

# Предисловие

На протяжении многих лет центром исследований по компьютерной геометрии на механико-математическом факультете МГУ является кафедра дифференциальной геометрии и приложений. Краткую историю становления и развития этого важнейшего направления в современной геометрии см. во Введении к данной книге. Настоящее пособие дополняет учебник [1] по компьютерной геометрии, изданный нашей кафедрой. В 2009 году кафедра дифференциальной геометрии и приложений разработала и организовала практикум по компьютерной геометрии для студентов-математиков 2–3 курсов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. В связи с этим возникла настоятельная необходимость издания соответствующего учебного пособия для студентов. Настоящая книга представляет собой конспект занятий по этому практикуму.

Мы глубоко благодарны ректору МГУ академику В. А. Садовничему; проректору МГУ, заведующему лабораторией вычислительных методов механико-математического факультета МГУ, профессору А. В. Михалеву; проректору МГУ Г. А. Савицкой; и.о. декана механико-математического факультета, профессору В. Н. Чубарикову; начальнику планового отдела механико-математического факультета МГУ В. Г. Антоновой; специалистам Е. В. Новиковой и М. Ю. Попеленскому; заведующему кафедрой высшей алгебры, председателю Методического совета механико-математического факультета МГУ, профессору В. Н. Латышеву; заведующему кафедрой вычислительной математики, профессору Г. М. Кобелькову; заместителю декана по учебной работе, профессору И. Н. Молодцову; диспетчеру В. П. Шинеленко; сотруднику лаборатории вычислительных методов механико-математического факультета МГУ Н. Н. Молчанову за неоценимую поддержку и помощь. Особая благодарность сотрудникам и аспирантам кафедры дифференциальной геометрии и приложений за огромный труд, вложенный в реализацию Практикума на нашем факультете. Выражаем также благодарность вице-президенту издательства «Открытые системы» А. В. Шкреду за помощь в издании данной книги.

## Об авторах

**Иванов Александр Олегович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений, заместитель заведующего кафедрой дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ. Является известным в нашей стране и за рубежом специалистом в области топологического вариационного исчисления, теории экстремальных сетей, в частности, разветвленных геодезических и проблемы Штейнера, теории графов, компьютерной геометрии. Автор более 80 научных публикаций, в том числе 3 монографий и 1 учебника по математике. Удостоен Государственной стипендии для выдающихся ученых, гранта Президента РФ поддержки молодых докторов наук, гранта правительства Москвы, премии им. Шувалова первой степени. Один из создателей Практикума по компьютерной геометрии на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

**Ильютко Денис Петрович**, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры дифференциальной геометрии и приложений. Известный специалист в области дифференциальной геометрии, компьютерной геометрии, дискретной математики, вариационном исчислении, теории оптимального управления, маломерной топологии. Автор более 20 научных публикаций, в том числе 1 учебника по компьютерной геометрии. Читает на механико-математическом факультете МГУ спецкурс «Компьютерная геометрия». Один из создателей Практикума по компьютерной геометрии на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

**Носовский Глеб Владимирович**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений. Известный специалист в области теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов, теории оптимизации, стохастических дифференциальных уравнений, компьютерного моделирования стохастических процессов. Автор более 30 научных статей по математике и университетского учебника по компьютерной геометрии. Награжден премией Тан Чин Туан в области прикладной математики (Сингапур, 2005). Работал в университете Айзу (Япония) в области компьютерной геометрии. Читает спецкурс «Компьютерная геометрия» на механико-математическом факультете МГУ. Один из создателей Практикума по компьютерной геометрии на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

**Тужилин Алексей Августинович**, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальной геометрии и приложений. Заведует лабораторией Компьютерной геометрии в естественных и гуманитарных науках при кафедре дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ. Является известным в нашей стране и за рубежом специалистом в области топологического вариационного исчисления, теории экстремальных сетей, в частности, разветвленных

геодезических и проблемы Штейнера, теории графов, компьютерной геометрии. Автор более 80 научных публикаций, в том числе 4 монографий и 1 учебника по математике. Удостоен Государственной стипендия для молодых ученых, гранта Президента РФ поддержки молодых докторов наук, премии им. Шувалова первой степени. Один из создателей Практикума по компьютерной геометрии на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

**Фоменко Анатолий Тимофеевич**, академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, широко известный специалист в области геометрии и топологии, вариационного исчисления, динамических систем, симплектической топологии, компьютерной геометрии. Решил многомерную проблему Плато в классе спектральных поверхностей в римановых многообразиях. Создатель известной научной школы, разрабатывающей новые методы качественного топологического анализа динамических систем в геометрии, физике, механике. Создатель теории топологической классификации интегрируемых систем. Заведующий Отделением математики, а также кафедрой Дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Автор более 200 научных статей, 25 монографий, 8 учебников по математике. Под его руководством защищено более 20 кандидатских и 9 докторских диссертаций. Лауреат премии Московского математического общества, премии по математике Президиума АН СССР, Государственной Премии (в области математики) Российской Федерации. Инициатор создания Практикума по компьютерной геометрии на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.



