

А.Т.Фоменко:
наша кафедра
обращается к первокурсникам
и второкурсникам





Фоменко Анатолий Тимофеевич, дфмн, профессор, академик РАН, заведующий кафедрой. Руководитель проекта «Современные геометрические методы и их приложения» Росс. Научного Фонда.

Научные интересы: Многомерное вариационное исчисление, минимальные поверхности, геометрическая теория групп и алгебр Ли, симплектическая геометрия и топология, гамильтоновы динамические системы. Новое научное направление – теория топологической классификации интегрируемых динамических систем и их симметрий. Построение инвариантов, описывающих топологический тип и группы симметрий особенностей (бифуркаций) функций, гладких отображений и векторных полей. Руководит курсовыми, дипломными и диссертационными работами. Некоторые темы см. например, на сайте, в разделе «Наши диссертации». Результаты, получаемые в том числе студентами и аспирантами, применяются в геометрии, топологии, в математической физике и теоретической механике.



**Шафаревич Андрей Игоревич, дфмн,
профессор, член-корр. РАН.**

Декан мехмата МГУ.

**Руководитель проекта "Геометрические
асимптотики, интегрируемые системы и
квантование", поддержанного
Российским Научным Фондом.**

Научные интересы: математическая физика, геометрическое и асимптотическое квантование, геометрическая и асимптотическая теория уравнений в частных производных, спектральная теория. Теория квазиклассического квантования инвариантных многообразий гамильтоновых систем. Квантование комплексных многообразий и многообразий с особенностями. Спектральная геометрия операторов с сингулярными коэффициентами и операторов на сингулярных пространствах. Асимптотическая теория нелинейных уравнений в частных производных. Руководит курсовыми, дипломными и диссертационными работами.



Иванов Александр Олегович, дфмн, профессор, зам. заведующего кафедрой, зам. декана по науке. Руководитель индустриальным проектом **«Изучение метрики, структуры и размерности многообразий методами дифф. геометрии»** по применению геометрии к анализу данных.

Научные интересы: геометрические оптимизационные задачи (минимальные сети, минимальные заполнения), дискретная геометрия (геометрия многогранников, геометрическая теория графов), метрическая геометрия (геометрия пространств Александрова, геометрия групп), компьютерная геометрия, анализ данных. В течение многих лет вместе с профессором А.А.Тужилиным руководит исследовательским семинаром по геометрии экстремальных сетей, руководит курсовыми, дипломными и диссертационными работами. Некоторые актуальные исследовательские задачи можно найти на сайте кафедры (<http://dfgm.math.msu.su>) и лаборатории (<http://dcglab.uniya.ac.ru>).



Тужилин Алексей Августинovich, профессор, дфмн, заведующий лабораторией компьютерной геометрии. Научные интересы: метрическая геометрия, в том числе, геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа; геометрическая оптимизация, в частности, теория экстремальных сетей (минимальные деревья Штейнера, минимальные заполнения в смысле Громова, локально-минимальные сети); компьютерная геометрия. Задачи такого типа, решаемые в том числе студентами и аспирантами, имеют приложения в геометрии и топологии, в транспортных задачах и проектировании микросхем, в биоинформатике и теории эволюции. Тематика развивается совместно с профессором А.О.Ивановым. Список некоторых интересных задач в этой области см. в

<http://dfgm.math.msu.su/people/tuzhilin/part7.php>

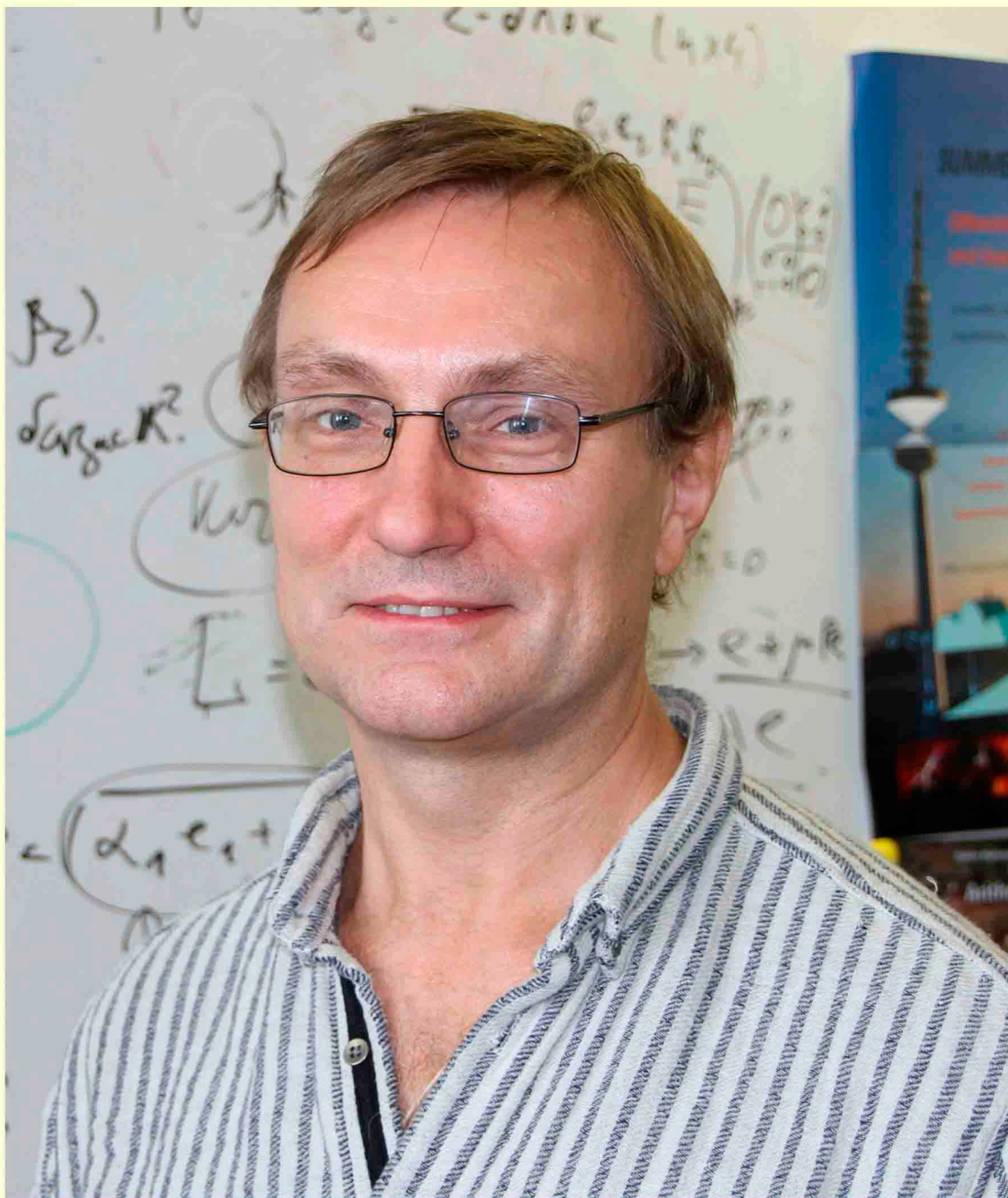


Ошемков Андрей Александрович, дфмн, профессор. Научные интересы: симплектическая и пуассонова геометрия, алгебры Ли, динамические системы, топология особенностей интегрируемых систем. Руководит студентами и аспирантами.



Кудрявцева Елена Александровна, дфмн, профессор, профессор РАН. Руководила научными проектами «Топология и алгебра теории интегрируемых систем: новые направления и приложения» (2017-2021) при поддержке Российского научного фонда. Трое учеников - стипендиаты фонда БАЗИС.

Научные интересы: Гамильтоновы системы – теория возмущений, небесная механика, топологические инварианты магнитных полей. Теоретическая геофизика. Интегрируемые гамильтоновы системы – симплектические и топологические инварианты, структурно устойчивые особенности. Маломерная топология – минимизация числа точек пересечения и совпадения, разветвленные накрытия. Теория особенностей: топология пространств функций и градиентоподобных потоков с заданными особенностями. Имеет 34 соавторов, 15 из которых - зарубежные математики, 10 - студенты, аспиранты и постдоки. Руководит курсовыми, дипломными и диссертационными работами.



Болсинов Алексей Викторович, дфмн, профессор. Научные интересы:

1) Интегрируемые гамильтоновы системы: интегрируемые геодезические потоки, алгебраическая интегрируемость, топологические инварианты интегрируемых систем, топологические препятствия интегрируемости, интегрируемые волчки в динамике твердого тела, согласованные пуассоновы структуры и бигамильтоновы системы. 2) Особенности: особенности отображения момента интегрируемых систем, их топологические и симплектические инварианты, алгоритмическая классификация, особенности лиувиллевых слоений. 3) Группы Ли и алгебры Ли: динамические системы на группах Ли и однородных пространствах, лиевы пучки, гамильтонова редукция, гамильтоновы системы на алгебрах Ли. 4) симплектическая геометрия и риманова геометрия.



Жеглов Александр Борисович, дфмн, профессор. Научные интересы:

Исследования в области алгебры, алгебраической геометрии, алгебраической теории чисел и их приложениях к теории гамильтоновых динамических систем. Одно из актуальных направлений исследований – развитие и обобщение теории, связанной с решениями уравнения Кадомцева-Петвиашвили.



Ведюшкина (Фокичева) Виктория Викторовна, д.ф.м.н., профессор. Лауреат Премии правительства Москвы для молодых ученых 2019 года, Медали РАН для молодых ученых 2020, Шуваловской премии МГУ 2021. Руководит проектом "Обобщенные интегрируемые билиарды: их топологические свойства и квазиклассические асимптотики соответствующих квантовых систем" при поддержке Росс. Научного Фонда. Научные интересы: интегрируемые гамильтоновы системы, теория математического билиарда, маломерная топология. Обнаружила новые классы интегрируемых билиардов – топологические билиарды и билиардные книжки. Дала полную классификацию топологических билиардов. Оказалось, что многие важные эффекты, наблюдаемые в сложных проблемах физики и механики, наглядно и эффективно моделируются системами на подходящих «билиардных книжках». Руководит студентами и аспирантами, семинаром по теории билиардов



Пржиялковский Виктор Владимирович, д.ф.-м.н., профессор. Лауреат премии правительства Москвы для молодых ученых 2019 г. Руководит проектом в рамках конкурса Junior Leader фонда «БАЗИС».

Научные интересы: бирациональная геометрия, многообразия Фано, группы автоморфизмов многообразий, рациональность, взвешенные полные пересечения, зеркальная симметрия.

Является соруководителем научно-исследовательского семинара им. В.А. Исковских (МГУ-МИАН). Работает в МИАН (ведущий научный сотрудник) и ВШЭ (заместитель заведующего лабораторией зеркальной симметрии).



Попеленский Федор Юрьевич,
кфмн, доцент, ученый секретарь
кафедры. Научные интересы:
алгебраическая топология,
гомологическая алгебра,
некоммутативная геометрия, К-
теория, компьютерная геометрия,
динамические системы.



Носовский Глеб Владимирович, кфмн, доцент. Научные интересы: Теория управления стохастическими процессами на многообразиях, нелинейные дифференциальные уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, компьютерная геометрия, финансовая математика, прикладная статистика, анализ данных. См. подробнее на сайте кафедры.



Ильютко Денис Петрович, кфмн, доцент. Работает на кафедре с 2003 года и с 2011 года в должности доцента. В 2005 году защитил кандидатскую диссертацию «Геометрия локально минимальных и экстремальных сетей в нормированных пространствах» по специальности 01.01.04. Научные интересы: вариационные задачи, в частности проблема Штейнера; маломерная топология и теория узлов; дискретная математика; компьютерная геометрия.



Никонов Игорь Михайлович, кфмн, доцент. Научные интересы: некоммутативная геометрия, вариационное исчисление и маломерная топология. Изучение некоммутативных характеристических классов. Исследование комбинаторных инвариантов узлов. Определение геометрических свойств экстремальных сетей в нормированных пространствах. Для решения подобных задач привлекаются средства геометрии, топологии, алгебры и комбинаторики.



Шаругин Георгий Игоревич, кфмн, доцент. Научные интересы: Некоммутативная геометрия, К-теория (топологическая и C^* -алгебр), характеристические классы векторных расслоений и других объектов. Циклические и хохшильдовы гомологии и когомологии, их вариации и применения. Деформационное квантование, формальность, высшие гомотопические операции, операды.

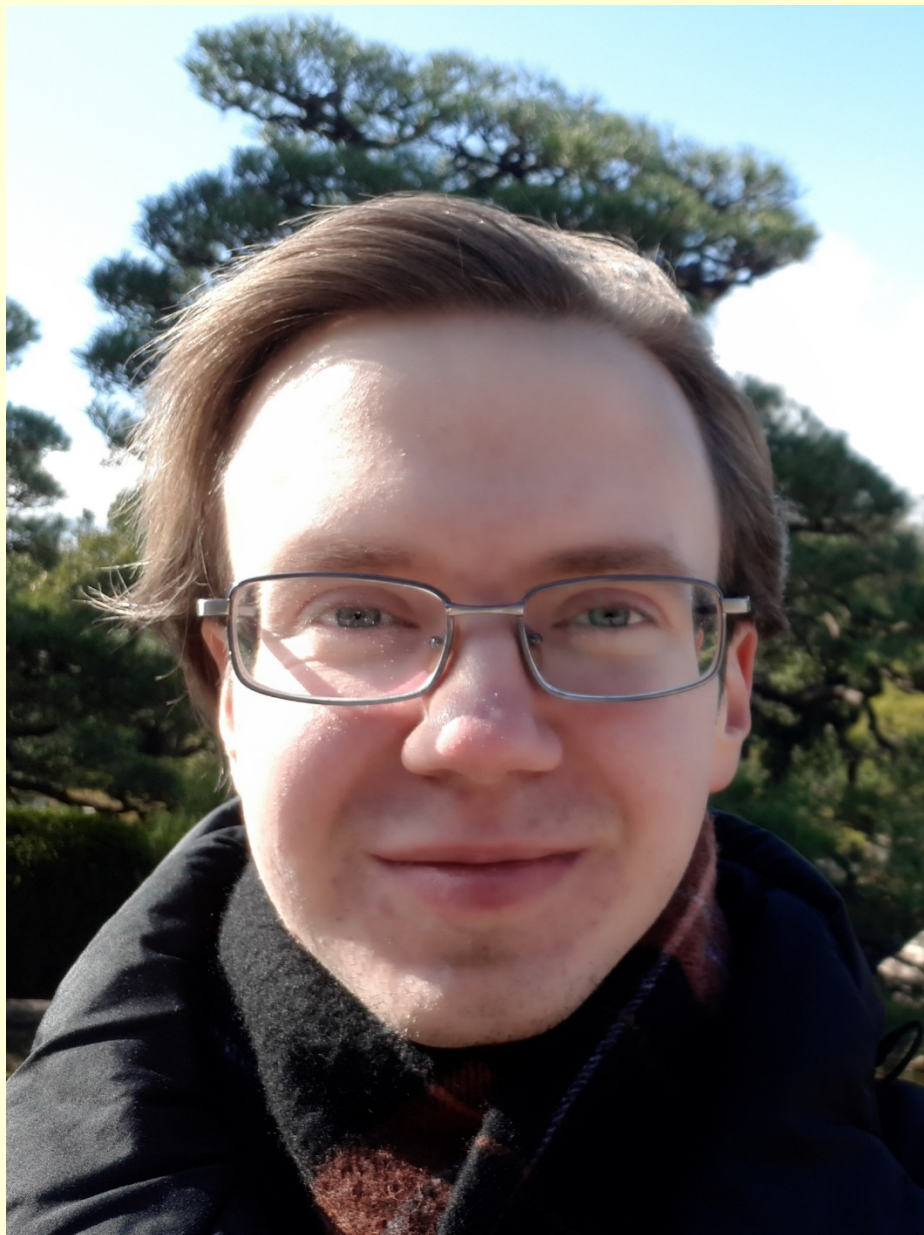


Коняев Андрей Юрьевич, кфмн, доцент. Создатель и издатель научно-популярного издания N+1. Руководитель проекта «Особенности интегрируемых систем» при поддержке Московск. центра фундаментальной и прикладной математики.

Научные интересы: Алгебра и геометрия интегрируемых систем, алгебры Ли, пуассонова и бигамильтонова геометрии. Вопросы глобального строения симплектических слоений. Классификация алгебр Ли с орбитами малой размерности, дискриминант спектральной кривой и бифуркационная диаграмма отображения момента на классических комплексных алгебрах Ли. Геометрия Нийенхейса (совм. с А.В.Болсиновым и В.С.Матвеевым)



Толченников Антон Александрович, кфмн, ассистент. Научные интересы: спектральные свойства операторов на декорированных графах и асимптотическая теория уравнений в частных производных.



Кибкало Владислав Александрович,
кфмн, ассистент. Финалист Конкурса
Мебиуса за 2021 и Конкурса фонда
«Талант и Успех» для молодых
математиков России за 2021.
Руководитель проекта "Интегрируемые
системы динамики в неевклидовых
пространствах и топология
некомпактных слоений" при поддержке
Росс. Научного Фонда.

Научные интересы:

- теория интегрируемых гамильтоновых систем, близкие вопросы из геометрии, механики, алгебры, теории особенностей.
 - механика в псевдо-евклидовых пространствах, на алгебрах Ли.
 - интегрируемые билиарды и маломерная топологии, геодезические потоки
 - вопросы применения геометрических методов к задачам из приложений, в том числе из анализа данных (проверка гипотезы о многообразии для выхода некоторой нейросети).
- Руководит студентами, соруководитель семинара по теории билиардов.



**Белозеров Глеб
Владимирович,
ассистент кафедры.**
Область научных
интересов:
интегрируемые
гамильтоновы системы,
интегрируемые
бильярды, маломерная
топология.

Интегрируемые системы и билиарды.

Топология, геометрия, симметрии, особенности.



А.Т.Фоменко



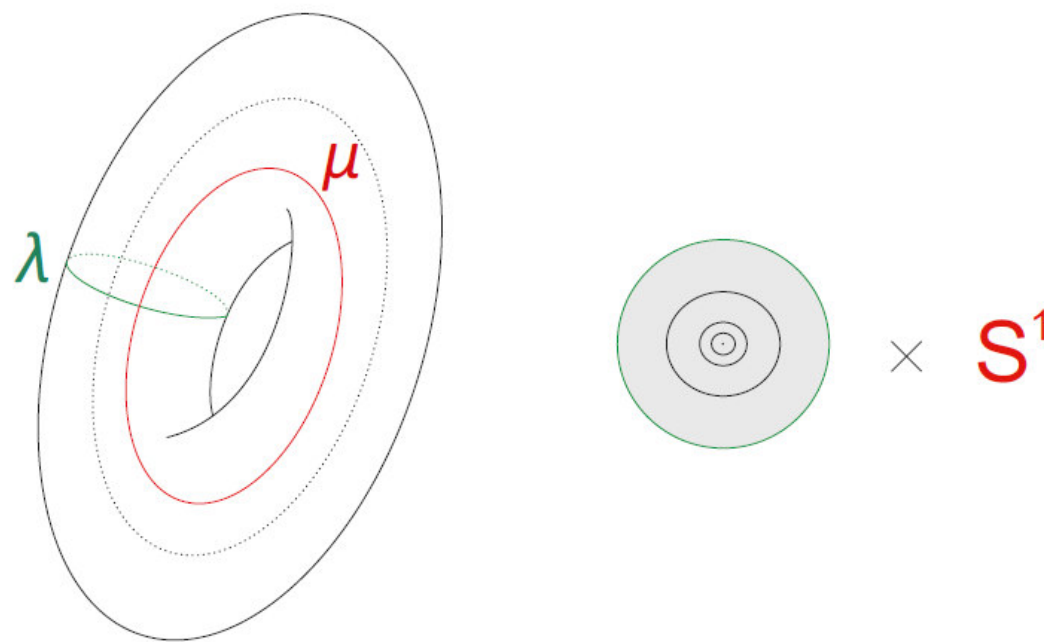
В.В.Ведюшкина



В.А.Кибкало



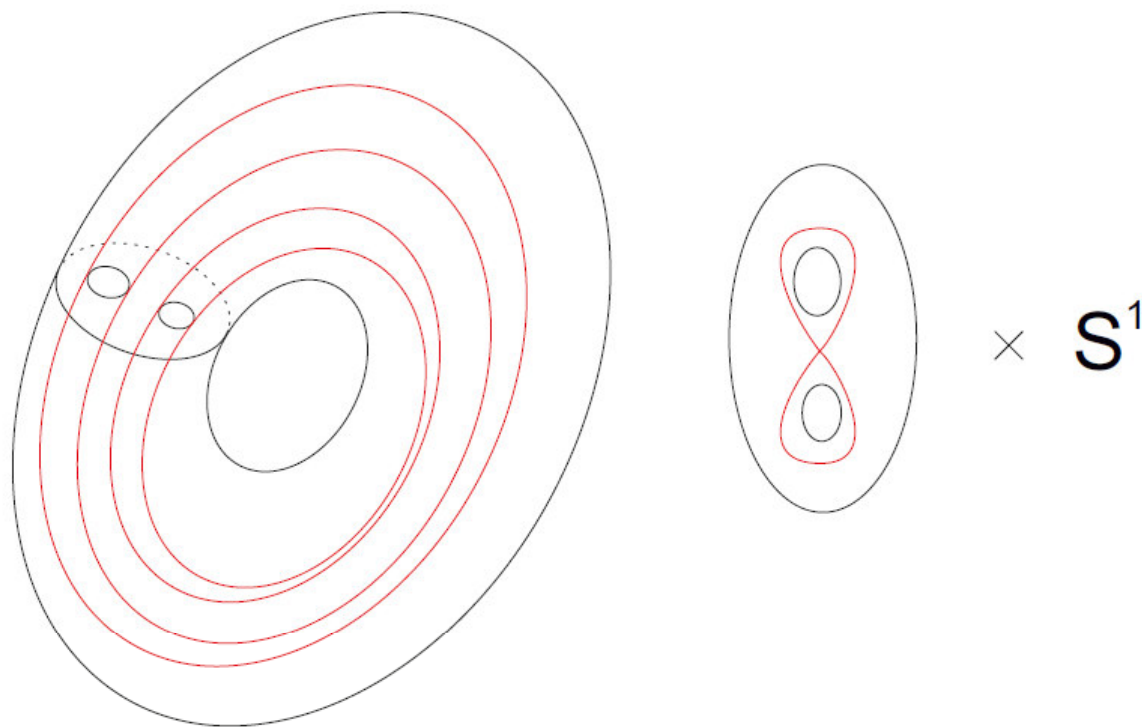
Г.В.Белозеров



Склейка двух полноторий по матрице

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ гомеоморфна прямому произведению $S^1 \times S^2$;
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ гомеоморфна трехмерной сфере S^3 ;
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ гомеоморфна проективному пространству RP^3 .

Из полнотория выброшены два параллельных полнотория.



Получилось 3-мерное многообразие с краем, состоящим из трех двумерных торов. Приклеим к каждому такому тору свое полноторие по какому-нибудь гомеоморфизму граничного тора. Получится новое 3-многообразие. Этот процесс можно продолжать.

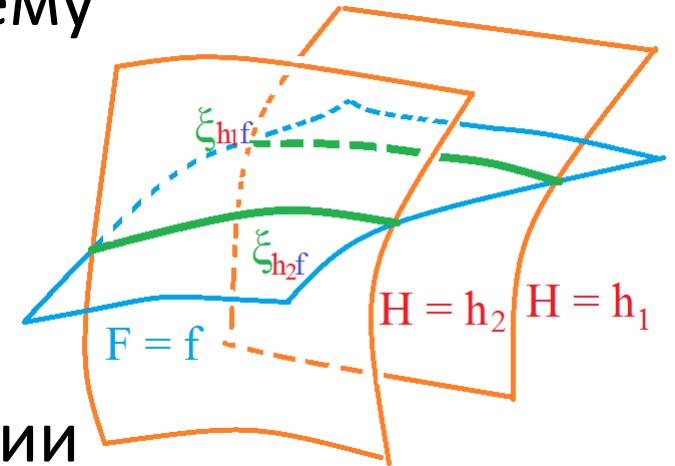
Так получается богатый класс 3-многообразий – т.н. “граф-многообразия”.

