

Лекции по классической дифференциальной геометрии.

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Содержание

1 Кривые в евклидовом пространстве. Плоские кривые	5
1.1 Параметрические кривые	5
1.2 Кривые–графики и неявные кривые	7
1.3 Определение регулярной кривой	8
1.4 Длина кривой, натуральный параметр	8
1.5 Кривизна регулярной кривой	11
1.6 Плоские кривые	11
Задачи	14
Добавление	15
2 Кривые в трехмерном пространстве	24
2.1 Формулы Френе	24
2.2 Натуральные уравнения	26
Задачи	29
Добавление	30
3 Поверхности. Первая фундаментальная форма	31
3.1 Параметрические поверхности	31
3.2 Поверхности–графики и неявные поверхности	32
3.3 Определение регулярной поверхности	34
3.4 Отображения регулярной поверхности	35
3.5 Кривые, координатные линии, касательное пространство и канонический репер на регулярной поверхности	35
3.6 Индуцированная метрика или первая фундаментальная форма регулярной поверхности	38
3.7 Изометрии поверхностей	41
Задачи	44
Добавление	45

4	Поверхности. Вторая фундаментальная форма	49
4.1	Определение второй фундаментальной формы регулярной поверхности	49
4.2	Геометрический смысл второй формы — кривизны плоских сечений	52
4.3	Главные кривизны и главные направления	53
4.4	Средняя и гауссова кривизна гиперповерхности	56
4.5	О теореме Бонне	59
	Задачи	60
	Добавление	61
5	Элементы дифференциального исчисления на поверхностях	71
5.1	Деривационные формулы Вейнгартена–Гаусса	71
5.2	Теорема Гаусса	75
5.3	Ковариантная производная касательного векторного поля	77
	Добавление	81
6	Геодезические на поверхностях	82
6.1	Определение и простейшие свойства геодезических	82
6.2	Примеры геодезических, теорема Клеро	86
	Задачи	90
	Добавление	91
7	Криволинейные координаты в области и на поверхности	94
7.1	Определение криволинейной системы координат	94
7.2	Примеры криволинейных систем координат	96
7.2.1	Евклидовы координаты	97
7.2.2	Линейная система координат	97
7.2.3	Полярная система координат	97
7.2.4	Цилиндрическая система координат	98
7.2.5	Сферические координаты	98
7.3	Касательное пространство к области в точке	99
7.4	Евклидова метрика в криволинейных координатах	100
7.4.1	Закон изменения компонент метрики при замене координат	101
7.4.2	Примеры вычисления евклидовой метрики	101
7.5	Криволинейные координаты на поверхностях	102
7.6	Стереографические координаты на сфере	102
	Задачи	106
	Добавление	107

8 Риманова и псевдориманова метрики	113
8.1 Риманова метрика и скалярное произведение	114
8.2 Билинейные формы и псевдориманова метрика	115
8.3 Пространство Минковского	117
Задачи	121
Добавление	122
9 Геометрия Лобачевского	126
9.1 Неевклидовы геометрии	126
9.1.1 Эллиптическая геометрия	127
9.1.2 Плоскость Лобачевского (гиперболическая геометрия)	127
9.2 Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского	128
9.3 Дробно линейные преобразования плоскости	129
9.4 Запись метрики в комплексной форме	133
9.5 Модель верхней полуплоскости	134
9.6 Изометрии плоскости Лобачевского	135
Задачи	138
Добавление	139
10 Топологические пространства	146
10.1 Метрические и топологические пространства	146
10.1.1 Метрические пространства	146
10.1.2 Топологические пространства	149
10.2 Непрерывные отображения	152
Задачи	156
Добавление	157
11 Классы топологических пространств	160
11.1 Связность	160
11.2 Аксиомы отделимости	162
11.3 Компактность	163
Задачи	167
Добавление	168
12 Многообразия	172
12.1 Топологические многообразия	172
12.2 Функции и отображения	174
12.3 Гладкие многообразия	174
12.4 Простейшие примеры гладких многообразий	176
12.5 Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизмы	177
12.6 Задание многообразий уравнениями — геометрический смысл теоремы о неявной функции	180
12.7 Подмногообразия	182
Задачи	184

Добавление	185
13 Касательное пространство к многообразию, дифференциал.	187
13.1 Определение касательного вектора	187
13.2 Касательное расслоение	190
13.3 Определение дифференциала	192
13.4 Локальные свойства отображений	193
Задачи	197
Добавление	198
14 Вложения многообразий в евклидово пространство	202
14.1 Существование вложения	202
14.2 Теорема Сарда	205
14.3 Теорема Уитни	207
Задачи	210
Добавление	211
15 Дополнительные структуры: риманова метрика, ориенти-	
руемость	212
15.1 Риманова метрика, римановы многообразия	212
15.2 Изометрии	216
15.3 Ориентируемость многообразия	216
Задачи	222
Добавление	223
16 Классификация связных двумерных компактных многообра-	
зий	225
16.1 Склейки многоугольников	225
16.2 Заклеивание сферы	227
16.3 Теорема классификации	229
16.3.1 Триангуляции.	229
16.3.2 Канонические склейки многоугольников.	230
16.3.3 Последний шаг, эйлерова характеристика.	231

1 Кривые в евклидовом пространстве. Плоские кривые

Пусть \mathbb{R}^n — стандартное n -мерное евклидово пространство, т.е. арифметическое n -мерное линейное пространство со скалярным произведением

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v^i w^i,$$

где $v = (v^1, \dots, v^n)$ и $w = (w^1, \dots, w^n)$ — произвольные векторы из \mathbb{R}^n , заданные своими компонентами в стандартной евклидовой системе координат (x^1, \dots, x^n) . Через $\|v\|$ обозначим стандартную норму вектора v :

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Пусть x_0 — некоторая точка в \mathbb{R}^n , и r — положительное число. *Открытым шаром* $U(x_0, r)$ радиуса r с центром в x_0 назовем множество следующего вида

$$U(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < r\}.$$

Подмножество V пространства \mathbb{R}^n называется *открытым*, если для каждой точки $x \in V$ существует открытый шар $U(x, r)$, такой что $U(x, r) \subset V$. Открытое подмножество \mathbb{R}^n , содержащее точку $x \in \mathbb{R}^n$, называется *открытой окрестностью точки x* .