# Введение

В 2007 году академик А. Т. Фоменко, заведующий кафедрой дифференциальной геометрии и приложений, выдвинул идею создания на механико-математическом факультете МГУ общего годового практикума по компьютерной геометрии для студентов второго и третьего курсов. Идея была подробно обсуждена и полностью поддержана ректором МГУ академиком В. А. Садовничим, и.о.декана мехмата профессором В. Н. Чубариковым, заведующим кафедрой высшей алгебры профессором В. Н. Латышевым, заведующим лабораторией вычислительных методов профессором А. В. Михалевым, заведующим кафедрой вычислительной математики профессором Д. М. Кобельковым. Надо сказать, что такого геометрического практикума на нашем факультете ранее не было. Существовавший когда-то практикум по вычислительным аспектам теории дифференциальных уравнений уже давно не действовал на факультете и, кроме того, носил совсем другой характер, поскольку в то время вычислительная техника была не настолько развита. Потребность в современном практикуме по компьютерной геометрии начала особенно ощущаться в последние годы, в связи с активным проникновением в современную геометрию и ее многочисленные приложения (инженерное дело, дизайн, распознавание образов и т.п.) компьютерных методов. Кроме того, многие выпускники мехмата, поступая на работу, очень часто имеют дело с различными аспектами компьютерной геометрии и используют ее методы для анализа и решения тех или иных прикладных задач.

В итоге, начиная с весеннего семестра 2009 года, идея А. Т. Фоменко создания такого принципиально нового компьютерно-геометрического практикума была успешно реализована на мехмате. По решению Методического и Ученого Советов механико-математического факультета в весеннем семестре 2008–09 и зимнем семестре 2009–10 учебного года Практикум был проведен для студентов 2–3 курса Отделения математики (12 групп) по одному теоретическому и одному практическому занятию раз в три недели для каждой группы. Цель Практикума — сделать обучение студентов геометрическим дисциплинам более наглядным и приближенным к практическим задачам, а также познакомить студентов с основами геометрического компьютерного моделирования. Данный практикум принципиально отли-

чается от традиционных практикумов по компьютерной геометрии, существующих в других ВУЗах тем, что не ограничивается лишь вычислительной геометрией, а, опираясь на новейшие методы и результаты геометрии и топологии, знакомит студентов с актуальными приложениями геометрического компьютерного моделирования в современной науке.

Важно подчеркнуть, что идея Практикума опиралась на большую теоретическую и практическую базу, созданную кафедрой дифференциальной геометрии и приложений на протяжении более чем пятнадцати лет. В частности, предварительно, на протяжении многих лет кафедрой велись глубокие исследования в области компьютерной геометрии (в том числе, в сотрудничестве с известным международным центром в Японии — университетом Айзу; подробности см. ниже). На основе этой работы А. Т. Фоменко инициировал создание на механико-математическом факультете МГУ курса по компьютерной геометрии. Такой спецкурс вскоре был поставлен и с тех пор регулярно читается на механико-математическом факультете нашей кафедрой (лекторы Г. В. Носовский, Д. П. Ильютко), ведется спецсеминар на эту тему. Элементы компьютерной геометрии были также введены в материалы спецкурса А. Т. Фоменко «Элементы топологии», спецкурса А. О. Иванова и А. А. Тужилина «Геометрическая теория графов». Затем был написан и издан фундаментальный учебник «Компьютерная Геометрия» [1] (авторы: Н. Н. Голованов, Д. П. Ильютко, Г. В. Носовский, А. Т. Фоменко). Следует подчеркнуть, что созданный практикум хотя и использует некоторые элементы обязательного годового курса дифференциальной геометрии, читаемого для студентов 2–3 курсов, однако, ни в коей мере не сводится к «обслуживанию» данного курса. Практикум существенно шире и затрагивает как темы других обязательных курсов, таких как аналитическая геометрия, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, так и другие важные направления, никак не отраженные в обязательной программе. Последнее касается, например, элементов вычислительной геометрии, таких как теории кривых Безье и поверхностей Безье, элементов теории графов, теории дискретных оптимизационных задач, теории геометрических вариационных задач и др.

## 1 Компьютерная геометрия на мехмате МГУ

В момент восстановления на механико-математическом факультете МГУ кафедры дифференциальной геометрии (и приложений) в 1992 году, в ее рамках сразу была создана лаборатория компьютерных методов в естественных и гуманитарных науках (в настоящий момент ею заведует профессор А. А. Тужилин). Одним из ведущих научных и прикладных направлений на кафедре и в лаборатории стала компьютерная геометрия. Начиная с 1993 года, кафедра стала ведущей на факультете в области компьютерной геометрии. Это уникальное и лидирующее положение кафедра занимает

в результате многолетней, активной научной и прикладной деятельности. Вот лишь некоторые вехи этого пути.

