palettes) BasicMathInput)

```
In[218]:= {Cos[x], x^2 + z^3, y, z} /. x -> b
```

```
Out[218]:= {Cos[b], b^2 + z^3, y, z}
```

```
In[219]:= {Cos[x], x^2 + z^3, y, z} /. Cos -> Sin
```

```
Out[219]:= {Sin[x], x^2 + z^3, y, z}
```

```
In[220]:= {Cos[x], x^2 + z^3, y, z} /. z -> {a, b}
```

```
Out[220]:= {Cos[x], {a^3 + x^2, b^3 + x^2}, y, {a, b}}
```

```
In[221]:= {Cos[x], x^2 + z^3, y, z} /. {x -> a, y -> b}
```

```
Out[221]:= {Cos[a], a^2 + z^3, b, z}
```

```
In[222]:= {Cos[x], x^2 + z^3, y, z} /. {{x -> a}, {y -> b}}
```

```
Out[222]:= {{Cos[a], a^2 + z^3, y, z}, {Cos[x], x^2 + z^3, b, z}}
```

```
In[223]:= {Cos[x], x^2 + z^3, y, z} /. {x -> a, a -> b}
```

```
Out[223]:= {Cos[a], a^2 + z^3, y, z}
```

```
In[224]:= {Cos[x], x^2 + z^3, y, z} /. x -> a /. a -> b
```

```
Out[224]:= {Cos[b], b^2 + z^3, y, z}
```

Значок "->" получается последовательным набором : и > или с использованием палетки (palettes) BasicMathInput. В отличие от "lhs->rhs", которое сначала вычисляет rhs, а потом заменяет на результат вычислений все вхождения lhs, правило "lhs->rhs" вычисляет rhs отдельно для каждого вхождения lhs

```
In[225]:= {x, x, x} /. x -> Random[]
          {x, x, x} /. x -> Random[]
```

```
Out[225]:= {0.71086, 0.71086, 0.71086}
```

```
Out[226]:= {0.413701, 0.662475, 0.144961}
```

```
In[227]:= x = .
          y = .
          z = .
          a = .
          b = .
```

### ■ Пример на вычисление производной в точке

Так не надо делать

```
In[232]:= f[x_] := x^2;
          g[x_] := D[f[x], x];
          g[2]
```

General::ivar : 2 is not a valid variable. >>

```
Out[234]:= ∂2 4
```

```
In[235]:= Clear[f, g]
```

Как надо вычислять

In[236]:=

```
f[x_] := x^2;
g[x_] := D[f[y], y] /. y -> x;
g[2]
```

Out[238]=

4

In[239]:=

```
Clear[f, g]
```

ИЛИ

In[240]:=

```
f[x_] := x^3;
g[x_] := f'[x];
g[4]
```

Out[242]=

48

In[243]:=

```
Clear[f, g]
```

## Решение уравнений и дифференциальных уравнений

### ■ Решение уравнений, неравенств и систем

Вид, в котором Математика выдает ответ, довольно специфичен; позже мы обсудим, как им пользоваться

In[244]:=

```
Solve[x^2 + 5 x + 6 == 0, x]
Solve[x^2 + 5 x + a == 0, x]
```

Out[244]=

```
{{x -> -3}, {x -> -2}}
```

Out[245]=

```
{{x -> 1/2 (-5 - Sqrt[25 - 4 a]), {x -> 1/2 (-5 + Sqrt[25 - 4 a])}}
```

In[246]:=

```
Solve[{2 x + 3 y == 5, x - y == 0}, {x, y}]
Solve[{x + y == 1, x - y == 2, 2 x + 3 y == 0}, {x, y}]
Solve[{2 x + 3 y + 2 z == 5, x - y == 0, 2 x + 3 y + 2 z == 5}, {x, y, z}]
```

Out[246]=

```
{{x -> 1, y -> 1}}
```

Out[247]=

```
{}
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>

Out[248]=