1.1 Параметрические кривые

Для краткости, обозначим через I , $I \subset \mathbb{R}^1$, конечный или бесконечный *интервал* одного из следующих видов: $[a, b]$, (a, b) , $(a, b]$ или $[a, b)$.

Определение. *Непрерывной параметрической кривой* в \mathbb{R}^n называется произвольное непрерывное отображение $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ из некоторого интервала I в пространство \mathbb{R}^n .

Каждая непрерывная параметрическая кривая γ задается набором из n *координатных функций* $x^i(t)$, где t — координата на интервале I , называемая *параметром* для γ или *координатой* на γ , а x^1, \dots, x^n — стандартные евклидовы координаты в \mathbb{R}^n . При этом непрерывность γ равносильна непрерывности всех функций $x^i(t)$.

Отметим, что непрерывная параметрическая кривая может иметь самопересечения, т.е. могут существовать такие t и t' , $t \neq t'$, что $\gamma(t) = \gamma(t')$. Если самопересечений нет, т.е. отображение γ взаимно-однозначно с образом, то параметрическая кривая γ называется *простой*.

Введенный класс параметрических кривых является слишком широким и, в частности, содержит примеры, не согласующиеся с естественным представлением о кривых как одномерных объектах (вспомните известную из

курса математического анализа кривую Пеано, отображающую непрерывно отрезок на треугольник или квадрат, см. добавление 1.1).

Напомним, что функция называется *гладкой*, если она непрерывно дифференцируема бесконечное число раз.

Замечание. На самом деле, требование бесконечной дифференцируемости часто оказывается слишком сильным, и тогда под гладкостью понимают непрерывную дифференцируемость необходимого (конечное) число раз.

Определение. Непрерывная параметрическая кривая $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *гладкой*, если все задающие ее координатные функции $x^i(t)$ — гладкие.

В каждой точке $\gamma(t)$ гладкой кривой γ в пространстве \mathbb{R}^n определен вектор $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$, называемый *вектором скорости кривой* γ .

Упражнение 1.1. Показать, что образ гладкой кривой, в отличие, скажем, от кривой Пеано, не может содержать никакого открытого шара.

Хотя “одномерности” мы, возможно, и добились (во всяком случае, мы исключили из рассмотрения кривые типа кривой Пеано), тем не менее, интуитивное представление о гладкости как об отсутствии изломов не согласуется с данным определением. Совсем простой пример дает гладкая кривая $x(t) = t^3$, $y(t) = t^2$ на плоскости \mathbb{R}^2 с евклидовыми координатами (x, y) . Более сложный, но более наглядный пример приведен в следующем обязательном упражнении.

Упражнение 1.2. Доказать, что объединение двух отрезков, стыкующихся под произвольным углом, можно представить как образ гладкой параметрической кривой (см. добавление 1.2).

Так как у гладкой параметрической кривой вектор скорости непрерывно зависит от параметра, а направление этого вектора в “точках излома” (таких как вершина угла в упражнении 1.2) меняется скачком, то в таких точках скорость должна равняться нулю. Точка гладкой параметрической кривой, в которой вектор скорости обращается в ноль, называется *особой* или *сингулярной*. Остальные точки — *неособыми* или *регулярными*. Запрещая точки с нулевой скоростью, т.е. особые точки, приходим к следующему определению.

Определение. Гладкая параметрическая кривая называется *регулярной*, если ее вектор скорости всюду отличен от нуля.

Таким образом, подмножество плоскости из упражнения 1.2 нельзя задать как образ регулярной параметрической кривой (если угол отличен от развернутого).

Если две регулярные параметрические кривые пересекаются, то можно определить *угол* между этими кривыми как угол между векторами скоростей кривых в точке пересечения.

Упражнение 1.3. Напишите в явном виде выражение для угла между пересекающимися регулярными параметрическими кривыми.

Пусть $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная параметрическая кривая. Рассмотрим произвольную непрерывную строго монотонную функцию $\varphi: I' \rightarrow I$, отображающую интервал I' на весь интервал I (это отображение, очевидно, является взаимно-однозначным). Каждая такая функция порождает новую непрерывную параметрическую кривую $\gamma \circ \varphi: I' \rightarrow \mathbb{R}^n$ и называется *заменой параметризации кривой* γ . Отметим, что γ и $\gamma \circ \varphi$ имеют совпадающие образы в \mathbb{R}^n . Кроме того, если φ — замена параметризации, то φ^{-1} также является заменой параметризации. В случае, когда кривая γ — гладкая, мы будем дополнительно предполагать, что замены параметризации φ и φ^{-1} — гладкие. При этом, как следует из теоремы об обратной функции, производные функций φ и φ^{-1} всюду отличны от нуля. Таким образом, в сделанных предположениях, замена параметризации сохраняет свойство параметрической кривой быть непрерывной, гладкой или регулярной.

1.2 Кривые–графики и неявные кривые

Пусть $f: I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ — векторно значная гладкая функция. Тогда ее график $\Gamma_f = \{(t, f(t)) \mid t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *кривой–графиком* в пространстве \mathbb{R}^n . Ясно, что произвольная кривая–график Γ_f векторно значной функции $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$ может быть задана как образ регулярной параметрической кривой $\gamma_f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ с координатными функциями $x^1(t) = t$ и $x^{i+1}(t) = f_i(t)$, $i = 1, \dots, n-1$.

Упражнение 1.4. Докажите, что если $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — регулярная параметрическая кривая, то для каждого $t \in I$, $t \neq a$ и $t \neq b$, существует окрестность U точки t в интервале I такая, что $\gamma(U)$ является кривой–графиком некоторой гладкой функции $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ (при подходящем выборе подпространства \mathbb{R}^{n-1}).

Пусть $F_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, n-1$, — гладкие функции, заданные на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и $c = (c_1, \dots, c_{n-1})$ — некоторый постоянный вектор. Множество Γ_c решений системы уравнений

$$F_i(x^1, \dots, x^n) = c_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

называется *неявной кривой* в пространстве \mathbb{R}^n . Ясно, что каждая кривая–график Γ_f , $f = (f_1, \dots, f_{n-1})$, является также и неявной кривой, заданной системой уравнений $x^{i+1} - f_i(x^1) = 0$, $i = 1, \dots, n-1$.