Топология и механика

- **Гамильтоновы уравнения** на $R^{2n}(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$: строим по энергии $H(\vec{x}, \vec{v})$ – динамическую систему

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x, v)}{\partial v}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial H(x, v)}{\partial x},$$

- Если в R^4 две функции H, F постоянны вдоль решений $(x(t), v(t))$, то решение целиком лежит на пересечении

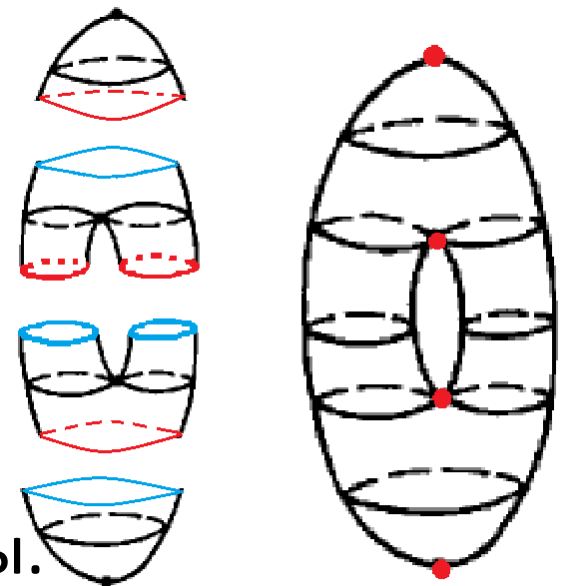


$$\xi_{h,f} = \{H = h\} \cap \{F = f\}$$

- **На практике:** для почти всех (h, f) непустое пересечение состоит из торов $T^2 = S^1 \times S^1$. **Теорема Лиувилля.**

- **Бифуркации** (перестройки) торов.

- **Особые точки:** где dH, dF линейно зависимы.



- Невырожденность: обобщение « $\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow$ см. знак $\frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0$ »

Лиувиллева (топологическая) эквивалентность

- Лиувиллева эквивалентность есть эквивалентность замыканий почти всех решений, так как в известных случаях, почти все торы Лиувилля являются нерезонансными.
- Инвариант — меченая молекула Фоменко–Цишанга, т.е. конечный граф Роба, оснащенный числовыми метками и типами атомов-бифуркаций (в вершинах графа).
- Инвариант классифицирует системы: две системы с 2 степенями свободы лиувиллево эквивалентны, если и только если их инварианты Фоменко-Цишанга совпадают
- Инвариант позволяет устанавливать не только является ли особое решение устойчивым/неустойчивым, но и описывает в топологических терминах поведение регулярных траекторий, близких к особому слою.

Геодезический поток на квадриках

- Уравнение геодезических

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{\alpha k}^i \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$$

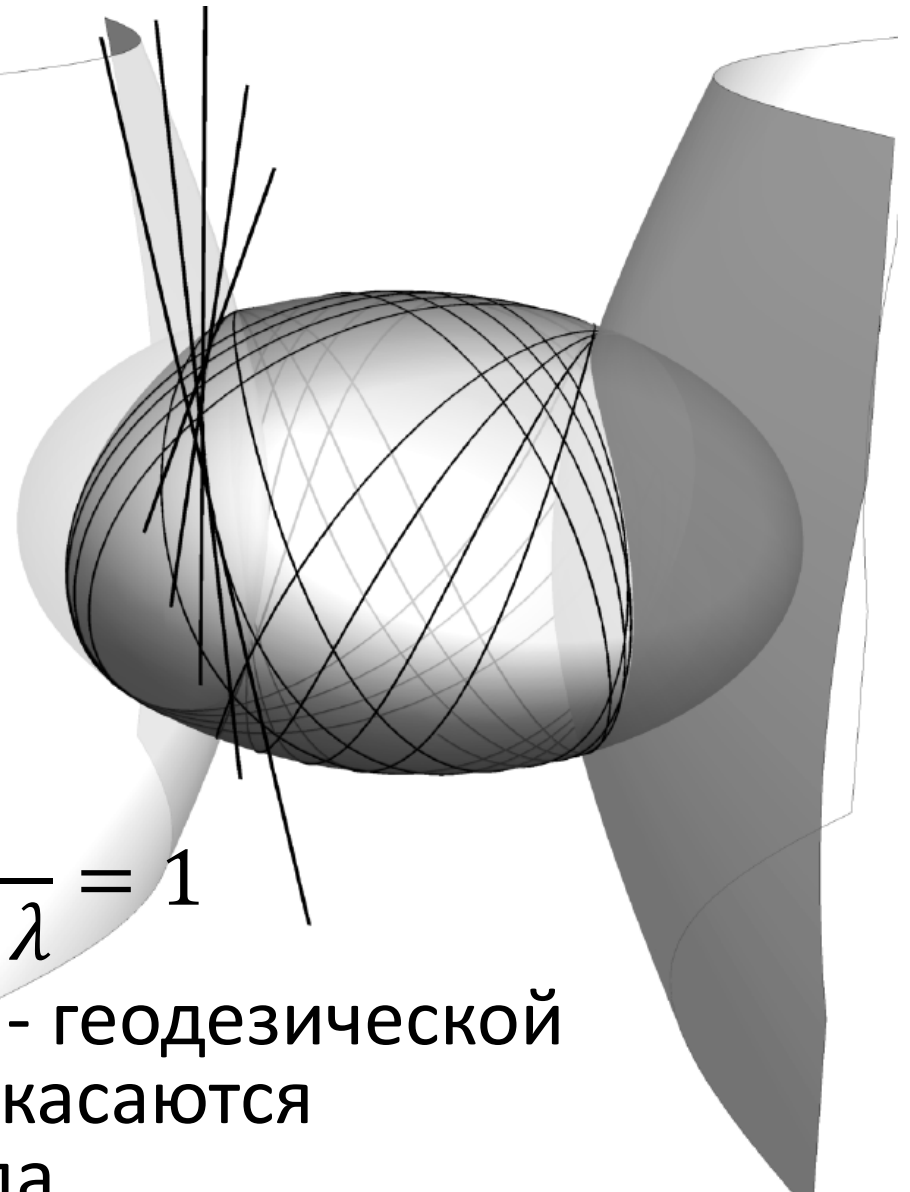
- Геодезический поток как гамильтонова система:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij} p_i p_j$$

- Софокусные квадрики в R^3

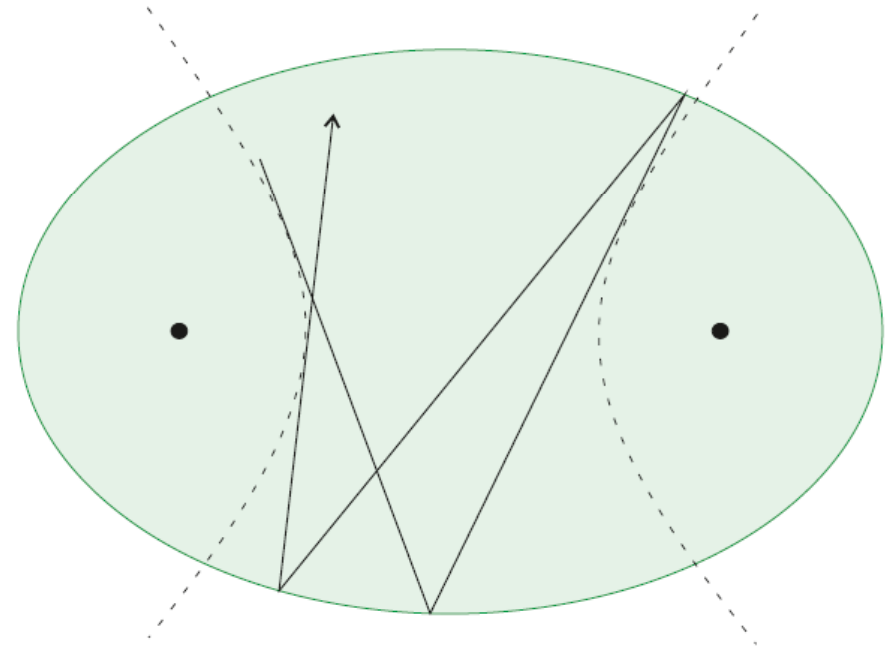
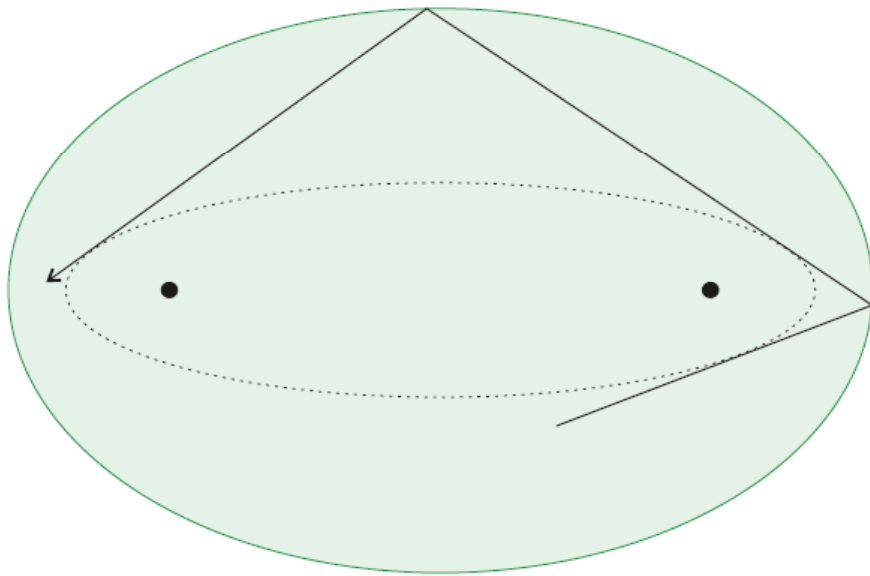
$$\frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} + \frac{z^2}{c - \lambda} = 1$$

Вектора скорости траектории - геодезической (на эллипсоиде $\lambda = 0$) всегда касаются фиксированного гиперboloида из того же софокусного семейства

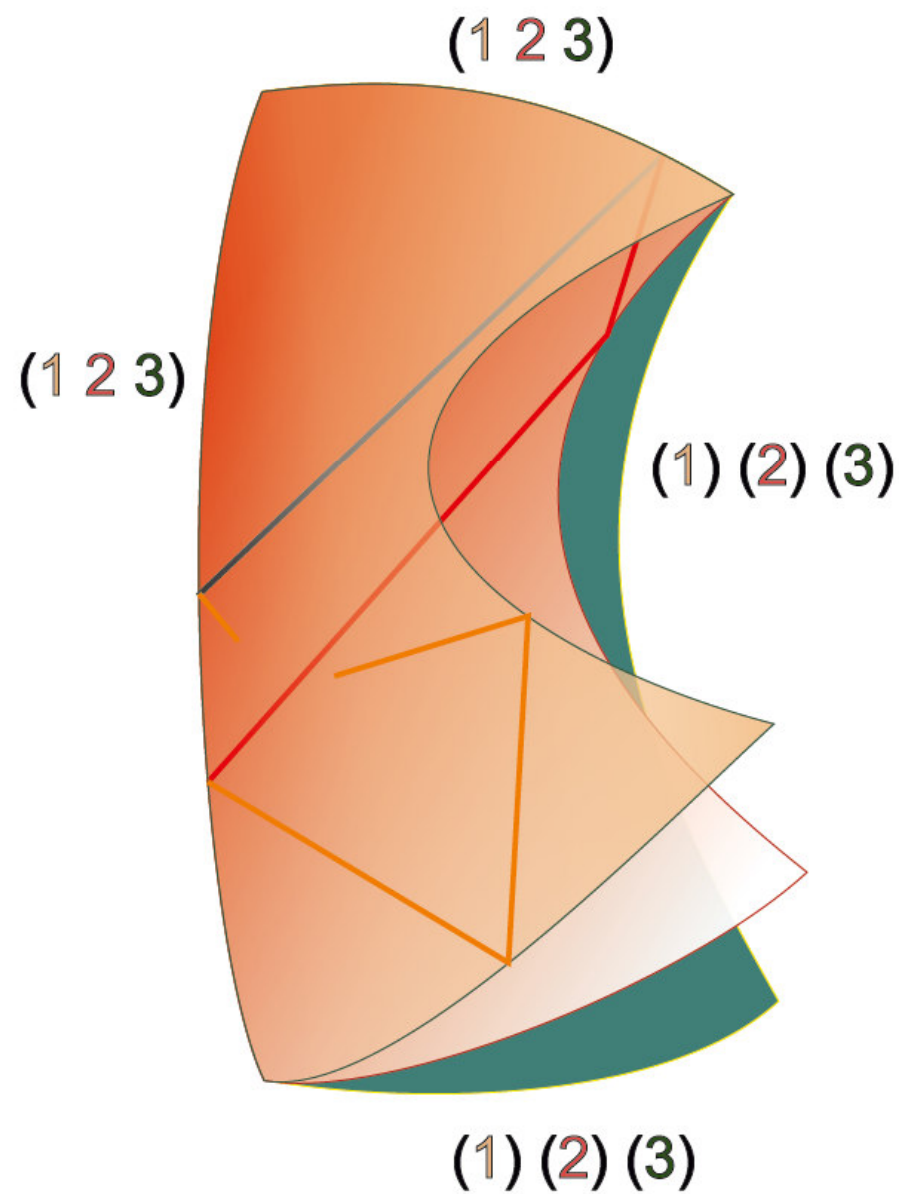
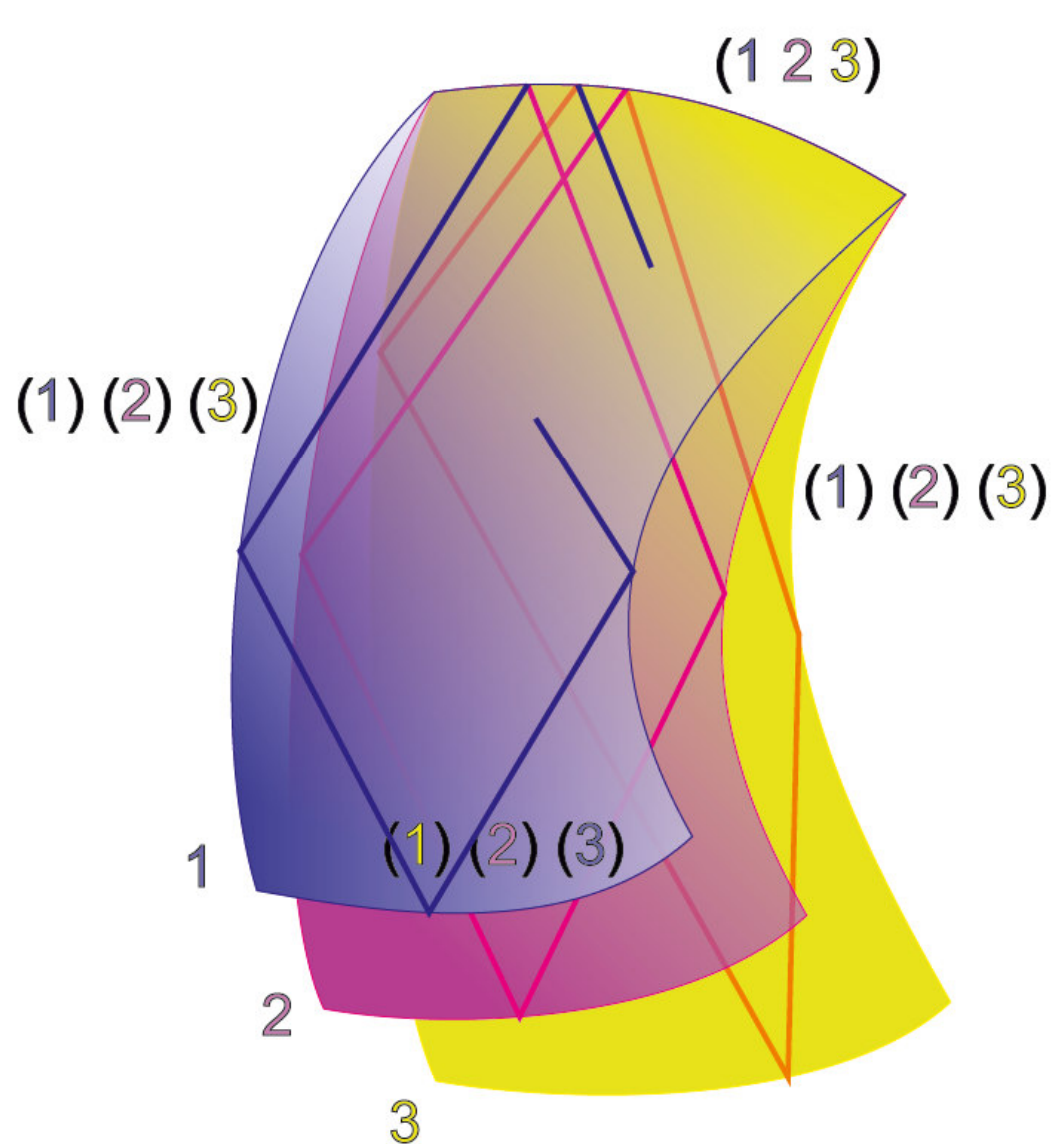


Биллиард в эллипсе интегрируем:

Звенья траектории лежат на прямых, касательных к некоторому эллипсу или к некоторой гиперболе, софокусных с граничным эллипсом.



Биллиардная книжка



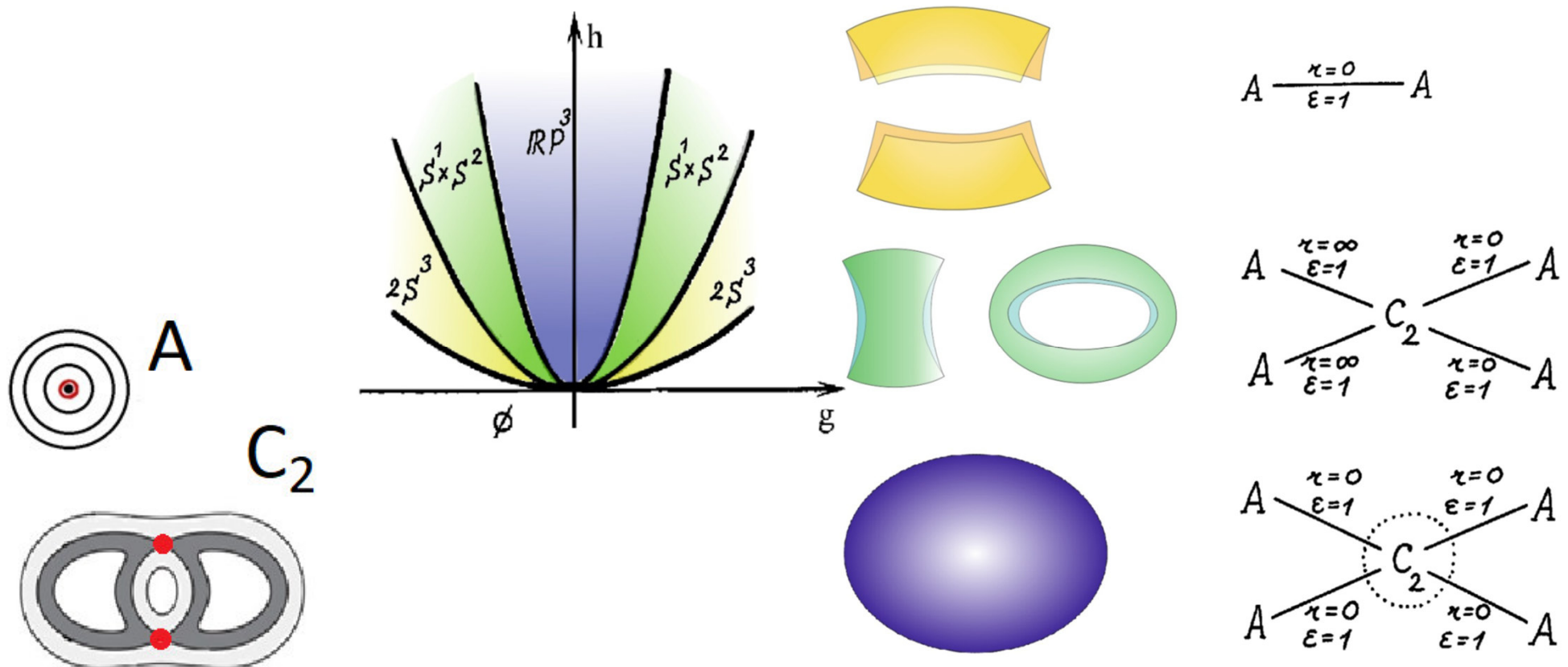
Волчок Эйлера, инварианты и билиарды

Волчок Эйлера – тв. тело, закрепл. шарниром в центре масс.
В разных зонах энергии H разные инварианты-молекулы.

Эквивалентен геодезическому потоку на эллипсоиде.

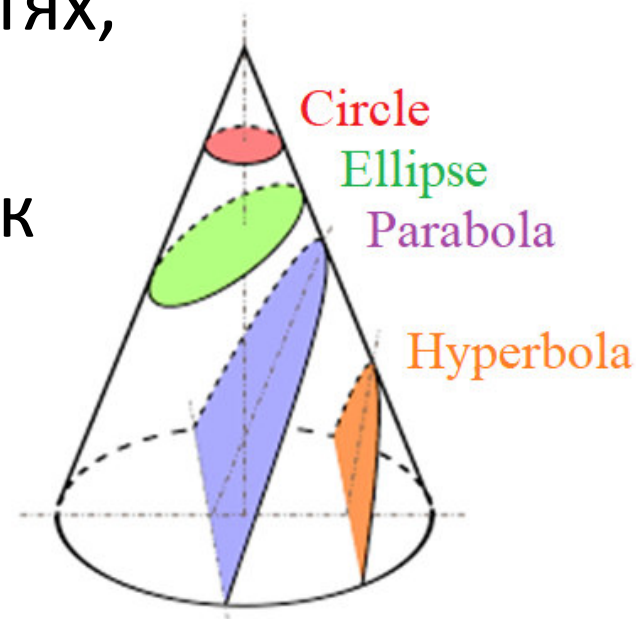
Софокусные билиарды на CW-комплексах: **моделируют** их.

Атомы A – устойчивое вращение вокруг большой, малой осей инерции. Атом C_2 – неустойчивое вращение, вокруг средней.



Открытые задачи, направления

- Топологический анализ систем механики и матем. физики, их аналогов для разных алгебр Ли
- Изучение слоений с некомпактными слоями: бифуркации слоев могут происходить без особых точек.
- Комбинация обобщений билиардов: CW-комплексы, потенциал, метрика, проскальзывание вдоль границы
- Движение частицы по квадракам в многомерном пространстве, ограниченных ими областях, пересечениям квадрак.
- Изучение коммутирующих перестановок для 1-клеток (корешков) книжек, их влияния на топологию слоения.



Геометрия и математическая физика.