```
{{y -> x, z -> 5/2 - 5 x/2}}
```



In[249]:=

**res = Solve[a x<sup>2</sup> + b x + c == 0, x]**

Out[249]=

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} \right\} \right\}$$

In[250]:=

**x /. res[[1]]**

Out[250]=

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a}$$

In[251]:=

**Solve[{x<sup>2</sup> - y - 4 == 0, y + 3 x == 2}, {x, y}]**

Out[251]=

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} (-3 - \sqrt{33}), y \rightarrow \frac{1}{2} (13 + 3 \sqrt{33}) \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2} (-3 + \sqrt{33}), y \rightarrow \frac{1}{2} (13 - 3 \sqrt{33}) \right\} \right\}$$

In[252]:=

**Reduce[a x<sup>2</sup> + b x + c == 0, x]**

Out[252]=

$$\left( a \neq 0 \ \&\& \left( x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} \ || \ x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} \right) \right) \ ||$$

$$\left( a = 0 \ \&\& \ b \neq 0 \ \&\& \ x = -\frac{c}{b} \ || \ (c = 0 \ \&\& \ b = 0 \ \&\& \ a = 0) \right)$$

In[253]:=

**Reduce[-1 ≤ x + y ≤ 1 && x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> == 2, {x, y}]**

Out[253]=

$$\left( \frac{1}{2} (-1 - \sqrt{3}) \leq x \leq \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}) \ \&\& \ y = \sqrt{2 - x^2} \right) \ ||$$

$$\left( \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{3}) \leq x \leq \frac{1}{2} (1 + \sqrt{3}) \ \&\& \ y = -\sqrt{2 - x^2} \right)$$

In[254]:=

**Clear[res]****x = .****y = .**

## ■ Решение дифференциальных уравнений

In[257]:=

**res = DSolve[x''[t] - x'[t] == 2, x[t], t]**

Out[257]=

$$\left\{ \left\{ x[t] \rightarrow -2 t + e^t C[1] + C[2] \right\} \right\}$$

In[258]:=

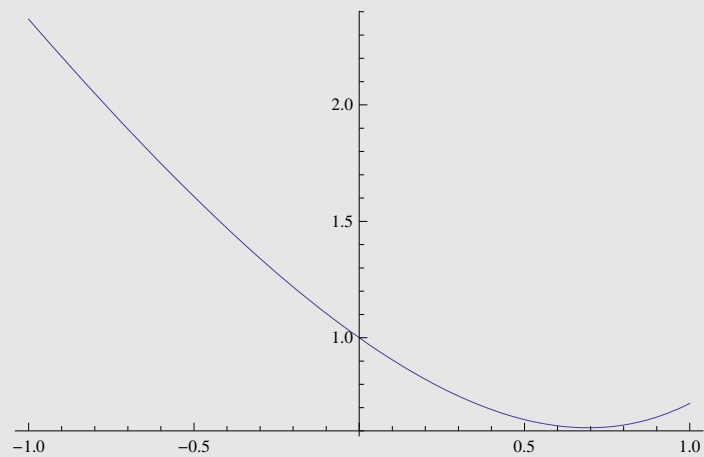
**f[t\_] = x[t] /. res[[1]] /. {C[1] → 1, C[2] → 0}**

Out[258]=

$$e^t - 2 t$$

In[259]=

```
Plot[f[t], {t, -1, 1}]
```



Out[259]=

In[260]=

```
Clear[f, res]
```

### ■ Численное решение дифференциальных уравнений

Кроме самого уравнения, нужно задать начальные условия и область изменения переменной.

In[261]=

```
res = NDSolve[{x'[t] - Sin[x[t]] == 2, x[0] == 1, x'[0] == 2}, x, {t, 0, 1}]
```

Out[261]=

```
{{x -> InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>]}}
```

In[262]=

```
f = x /. res[[1]]
f[x]
f'[0]
```

Out[262]=

```
InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>]
```

Out[263]=

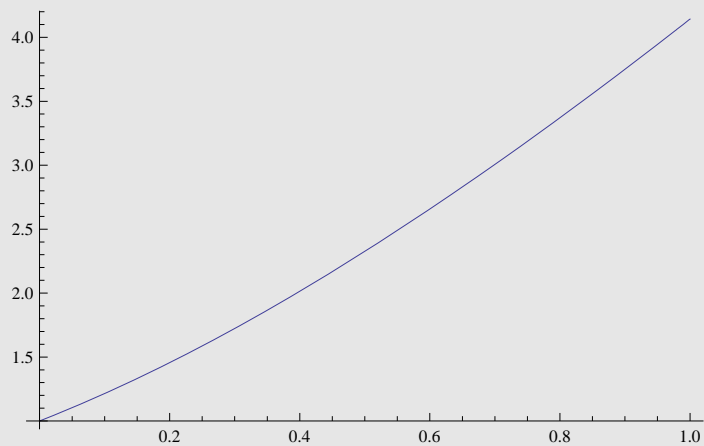
```
InterpolatingFunction[{{0., 1.}}, <>][x]
```

Out[264]=