Упражнение 1.5. Докажите, что если ранг матрицы Якоби $(\partial F_i / \partial x^j)$ в каждой точке неявной кривой Γ_c максимален (и равен $n-1$), то для каждой точки $P \in \Gamma_c$ существует окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$, такая что $U \cap \Gamma_c$ есть кривая–график некоторой гладкой функции $f: I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ (при подходящем выборе подпространства \mathbb{R}^{n-1}).

Неявная кривая называется *регулярной*, если матрица Якоби системы уравнений, задающих эту кривую, имеет максимальный ранг в каждой точке кривой.

1.3 Определение регулярной кривой

Подмножество пространства \mathbb{R}^n называется *регулярной кривой*, если оно представимо или в виде кривой–графика, или в виде регулярной неявной кривой, или как образ регулярной параметрической кривой.

Замечание. Окружность $x^2 + y^2 = 1$ является регулярной неявной кривой, но не является кривой–графиком. Окружность без точки, заданную как образ гладкой параметрической кривой $\gamma: (0, 2\pi) \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ нельзя задать как неявную кривую на плоскости.

Замечание. По-видимому, самый естественный способ определять кривые опирается на понятие одномерного подмногообразия. Мы сознательно не пользуемся им, чтобы не загромождать изложение, см. добавление 1.10.

Из упражнений 1.4 и 1.5 вытекает следующий результат, который мы докажем ниже в более общем случае поверхностей.

Теорема 1.1 *С локальной точки зрения три способа задания регулярной кривой эквивалентны в следующем смысле:*

- если $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — регулярная параметрическая кривая, то для каждого $t \in I$, $t \neq a$ и $t \neq b$, существует окрестность U точки t в интервале I такая, что $\gamma(U)$ является кривой–графиком некоторой гладкой функции;
- для каждой точки P регулярной неявной кривой Γ_c существует окрестность $U \subset \mathbb{R}^n$, такая что $U \cap \Gamma_c$ есть кривая–график в \mathbb{R}^n (при подходящей перестановке координат).

Ниже мы будем заниматься *локальной* теорией регулярных кривых, поэтому будем предполагать, что рассматриваемая регулярная кривая задана удобным для нас способом.

1.4 Длина кривой, натуральный параметр

Определим длину гладкой параметрической кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Более общее определение длины обсуждается в добавлении 1.3.

Определение. *Длиной $\ell(\gamma)$ гладкой параметрической кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется величина интеграла $\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$.*

Предложение 1.1 *Длина гладкой параметрической кривой не меняется при замене параметризации.*

Доказательство. Действительно, пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая, $t = t(s)$ — замена параметра, где $t \in [t_0, t_1]$, а $s \in [s_0, s_1]$. Положим $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$. По теореме о замене параметра в определенном интеграле имеем:

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_{s_0}^{s_1} \left\| \frac{d\tilde{\gamma}}{ds} \right\| ds = \int_{t(s_0)}^{t(s_1)} \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| \cdot \left| \frac{dt}{ds} \right| ds dt$$

Осталось избавиться от модуля в правой части. Так как $t(s)$ — строго монотонная функция, ее производная по s знакопостоянна. Если $t(s)$ монотонно возрастает, то производная dt/ds неотрицательна, и модуль можно опустить. При этом, очевидно, $t(s_0) = t_0$, и $t(s_1) = t_1$, поэтому правая часть равна длине $\ell(\gamma)$ кривой γ , и утверждение доказано. Если же функция $t(s)$ монотонно убывает, то $dt/ds < 0$, и модуль раскрывается с минусом. Но при этом $t(s_0) = t_1$, и $t(s_1) = t_0$, что и дает недостающий “минус” в правой части. Доказательство закончено.

Из предложения 1.1 вытекает возможность корректно определить *длину регулярной кривой* как длину произвольной задающей ее параметрической кривой.

Упражнение 1.6. Записать явные формулы для длины кривой–графика гладкой функции $f: I \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ и для неявной кривой, заданной системой уравнений $F_i(x) = c_i$.

Понятие длины позволяет выбрать на регулярной кривой некоторое естественное семейство параметризаций.

Определение. Параметр s , $s \in [a, b]$, гладкой (параметрической) кривой $\gamma(s)$ называется *натуральным*, если величина $s-a$ равна длине части кривой γ между точками $\gamma(a)$ и $\gamma(s)$ для любого $s \in [a, b]$.

Если t — произвольный параметр гладкой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, то отображение $\varphi(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$ задает замену параметра, приводящую к натуральному параметру $s = \varphi(t)$, если и только если φ^{-1} — гладкая функция. В частности, на параметрической кривой из упражнения 1.2, для которой угол стыковки отрезков отличен от 180° , нельзя ввести натурального параметра. Дело в том, что $\varphi(t)$ в этом случае задает непрерывную, но не гладкую замену параметра, приводящую к негладкой параметрической кривой. Тем не менее, если кривая регулярна, то проблем не возникает.

Предложение 1.2 *На гладкой кривой можно ввести натуральный параметр, если и только если эта кривая регулярна.*

Доказательство. Если кривая $\gamma(t)$ регулярна, то отображение

$$\varphi: t \mapsto \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$$

имеет гладкое обратное (так как $\dot{\varphi}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$), поэтому φ — замена параметра t на натуральный параметр $s = \varphi(t)$.

Для доказательства обратного утверждения достаточно заметить, что всякая натурально параметризованная гладкая параметрическая кривая регулярна, поэтому любая кривая, отличающаяся от нее заменой параметризации — также регулярна, что и требовалось.

Натуральные параметры обладают следующими свойствами.

Упражнение 1.7. Если s_1 и s_2 — два натуральных параметра на кривой γ , то $s_1 = \pm s_2 + c$ для некоторого числа $c \in \mathbb{R}$.

Предложение 1.3 Параметр s на регулярной кривой $\gamma(s)$ является натуральным, если и только если $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$.

Доказательство. Пусть s — натуральный параметр, т.е.

$$s = a + \int_a^s \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Дифференцируя левую и правую части равенства по s , получаем требуемое. Обратно, если $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$, то

$$s - a = \int_a^s dt = \int_a^s \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

поэтому $s - a$ равно длине части кривой γ между точками $\gamma(a)$ и $\gamma(s)$, т.е. s — натуральный параметр. Что и требовалось.

Прежде чем формулировать следующее свойство, напомним, что *вектором ускорения гладкой параметрической кривой γ в точке $\gamma(t)$* называется вектор $\ddot{\gamma}(t) = (\ddot{x}^1(t), \dots, \ddot{x}^n(t))$.