### **1.1 Научное международное сотрудничество кафедры дифференциальной геометрии и приложений по компьютерной геометрии**

В 1992–1993 годах, в результате научных контактов профессора А. Т. Фоменко с профессором Тосиясу Кунии (Япония) (Tosiyasu L. Kunii) — выдающимся специалистом в области компьютерных наук, компьютерной геометрии и инженерии (computer science and engineering), было принято совместное решение открыть новое научное направление в компьютерной геометрии, инженерии и моделировании, основанное на внедрении идей и методов, разрабатываемых научной школой А. Т. Фоменко, в области топологической теории Морса, симплектической топологии и гамильтоновой геометрии, в том числе качественной теории интегрируемых динамических систем. В результате возник уникальный совместный научный проект по компьютерной геометрии «нового поколения», возглавленный А. Т. Фоменко (со стороны МГУ) и Т. Кунии (со стороны недавно организованного университета в японском г. Айзу (Aizu)). Профессор Кунии был основателем и президентом университета Айзу с 1993 по 1997 годы. Базой проекта в МГУ стала кафедра дифференциальной геометрии и приложений, а в университете Айзу — математический факультет и специально созданная для этого проекта (который условно называли «Кафедра дифференциальной геометрии и приложений — Айзу», сокращенно: КДГИП–АЙЗУ) большая лаборатория. Коллектив этой лаборатории был укомплектован как японскими математиками, так и большой группой выпускников механико-математического факультета МГУ (и, в частности, кафедры дифференциальной геометрии и приложений). Эта группа специалистов была подобрана и организована А. Т. Фоменко. Возникший российско-японский проект начал успешно развиваться и быстро стал заметным явлением в международной математической жизни. Среди основных тем, активно разрабатывавшихся в совместном проекте КДГИП–АЙЗУ, были, например, следующие:

- (1) Распознавание геометрических образов в быстро меняющейся обстановке (в реальном времени).
- (2) Моделирование и анализ геометрических форм, волновых фронтов на основе изучения их особенностей.
- (3) Применение компьютерной геометрии в медицине, в частности, в стоматологии (например, моделирование процесса жевания, восстановление формы зубов).
- (4) Быстрые алгоритмы поиска так называемой линии хребта.

- (5) Параллельные генетические алгоритмы для построения коммуникационных сетей.
- (6) Построение кривых и поверхностей в присутствии препятствий переменного масштаба.
- (7) Качественные и асимптотические свойства управляемых кривизной деформаций силуэтов. Визуализация не шаблонных возможностей таких деформаций.
- (8) Хребты и равнины неявно заданных поверхностей. Сегментация дальностной картины. (Эти методы используются, например, в картографии.)
- (9) Теория Морса и графы Рибба гладких функций. Качественный анализ поверхностей и особенностей гладких функций.
- (10) Компьютерная классификация многообразий малой размерности; гиперболическая и симплектическая геометрия.
- (11) Компьютерная геометрия и кодирование трехмерных изоэнергетических многообразий и слоений Лиувилля в теории интегрируемых гамильтоновых систем.

Начиная с 1993 года, в университете Айзу, по инициативе А. Т. Фоменко и Т. Л. Кунии, было проведено несколько научных конференций совместного проекта КДГИП–АЙЗУ, для участия в которых в Японию неоднократно выезжали сотрудники кафедры дифференциальной геометрии и приложений. В этих конференциях участвовали также математики и специалисты в области компьютерной геометрии из Италии, Франции, Бельгии, Китая, США, Канады. Некоторые наиболее важные результаты докладывались на международных конгрессах по компьютерной геометрии, проходивших в Италии и Бельгии. Одна научная конференция в рамках проекта КДГИП–АЙЗУ была проведена в МГУ, на механико-математическом факультете. Из Японии прибыла большая группа специалистов, которые на месте ознакомились с последними достижениями кафедры в области компьютерной геометрии.

В качестве одного из важных результатов проекта КДГИП–АЙЗУ была написана и издана в известном международном издательстве Шпрингер книга А. Т. Фоменко и Т. Л. Кунии «Topological Modeling for Visualization» [17]. Она оказалась уникальным изданием, поскольку в ней впервые был «установлен мост» между топологическими аспектами современной геометрии и топологии с одной стороны, и компьютерной экспериментальной геометрией — с другой. Книга оказалась востребованной как “чистыми” математиками, так и специалистами и инженерами, работающими в области компьютерных наук.



Являясь членом редакционного совета известного международного журнала по компьютерной геометрии — *Virtual Reality*, — А. Т. Фоменко активно способствует развитию новых методов компьютерной геометрии.

Во время неоднократных поездок в США, А. Т. Фоменко установил научные контакты с руководством и сотрудниками знаменитого научного центра *Wolfram Research Center*, где, в частности, разрабатываются мощные компьютерные программы в области геометрии. Следует особо отметить многолетнее сотрудничество кафедры дифференциальной геометрии и приложений с выдающимся американским математиком Альфредом Греем (*Alfred Gray*), активно участвовавшим в компьютерно-геометрических исследованиях Вольфрамовского Центра. Совместно с Альфредом Греем наша кафедра выполнила интересные работы в области компьютерной геометрии и топологии.

Одним из самых ярких результатов глубоких научных контактов в области компьютерной геометрии с зарубежными научными центрами явились совместные исследования с группой германских ученых (университет города Бремена), возглавлявшейся Петером Рихтером. По приглашению Бременского университета, А. Т. Фоменко и А. В. Болсинов прочли курс лекций по основам созданной А. Т. Фоменко, его учениками и коллегами теории топологической классификации интегрируемых систем [11]. Одним из важнейших приложений теории является вычисление инвариантов конкретных динамических систем, известных в физике, механике, геометрии. Такое вычисление в значительной мере опирается на идеи и методы компьютерной геометрии. В результате плодотворного сотрудничества с группой германских ученых под руководством П. Рихтера (в нее входили, в частности, Дуллин и Виттек), удалось получить полное описание топологии слоений Лиувилля для серии динамических систем, объединенных названием «случай Ковалевской». См. [16].