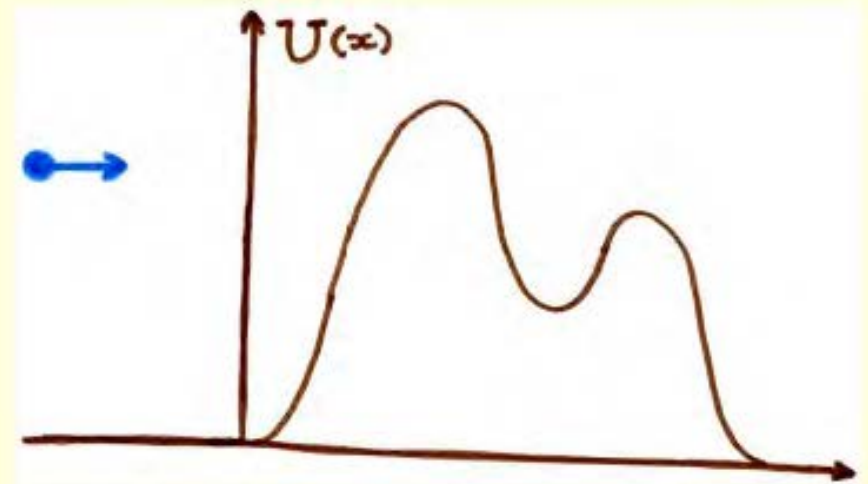
А.И.Шафаревич



А.А.Толченников

Пример 1. Комплексная геометрия в квантовой механике

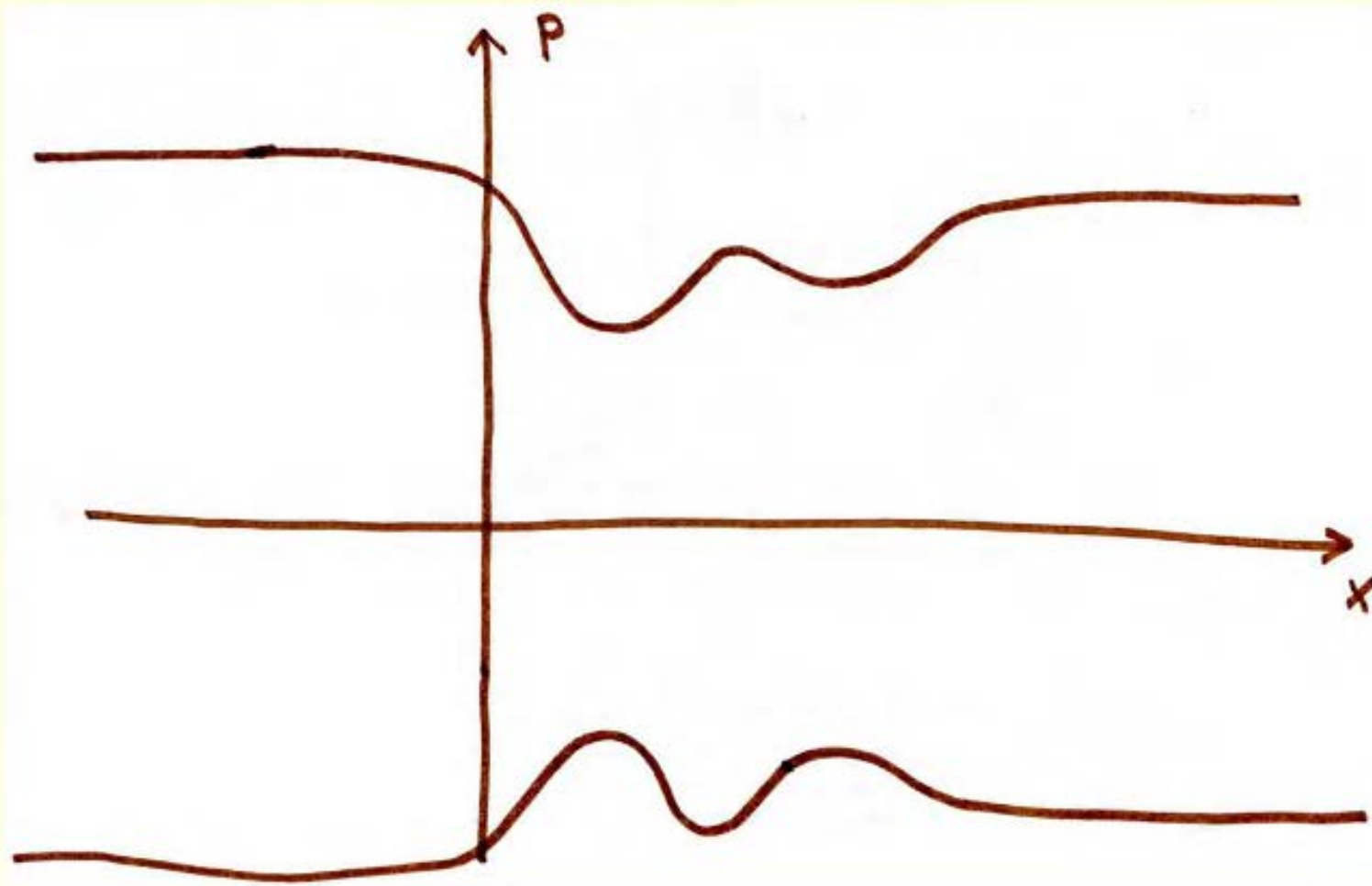
Одномерное движение классической частицы (шарик). Силы (потенциальная энергия) сосредоточены на отрезке.



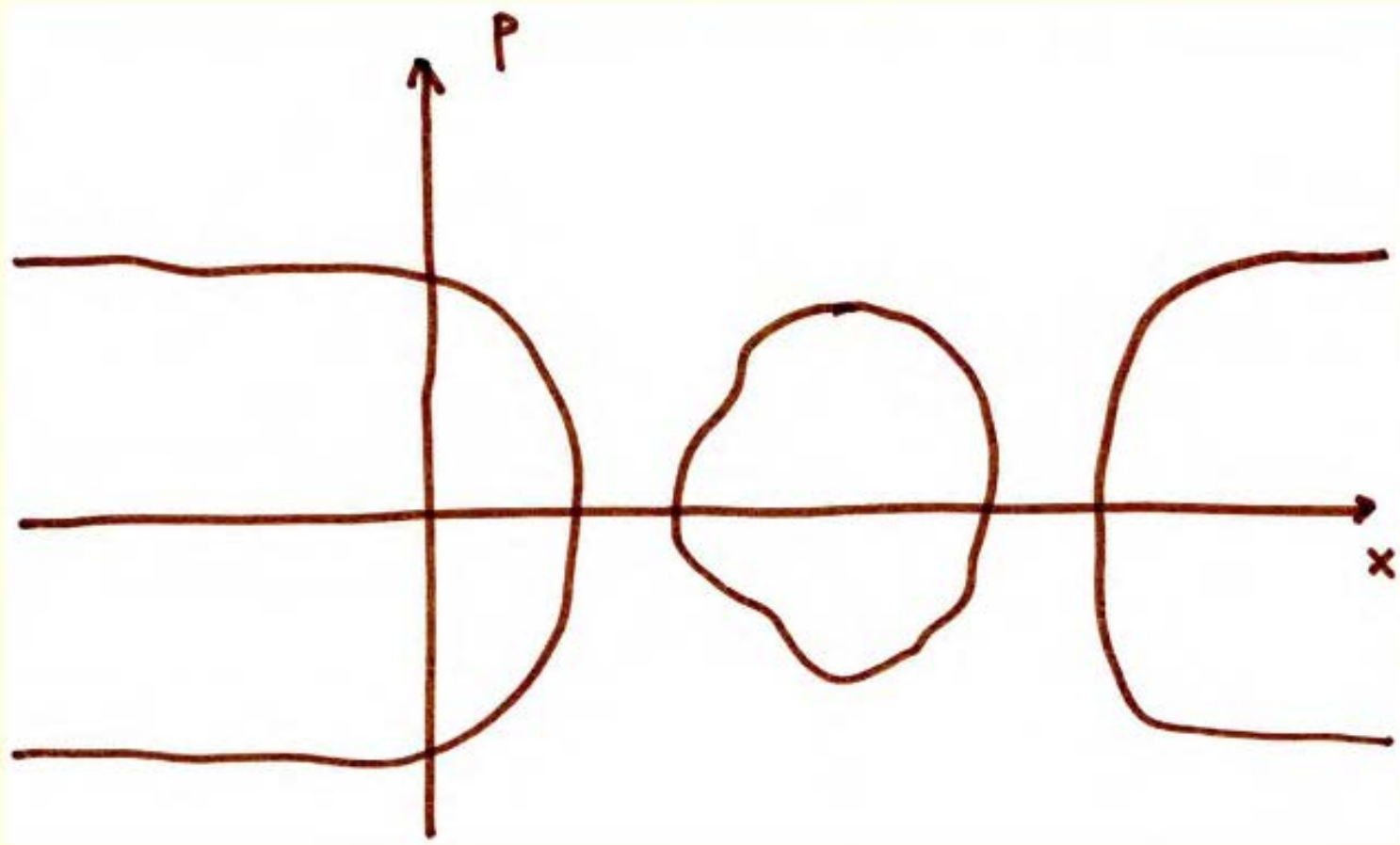
Поведение шарика определяется геометрией кривой постоянной энергии

Прохождение: $E > \max U(x)$

$$\frac{p^2}{2} + U(x) = E$$



Отражение: $E < \max U(x)$

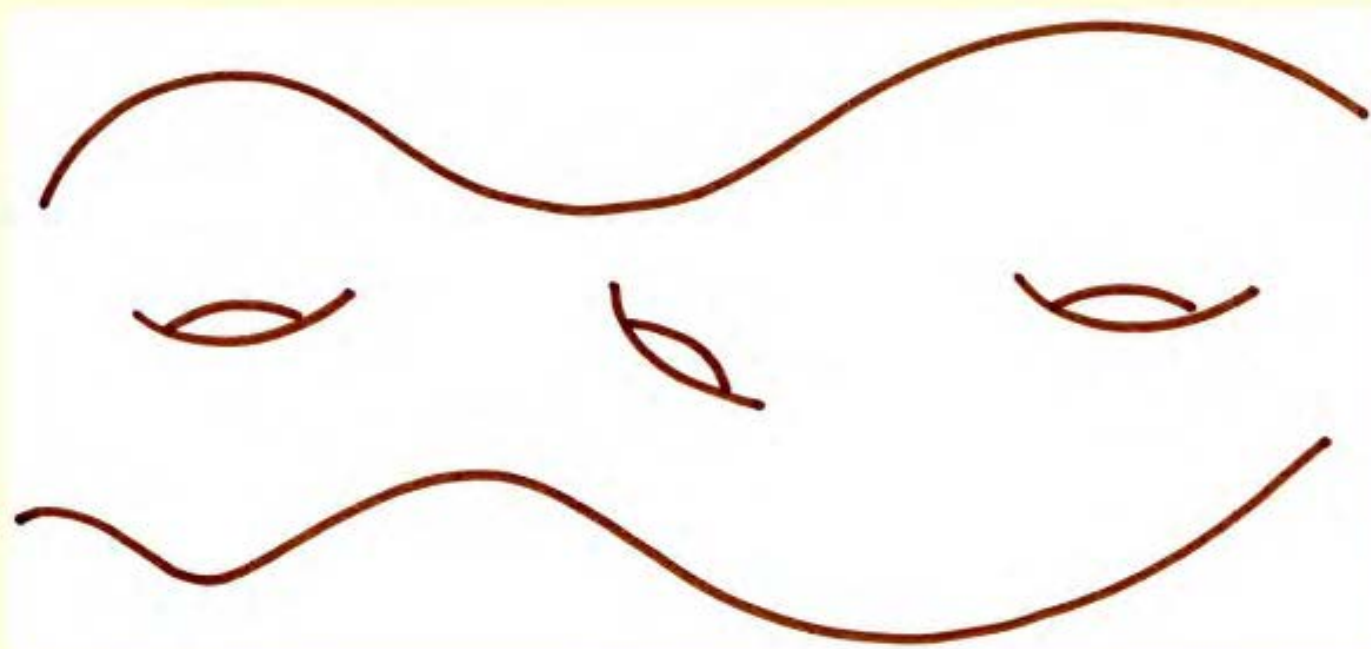


Движение квантовой частицы (электрона): геометрия комплексной кривой постоянной энергии

$$x = x_1 + ix_2 \quad p = p_1 + ip_2$$

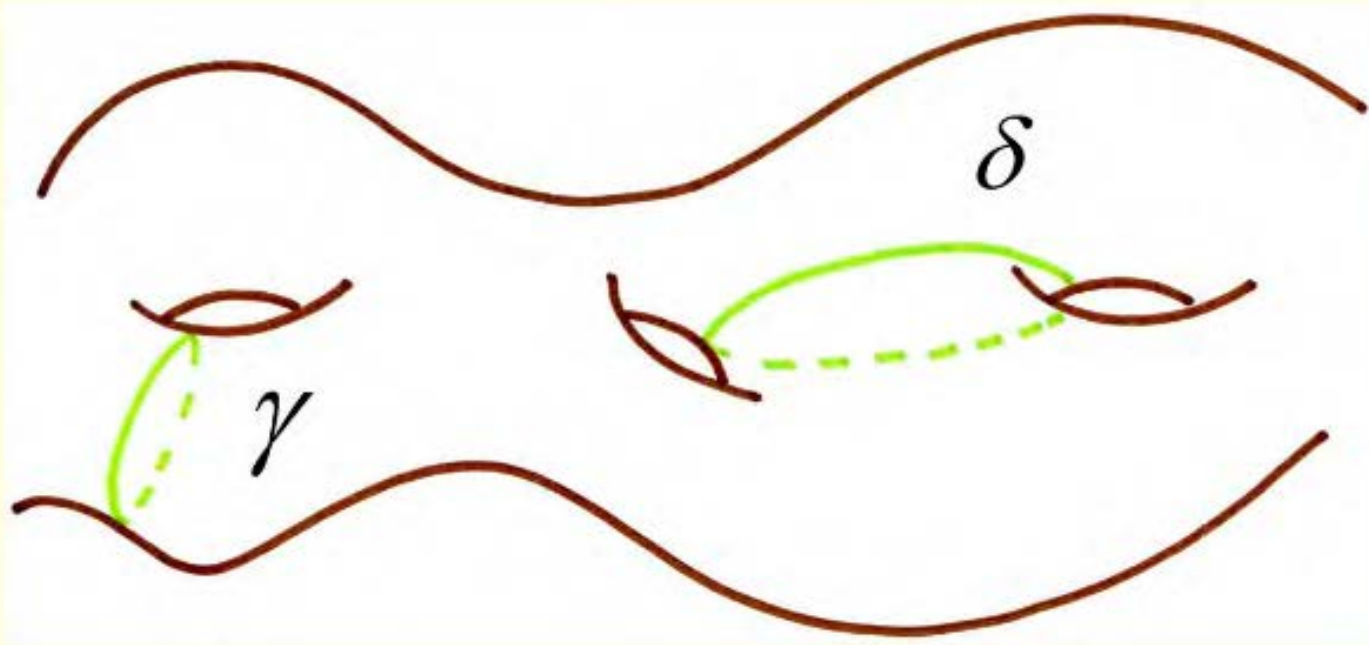
$$\frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) + \operatorname{Re} U = E \quad p_1 p_2 + \operatorname{Im} U = 0$$

Двумерная поверхность в четырехмерном пространстве



Ненулевая вероятность отражения и ненулевая вероятность прохождения.

Вычисление вероятностей: интегралы по циклам на поверхности.



В ситуации общего положения

$$|\tau|^2 = e^{-\frac{\rho}{h}} (1 + O(h))$$

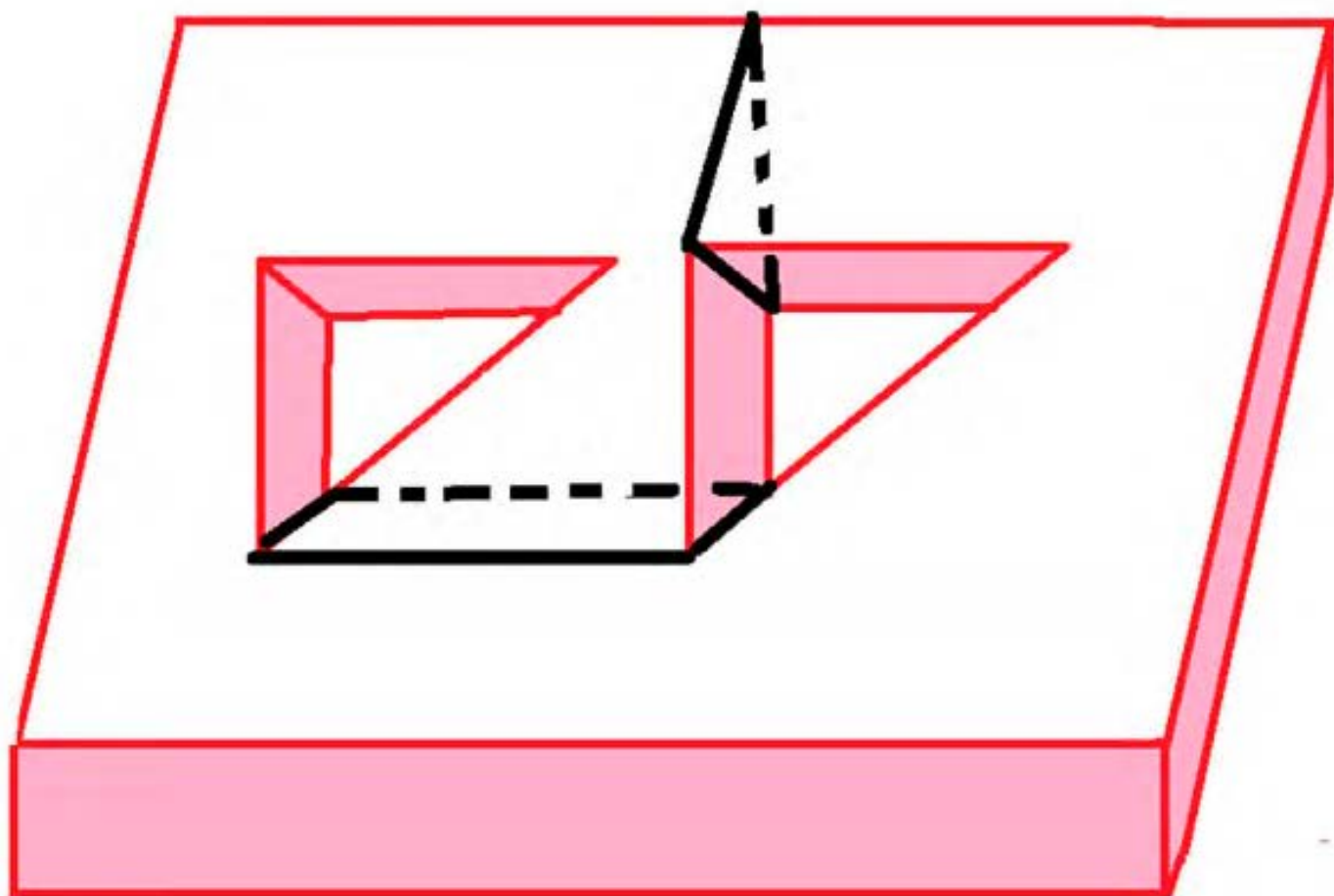
$$\rho = \operatorname{Im} \int_{\gamma} p dx$$

Резонансное туннелирование: если

$$\frac{1}{2\pi h} \int_{\delta} p dx = m + \frac{\mu}{4}, \text{ то}$$

$$|\tau| = 1 + O(h)$$

Те же интегралы: длины замкнутых геодезических на многогранной поверхности.



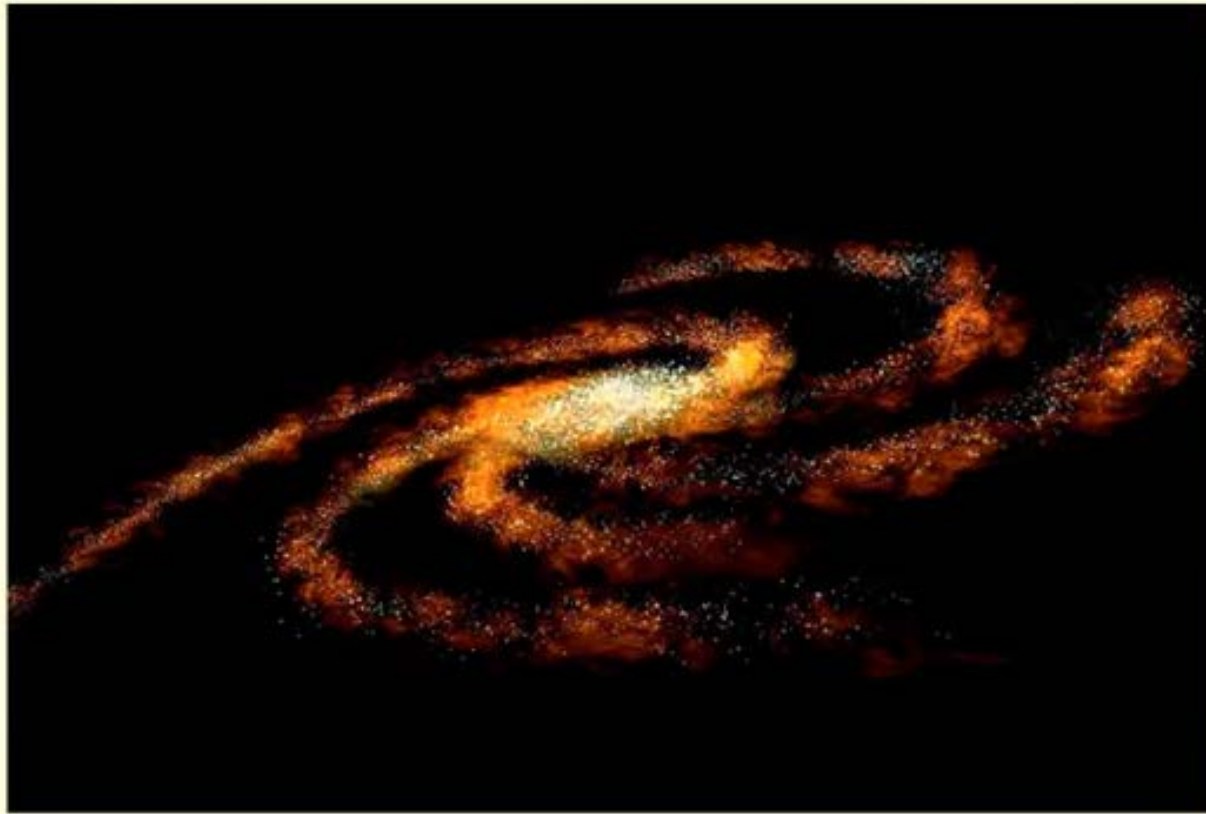
Пример 2. Магнитные поля в галактиках и звездах



Туманность Андромеды



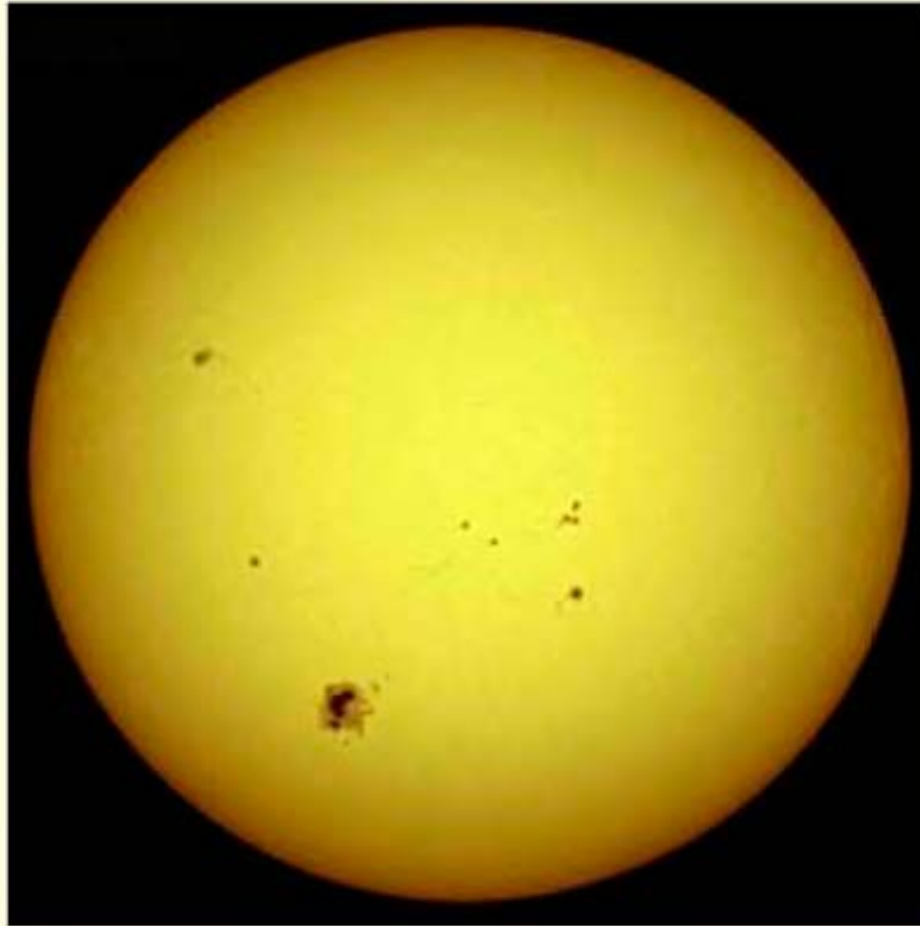
Млечный путь



Галактика «Скульптор»