Предложение 1.4 Пусть s — натуральный параметр на регулярной кривой γ . Тогда в каждой точке кривой γ вектор ускорения $\ddot{\gamma}$ перпендикулярен вектору скорости $\dot{\gamma}$.

Доказательство. Действительно, $\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle = 1$ по предложению 1.3. Дифференцируя это равенство по s , получаем

$$2\langle \dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s) \rangle = 0,$$

что и требовалось.

1.5 Кривизна регулярной кривой

Чтобы охарактеризовать степень искривления отдельных участков кривой, обычно поступают следующим образом. Будем двигаться вдоль кривой с единичной по модулю скоростью. Тогда на более искривленных участках ускорение будет больше. Таким образом, “искривленность” можно измерять величиной этого ускорения. Пусть γ — произвольная регулярная кривая. Выберем на γ натуральный параметр s . Тогда величина $k(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|$ называется *кривизной кривой γ в точке $\gamma(s)$* . Ясно, что $k(s)$ не зависит от выбора натурального параметра. Величина $R(s)$, обратная кривизне, т.е. $R(s) = 1/k(s)$, называется *радиусом кривизны в точке $\gamma(s)$* (если $k(s) = 0$, то полагают $R(s) = \infty$).

Упражнение 1.8. Если t — произвольный параметр на регулярной кривой γ , то кривизна в точке $\gamma(t)$ может быть вычислена по следующей формуле:

$$k(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3},$$

где через $\|v \times w\|$ мы обозначили площадь параллелограмма, натянутого на векторы v и w из \mathbb{R}^n .

В случае кривой на плоскости \mathbb{R}^2 формула для кривизны в явном виде выглядит так:

$$k(t) = \frac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)|}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где (x, y) — стандартные координаты на плоскости \mathbb{R}^2 , и $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Регулярная параметрическая кривая $\gamma(t)$ называется *бирегулярной*, если ее кривизна всюду отлична от нуля. Из упражнения 1.8 вытекает, что бирегулярность кривой равносильна следующему условию: векторы скорости $\dot{\gamma}(t)$ и ускорения $\ddot{\gamma}(t)$ при любой параметризации регулярной кривой γ линейно независимы в каждой точке $\gamma(t)$.

1.6 Плоские кривые

Рассмотрим теперь случай плоской кривой. Пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная бирегулярная кривая в \mathbb{R}^2 . Обозначим через τ единичный вектор скорости $\dot{\gamma}(s)$ в точке $\gamma(s)$, т.е. $\tau = \dot{\gamma}(s)$, а через ν — нормированный вектор ускорения в точке $\gamma(s)$, т.е. $\nu = \ddot{\gamma}(s)/\|\ddot{\gamma}(s)\|$. Вектор ν называется *главной нормалью* κ γ в точке $\gamma(s)$. Из предложения 1.4 следует, что пара (τ, ν) образует ортонормированный репер в каждой точке $\gamma(s)$, который называется *репером Френе*.

Теорема 1.2 (Формулы Френе) В сделанных предположениях, имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\tau} = k\nu, \\ \dot{\nu} = -k\tau, \end{cases}$$

где $k = k(s)$ обозначает кривизну кривой γ в точке $\gamma(s)$.

Доказательство. Первое равенство мгновенно вытекает из определения векторов τ и ν .

Докажем второе равенство. Дифференцируя тождество $\langle \nu, \nu \rangle = 1$, находим, что $\langle \dot{\nu}, \nu \rangle = 0$, т.е. вектор $\dot{\nu}$ перпендикулярен ν и, поэтому, коллинеарен с τ . Следовательно,

$$\dot{\nu} = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle \tau.$$

Покажем, что $\langle \dot{\nu}, \tau \rangle = -k$. Для этого продифференцируем тождество $\langle \nu, \tau \rangle = 0$. Получаем

$$0 = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle + \langle \nu, \dot{\tau} \rangle = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle + \langle \nu, k \nu \rangle = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle + k,$$

что и требовалось.

Для плоских кривых более естественным является понятие *ориентированной* кривизны. Пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная плоская регулярная кривая, и $\nu_o(s)$ семейство единичных нормалей, таких что при каждом s пара $(\dot{\gamma}(s), \nu_o(s))$ образует положительно ориентированный базис (мы предполагаем, что плоскость канонически ориентирована). Последнее означает, что определитель матрицы перехода от стандартного базиса плоскости к базису $(\dot{\gamma}(s), \nu_o(s))$ положителен.

Определение. *Ориентированной кривизной* $k_o(s)$ кривой γ в точке $\gamma(s)$ называется число $\langle \ddot{\gamma}(s), \nu_o(s) \rangle$.

Легко видеть, что $k_o(s) = \pm k(s)$. Кроме того, формулы Френе из теоремы 1.2 естественно переписываются через ориентированную кривизну. А именно,

Теорема 1.3 (Формулы Френе для ориентированной кривизны) *В сделанных предположениях, имеет место следующая система уравнений:*

$$\begin{cases} \dot{\tau} = k_o \nu_o, \\ \dot{\nu}_o = -k_o \tau. \end{cases}$$

Более того, ориентированная кривизна может быть вычислена через произвольную параметризацию кривой по аналогии с упражнением 1.8.

Упражнение 1.9. Если t — произвольный параметр на регулярной кривой γ , то ориентированная кривизна в точке $\gamma(t)$ может быть вычислена по следующей формуле:

$$k_o(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3},$$

где через $v \times w$ мы обозначили ориентированную площадь параллелограмма, натянутого на векторы v и w из \mathbb{R}^2 : если $v = (v^1, v^2)$, а $w = (w^1, w^2)$, то $v \times w = v^1 w^2 - v^2 w^1$. В явном виде формула для ориентированной кривизны выглядит так:

$$k_o(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где (x, y) — стандартные координаты на плоскости \mathbb{R}^2 , и $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

Оказывается, ориентированная кривизна полностью определяет форму кривой.

Теорема 1.4 Пусть $f(s)$ — произвольная гладкая функция. Тогда существует плоская регулярная кривая γ , натурально параметризованная параметром s , такая что ее ориентированная кривизна $k_o(s)$ в каждой точке $\gamma(s)$ равна $f(s)$, причем такая кривая единственна с точностью до движения плоскости, сохраняющего ориентацию.