Результаты оказались настолько интересными и неожиданными, что был сделан компьютерный фильм «*Kovalewskaia Top*» («Волчок Ковалевской»), в котором удалось наглядно представить различные режимы вращения «волчка Ковалевской», возникающие при этом бифуркации торов Лиувилля, а также продемонстрировать “атомы” и “молекулы”, то есть дискретные инварианты Фоменко–Цишанга, классифицирующие интегрируемые системы с точностью до топологической эквивалентности.

В 2001 году контакты с японскими исследователями в области компьютерной геометрии были существенно расширены. Состоялась поездка А. Т. Фоменко в Токио, в известный *Institute of Technology*. Приглашение исходило от департамента, где разрабатываются методы компьютерной геометрии. А. Т. Фоменко попросили рассказать о новых геометрических, топологических и алгоритмических методах, разработанных на кафедре дифференциальной геометрии и приложений. В итоге было заключено соглашение о совместных исследованиях в области компьютерной геометрии. В частности, по рекомендации А. Т. Фоменко на работу в Токий-

ский Технологический Институт были взяты несколько учеников А. Т. Фоменко, выпускников кафедры. В результате возникла группа специалистов, внедряющих в компьютерную геометрию новые методы, разработанные, в частности, научной школой А. Т. Фоменко. Научные контакты с Токийским Технологическим Институтом успешно продолжаются до настоящего времени.

В конце 2005 – начале 2006 года сотрудник лаборатории компьютерных методов в естественных и гуманитарных науках Г. В. Носовский получил грант Tan Chin Tuan Fellow, согласно которому ему была предоставлена возможность провести 3 месяца в Сингапуре в Наньянском Технологическом университете на Компьютерно-инженерном факультете (Faculty of Computer Science and Engineering) для научной работы и чтения лекций по финансовой математике. За время, проведенное в Сингапуре, Носовский, совместно с профессором Ольгой Суриной, был научным со-руководителем аспиранта Д. Лю. Целью исследовательской группы была математическая формализация задачи кластеризации облака точек в евклидовом пространстве на основе близости, задаваемой евклидовым расстоянием, выявление естественных параметров, влияющих на результат кластеризации и создание нового алгоритма такой кластеризации, который был бы лишен недостатков существующих алгоритмов (неустойчивое распознавание кластеров невыпуклой формы, кластеров с заметно меняющейся внутренней плотностью, вложенных друг в друга кластеров, необходимость задавать значения параметров, которые не имеют ясного содержательного смысла и значения которых пользователю, как правило, неизвестны, высокая сложность работы “продвинутых” алгоритмов кластеризации и т.п.). В результате был разработан новый метод кластеризации, основанный на новой, предложенной группой, функции влияния и на новой статистике, эффективно оценивающей отклонение внутрикластерной плотности от равномерной. Был предложен новый алгоритм кластеризации ADACLUS, способный работать в полностью автоматическом режиме, без какого-либо задания неизвестных пользователю параметров, но, в то же время, по желанию пользователя, допускающий настройку трех параметров, имеющих ясный содержательный смысл.

Кроме того, был разработан алгоритм кластеризации, использующий триангуляцию Делоне. Данный алгоритм отличается высоким быстродействием и не уступает по качеству кластеризации большинству распространенных алгоритмов (превосходя их по скорости).

На эту тему написано и опубликовано несколько статей в журналах с высоким рейтингом. Д. Лю успешно защитил диссертацию. См. ссылки ниже. Данные алгоритмы имеют широкую область применения, в том числе и в современной компьютерной геометрии (задачи поточечной графики).

В 2009 году Г. В. Носовский провел 2 месяца в Сингапуре в Наньянском технологическом университете по приглашению руководства Университета для научной работы и участия с спецсеминарах на факультете механики

и аэрокосмических разработок (Mechanical and Aerospace Engineering). По результатам научных исследований, проведенных совместно с профессором Владимиром Кулишом в области устойчивости решений уравнений в частных производных типа уравнения теплопроводности с дробным порядком дифференцирования по времени (применяемых для моделирования процессов передачи информации нейронами человеческого мозга) по отношению к возмущениям этого порядка, в настоящее время готовится научная статья.

Результаты описанного только что сотрудничества с учеными Сингапура отражены в публикациях [22], [20], [21].

## 1.2 Исследования по Компьютерной геометрии на кафедре дифференциальной геометрии и приложений

Исследования по компьютерной геометрии на кафедре дифференциальной геометрии имеют давнюю традицию. Они восходят, в частности, к работе 1974 года И. А. Володина, В. Е. Кузнецова и А. Т. Фоменко [4].