Магнитные поля в фотосфере и пятна на Солнце



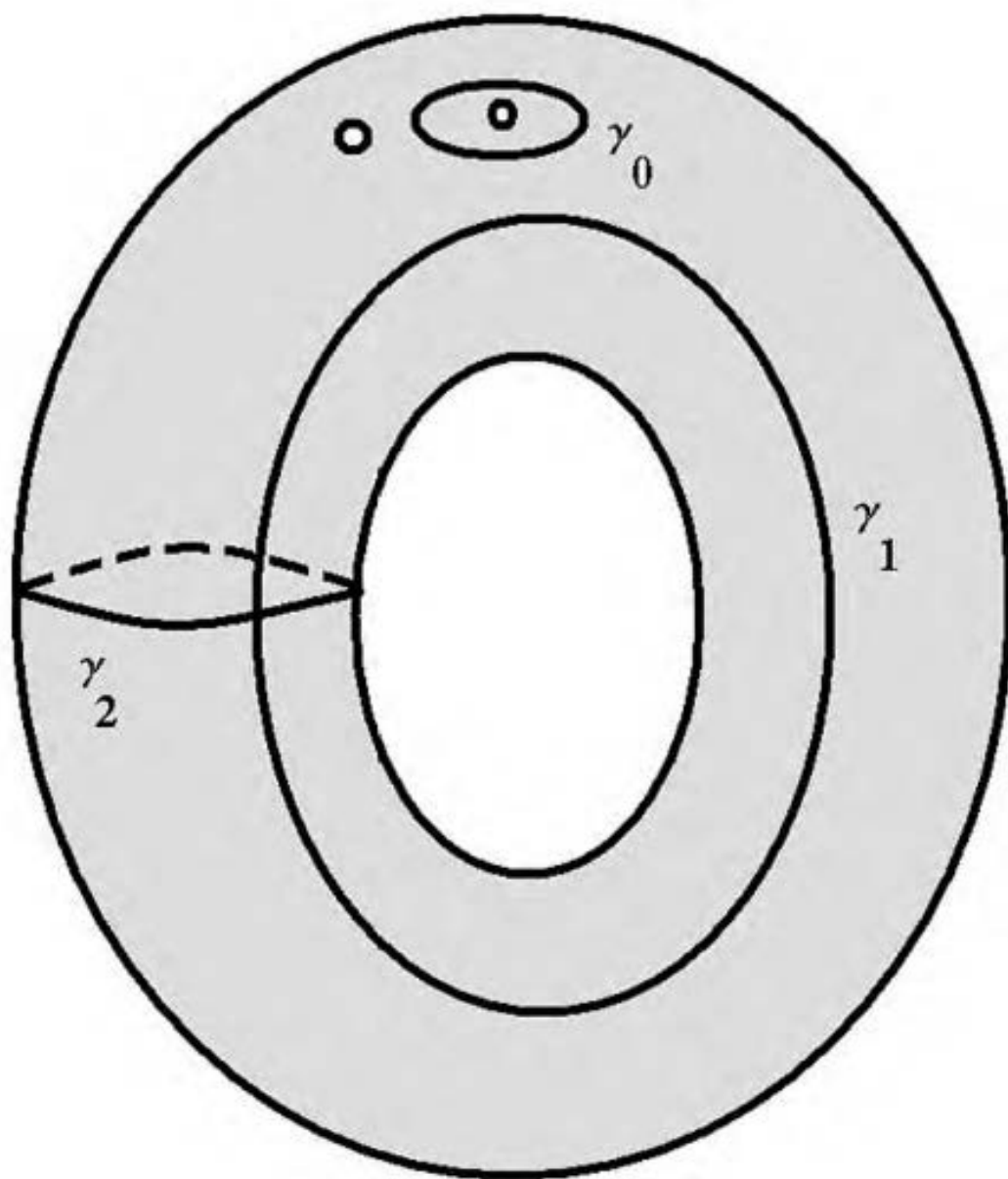
**Рост и частота магнитного поля:
спектр дифференциального
оператора на двумерной поверхности.**

$$LB = \varepsilon^2 \Delta B - \{v, B\} = \lambda B$$

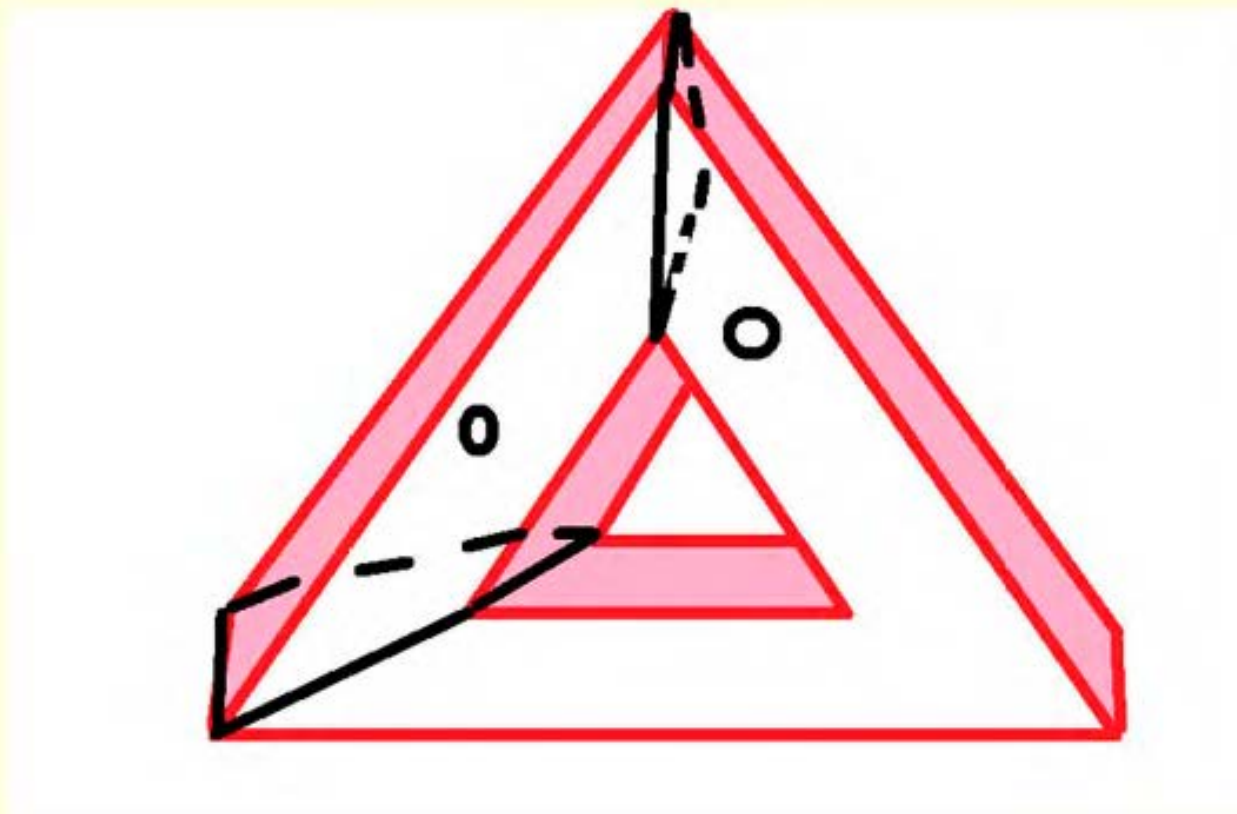
$$(\nabla, v) = (\nabla, B) = 0$$

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad x \in M -$$

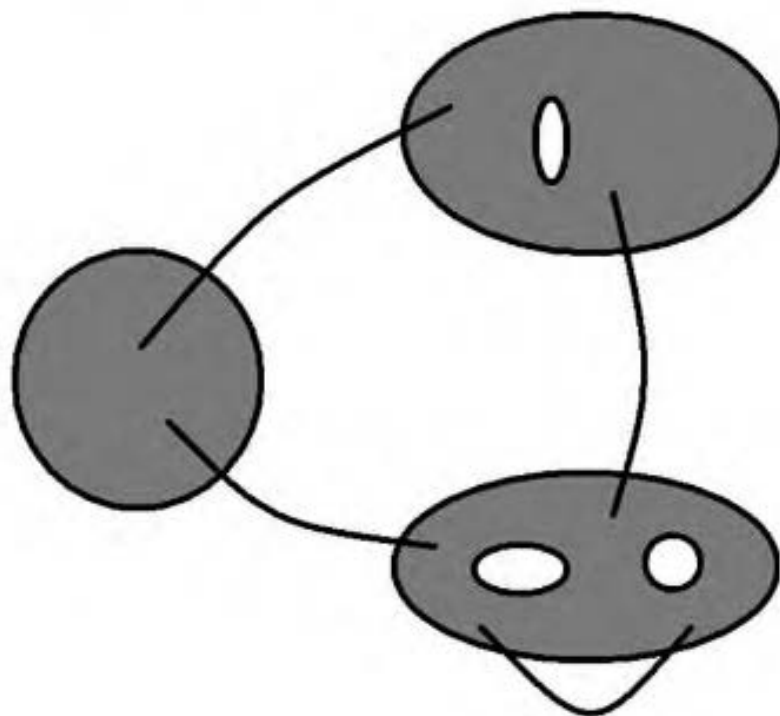
**двумерная поверхность галактики или
звезды**

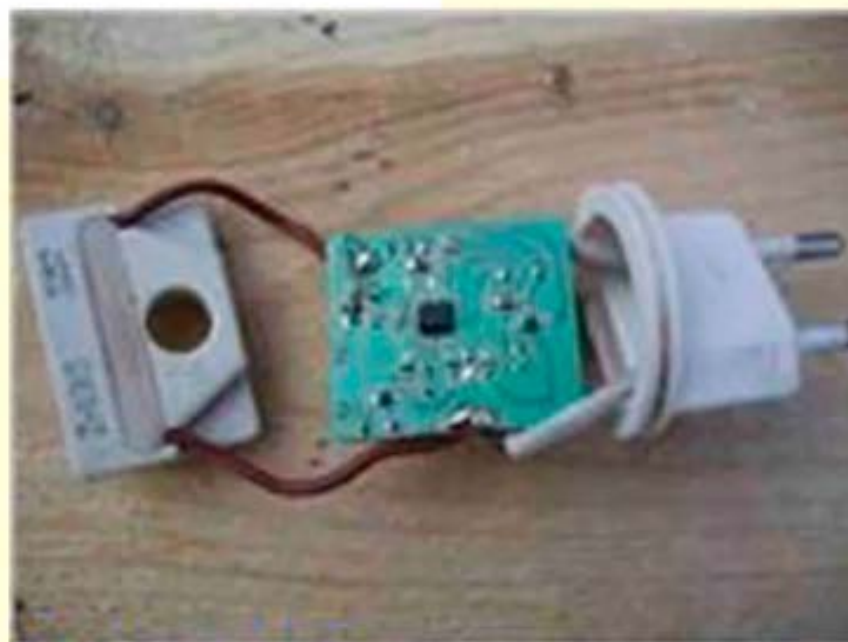
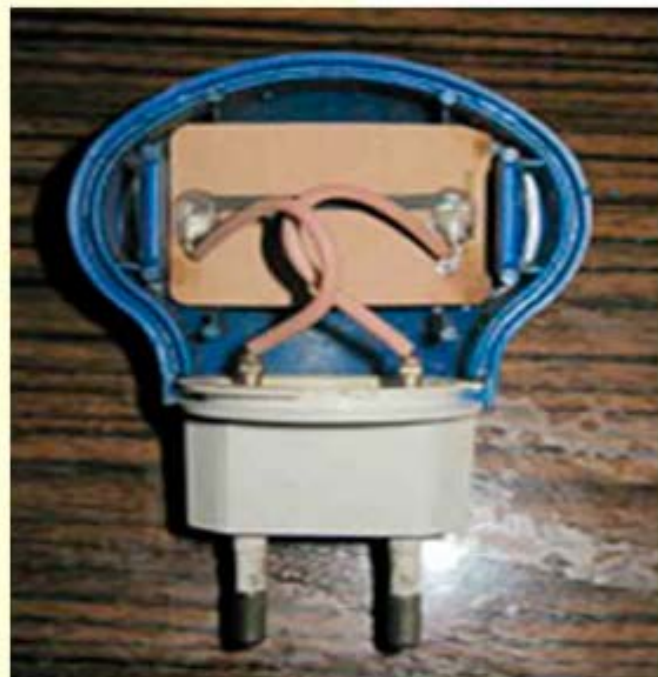


Условие целочисленности длины замкнутой геодезической на многогранной поверхности

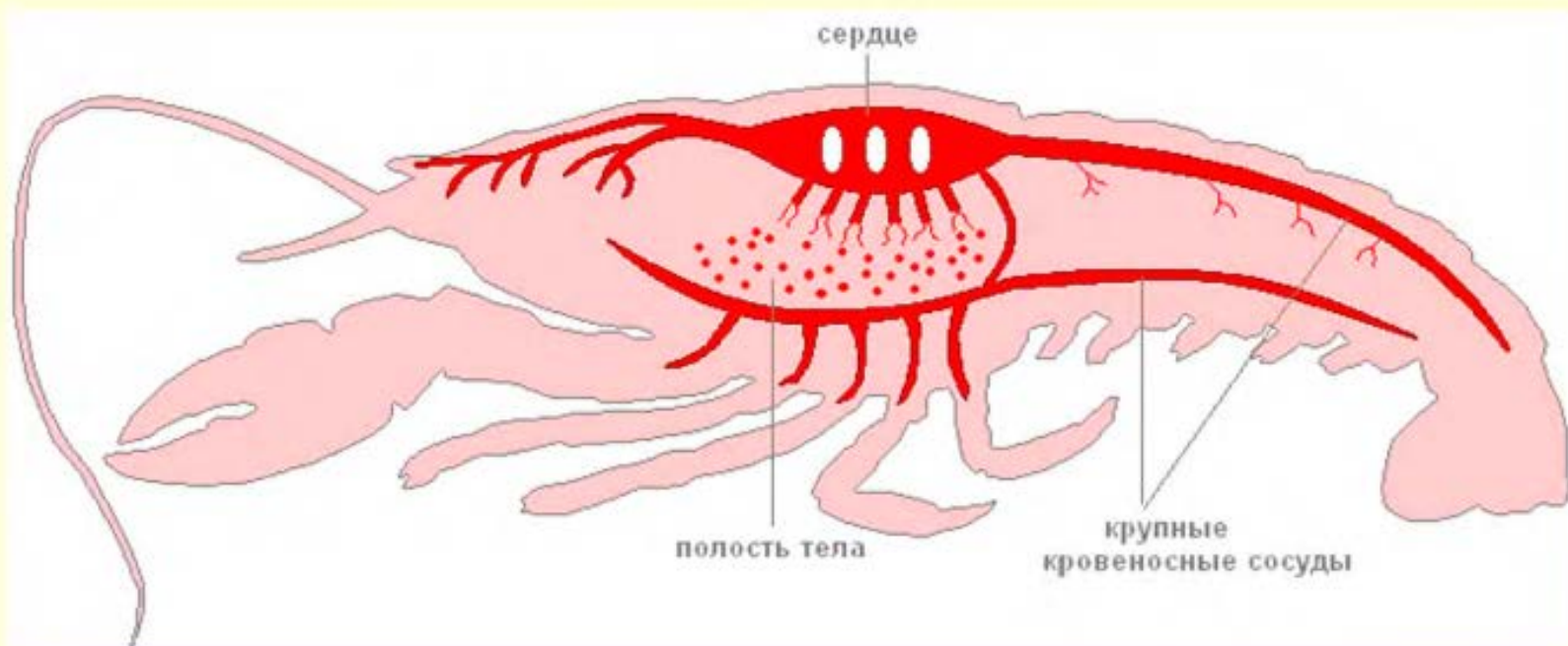


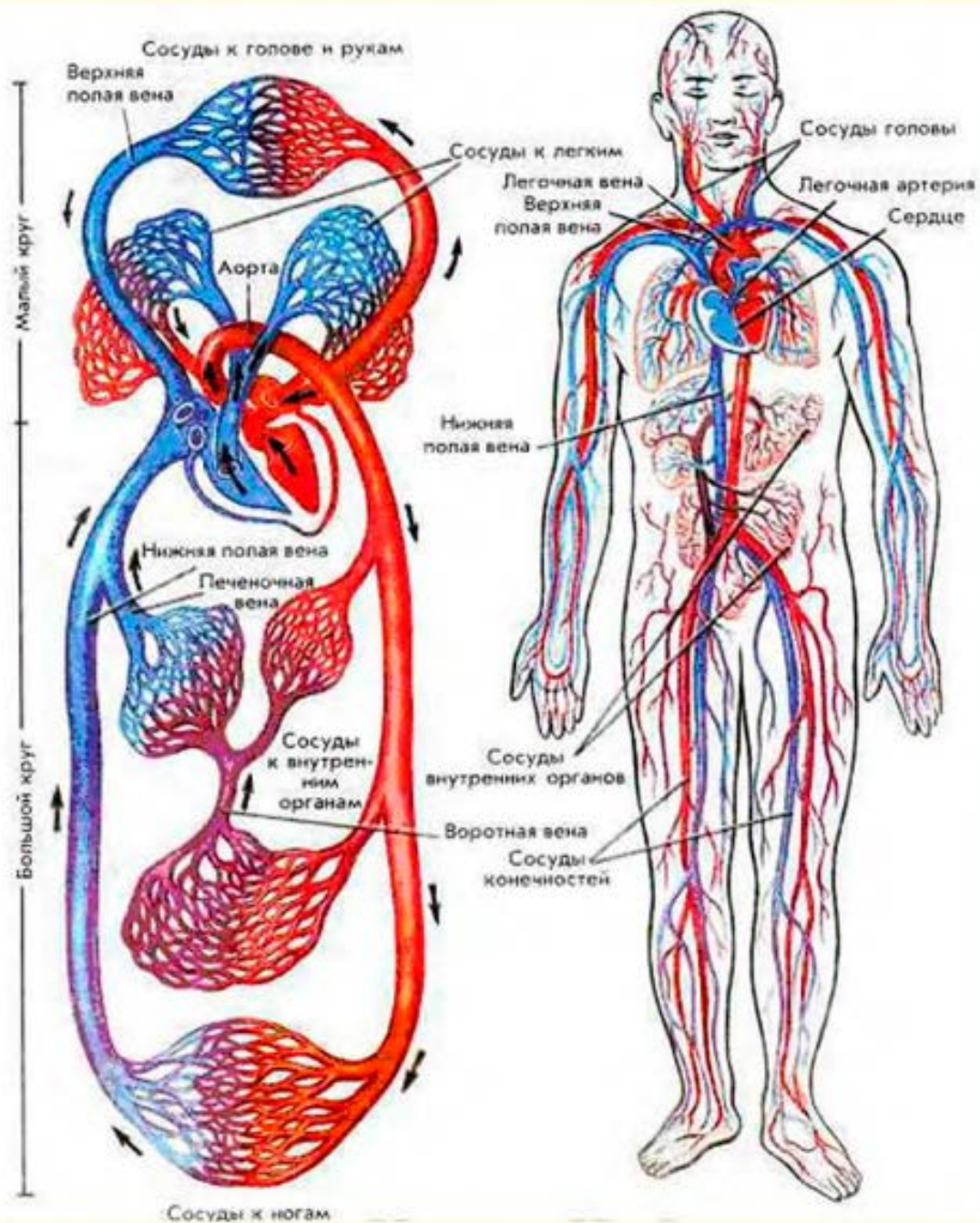
Пример 3. Классическая и квантовая динамика и геометрия множеств переменной размерности.