Доказательство. Пусть $\gamma(s)$ — произвольная натурально параметризованная регулярная кривая, и $k_o(s) = f(s)$ — ее ориентированная кривизна. Так как вектор $\dot{\gamma}$ единичный, его можно представить как $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, где $\varphi = \varphi(s)$. Поэтому

$$\ddot{\gamma} = \dot{\varphi} (-\sin \varphi, \cos \varphi) = \dot{\varphi} \nu_o(s),$$

откуда $\dot{\varphi} = k_o$. Следовательно,

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \int_a^s f(t) dt, \quad x^1(s) = x_0^1 + \int_a^s \cos \varphi(t) dt, \quad x^2(s) = x_0^2 + \int_a^s \sin \varphi(t) dt,$$

где φ_0 , x_0^1 и x_0^2 — некоторые числа.

Таким образом, если функция $k_o(s)$ фиксирована и равна $f(s)$, то кривая $\gamma(s) = (x^1(s), x^2(s))$ восстанавливается однозначно с точностью до чисел φ_0 , x_0^1 и x_0^2 . Первое из них соответствует повороту плоскости на угол φ_0 (проверьте), а вектор (x_0^1, x_0^2) — сдвигу. Кривая γ , как легко проверить, регулярна, натурально параметризована, и ее ориентированная кривизна равна $f(s)$. Отметим, что мы нашли явные формулы для восстановления кривой γ . Доказательство закончено.

Определение. Соотношение $k_o(s) = f(s)$ называется *натуральным уравнением плоской кривой*. Решить натуральное уравнение означает найти натурально параметризованную регулярную кривую $\gamma(s)$, ориентированная кривизна которой равна $f(s)$.

Упражнение 1.10. Переформулировать теорему 1.4 для случая обычной кривизны.

Задачи к лекции 1

Задача 1.1. Доказать, что объединение двух отрезков, стыкующихся под некоторым углом, можно представить как образ гладкой параметрической кривой.

Задача 1.2. Круг радиуса a катится по прямой без скольжения. Составить уравнение траектории точки, жестко связанной с кругом и находящейся на расстоянии d от его центра (при $d = a$ — *циклоида*, при $d < a$ — *укороченная циклоида*, при $d > a$ — *удлиненная циклоида*).

Задача 1.3. Вычислить кривизну следующих кривых

- 1) окружности радиуса R ;
- 2) цепной линии, заданной графиком функции $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, $a > 0$;
- 3) эллипса с полуосями a и b в его вершинах;
- 4) циклоиды, укороченной циклоиды, удлиненной циклоиды.

Задача 1.4. Вычислить длину кривой, заданной графиком функции $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$.

Задача 1.5. Ввести натуральную параметризацию на следующих кривых:

- 1) отрезок прямой $ax + by + c = 0$;
- 2) дуга окружности $x^2 + y^2 = R^2$;
- 3) график функции $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$.

Задача 1.6. Описать все кривые постоянной кривизны.

Задача 1.7. Решить натуральное уравнение $k = 1/s$.

Задача 1.8. Пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная бигулярная кривая. *Центром кривизны* кривой γ в точке $\gamma(s)$ называется точка $\gamma(s) + R(s)\nu(s)$, где $R(s) = 1/k(s)$ — радиус кривизны, а $\nu(s)$ — главная нормаль. Множество центров кривизны называется *каустикой* или *эволютой* кривой γ . Построить каустик для эллипса и циклоиды.

Задача 1.9. [*] *Овалом* называется простая замкнутая кривая, кривизна которой всюду отлична от нуля (овал ограничивает строго выпуклую область). *Вершиной овала* называется точка, в которой кривизна имеет локальный минимум или максимум. Доказать, что каждый овал имеет по меньшей мере четыре вершины.

Дополнительный материал к лекции 1

Добавление 1.1. Кривая Пеано в треугольнике. *Кривая Пеано* — непрерывная кривая, заполняющая квадрат или треугольник, — может быть построена, например, так. Возьмем равнобедренный прямоугольный треугольник T , разобьем его на два равнобедренных прямоугольных треугольника T_1 и T_2 , проведя высоту h из вершины прямого угла. Обозначим через r_1 отрезок, соединяющий центры треугольников T_j , $j = 1, 2$.

Чтобы построить ломаную r_2 , мы в каждом из треугольников T_j , $j = 1, 2$, построим такую же ломаную, как во всем треугольнике T на первом шаге. Другими словами, мы возьмем два экземпляра треугольника T с уже построенной ломаной r_1 , уменьшим их до размера треугольников T_j , и отождествим каждый из экземпляров с соответствующим треугольником T_j , $j = 1, 2$. Полученное объединение отрезков достроим до связной ломаной, соединив две концевые вершины, ближайšie к высоте h .

Наконец, на $i + 1$ шаге мы построим ломаную r_{i+1} из ломаной r_i , построенной на i -ом шаге, так. Вновь разобьем треугольник T на два треугольника T_1 и T_2 , проведя в T высоту h из вершины прямого угла; возьмем два экземпляра треугольника T с уже построенной ломаной r_i и уменьшим их до размера треугольников T_j ; отождествим каждый из этих экземпляров с соответствующим треугольником T_j , $j = 1, 2$; полученное объединение двух ломаных, лежащих в треугольнике T , достроим до связной ломаной, соединив две концевые вершины этих ломаных, ближайšie к высоте h .

Продолжим этот процесс до бесконечности (см. рис. 1). Предельная кривая γ называется кривой Пеано. Несложно показать, что кривая Пеано проходит через каждую точку треугольника. Поэтому ее образ — это треугольник T .

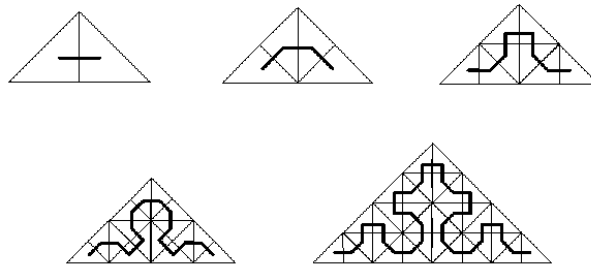


Рис. 1: Кривая Пеано в треугольнике.

Отметим, что можно построить многомерные и даже бесконечномерные аналоги кривой Пеано (теорема Мазуркевича).

Упражнение 1.11. Показать, что имеют место следующие утверждения.