Далее следует упомянуть исследования С. В. Матвеева и А. Т. Фоменко по гиперболической геометрии и изоэнергетическим 3-многообразиям (интегрируемых динамических систем), см., в частности, [6]. В этой работе, опираясь на обширный вычислительный эксперимент, авторами была сформулирована известная гипотеза о минимальном объеме замкнутого гиперболического трехмерного многообразия (доказанная лишь недавно).

Развивая методы компьютерной геометрии, С. В. Матвеев и А. Т. Фоменко написали серию статей и издали в 1991 году книгу «Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии» [7]. Ввиду актуальности темы, книга была быстро переведена на английский язык [18] и приобрела большую популярность среди специалистов по современной геометрии.

Начиная с 1992 года, на кафедре дифференциальной геометрии ведется создание «Топологического Атласа интегрируемых гамильтоновых систем». Согласно теории, построенной в работах А. Т. Фоменко и его учеников, системы указанного вида с двумя степенями свободы топологически классифицируются инвариантами, представляющими из себя одномерные графы («меченые молекулы»), вершинами которых служат некоторые канонические бифуркации (названные «атомами»), а на ребрах поставлены специфические числовые метки. Эта теория открыла широкие возможности для распознавания эквивалентных интегрируемых динамических систем, а также для доказательства неэквивалентности некоторых систем, хорошо известных из геометрии, физики, механики. Вычисление указанных «молекул» формулируется как задача компьютерной геометрии. В частности, вычисление так называемых бифуркационных диаграмм отображений момента. На протяжении нескольких лет, используя разнообразные методы компьютерной геометрии, были вычислены топологические инварианты

многих конкретных интегрируемых систем, составлены соответствующие “атласы”. В результате возникла обширнейшая компьютерная база данных, позволяющая отвечать на многие теоретические вопросы в теории интегрируемых систем. Это — яркий пример взаимодействия компьютерной геометрии с “чистой” и прикладной геометрией. В этом направлении особенно следует отметить важные исследования В. В. Трофимова, А. В. Болсинова, А. А. Ошемкова и других. Более того, обнаружилось интересные связи с компьютерной алгеброй, в частности, с так называемыми базисами Гребнера (работы А. Федоровой). В результате, сложилось плодотворное сотрудничество с кафедрой высшей алгебры (заведующий — профессор В. Н. Латышев) и лабораторией вычислительных методов (заведующий — профессор А. В. Михалев).

Также на кафедре дифференциальной геометрии и приложений активно развивается направление, посвященное изучению геометрических вариационных задач, в частности, минимальных поверхностей и минимальных сетей (А. О. Иванов, Д. П. Ильютко, А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко). Задачи такого типа часто включают в себя богатую комбинаторику, что делает применение компьютерной геометрии особенно важным. Так, например, при изучении минимальных сетей на правильных многоугольниках использовались средства компьютерной алгебры [9], [8]. Другим ярким примером использования компьютерной геометрии является построение экзотического граничного множества [10], [19]. Здесь задача свелась к поиску цикла в достаточно сложном ориентированном графе, что и было проделано с помощью компьютера.

Так как рассматриваемая область часто имеет дело с наглядным материалом, компьютерное моделирование становится неотъемлемой частью исследований, дающей возможность проводить довольно сложные геометрические эксперименты, в результате чего рождаются или отвергаются гипотезы разной степени правдоподобности. Некоторые из них становятся впоследствии теоремами. Так, цитированная выше классификация “скелетов” с правильной границей была первоначально получена в результате компьютерного эксперимента, и лишь затем была доказана, вновь с использованием компьютера, но уже на уровне алгебраических вычислений.

Среди прикладных исследований, проводимых на кафедре дифференциальной геометрии и приложений, важное место занимает изучение возможных приложений в биологии, в частности, в биофизике. Как стало известно сравнительно недавно (в 70-х годах прошлого века), молекула ДНК, являющаяся основой жизни, образует узлы, и ее заузления играют весьма существенную роль в жизненных процессах. Здесь определяющим является то обстоятельство, что биологические свойства макромолекул (ДНК, белки, РНК) во многом зависят от той формы, которую они принимают в пространстве (или, как принято говорить в биофизике, — от конформации). Например, молекула белка приона в случае, если он обладает аномальной трехмерной структурой, может приводить к тяжелому заболеванию («ко-

ровые бешенство»).

Как описывать структуру макромолекул? Необходимы новые подходы, поскольку, с одной стороны, задачу можно отнести к классическим (или, лучше сказать, традиционным) вопросам анализа положений, т.е. топологии, с другой стороны, постановки вопросов и методы их разрешения часто весьма необычны для топологов. Существенно, что большую роль здесь играет дискретность самих задач, что приводит к преобладанию комбинаторных и компьютерных методов, а также то, что рассматриваемые системы (макромолекулы) требуют для своего описания огромного массива параметров, доходящего до миллионов единиц. В результате мы сталкиваемся с проблемами не только большой, но чудовищной (с точки зрения обычной топологии) размерности. Поэтому актуальна задача, все еще ожидающая своего адекватного решения, описания таких систем, т.е. нахождения структур доступных анализу, например, с помощью компьютерного моделирования, и вместе с тем предоставляющих достаточную информацию о системе.