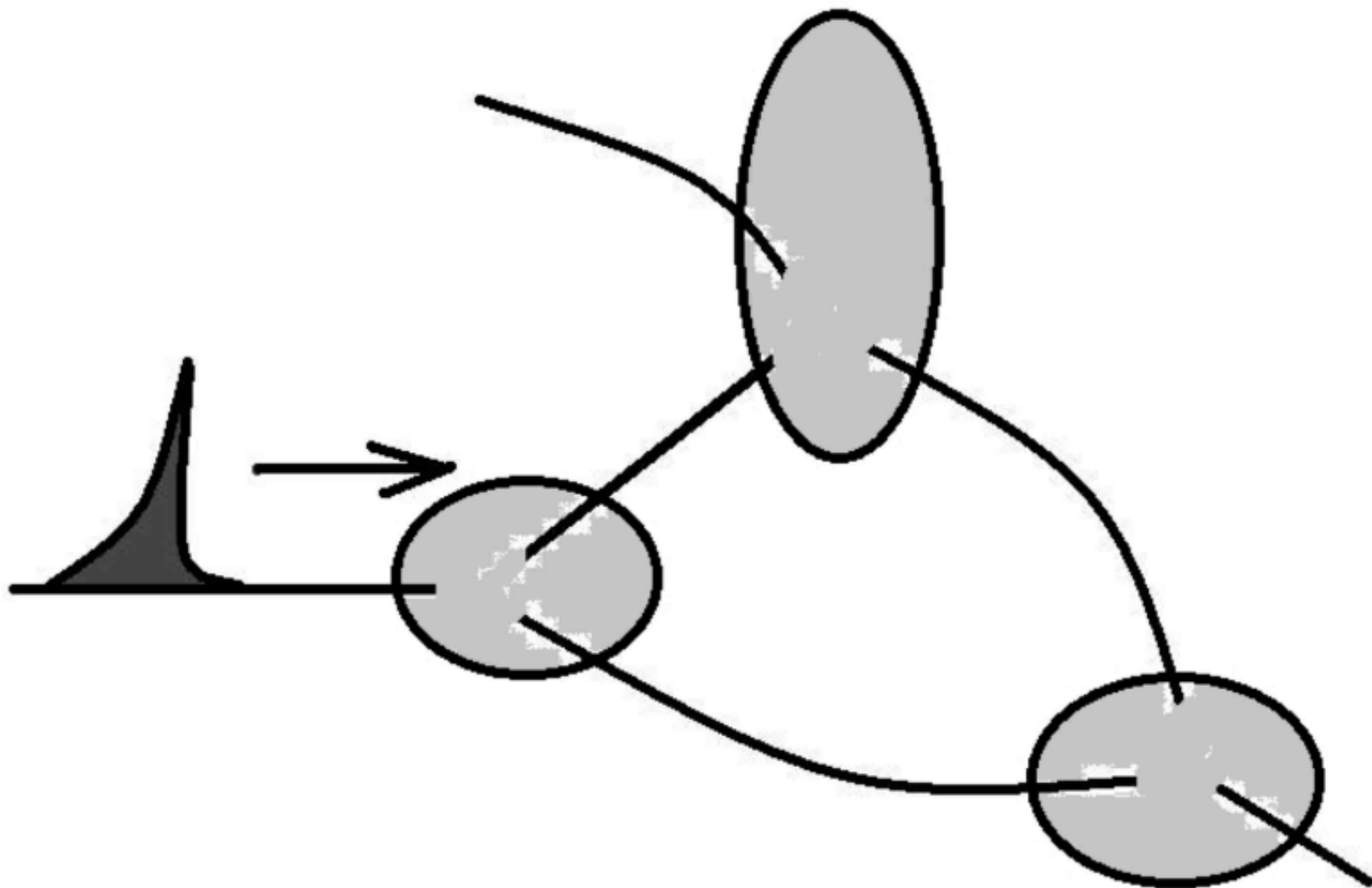




 [Увеличить](#)

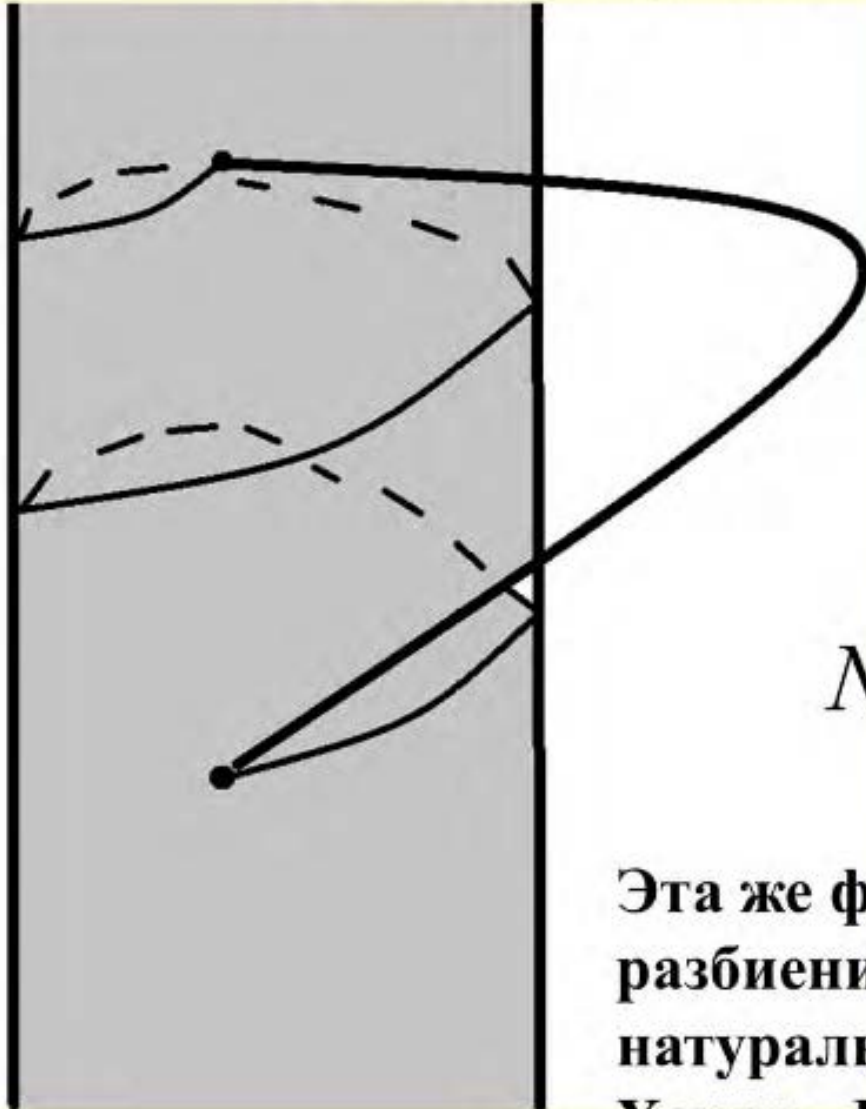






Как меняется со временем число частиц?

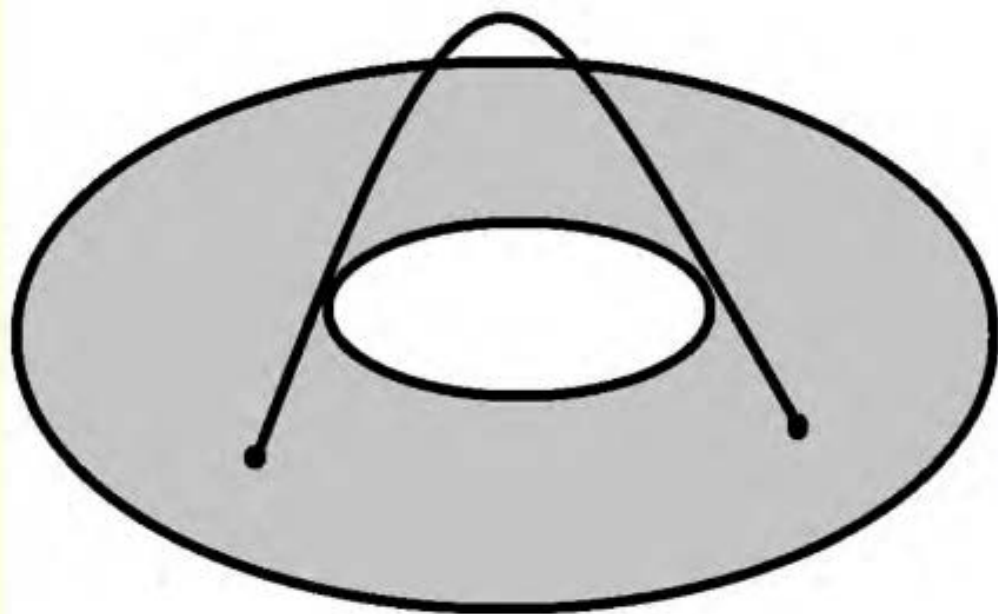
Цилиндр с приклеенным отрезком



$$N(t) \sim \exp\left(\sqrt{\frac{2}{3R}} \pi t^{1/2}\right)$$

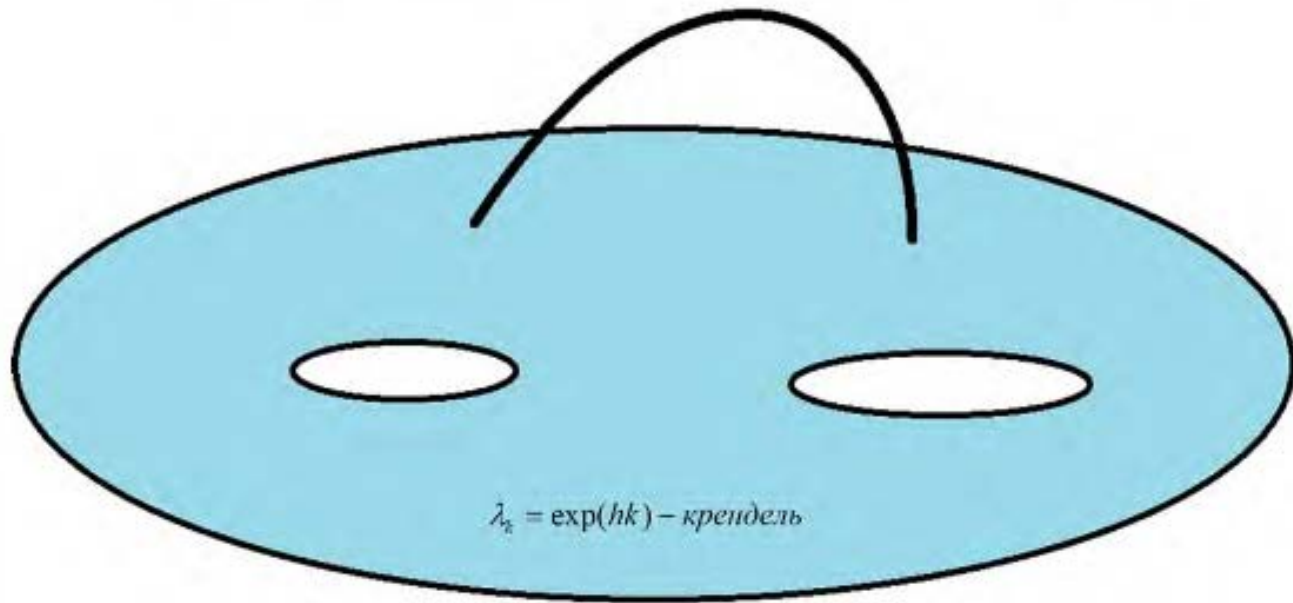
Эта же формула определяет число разбиений натурального числа t на натуральные слагаемые (теорема Харди - Рамануджана)

Тор с приклеенным отрезком



$$N(t) \sim \exp\left(3\sqrt[3]{\frac{5\pi}{8ab}} \zeta(3) t^{2/3}\right)$$

Крендель с приклеенным отрезком



$$N(t) \sim \exp(ht)$$

**Общий ответ — задача
аналитической теории чисел об
абстрактных простых**

Метрическая геометрия и геометрическая оптимизация.



А.О.Иванов



А.А.Тужилин

Основные темы

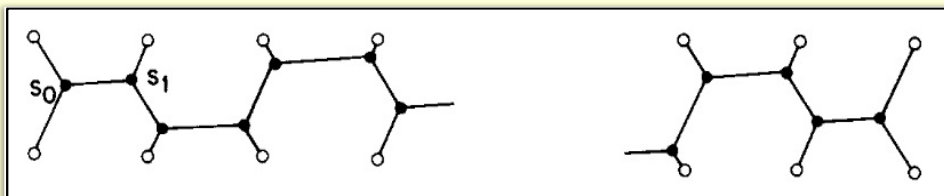
Геометрия расстояния Хаусдорфа, т.е. геометрия гиперпространств (семейств подмножеств метрических пространств), наделенных расстоянием Хаусдорфа.

<http://dfgm.math.msu.su/people/tuzhilin/part8.php>

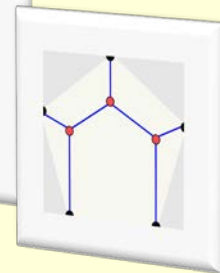
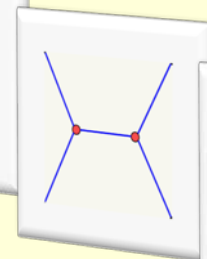
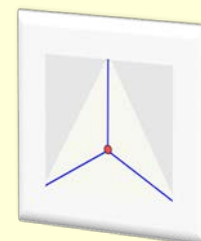
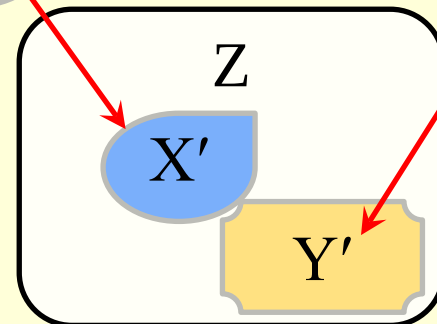
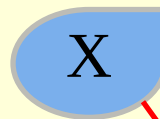
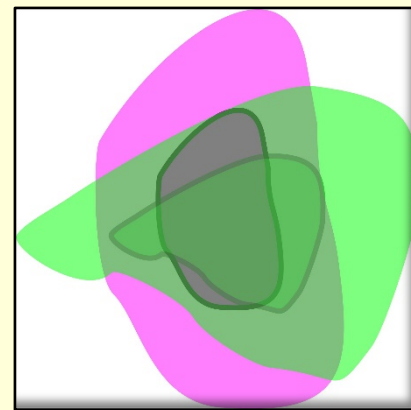
Геометрия расстояния Громова-Хаусдорфа, т.е. расстояния на собственном классе всех метрических пространств, введенного М.Громовым

Теория экстремалей одномерных геометрических функционалов

- минимальные сети, обобщенная проблема Штейнера



- минимальные заполнения в смысле Громова



Некоторые работы наших учеников

- 2001: Г.А.Карпунин, Теория Морса минимальных сетей (кандидатская диссертация)
- 2005: Д.П.Ильютко, Геометрия локально минимальных и экстремальных сетей в пространствах с нормами (кандидатская диссертация)
- 2010: Н.П.Стрелкова, Замкнутые локально минимальные сети на выпуклых многогранниках (диплом)
- 2013: Н.П.Стрелкова, Минимальные сети на поверхностях многогранников (кандидатская диссертация)
- 2014: С.Ю.Липатов, Функции, не меняющие типов минимальных заполнений (3 курс)
- 2015: Н.К.Николаева, Минимальные деревья Штейнера в пространстве метрических компактов (диплом)
- 2017: И.А.Михайлов, Свойства отображения, сопоставляющего каждому метрическому компакту семейство его непустых компактных подмножеств (3 курс)
- 2017: Д.П.Клибус, Выпуклость шара в пространстве Громова-Хаусдорфа (4 курс)
- 2017: О.С.Малышева, Оптимальное положение компактов в пространствах с евклидово инвариантной метрикой Громова-Хаусдорфа (4 курс)
- 2017: Р.А.Цветников, Линейная связность сферы в пространстве Громова-Хаусдорфа (4 курс)
- 2017: С.Ю.Липатов, Преобразования метрик, сохраняющие типы одномерных минимальных заполнений (диплом)
- 2017: В.М.Чикин, Минимальные деревья Штейнера в малых окрестностях точек римановых многообразий (диплом)
- 2018: О.Б.Борисова, Некомпактность сегмента в пространстве Громова-Хаусдорфа (3 курс)
- 2018: Д.С.Григорьев, Вычисление расстояния Громова-Хаусдорфа до симплекса (3 курс)
- 2018: Д.П.Клибус, Компактная выпуклость шаров в пространстве Громова-Хаусдорфа (5 курс)
- 2018: О.С.Малышева, Проблема Штейнера в пространствах с евклидово инвариантной метрикой Громова-Хаусдорфа (5 курс)
- 2018: А.В.Феклина, Проблема Штейнера в пространстве Громова-Хаусдорфа: случай трехточечных метрических пространств (диплом)
- 2019: О.Б.Борисова, Непрерывность множеств соответствий в пространстве Громова-Хаусдорфа (4 курс)
- 2019: Е.А.Лычагина, Свойства расстояния Громова-Хаусдорфа до симплексов (3 курс)
- 2019: Д.С.Григорьев, Вычисление расстояния Громова-Хаусдорфа до симплексов произвольной мощности (4 курс)
- 2020: О.Б.Борисова, Metric Segments in Gromov-Hausdorff class (6 курс)
- 2020: Е.И.Степанова, Бифуркации минимальных сетей и минимальных заполнений конечных подмножеств евклидовой плоскости (кандидатская диссертация)
- 2021: Д.С.Григорьев, Расстояния Громова-Хаусдорфа до симплексов произвольной мощности, а также до 2-пространств (6 курс)
- 2021: О.Б.Борисова, Метрические сегменты в классе Громова-Хаусдорфа (6 курс)
- 2022: Д.А.Илюхин, The Fermat-Torricelli problem in the case of three-point sets in normed planes (4 курс)
- 2022: Т.А.Талипов, Gromov-Hausdorff distance between vertex sets of regular polygons inscribed in a given circle (4 курс)
- 2022: А.Х.Галстян, About the continuity of one operation with convex compacts in finite-dimensional normed spaces (аспирант)
- 2022: В.М.Чикин, Деформации метрик, локальные и глобальные аспекты (кандидатская диссертация)
- 2023: А.А.Вихров, Density of generic metric spaces in the Gromov-Hausdorff class (4 курс)
- 2023: Д.А.Илюхин, The Fermat-Torricelli problem in normed spaces (4 курс)

Наши монографии и учебные пособия



Спецкурс:

А.О.Иванов, А.А.Тужилин «[Геометрия квантового расстояния Громова-Хаусдорфа](#)», понедельник, 18:30, zoom.

Спецсеминар:

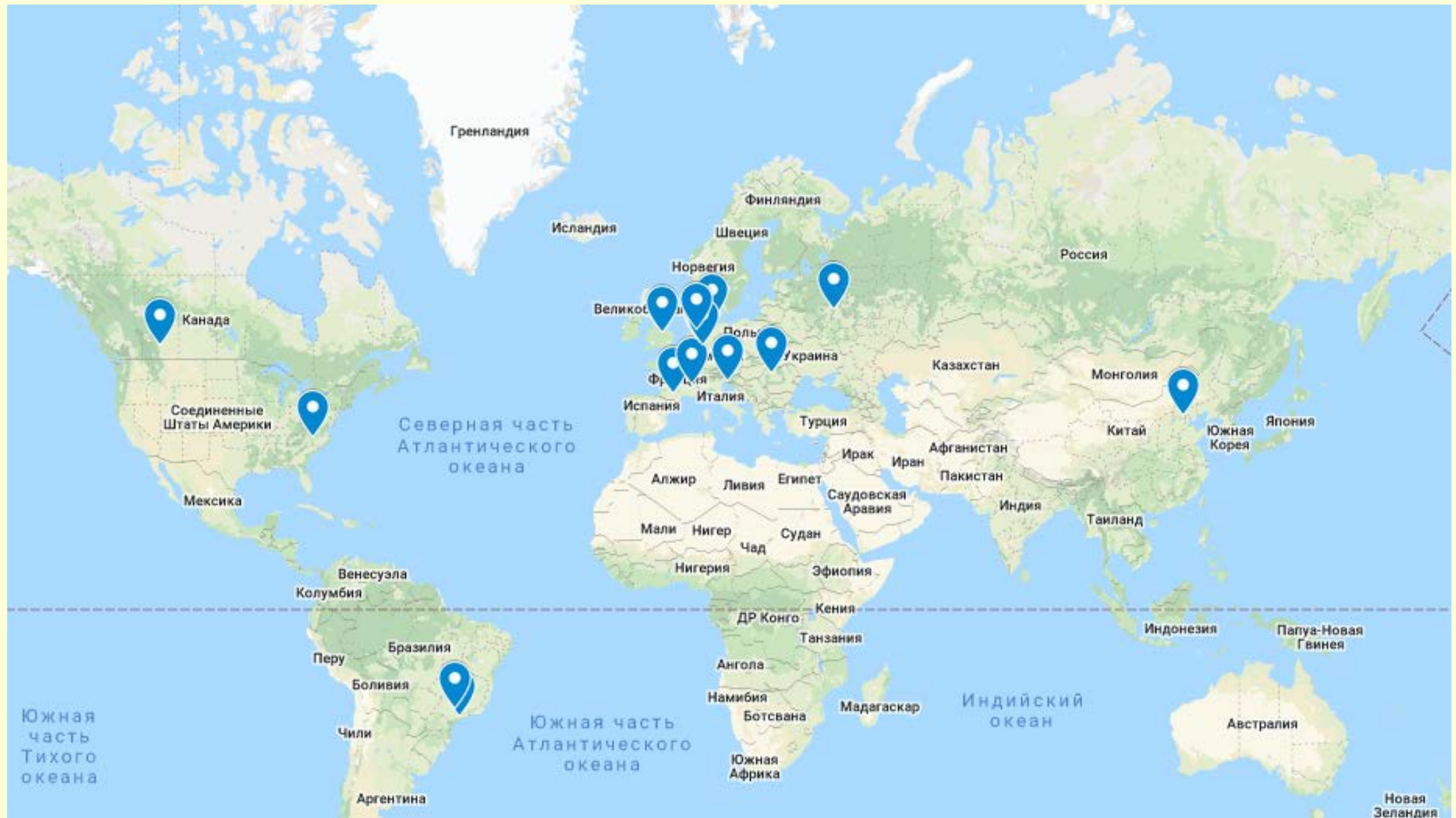
А.О.Иванов, А.А.Тужилин «[Теория экстремальных сетей](#)», среда, 16:45, zoom.

Геометрическая топология



Е.А.Кудрявцева

Совместные научные исследования Е.А.Кудрявцевой



Геометрическая топология

изучает «хорошие» отображения $f: M \rightarrow N$ (например, непрерывные или гладкие) и их **топологические инварианты** - т.е. свойства, не меняющиеся при любых «деформациях» отображения.

Геометрические методы.

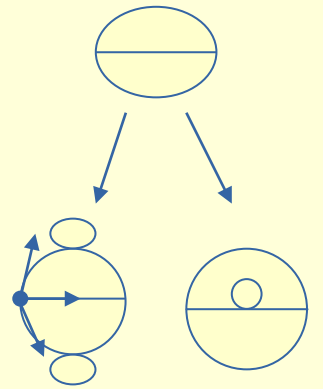
Задача 1. Пусть $f: M \rightarrow N$ - отображение графа M в поверхность N , являющееся **погружением** (т. е. локально инъективно и регулярно).

Описать **топологический инвариант** $I = I(f)$ на множестве погружений $f: M \rightarrow N$, т.ч. f и g гомотопны в классе погружений $\iff I(f) = I(g)$.

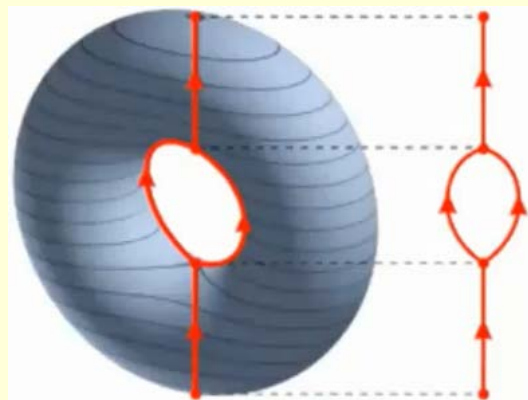
Решение:

2016: Д.А. Пермяков (канд. дисс.): для всех N кроме $\mathbf{RP}^2$ (ответ: *циклический порядок ребер в вершине, индекс самопересечения цикла*),

2016: М.А. Ивашковский (4 курс): для $N = \mathbf{RP}^2$ (статья, лучший доклад на конференции «Ломоносов-2017»).



Пусть $M=M^2$
— двумерная
поверхность,
 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

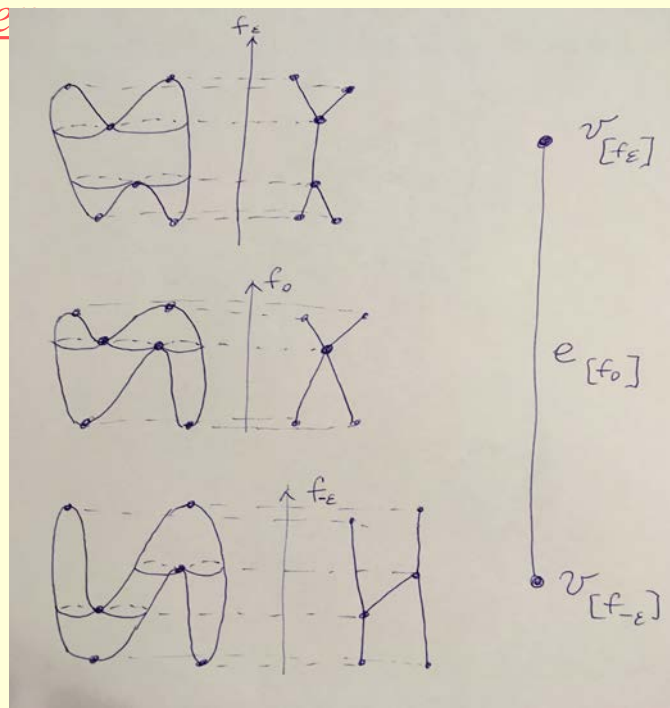
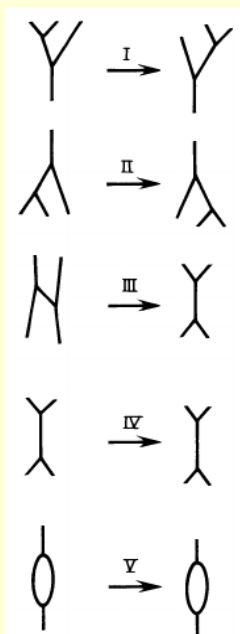


Морсовские критические точки:

1925: М. Морс: x^2+y^2 , x^2-y^2 , $-x^2-y^2$ (тип A_1).

2022: А.С. Оревкова (5 курс), Крит. точки типов A,D,E:

Приведение гладких функций к нормальной форме
вблизи критических точек



Дифференциальная топология:
комплекс функций Морса, 16-я
проблема Гильберта.