- 1) Кривая Пеано проходит через каждую точку треугольника T .
- 2) Кривая Пеано непрерывна.
- 3) Кривая Пеано имеет кратные точки, т.е. существуют такие точки треугольника T , через которые кривая Пеано проходит несколько раз.
- 4) Найти кратность кратных точек кривой Пеано, т.е. число их прообразов.

Добавление 1.2. Пример гладкой параметрической кривой, имеющей вид ломаной. Рассмотрим отображение L отрезка $[-1, 1]$ в плоскость \mathbb{R}^2 , заданное координатными функциями $x^i(t)$ так:

$$x^1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [-1, 0] \\ e^{-1/t^2} & \text{при } t \in (0, 1] \end{cases} \quad x^2(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2} & \text{при } t \in [-1, 0) \\ 0 & \text{при } t \in [0, 1] \end{cases}$$

Легко проверить, что так определенные функции $x^1(t)$ и $x^2(t)$ являются гладкими. Графики координатных функций $x^i(t)$, $i = 1, 2$, и сама гладкая кривая L изображены на рис. 2.

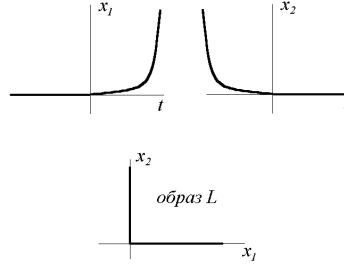


Рис. 2: Координатные функции и образ гладкой кривой L .

Добавление 1.3. Длина кривой как предел длин вписанных ломаных. Пусть ξ — некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Напомним, что *диаметром* δ_ξ разбиения ξ называется максимальное из чисел $t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Разбиение ξ и кривая γ порождают ломаную L_ξ , последовательные вершины которой — суть точки $\gamma(t_i)$. Ломаную L_ξ будем называть *вписанной в γ ломаной, соответствующей разбиению ξ* . Напомним, что длина $\ell(L)$ произвольной ломаной L — это сумма длин всех ее ребер. Таким образом,

$$\ell(L_\xi) = \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|.$$

Непрерывная параметрическая кривая γ называется *измеримой*, если существует предел

$$\ell(\gamma) = \lim_{\delta_\xi \rightarrow 0} \ell(L_\xi).$$

Предел $\ell(\gamma)$ называется *длиной измеримой кривой γ* .

Упражнение 1.12. Доказать, что гладкая параметрическая кривая γ измерима, и ее длина, как измеримой кривой, равна

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Другими словами, два определения длины гладкой кривой эквивалентны.

Упражнение 1.13. Доказать аналог предложения 1.1 об инвариантности длины относительно замены параметризации для произвольной измеримой кривой.

Добавление 1.4. Примеры перехода к натуральному параметру. Рассмотрим *отрезок прямой*, заданный параметрически так: $x^i(t) = a_i t + b_i$, $t \in [t_0, t_1]$, $i = 1, \dots, n$. Данная параметризация не является натуральной, и мы, как и в доказательстве предложения 1.2, найдем натуральный параметр, вычислив длину отрезка:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} dt = (t - t_0) \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}.$$

Поэтому в натуральной параметризации отрезок выглядит так:

$$x^i(s) = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}} s + a_i t_0 + b_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следующий пример — окружность радиуса R на плоскости \mathbb{R}^2 . Зададим окружность параметрически так: $x^1(t) = R \cos t$, $x^2(t) = R \sin t$. Эта параметризация снова не натуральная, а натуральный параметр имеет вид:

$$s(t) = \int_0^t R dt = tR.$$

Поэтому натуральная параметризация $\gamma(s)$ окружности радиуса R имеет вид

$$x^1(s) = R \cos \frac{s}{R}, \quad x^2(s) = R \sin \frac{s}{R}.$$

Добавление 1.5. Примеры вычисления кривизны. Вычислим кривизну отрезка прямой и окружности. В натуральной параметризации координатные функции, задающие отрезок, — линейны (см. выше), поэтому ускорение равно нулю и, значит, кривизна отрезка прямой равна нулю.

Натуральная параметризация $\gamma(s)$ окружности радиуса R на плоскости \mathbb{R}^2 имеет вид (см. выше):

$$x^1(s) = R \cos \frac{s}{R}, \quad x^2(s) = R \sin \frac{s}{R}.$$

Вычислим вектор ускорения $\ddot{\gamma}$:

$$\dot{\gamma}(s) = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R} \right), \quad \ddot{\gamma}(s) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R} \right).$$

Ясно, что длина вектора $\ddot{\gamma}$ равна $1/R$, поэтому кривизна окружности постоянна и равна $1/R$, а радиус кривизны совпадает с радиусом окружности. Кроме того, центр окружности совпадает с точкой $\gamma(s) + R\nu(s)$, где $\nu(s)$ — главная нормаль. В случае общей бигулярной кривой $\gamma(s)$ точка $\gamma(s) + R(s)\nu(s)$ называется *центром кривизны* кривой γ в точке $\gamma(s)$ (здесь $R(s)$ — радиус кривизны кривой γ в точке $\gamma(s)$). Таким образом, центр кривизны окружности в каждой ее точке совпадает с центром окружности.

Добавление 1.6. Соприкасающаяся окружность. Выясним геометрический смысл радиуса и центра кривизны. Для этого определим порядок касания кривых и покажем, что окружность, касающаяся кривой в данной точке P с максимальным порядком, имеет радиус, равный радиусу кривизны кривой в P , а центр ее находится в центре кривизны кривой в P .

Рассмотрим на плоскости пару регулярных кривых γ_1 и γ_2 и предположим, что они пересекаются в точке P . Отнесем обе кривые к натуральному параметру s , выбрав в качестве начальной точку пересечения P . Отметим, что выбор таких параметризаций неоднозначен, так как мы можем двигаться по кривым в разных направлениях. Ясно, что для каждой такой параметризации $\gamma_1(0) - \gamma_2(0) = 0$, и для некоторого $k \geq 0$ выполняется $\gamma_1(s) - \gamma_2(s) = o(s^k)$ при $s \rightarrow 0$ (напомним, что векторнозначная функция $\gamma(s)$ называется $o(s^k)$ при $s \rightarrow 0$, если $\|\gamma(s)\|/s^k$ стремится к нулю при $s \rightarrow 0$). Максимальное k , для которого справедливо это соотношение, где максимум берется также и по всевозможным натуральным параметризациям кривых γ_i , называется *порядком касания кривых γ_1 и γ_2* .