Следует отметить, что кафедра дифференциальной геометрии имеет давние контакты с биофаком МГУ (кафедра биоинженерии биологического факультета, заведующий — профессор К. В. Шайтан) и факультетом биоинформатики и биоинженерии МГУ (декан — академик В. П. Скулачев). В частности, достигнуты определенные успехи в разработке комбинаторных аналогов дифференциально-геометрических подходов к описанию конформаций макромолекул. Ценной чертой такого сотрудничества является то обстоятельство, что представители разных наук (с одной стороны — биофизики кафедры биоинженерии, с другой — математики кафедры дифференциальной геометрии и приложений) смотрят на эти проблемы с нетождественных, но и не антагонистических точек зрения. Проблема эта очень сложна, и потому требует рассмотрения под разными углами. В этом контексте для студентов и аспирантов биоинформатиков А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным был разработан и прочитан компьютерный курс дифференциальной геометрии и топологии, где слушателям были представлены не только теоретические основы этой науки, но и продемонстрирован ряд компьютерных моделей, наглядно иллюстрирующий весь этот непростой материал.

Другая важная прикладная область, которая активно изучается на кафедре дифференциальной геометрии и приложений и возглавляется профессором В. Л. Голо, — физика мягкой материи, к которой относится подавляющее большинство составляющих субстанций живых организмов, а также очень многие системы неживой природы.

Характерными признаками мягкой материи являются несущественность инерционных эффектов, малость упругих констант и преобладание диссипативных эффектов. В связи с этим многие традиционные методы, применяемые для описания, например, кристаллических тел, оказываются неприменимыми. По этой причине анализ задач физики мягкой материи требует

применения компьютерных и статистических методов. Таким образом, снова необходимо изучать системы очень большой размерности, доходящей до десятков миллионов, с учетом их топологии. В этой области науки пока больше вопросов, чем ответов. Однако кое-что можно сделать уже сейчас, рассматривая упрощенные системы, которые сохраняют некоторые существенные черты реальных объектов. На этом пути, сочетая аналитические методы механики, топологические соображения и компьютерное моделирование, удастся в ряде случаев продвинуться в решении реальных задач. Первостепенное значение принадлежит здесь, конечно, методам геометрического компьютерного моделирования, или, как часто говорят, молекулярной динамики. Результаты, которые удастся получить (в частности, проф. В. Л. Голо и его учениками), оказываются очень интересными для приложений: создания новых лекарственных препаратов, сенсоров, и целого ряда технических разработок, которые сейчас принято включать в область нано-технологий.

### 1.3 Обучение компьютерной геометрии на мехмате

Как уже говорилось, на механико-математическом факультете по инициативе А. Т. Фоменко и усилиями кафедры дифференциальной геометрии и приложений и лаборатории компьютерных методов в естественных и гуманитарных науках был впервые поставлен и уже много лет читается спецкурс по компьютерной геометрии. Лекторы — доцент Г. В. Носовский и ассистент Д. П. Ильютко. С самого начала спецкурс пользуется большой популярностью, его посещают не только студенты мехмата, но и слушатели с других факультетов МГУ и других вузов Москвы. Вкратце, содержание курса таково.

Гладкие кривые с вычислительной точки зрения. Сплайны и кривые Безье. Поверхности Безье. Проективные (рациональные) кривые Безье. Бета-сплайны, бета-кривые и бета-поверхности. Компьютерная геометрия проективно преобразованных изображений. Геометрическое моделирование. Построения на кривых и поверхностях. Методы компьютерной графики.

Материалы этого курса вошли в написанную и изданную в 2006 году книгу Н. Н. Голованова, Д. П. Ильютко, Г. В. Носовского, А. Т. Фоменко «Компьютерная геометрия» [1]. В этом учебнике содержатся необходимые сведения из дифференциальной геометрии, рассмотрены основные понятия и определения компьютерной геометрии. Это — различные виды сплайнов, используемых в компьютерной графике. Приведены также новые результаты, полученные сотрудниками, аспирантами и студентами кафедры дифференциальной геометрии в важной проблеме современной компьютерной геометрии — автоматической склейке проективно-преобразованных изображений. Книга написана в сотрудничестве с математическим отделом российской фирмы АСКОН, разрабатывающей широко известную в нашей стране компьютерную систему автоматизированного проектирования КОМПАС.

Элементы компьютерной геометрии нашли также свое отражение в спецкурсе А. Т. Фоменко «Элементы топологии», который много лет читается студентам 1–3 курсов.

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений многие годы плодотворно сотрудничает с кафедрой математической теории интеллектуальных систем (заведующий — профессор В. Б. Кудрявцев). Уже стало традицией проводить совместные конференции, семинары и пр., на которых коллективы активно обмениваются информацией о новых алгоритмических методах.

## 1.4 Пропаганда компьютерной геометрии

Кафедра дифференциальной геометрии и приложений много лет представляет механико-математический факультет МГУ в Консорциуме «Геометрическое образование в новых информационных технологиях» (президент — профессор В. В. Пилугин), в который входят ряд крупнейших технических ВУЗов, таких как университет МИФИ, технические университеты МИРЭА, МАИ, МАТИ с одной стороны, и крупных компаний, занимающихся компьютерными и инженерными разработками, таких как Siemens PLM Software Company, АСКОН, National Center of Computer Animation, Bournemouth University, INERTEK Company и др. Цель Консорциума — объединить усилия участников для развития образования во всех тех областях, где может быть представлена компьютерная геометрия. Деятельность Консорциума включает в себя как разработку новых учебных курсов, так и организацию и проведение научных семинаров (много лет работает семинар «Компьютерная геометрия и приложения»), издание научного интернет-журнала *Computer Graphics and Geometry* (<http://cgg-journal.com>).