Задача 2. Для данного набора овалов γ
на плоскости построить многочлен
 $P=P(x,y)$ т.ч. $h(\gamma) = \{P = 0\}$,
 $\lim_{|z| \rightarrow \infty} P(x,y) = +\infty$, $z = x + iy$,
где $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — гомеоморфизм.

Пример: многочлен степени $2k$, где k —
число овалов:

$$P(x,y) = |z-z_1|^2 \dots |z-z_k|^2 - |z-w_1|^2 \dots |z-w_m|^2 =: \\ Q(x,y) - R(x,y), \quad m < k.$$

Ф-ция Морса $f(x,y) = Q(x,y) / R(x,y)$.

Задача 3. Описать все **функции Морса** и
их перестройки (типов I–V и их
комбинации). Описать **граф функций**.

Интегрируемые гамильтоновы системы, их топологические и симплектические инварианты

2022: Лекторий (А.А.Ошемков, А.Ю.Коняев, Е.А.Кудрявцева)

2017-2021: Проект «Топология и алгебра
интегрируемых гамильтоновых систем» (ИГ систем)

ИГ система $dx/dt = v(x)$ задана гладким отображением $F=(f_1,...,f_n): M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\{f_i, f_j\}=0$, $\omega(,v_i) = df_i$, $v = v_1$.
Возникает **лагранжево слоение с особенностями**:
слои L_a — связные компоненты множеств уровня $\{x: F(x)=a\}$. **Компактные регулярные слои** — торы T^n .

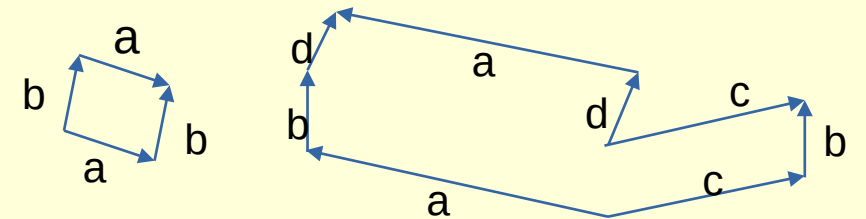
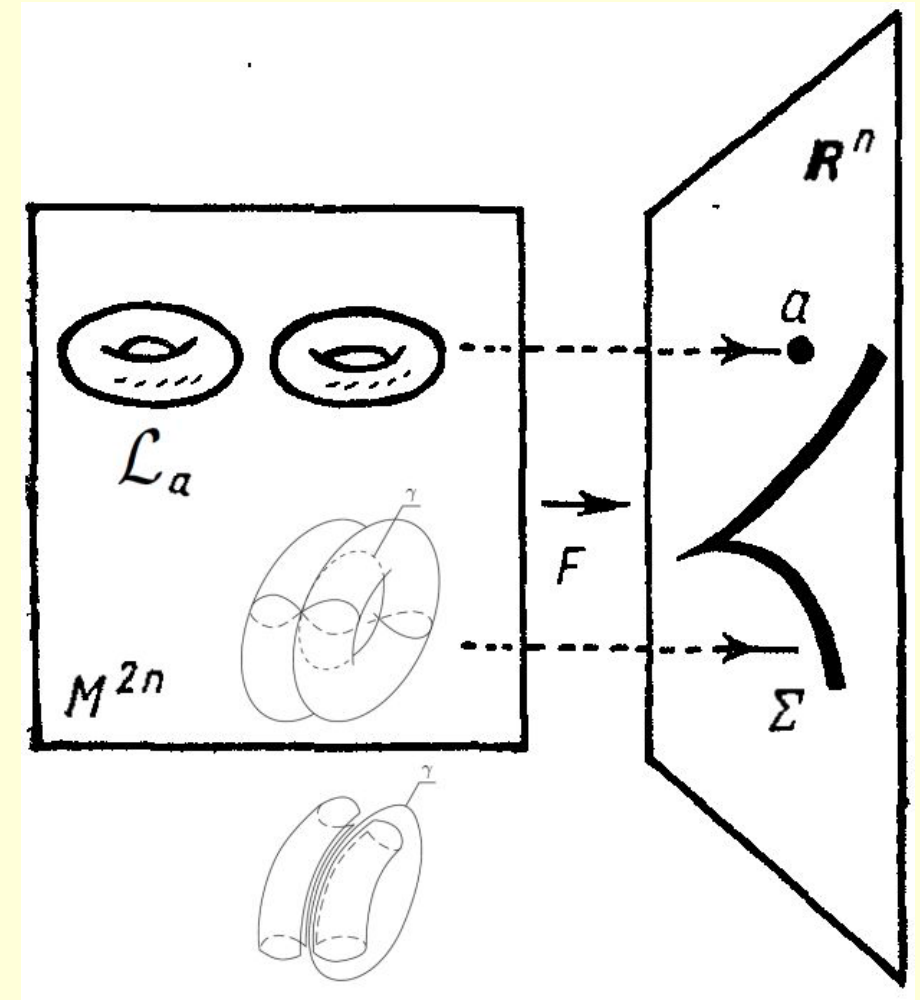
Задача 1. Изучить слоение вблизи **некомпактных слоев**.

Примеры решений:

1906: Т. Леви-Чивита, регуляризация задачи Кеплера ($z \rightarrow w = z^2$),

2012: Е.А. Кудрявцева: рег. слои - сферы с ручками и проколами,

2019-21: С.С. Николаенко: некомп. сингулярные слои (канд. дисс.)



Достижения студентов и аспирантов кафедры

Стипендиаты фонда БАЗИС: М.В. Онуфриенко (2022, 2023), А.С. Оревкова (2022), В.А. Трифонова (2021-2023) (рук. Е.А. Кудрявцева).

Грант РФФИ для аспирантов: К.С. Ворушилов (2020-2021), рук. А.А. Ошемков.

Наши студенты и аспиранты на конференциях

2021: Конференция международных математических центров, Сочи:

Ф.И. Лобзин (**на фото**), М.В. Онуфриенко.

3rd International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics, Ярославль:

Ф.И. Лобзин, М.В. Онуфриенко, Д. Акпан.

International Conference «Algebraic and Geometric Methods of Analysis», Одесса:

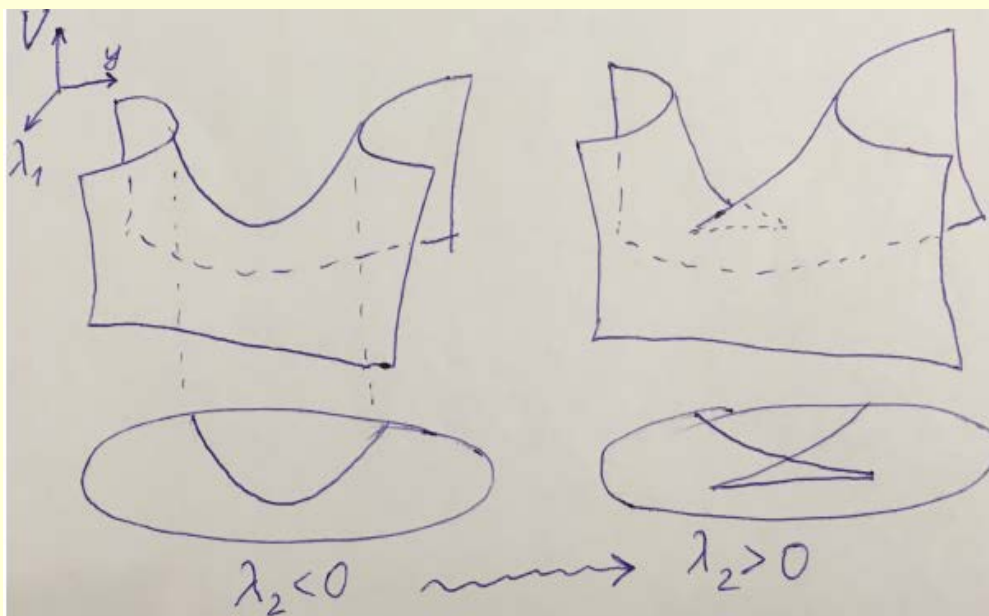
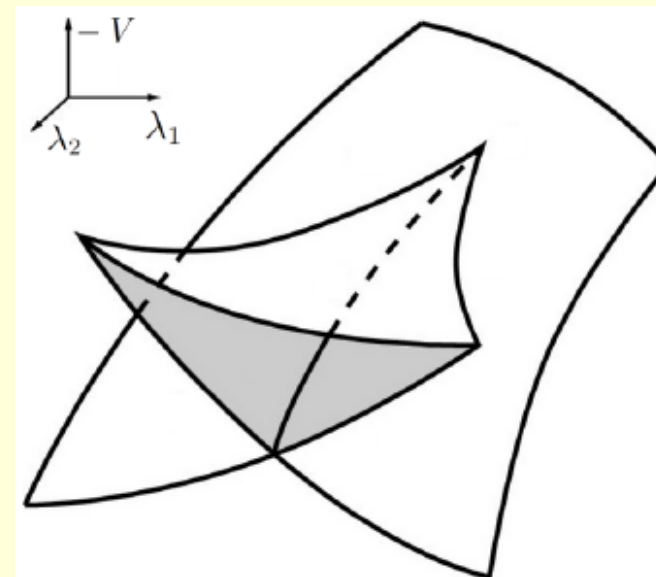
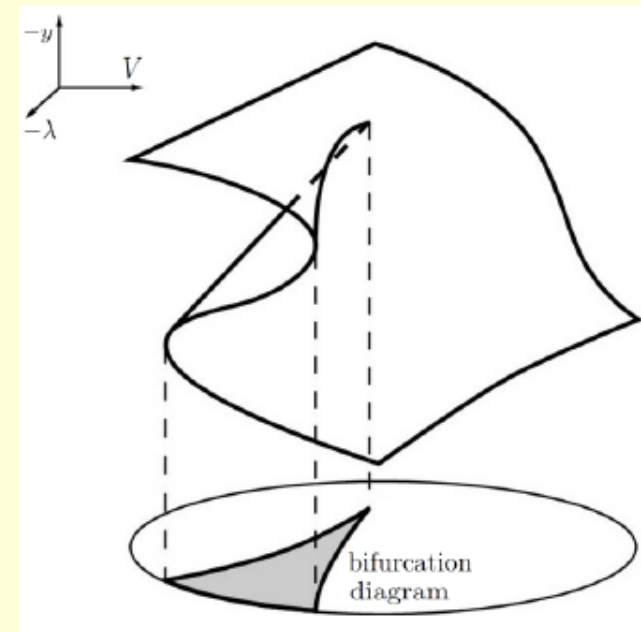
А.С. Оревкова (**пленарный доклад**).



Задача 2. Описать все **структурно устойчивые** особые слои.

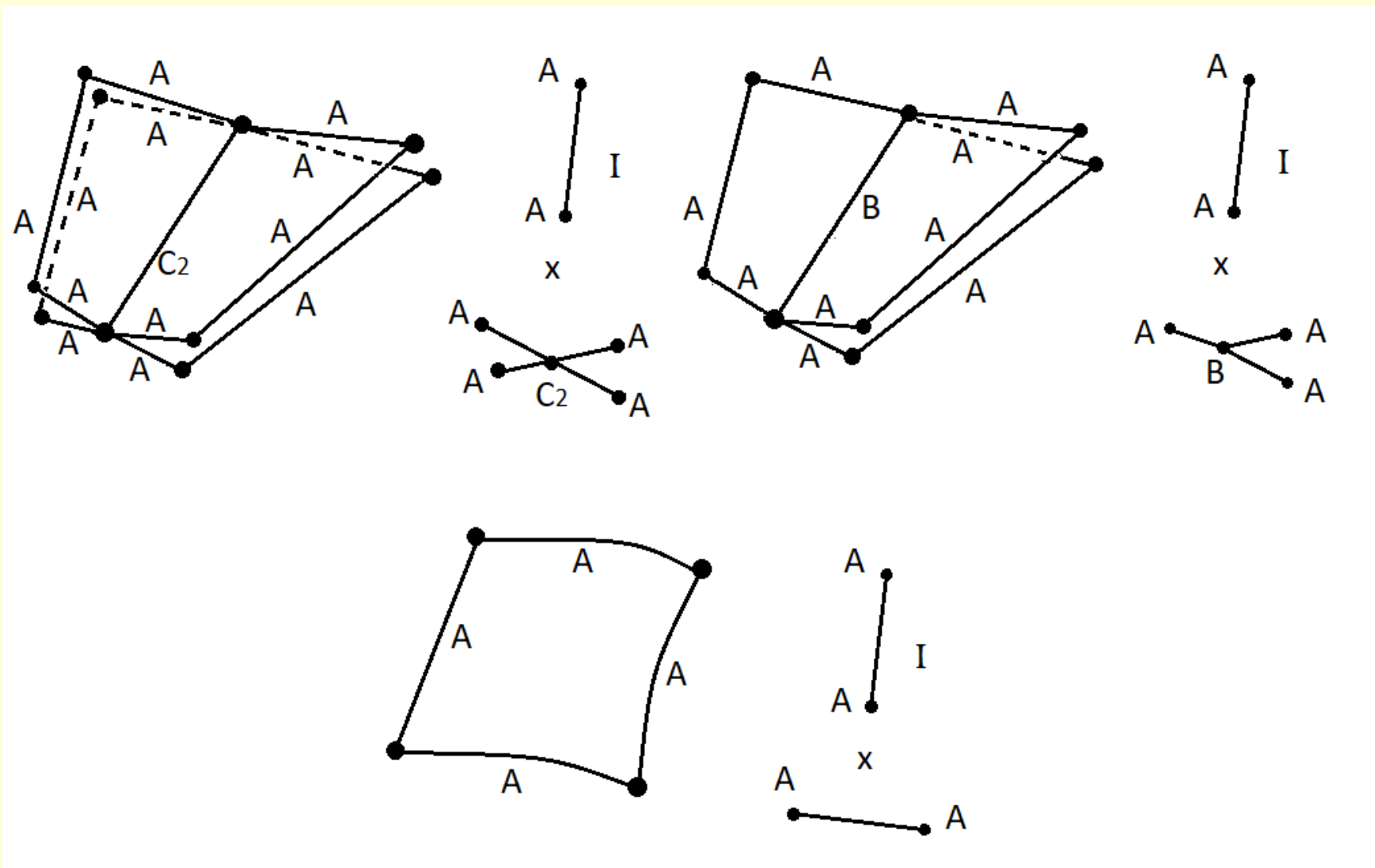
Складка: $V(y) = y^2$. Сборка Уитни: $V_I(y) = y^3 + I y$. Обобщение:
1998: В.В. Калашников, Параболические особенности с резонансами (кандидатская диссертация).

Ласточкин хвост: $V_I(y) = y^4 - I_2 y^2 + I_1 y$. Обобщение:
2023: М.В. Онуфриенко (6 курс), Бифуркации параболических особенностей с резонансами, *Classification of singularities of smooth functions with a finite cyclic symmetry group*



$$f_1(x, y, I, \varphi) = x^2 + V_I(y), \quad f_2(x, y, I, \varphi) = I.$$

Задача 3. Описать все лагранжевы слоения с особенностями, имеющие **заданую базу** (т.е. **пространство слоев**):



Задача 4. Описать все **поверхности вращения** и центральные потенциалы на них $V(|\mathbf{r}|)$, т.ч. все решения уравнения Ньютона $\mathbf{d}^2\mathbf{r} / dt^2 = -\text{grad } V(|\mathbf{r}|)$ периодичны.

Решения:

1873: Бертран: евклидова **плоскость** $\mathbf{R}^2 \Rightarrow$ два «замыкающих» потенциала: гравитационный $V_1(|\mathbf{r}|) = -A/|\mathbf{r}| + \mathbf{B}$ и упругий $V_2(|\mathbf{r}|) = A|\mathbf{r}|^2 + \mathbf{B}$.

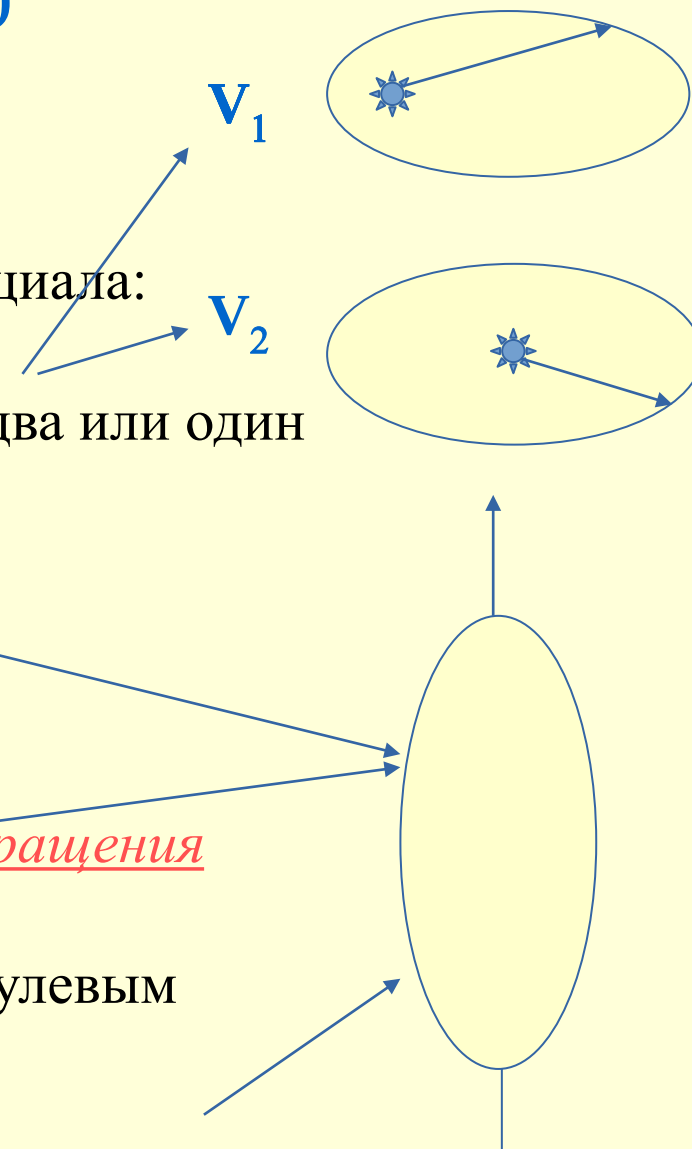
1877: Дарбу, 1992: Perlick: **поверхности вращения без экваторов** $\Rightarrow$ два или один «замыкающих» потенциала: $V_1(|\mathbf{r}|)$, $V_2(|\mathbf{r}|)$ (или только $V_2(|\mathbf{r}|)$).

1978: А. Бессе: груши Таннери с нулевым потенциалом $V_0(|\mathbf{r}|) = \mathbf{B}$.

2015-18: Д.А. Федосеев: **поверхности вращения с экваторами** $\Rightarrow$ по сути $V_1(|\mathbf{r}|)$, $V_2(|\mathbf{r}|)$, $V_3(|\mathbf{r}|)$ (кандидатская диссертация),

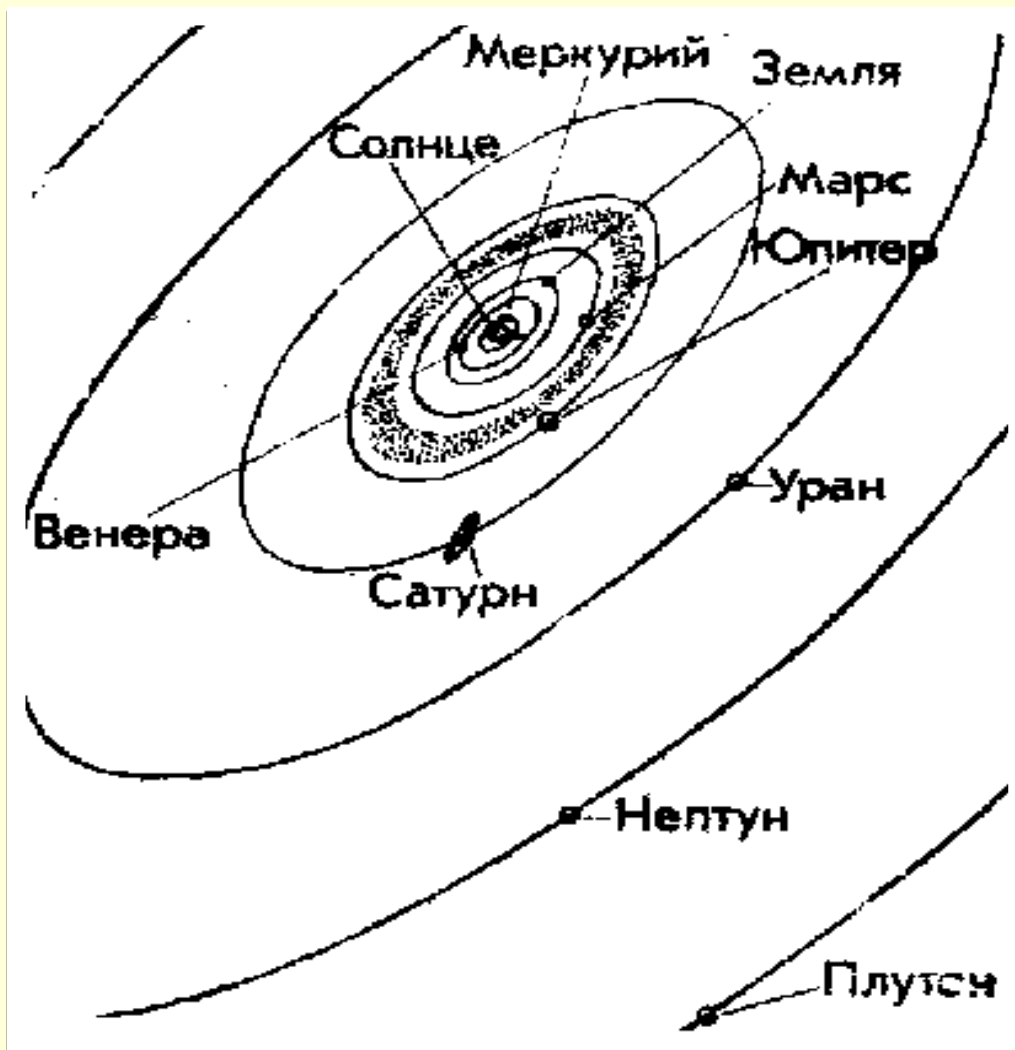
Механические системы с замкнутыми орбитами на многообразиях вращения

2019: С.А. Подлипав: поверхности вращения с магнитным полем и нулевым потенциалом (3 курс), Суперинтегрируемые бертрановы магнитные геодезические потоки



Геометрические методы в Небесной механике

Солнечная система:



Почти вся масса Солнечной системы (99,87%) сосредоточена **в Солнце**. Массы остальных тел – это **малые параметры** задачи.

Планеты обращаются вокруг Солнца по **почти круговым орбитам**, лежащим **приблизительно в одной плоскости**.

Проблема 1: **Объяснить «люки»** Кирквуда в поясе астероидов. Сводится к изучению задачи 3 тел «**Солнце-Юпитер-астероид**».

Проблема 2: **Объяснить «щели» в кольце Сатурна.**



Кольцо Сатурна (Галилей 1610, Гюйгенс 1655) состоит из **отдельных частиц** (Максвелл).

Кольцевая структура состоит из **четырех концентрических колец**, отделенных друг от друга **резкими темными промежутками** – **щелями Кассини**.

Проблема **щелей** сводится к изучению системы «**Солнце-Сатурн-Мимас-частица** кольца Сатурна» (задачи 4 тел).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

ПРИГЛАШАЕМ ВАС НА КАФЕДРУ!

Алгебраическая топология и ее приложения (докладчик - Попеленский).