Пример. Пусть $\gamma(s)$ — произвольная регулярная кривая, параметризованная натуральным параметром, и $P = \gamma(0)$ — точка на ней. Рассмотрим семейство прямых на плоскости, проходящих через эту точку и тоже параметризованных натуральным параметром.

Каждая такая прямая l имеет вид $l_E(s) = Es + \gamma(0)$, где E — единичный вектор. Найдем порядок касания прямой l_E и кривой γ в точке $s = 0$. Имеем:

$$\gamma(s) - l_E(s) = \gamma(0) + \dot{\gamma}(0)s + o(s) - \gamma(0) - Es = (\dot{\gamma}(0) - E)s + o(s), \quad s \rightarrow 0.$$

Поэтому все прямые, кроме $l_{\pm \dot{\gamma}(0)}$, имеют порядок касания 0, а порядок касания прямых $l_{\pm \dot{\gamma}(0)}$ не меньше 1.

Пусть снова $\gamma(s)$ — произвольная плоская регулярная кривая, параметризованная натуральным параметром, и $P = \gamma(0)$ — точка на ней. Предположим сначала, что кривизна кривой $\gamma(s)$ отлична от нуля в точке $s = 0$. Пусть $c(s)$ — натурально параметризованная окружность, касающаяся $\gamma(s)$ в точке $P = c(0)$ с порядком касания не меньшим двух. Тогда вектора скоростей и вектора ускорений кривых $\gamma(s)$ и $c(s)$ в точке P совпадают. В частности, у этих кривых совпадают главные нормали, кривизны и центры кривизны. Поэтому центр окружности $c(s)$ находится в центре кривизны кривой γ в точке $\gamma(s)$, а радиус равен радиусу кривизны $R(s)$ кривой γ .

Пусть теперь кривизна кривой $\gamma(s)$ в точке $s = 0$ равна нулю, т.е. равно нулю ее ускорение. Поскольку у натурально параметризованной прямой ускорение также равно нулю, прямая, касающаяся кривой γ в точке $\gamma(0)$, имеет порядок касания не меньше, чем 2. Если прямые рассматривать как окружности бесконечного радиуса, то, опять же, заключаем, что и в этом случае существует единственная окружность, касающаяся кривой $\gamma(s)$ с порядком не меньшим 2 (у других окружностей в натуральной параметризации ускорение отлично от нуля).

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 1.1 Среди всех окружностей, проходящих через некоторую фиксированную точку P регулярной кривой, существует единственная окружность, для которой ее порядок касания с кривой больше или равен двум. Радиус этой окружности равен радиусу кривизны R кривой в точке P , а центр находится в центре кривизны, т.е. в точке $P + R\nu = P + 1/k\nu = P + 1/k_0\nu_0$.

Определение. Окружность из утверждения 1.1 называется *соприкасающейся окружностью* кривой γ в точке P .

Упражнение 1.14. Рассмотрим не только окружности, а, вообще, все кривые второго порядка, проходящие через точку регулярной кривой. Показать, что среди таких кривых найдется одна, порядок касания которой не меньше 4.

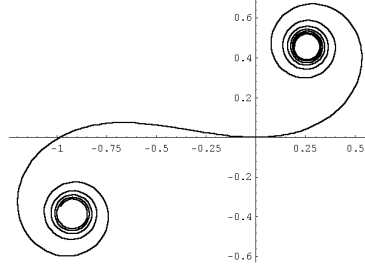
Упражнение 1.15. Определить тип и параметры кривой второго порядка из предыдущего упражнения в терминах кривизны исходной кривой.

Добавление 1.7. О явных решениях натурального уравнения. Отметим, что решить натуральное уравнение в явном виде часто не удастся — интегралы, как правило, не берутся. Скажем, если мы рассмотрим натуральное уравнение $k_0(s) = as + b$, то даже в этом, на первый взгляд простом случае, уже появляются специальные функции — интегралы Френеля. Однако численно найти решение не составляет труда, см. рис. 3.

Добавление 1.8. Эволюты и эвольвенты. Рассмотрим следующую известную задачу. Пусть γ — регулярная кривая на плоскости, и $\varepsilon \in \mathbb{R}$ — некоторое число. Построим новую кривую γ_ε , заменив каждую точку $\gamma(s)$ точкой, полученной из $\gamma(s)$ смещением на вектор $\varepsilon\nu_0(s)$, т.е. $\gamma_\varepsilon(s) = \gamma(s) + \varepsilon\nu_0(s)$. Эта кривая называется *ε -эквилидистантной кривой* γ . Ясно, что γ_ε при малых ε по-прежнему является регулярной кривой. Однако, когда ε возрастает, у эквидистант могут появляться особые точки. Опишем эти точки.

Пусть кривая γ параметризована натуральным параметром s . Тогда вектор скорости ε -эквилидистанты, в силу формул Френе, имеет вид:

$$\dot{\gamma}_\varepsilon(s) = \dot{\gamma}(s) + \varepsilon\dot{\nu}_0(s) = (1 - \varepsilon k_0(s))\tau(s),$$

Рис. 3: Кривая, ориентированная кривизна которой равна $3s + 1$, $s \in [-5, 5]$.

откуда вытекает, что точка $\gamma_\varepsilon(s)$ является особой, если и только если $k_o(s) = 1/\varepsilon$. Если последнее условие выполнено, то, очевидно, соответствующая точка эквидистанты имеет вид $\gamma_\varepsilon(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k_o(s)}\nu_o(s)$ и, в силу утверждения 1.1, совпадает с центром кривизны кривой γ в точке $\gamma(s)$. Итак, имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.5 *Вектор скорости ε -эквидистанты обращается в нуль, если и только если в соответствующей точке ориентированная кривизна исходной кривой равна $1/\varepsilon$. Множество особых точек эквидистант — это в точности множество центров кривизны исходной кривой.*

Определение. Множество центров кривизны регулярной кривой γ называется *каустикой* или *эволютой* кривой γ .