Задачи и методы компьютерной геометрии занимают значительное место на кафедральном сайте <http://dfgm.math.msu.su>, который активно посещается студентами мехмата и играет большую роль во внедрении новых идей в систему образования на мехмате. Кроме того, на сайте представлено много видеофильмов, посвященных различным вопросам компьютерной геометрии.

## 2 Практикум по Компьютерной Геометрии на мехмате МГУ

В качестве основного программного средства для Практикума был выбран широко известный пакет Mathematica фирмы Wolfram Research. По нашему мнению, именно этот программный продукт, выделяющийся среди аналогов достаточно простым и «дружелюбным» интерфейсом, естественной «математической» формой записи сложных выражений, позволяющий создавать лаконичный и легко воспринимаемый код для решения сложных

задач и моделирования разнообразных процессов, наиболее нацелен на научное компьютерное моделирование и хорошо приспособлен для обучения его основам. Отметим также универсальность пакета Mathematica, т.е. ориентированность его на самые разные области как чистой математики, так и прикладной. Все это сделало пакет Mathematica достаточно популярным в России. Ему посвящены многочисленные публикации, как общего учебного характера, например [14], [15], так и более научного и прикладного типа, например, А. Р. Есаян, В. Н. Чубариков, М. Н. Добровольский, «Творческая лаборатория математика».

Для реализации данного проекта кафедра дифференциальной геометрии и приложений подала заявку на специальный грант МГУ, выиграла его, в результате чего ректором МГУ академиком В. А. Садовничим были выделены средства, которые пошли на закупку лицензионного программного обеспечения. Закупка лицензионных версий Mathematica была организована сотрудниками кафедры и лаборатории при существенной помощи проректора, профессора А. В. Михалева, проректора МГУ Г. А. Савицкой, и. о. декана механико-математического факультета, профессора В. Н. Чубарикова, начальника планового отдела механико-математического факультета МГУ В. Г. Антоновой, специалиста Е. В. Новиковой. При активной поддержке проректора МГУ, генерального директора Центра новых информационных технологий МГУ, заведующего лабораторией вычислительных методов механико-математического факультета МГУ, профессора А. В. Михалева; и.о. декана механико-математического факультета, профессора В. Н. Чубарикова; заведующего кафедрой высшей алгебры, председателя Методического совета механико-математического факультета МГУ, профессора В. Н. Латышева; заведующего кафедрой вычислительной математики, профессора Г. М. Кобелькова; заместителя декана по учебной работе, профессора И. Н. Молодцова; диспетчера В. П. Шинеленко и многих других, после обсуждений на Деканате, Методическом Совете и Ученом Совете механико-математического факультета МГУ, Практикум был включен в учебный план и расписание занятий второго и третьего курсов (соответственно осенний и весенний семестры). Лабораторией вычислительных методов механико-математического факультета МГУ был выделен компьютерный класс на механико-математическом факультете для проведения Практикума. Силами сотрудников кафедры дифференциальной геометрии и приложений и лаборатории компьютерных методов в естественных и гуманитарных науках профессоров А. О. Иванова и А. А. Тужилина, при постоянной поддержке сотрудника лаборатории вычислительных методов механико-математического факультета МГУ Н. Н. Молчанова, на всех 20 компьютерах этого компьютерного класса была установлена лицензионная операционная система Windows XP, программа SteadyState, обеспечивающая безопасное функционирование персональных компьютеров многими пользователями, и, купленный у фирмы Softline, эксклюзивного дистрибьютера программного обеспечения фирмы Wolfram Research на терри-



тории России, пакет Mathematica самой современной версии 7.0.1. Также для Практикума был написан оригинальный курс лекций и составлен список задач, предназначенных для самостоятельного решения студентами с последующей сдачей на зачете в конце семестра. Печатной версией этого курса и является настоящая книга.

\*\*\*\*\*

Опишем теперь кратко содержание данной книги. Текст разбит на восемь глав, по четыре главы-лекции каждого семестра. В первой главе дается компактное введение в пакет Mathematica, а именно, рассказывается о наиболее важных принципах работы с пакетом, а также приводятся основные функции, необходимые для решения задач компьютерной геометрии. Во второй главе детально разбираются графические возможности пакета. Третья глава посвящена важному техническому аппарату пакета, которая делает возможным “оживить” как геометрические образы, так и, вообще, произвольные математические объекты, зависящие от параметров. Этот раздел называется Динамика. Наконец, в четвертой главе, соответствующей последней лекции первого семестра и называемой Детализация, рассказывается о «внутреннем устройстве» пакета и приводится описание многочисленных тонкостей, позволяющих сделать программирование в пакете Mathematica виртуозным. Следующий семестр начинается с двух лекций, описанных в пятой и шестой главах, которые посвящены работе со сплайнами. В седьмой главе рассказывается о средствах пакета Mathematica, предназначенных для работы с графами. В качестве приложений обсуждаются разнообразные задачи из комбинаторики и одномерной оптимизации. Восьмая глава посвящена тензорному исчислению на гладких многообразиях. Специально для этой главы А. О. Иванов и А. А. Тужилин разработали учебный пакет, позволяющий легко и наглядно решать многие стандартные задачи из этой области. Отметим, что все главы снабжены примерами решения задач, относящихся к теме занятия. Кроме глав-лекций, в книге приводятся образцы задач для самостоятельных занятий и на зачет.