И.М.Никонов



Ф.Ю.Попеленский



Г.И.Шарыгин

Алгебраическая геометрия и ее приложения

А. Б. Жеглов, В. В. Пржиялковский

Алгебраическая геометрия

Алгебраическая геометрия — один из самых глубоких, развитых, сложных и распространенных разделов математики. Она связана с дифференциальной и симплектической геометрией, топологией, комплексным и функциональным анализом, алгеброй, теорией категорий, дискретной математикой, теорией вероятности, статистикой, теорией игр, компьютерной алгеброй, криптографией, математической физикой и многими другими областями.

Объект изучения классической алгебраической геометрии — системы полиномиальных уравнений и их решения.

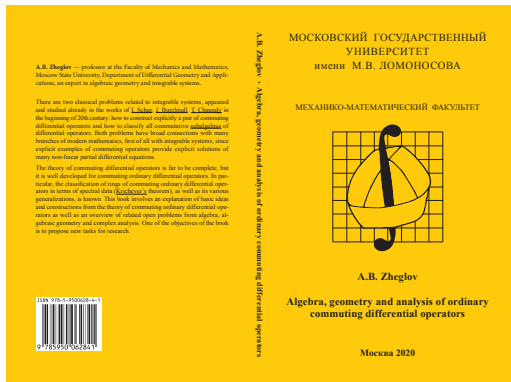
Старт классической алгебраической геометрии был дан Виетом и Декартом. Паскаль и Дезарг развили **проективную геометрию**. **Начало систематической алгебраической геометрии** — XIX век. В дальнейшем алгебраическая геометрия развивалась благодаря итальянской школе, известной своей красотой. Большой вклад внес, с алгебраической точки зрения, Гильберт.

Алгебраическая геометрия

Расцвет алгебраической геометрии: XX век. В середине века революцию совершила французская школа. Бурный расцвет алгебраической геометрии в 60-80-е годы. Большую роль в нем сыграла советская (а потом и российская) школа алгебраической геометрии, основанная И. Р. Шафаревичем. Его учениками и “научными потомками” являются ученики Аракелов, Голод, Долгачёв, Исковских, Кострикин, Манин, Мойшезон, Орлов, Паршин, Прохоров, Тюрин, Шокуров; большинство из них работали на мехмате. Филдсовские медали за последние тридцать лет: Дринфельд (1990), Мори (1990), Бордчердс (1998), Концевич (1998), Лаффорг (2002), Воеводский (2002), Окуньков (2006), Тяу (2010), Биркар (2018), Шольце (2018). С 2003 года (даты основания) премию Абеля получили Серр, Атья, Делинь, Ленглендс. Одним из важнейших центров алгебраической геометрии в мире является Москва.

А. Б. Жеглов: научные интересы:

- Алгебраическая геометрия квантовых интегрируемых систем.
- Многомерное соответствие Кричевера.
- Алгебро-геометрические точные решения нелинейных уравнений, алгебраическая теория уравнения КП.



В. В. Пржиялковский: научные интересы:

- Бирациональная геометрия: многообразия Фано, рациональность, группы автоморфизмов.
- Методы торической геометрии и взвешенные полные пересечения.
- Алгебро-геометрические аспекты зеркальной симметрии. Топологическая зеркальная симметрия и зеркальная симметрия вариаций структур Ходжа. Торические модели Ландау–Гинзбурга. Гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева и $P=W$.

Более подробную презентацию и видеолекцию смотрите в записи на нашем сайте :

<http://dfgm.math.msu.su/>

Алгебраическая геометрия

Что изучать

- Элементарное введение: М. Рид, “Алгебраическая геометрия для всех”; Дж. Харрис “Алгебраическая геометрия. Начальный курс”.
- Более основательное: И. Р. Шафаревич, “Основы алгебраической геометрии”.
- Основной учебник: Р. Хартсхорн, “Алгебраическая геометрия”.

Где изучать

- Курс алгебраической геометрии на третьем-четвертом курсе.
- Спецкурсы по алгебраической геометрии
- Спецкурсы НОЦ МИАН
- Семинары Шафаревича и Исковских в МИАН.

Компьютерная геометрия



Г.В.Носовский



Д.П.Ильютко

Компьютерная геометрия

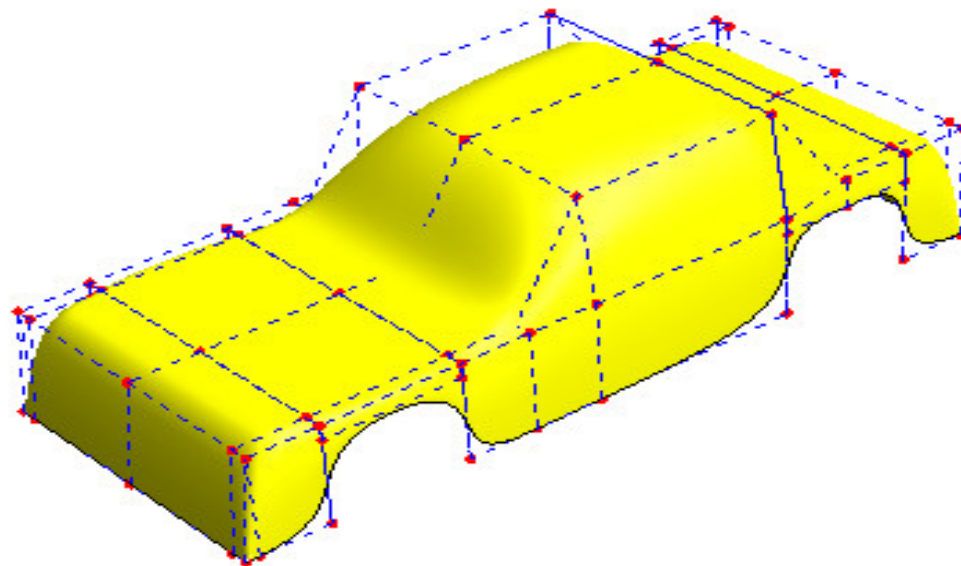
Представление геометрических образов на мониторе компьютера с возможностями:

- быстрого перерасчета в реальном времени ($\Rightarrow$ используются лишь рациональные функции);
- быстрого вычисления локальных дифференциально геометрических характеристик (кривизны, кручения, касательной плоскости, главных кривизн и главных направлений);
- произвольного масштабирования без потери плавности линий (визуальной гладкости);
- точного представления кривых и поверхностей 2-го порядка;
- удобного способа управления (редактирования) кривых и поверхностей пользователем, в том числе - локального управления заданным участком без изменения окружения, гладкого сопряжения между собой, деления на части и т.п.

Компьютерная геометрия

- **Классические подходы:**
 - сплайны: Эрмита, кубические, составные, псевдоупругие и т.д.;
 - поверхности Кунса и их обобщения (поверхности, затягивающие заданный остов из кривых);
 - треугольные поверхности, триангуляции.
- **Подходы современной компьютерной геометрии:**
 - кривые и поверхности Безье - основаны на полиномах Бернштейна;
 - *B*-кривые и *B*-поверхности (NURBS) – основаны на разделенных разностях и обладающие расширенным множеством управляющих параметров с возможностью локального редактирования.

Компьютерная геометрия



Компьютерная геометрия

Пример: использование кривых Безье для создания художественных образов

Расцветка кривых Безье ☒

Количество равностоящих точек окружностей, в которых возможно не во всех будут располагаться все опорные точки

40

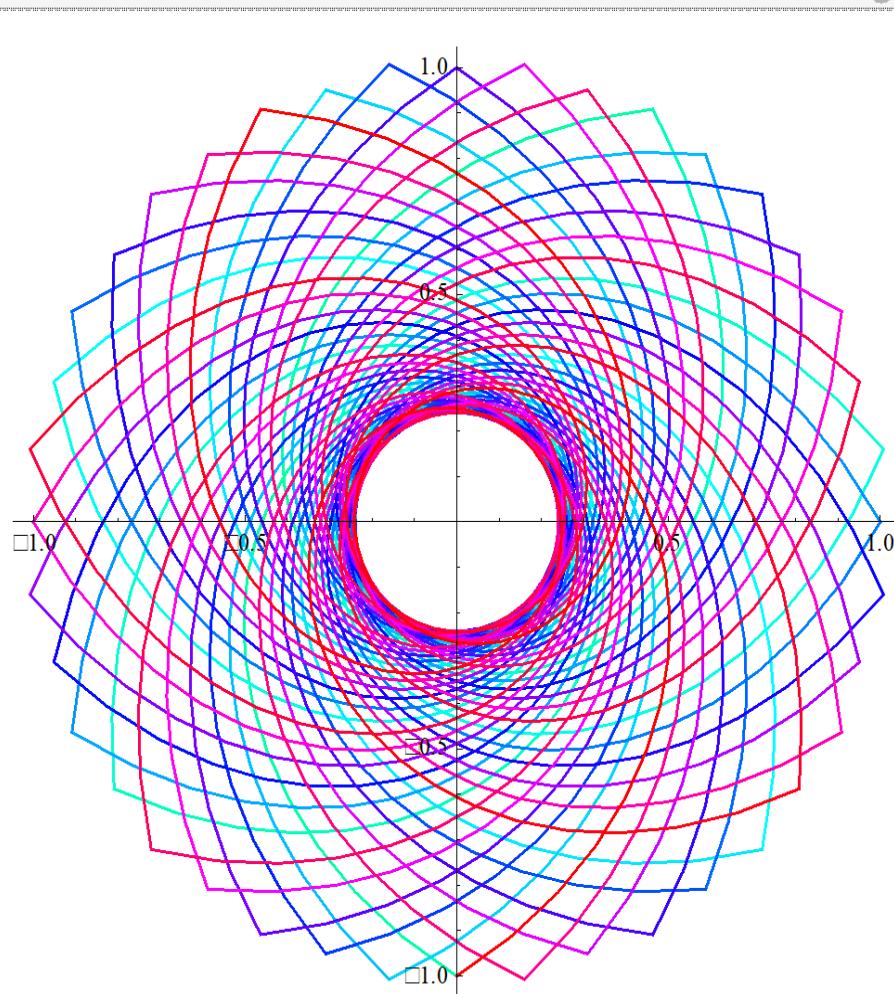
Степень кривых Безье 9

Шаг, с помощью которого выбираются опорные точки

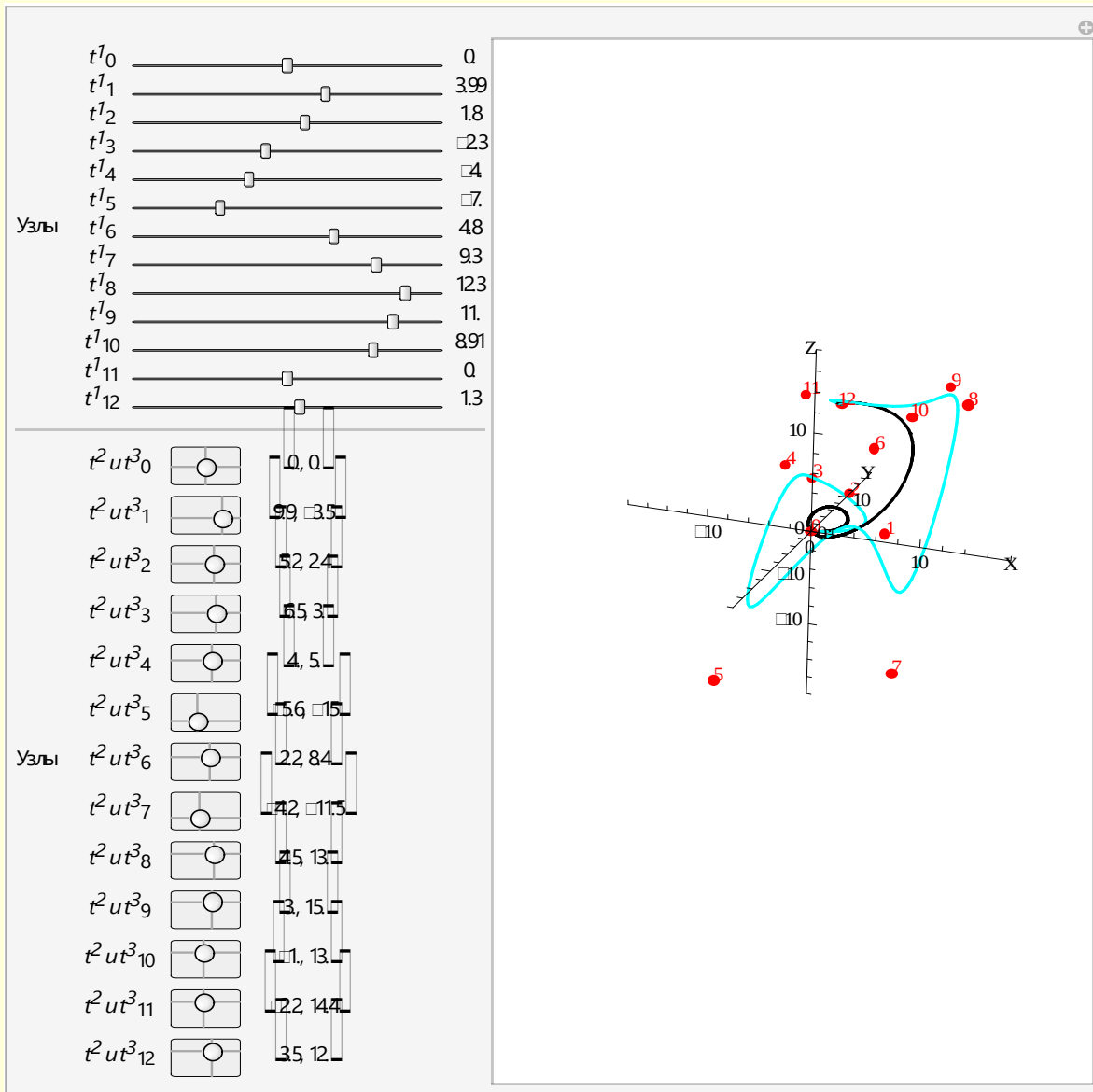
7

Радиус второй окружности 1.02

Добавление опорных точек 1



Компьютерная геометрия

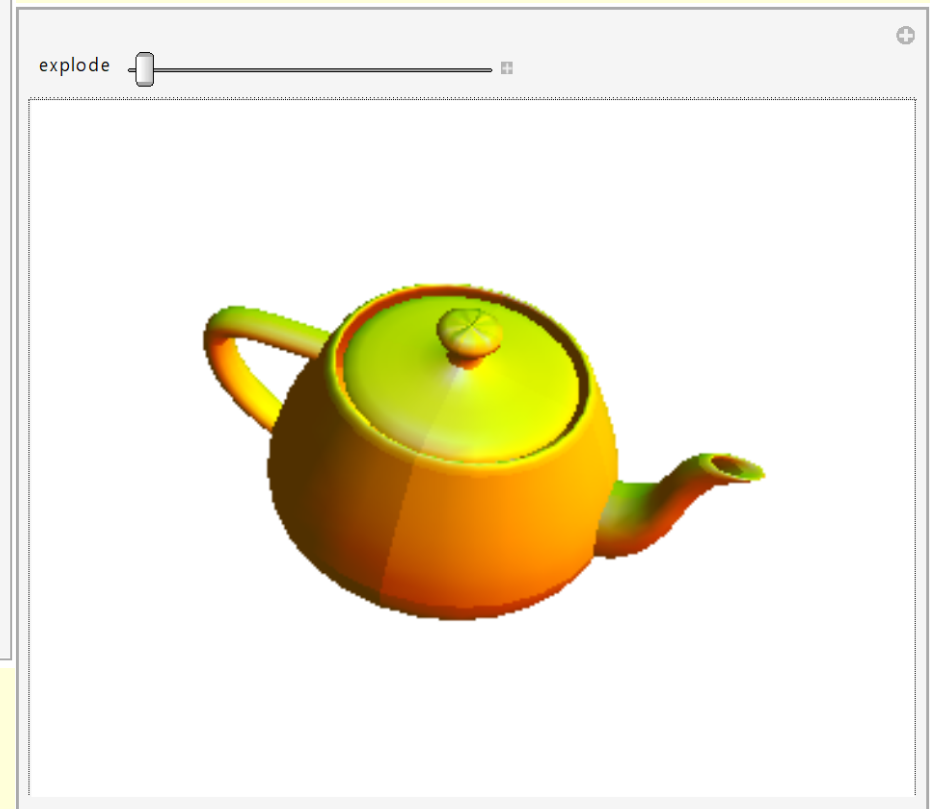
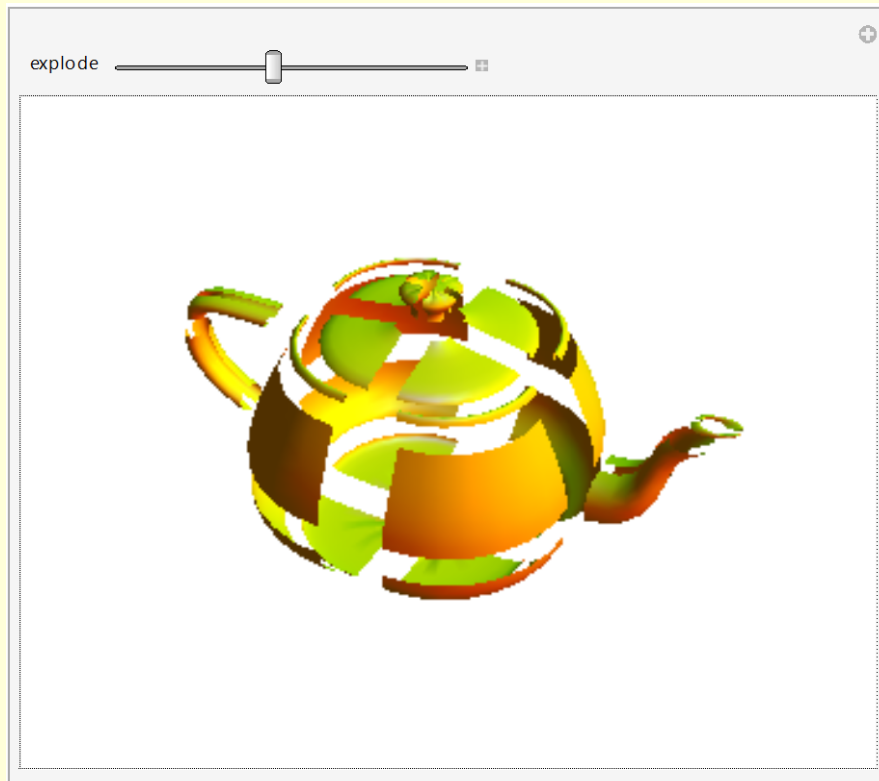


В-кривая в пространстве с автоматическим выбором узлов в сравнении с кривой Безье, построенной по тем же опорным точкам.

Обратите внимание насколько более послушно ведет себя В-кривая при управлении опорными точками, чем кривая Безье. Кривая Безье по-другому учитывает влияние опорных точек на кривую, и при управлении опорными точками ведет себя гораздо более вязко, чем В-кривая.

Компьютерная геометрия

Чайник, созданный с помощью поверхностей Безье



СПЕЦКУРС

Г.В.Носовский и Д.П.Ильютко

“Компьютерная геометрия”

пон. 18:30, ауд. 12-07

Маломерная топология и теория графов

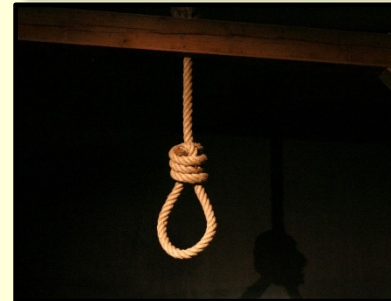


Д.П.Ильютко



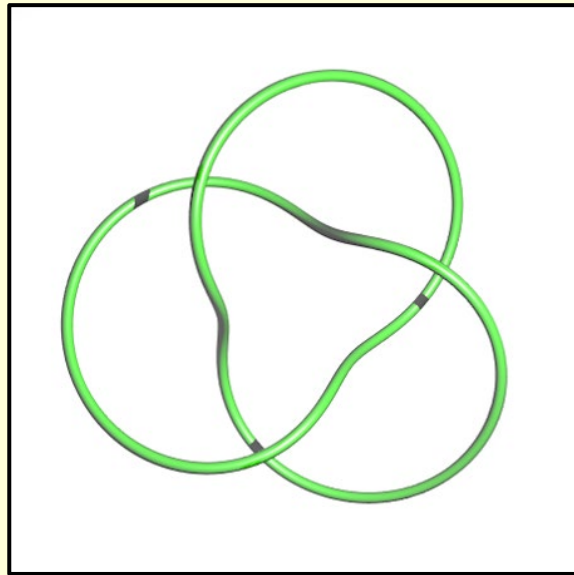
И.М.Никонов

Узлы

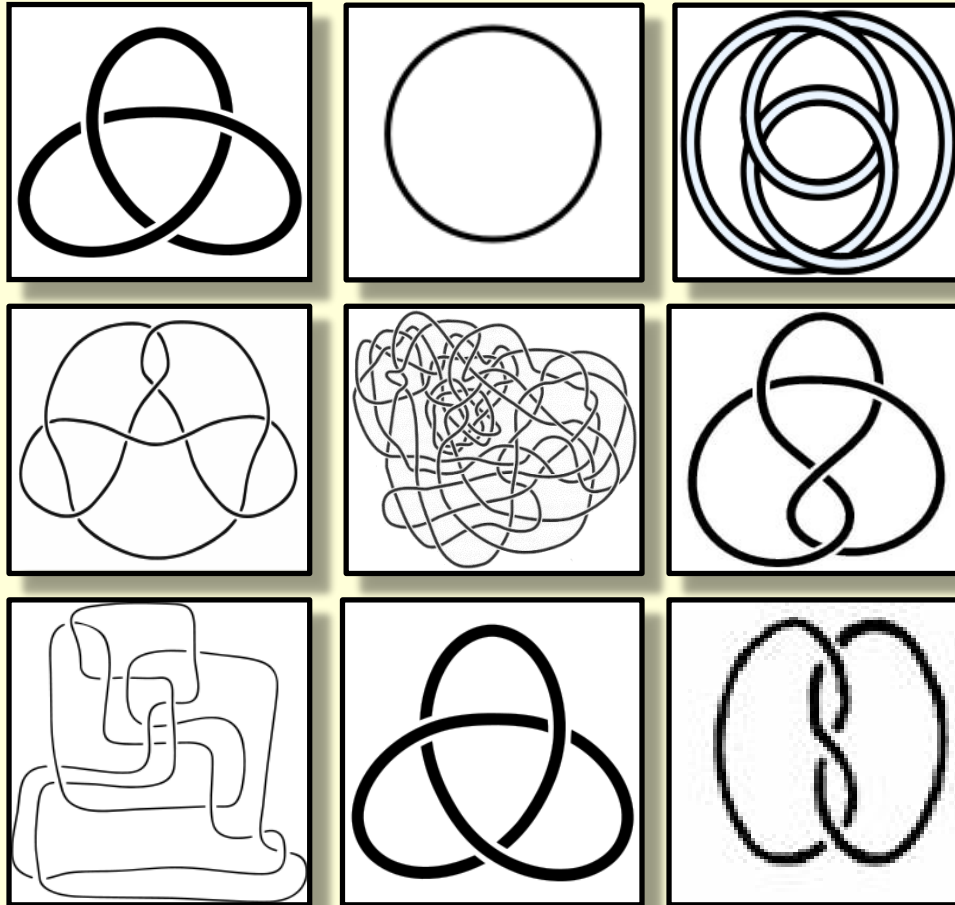


Теория узлов

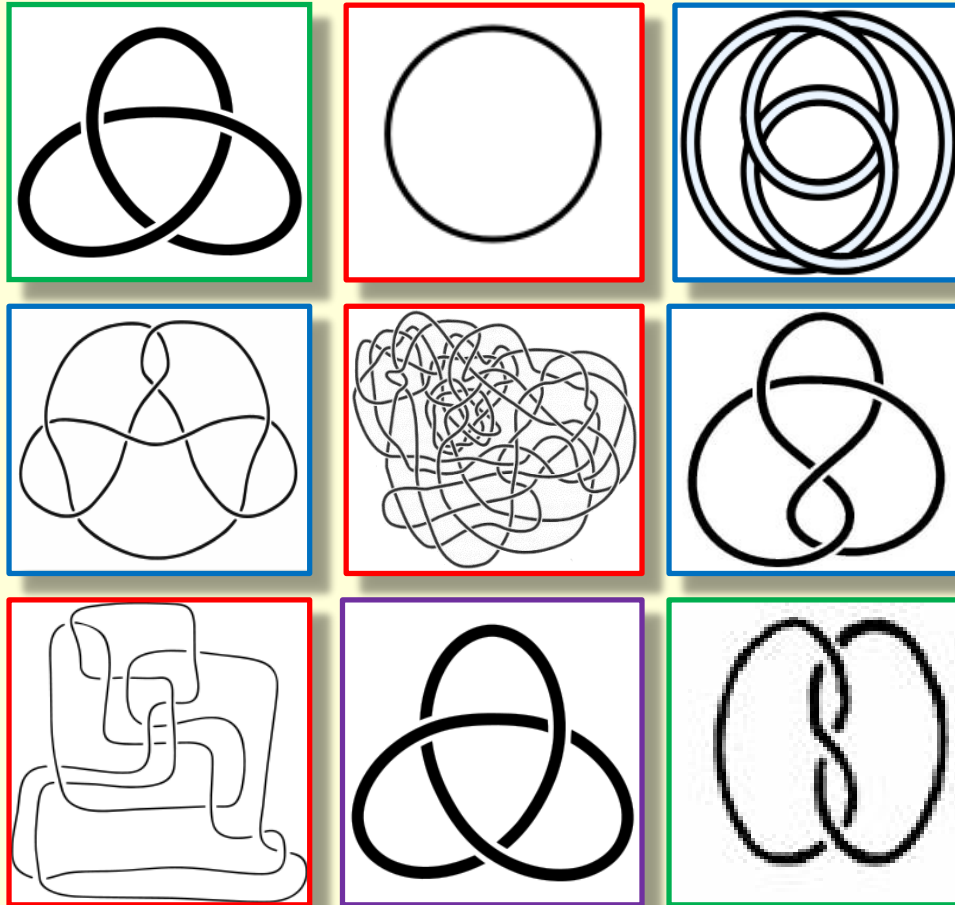
Замкнутая кривая в трехмерном пространстве без самопересечений