```
2.
```

In[265]=

```
Plot[f[s], {s, 0, 1}]
```



Out[265]=

In[266]=

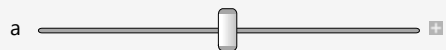
```
Clear[res, f]
```

## Пример использования команды Manipulate

In[267]=

```
Manipulate[A = {{1, 2}, {a, 4}};
  Row[{"Матрица: ", A // MatrixForm, "  Определитель: ", Det[A],
    "\nХарактеристический многочлен: ", CharacteristicPolynomial[A, x],
    "\nСтупенчатый вид: ", RowReduce[A] // MatrixForm,
    "  Матрица в квадрате: ", A.A // MatrixForm}], {a, 1}, -1, 3, 0.5]
```

Out[267]=



Матрица:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  Определитель: 2  
 Характеристический многочлен:  $2 - 5x + x^2$   
 Ступенчатый вид:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
 Матрица в квадрате:  $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 18 \end{pmatrix}$

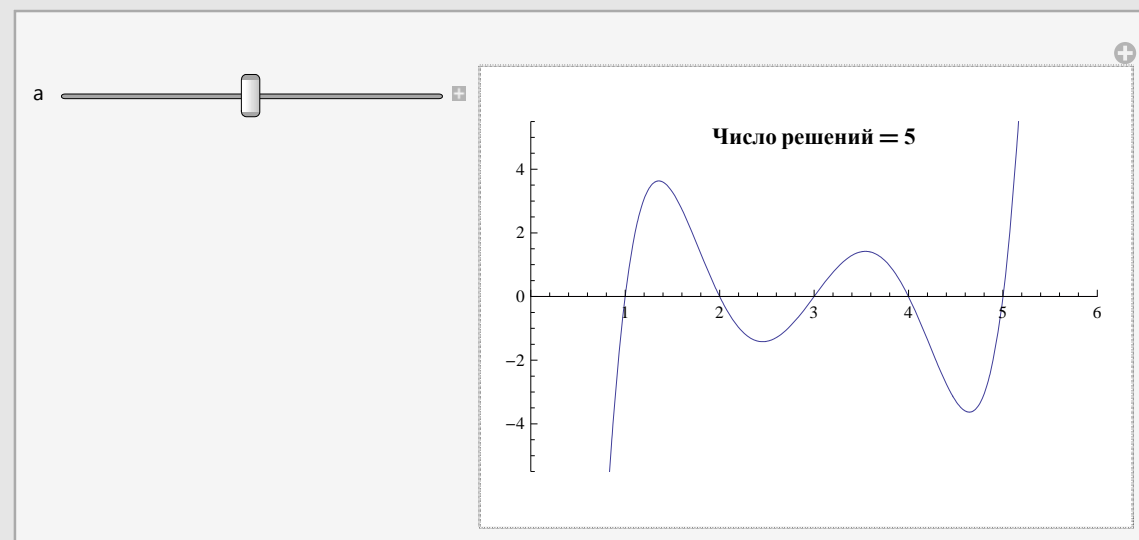
In[268]:=

```

Manipulate[
  res = Solve[-120 + 274 x - 225 x^2 + 85 x^3 - 15 x^4 + x^5 == a, x, Reals];
  Show[Plot[-120 + 274 x - 225 x^2 + 85 x^3 - 15 x^4 + x^5, a,
    {x, 0, 6}, Frame -> False, PlotRange -> {{0, 6}, {-5.5, 5.5}},
    Graphics[Text[Style[Число решений == Length[res], 12, Bold], {3, 5}]]],
  {{a, 0}, -5, 5}]

```

Out[268]=



# КОНЕЦ ПЕРВОЙ ЛЕКЦИИ