Таким образом, суть практикума состоит в ознакомлении студентов, начиная со второго курса, с основными идеями современного геометрического компьютерного моделирования, которые позволяют сделать работу математика-исследователя, математика-прикладника и математика-педагога существенно более эффективной. Отметим, что студенты при прохождении практикума проявили высокую активность. Лучшие студенческие работы выставлены на сайте кафедры (<http://dfgm.math.msu.su>) и представляют несомненный интерес. Мы уверены, что привитый вкус к геометрическому моделированию, а также полученные ими навыки, будут безусловно полезны студентам в их будущей профессиональной деятельности в самых различных областях.

Заведующий отделением математики  
механико-математического факультета МГУ,  
заведующий кафедрой  
дифференциальной геометрии и приложений,  
академик РАН

А. Т. Фоменко

Заведующий лабораторией  
компьютерных методов  
в естественных и гуманитарных науках  
механико-математического факультета МГУ,  
профессор

А. А. Тужилин

Заместитель заведующего кафедрой  
дифференциальной геометрии и приложений,  
ученый секретарь кафедры,  
профессор

А. О. Иванов

# Литература

- [1] Н. Н. Голованов, Д. П. Ильютко, Г. В. Носовский, А. Т. Фоменко. *Компьютерная геометрия. Университетский учебник. Серия: Прикладная математика и информатика*. Издательский центр «Академия», Москва, 2006.
- [2] А. Т. Фоменко. *Наглядная геометрия и топология. (Математические образы в реальном мире)*. Издание 2-е. Издательство МГУ, Издательство ЧеРо, Москва, 1998.
- [3] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии*. Физматлит, Москва, 2004.
- [4] И. А. Володин, В. Е. Кузнецов, А. Т. Фоменко. О проблеме алгоритмического распознавания стандартной трехмерной сфер. *УМН*, 24:71–168, 1974.
- [5] А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьев, А. Т. Фоменко. *Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. Переработанное и дополненное издание*. Физматлит, Москва, 2004.
- [6] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко. Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий. *УМН*, 43:5–22, 1988.
- [7] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко. *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии*. МГУ, Москва, 1991.
- [8] А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Классификация минимальных скелетов с правильной границей. *УМН*, 51(4):157–158, 1996.
- [9] А. О. Иванов, А. А. Тужилин. О минимальных бинарных деревьях с правильной границей. *УМН*, 51(1):139–140, 1996.
- [10] А. О. Иванов, А. А. Тужилин. Геометрия выпуклых многоугольников и затягивающих их локально минимальных бинарных деревьев. *Матем. сборник*, 190(1):69–108, 1999.

- [11] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Том 1.* Издательский дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999.
- [12] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. *Курс дифференциальной геометрии и топологии. Издание 2-е, дополненное и переработанное.* «Факториал Пресс», Москва, 2000.
- [13] В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. А. Сарванов, Р. И. Тышкевич. *Лекции по теории графов.* Наука, Москва, 1990.
- [14] А. Н. Васильев. *Mathematica. Практический курс с примерами решения прикладных задач.* КОРОНА-Век ВЕК, 2008.
- [15] В. П. Дьяконов. *Mathematica 5/6/7. Полное руководство.* ДМК Пресс, 2009.
- [16] А. В. Болсинов, П. Рихтер, А. Т. Фоменко. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской. *Математический Сборник*, 191(2):3–42, 2000.
- [17] А. Т. Fomenko, T. L. Kunii. *Topological modeling for visualization.* Springer-Verlag, 1997.
- [18] А. Т. Fomenko, S. V. Matveev. *Algorithmical and Computer Methods in Three-Manifolds.* Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1997.
- [19] А. О. Ivanov, А. А. Tuzhilin. Non-trivial example of a boundary set in generalized Steiner problem constructed with the help of computer geometry and visualization. *Computer Graphics and Geometry internet journal*, 6(1), 2004.
- [20] D. Liu, G. V. Nosovskiy, O. Sourina. Effective clustering and boundary detection algorithm based on delaunay triangulation. *Pattern Recognition Letters (29)*, pages 1261–1273, 2008.
- [21] G. V. Nosovskiy, D. Liu, O. Sourina. Automatic clustering and boundary detection algorithm based on adaptive influence function. *Pattern Recognition (41)*, pages 2757–2776, 2008.
- [22] G. V. Nosovskiy, O. Sourina, D. Liu. Visual clustering and boundary detection of time-dependent datasets. In *Proc. of IEEE 2007 International Conference on Cyberworlds*, pages 54–60, Germany, 2007.