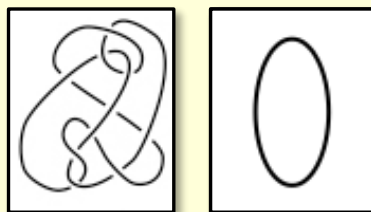
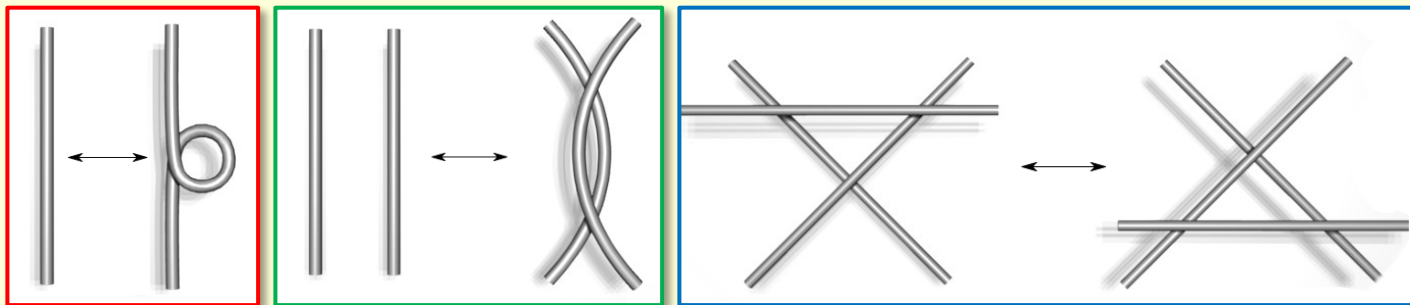
Основная проблема теории узлов



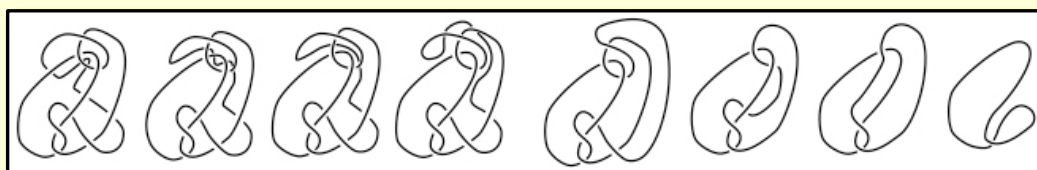
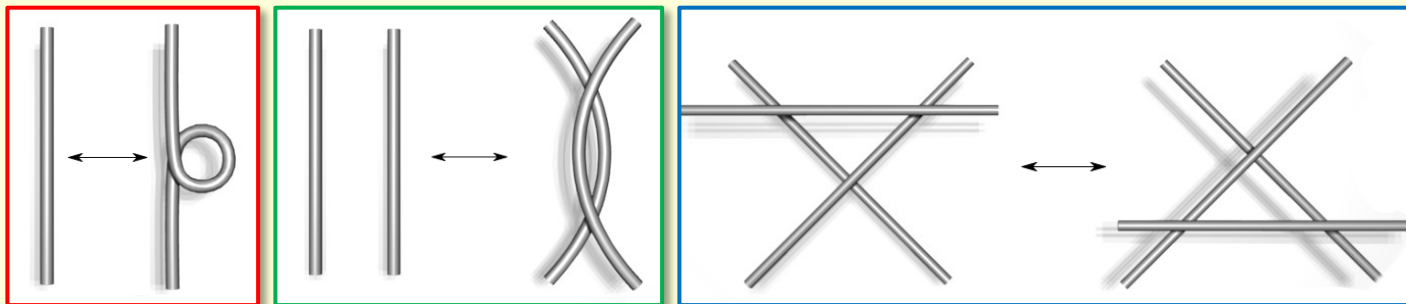
Основная проблема теории узлов



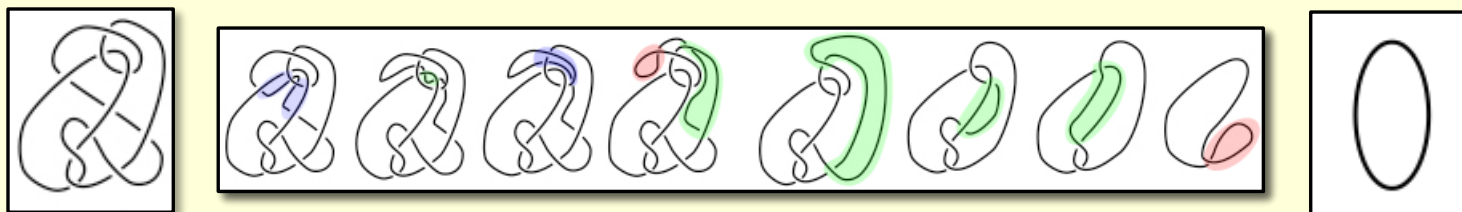
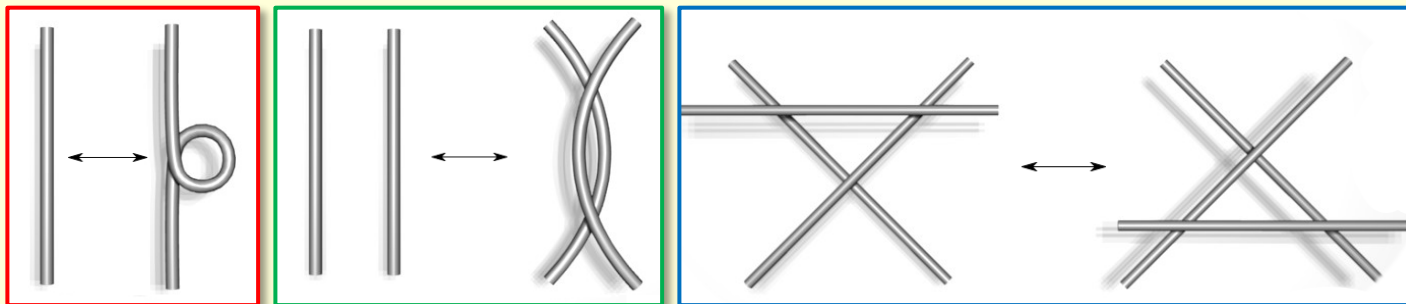
Движения Рейдемейстера



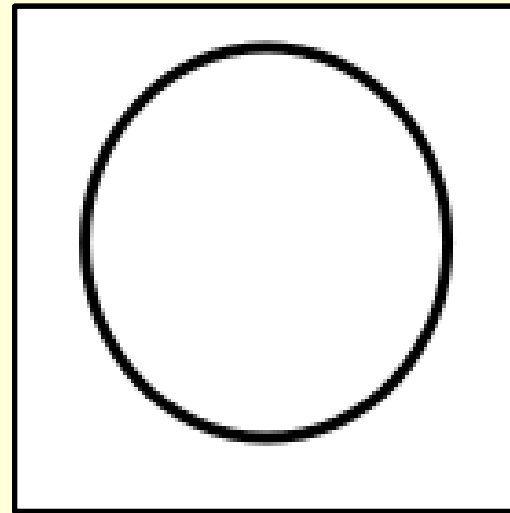
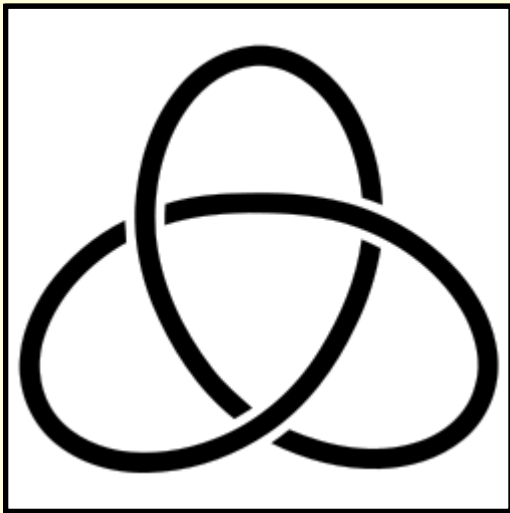
Движения Рейдемейстера



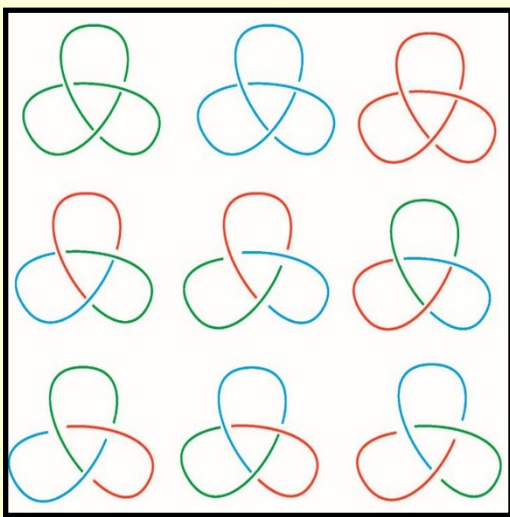
Движения Рейдемейстера



Инварианты узлов

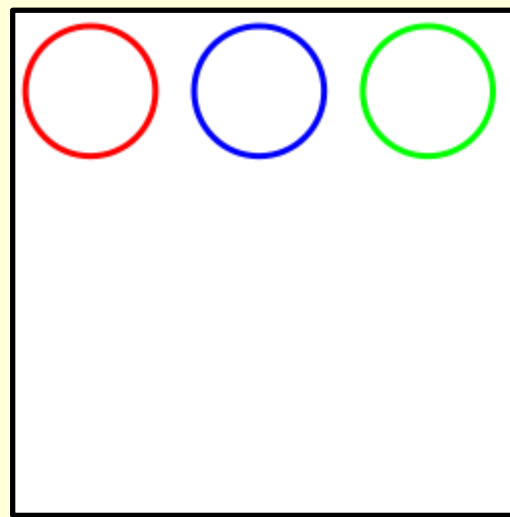


Инварианты узлов



9

$\neq$



3

Граф-узлы

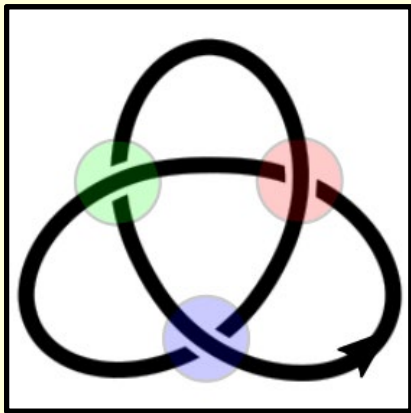
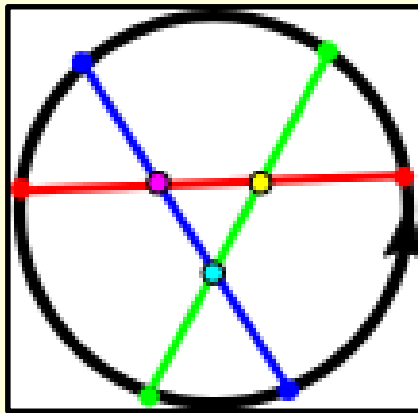
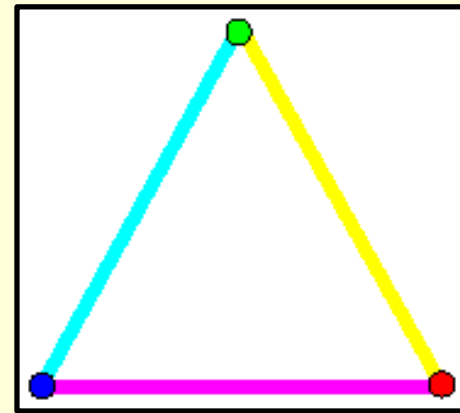


диаграмма узла



гауссова диаграмма



граф-узел



Граф-узлы

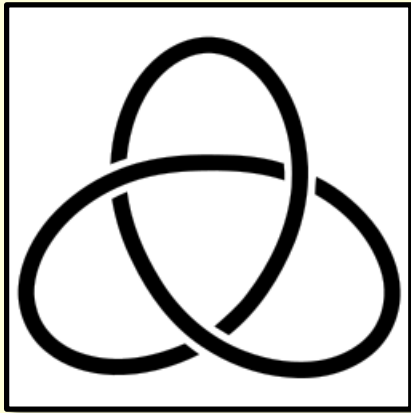
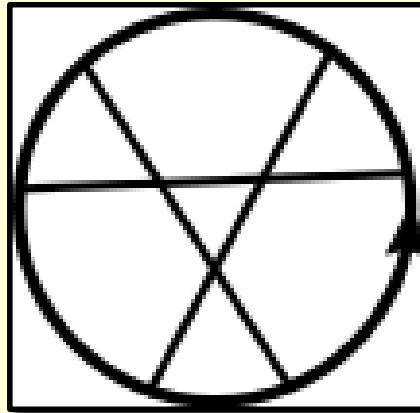
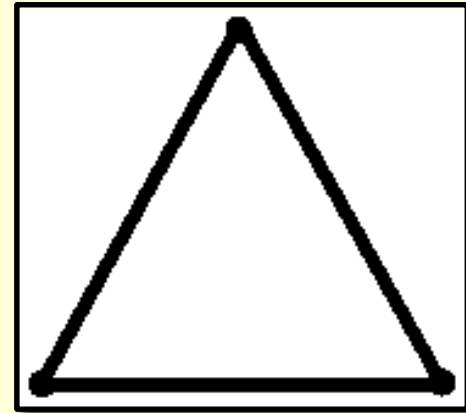


диаграмма узла

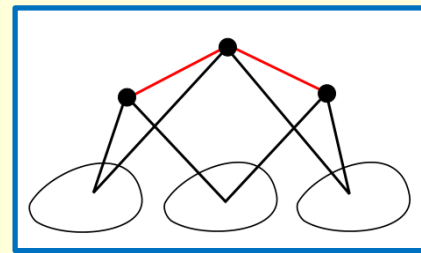
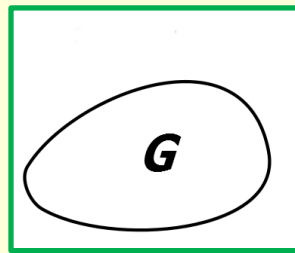
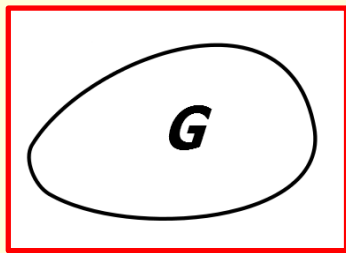


гауссова диаграмма



граф-узел

Движения Рейдемейстера для граф-узлов



Граф-узлы

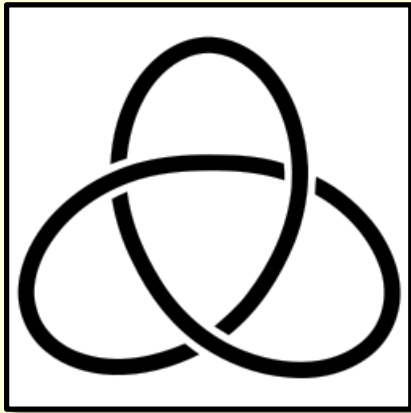
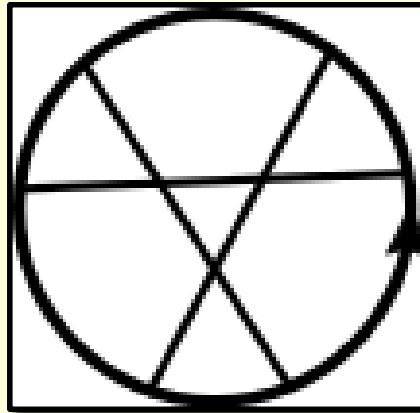
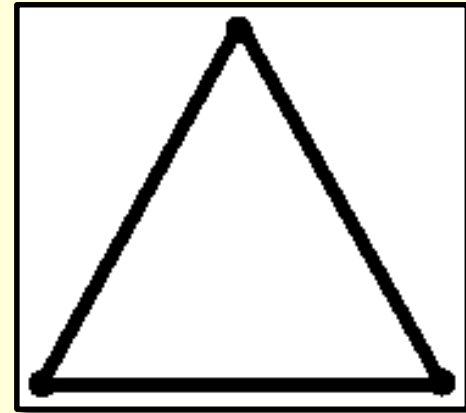


диаграмма узла

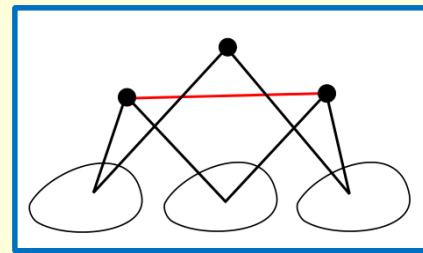
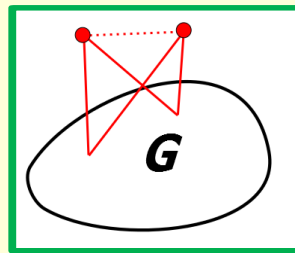
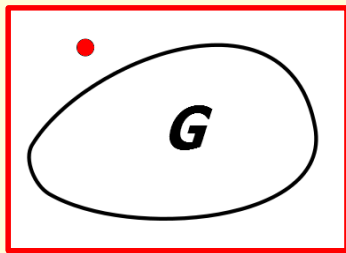


гауссова диаграмма

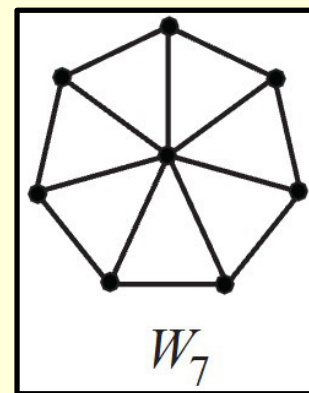
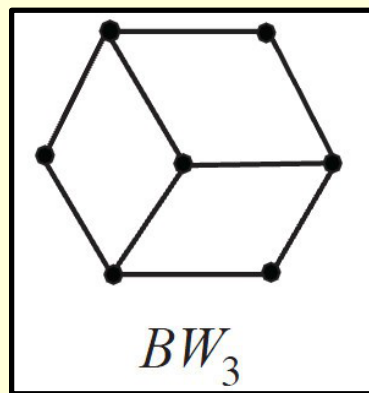
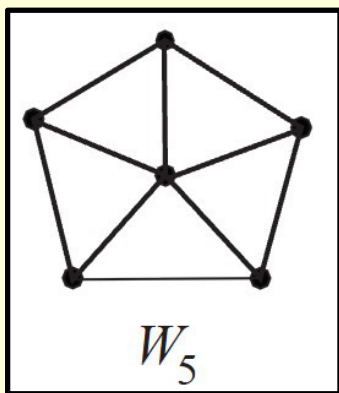


граф-узел

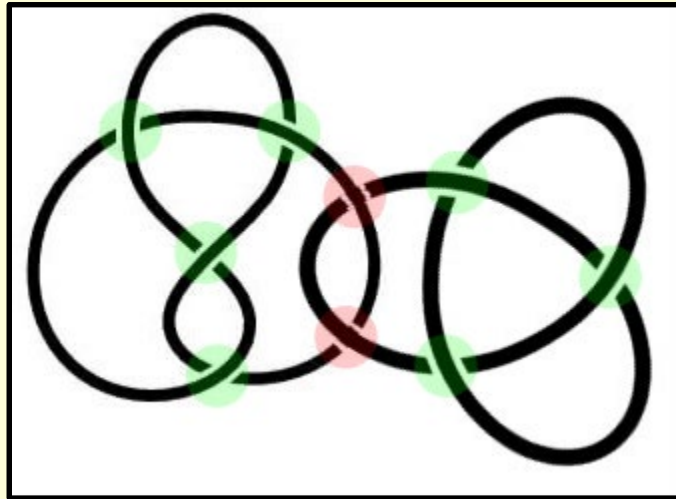
Движения Рейдемейстера для граф-узлов



Нереализуемые графы

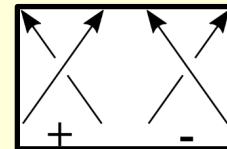


Четность узлов

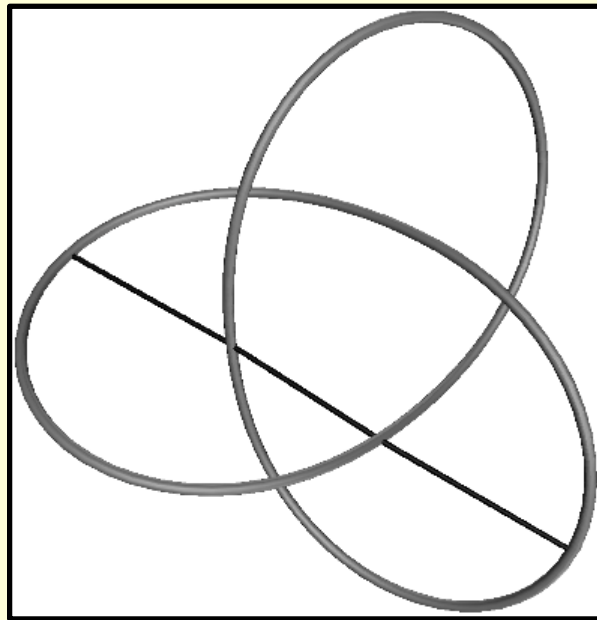


Аксиома четности: сумма четностей перекрестков, участвующих в движении Рейдемейстера, равна нулю.

Индекс зацепления $lk = \sum_{c \text{ нечетный}} \text{sgn}(c)$



Квадрисеканта



Некоммутативная геометрия и математическая физика.



И.М.Никонов



Ф.Ю.Попеленский



Г.И.Шаругин