Следствие 1.1 *Эволюта — это множество всех особых точек эквидистант.*

Пример. Найдем эволюту *циклоиды*, т.е. плоской кривой $\gamma(\varphi)$, заданной так:

$$x(\varphi) = R\varphi - R \sin \varphi, \quad y(\varphi) = R - R \cos \varphi.$$

Параметр φ не является натуральным, поэтому для вычисления кривизны воспользуемся упражнением 1.9. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\varphi) &= (R - R \cos \varphi, R \sin \varphi), \quad \ddot{\gamma}(\varphi) = (R \sin \varphi, R \cos \varphi), \\ \|\dot{\gamma}(\varphi)\| &= R\sqrt{2(1 - \cos \varphi)} = 2R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|, \\ \dot{\gamma}(\varphi) \times \ddot{\gamma}(\varphi) &= R^2 (\cos \varphi - 1) = -2R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

откуда

$$k_o(\varphi) = \frac{-2R \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{8R^3 \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|^3} = -\frac{1}{4R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|}.$$

Напомним, что вектор ориентированной главной нормали ν_o получается поворотом на $\pi/2$ нормированного вектора скорости, поэтому

$$\nu_o(\varphi) = \frac{1}{2R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} (-R \sin \varphi, R - R \cos \varphi),$$

откуда эволюта циклоиды может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} (R\varphi - R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) - 4R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \frac{1}{2R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|} (-R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) &= \\ = (R\varphi - R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) - 2(-R \sin \varphi, R - R \cos \varphi) &= \\ = (R\varphi + R \sin \varphi, R \cos \varphi - R). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что полученная эволюта — это снова циклоида, только смещенная, см. рис. 4. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 1.2 Эволюта циклоиды — это снова циклоида.

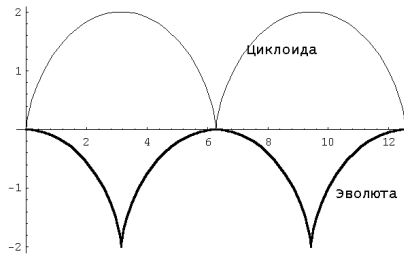


Рис. 4: Циклоида и ее эволюта.

Упражнение 1.16. Описать эквидистанты для циклоиды.

Упражнение 1.17. Построить эквидистанты и эволюту для эллипса.

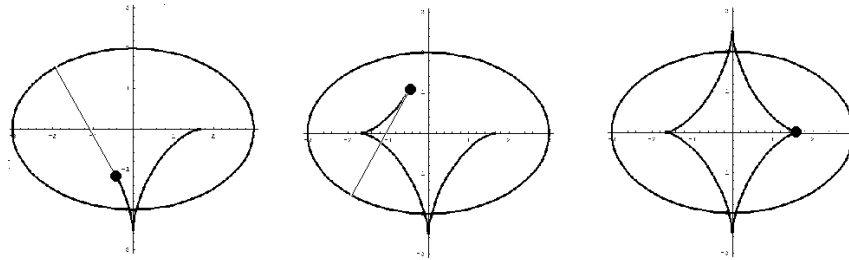


Рис. 5: Построение эволюты эллипса. Жирная точка — центр кривизны, тонкий прямолинейный отрезок — радиус соответствующей соприкасающейся окружности.

Рассмотрим теперь следующую обратную задачу. Пусть на плоскости задана регулярная кривая δ . Существует ли кривая γ , для которой δ является эволютой?

Предположим, что $\gamma(s)$ — это искомая кривая, параметризованная натуральным параметром. Тогда, по определению эволюты, имеем:

$$\delta(s) = \gamma(s) + \frac{\nu_o(s)}{k_o(s)}.$$

Продифференцировав это равенство по s , получаем в силу формул Френе:

$$\frac{d\delta}{ds} = \dot{\gamma} + \frac{\dot{\nu}_o}{k_o} - \frac{\nu_o \dot{k}_o}{k_o^2} = -\frac{\nu_o \dot{k}_o}{k_o^2}.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 1.1 *Нормаль к регулярной кривой, проведенная в точке P , является касательной к эволюте этой кривой в соответствующей точке $P + \frac{1}{\kappa_0} \nu_0$. Другими словами, регулярная кривая перпендикулярна каждой касательной своей эволюты.*

Пусть теперь $\gamma(s)$ — регулярная кривая, параметризованная натуральным параметром. Выпустим из каждой ее точки касательную прямую, и проведем из некоторой начальной точки кривую δ , перпендикулярную всем касательным. Эта кривая δ может быть записана в виде $\delta(s) = \gamma(s) + \tau(s)f(s)$, где $f(s)$ — некоторая гладкая функция. Условие перпендикулярности дает следующее уравнение на $f(s)$:

$$\langle \dot{\delta}, \tau \rangle = \langle \dot{\gamma}(s) + \dot{\tau}(s)f(s) + \tau(s)\dot{f}(s), \tau(s) \rangle = 0, \quad \text{т.е.} \quad \dot{f}(s) = -1.$$

Поэтому $f(s) = C - s$, и окончательно, $\delta(s) = \gamma(s) + \tau(s)(C - s)$.

Определение. Кривая δ , перпендикулярная ко всем касательным данной кривой, называется *эвольвентой* этой кривой.

Таким образом, каждая эвольвента натурально параметризованной кривой $\gamma(s)$ может быть записана в виде $\delta(s) = \gamma(s) + \tau(s)(C - s)$. Эвольвенте соответствует следующая механическая модель. Представим себе, что на кривой $\gamma(s)$ приклеена нерастяжимая нить, начальный отрезок длины C которой свисает в точке $\gamma(0)$. Натянем нить вдоль касательной к кривой в точке $\gamma(0)$, и будем сматывать ее с кривой так, чтобы она в каждый момент времени оставалась натянутой по соответствующей касательной. Конец нити в этом случае опишет эвольвенту с параметром C .

Следствие 1.2 *Каждая регулярная кривая является некоторой эвольвентой своей эволюты.*

Доказательство. Это немедленно вытекает из леммы 1.1.

Упражнение 1.18. Найти эвольвенты окружности и циклоиды.

Добавление 1.9. Маятник Гюйгенса. В 1657 году Гюйгенс (Huygens) изобрел и изготовил особо точные (для того времени) часы, за что получил огромную денежную премию, а принципиальная схема этих часов стала эмблемой XVII века. Такое внимание к часам в эпоху географических открытий, бурного развития колоний, мореплавания и т.п. объяснить легко — хорошо известно, что точные часы необходимы для вычисления географической долготы. Периодические свойства маятников были уже давно известны во времена Гюйгенса, однако проблема состояла в том, что период колебаний, скажем, кругового маятника (точка движется по дуге окружности) меняется при затухании, что крайне затрудняет измерение времени с помощью часов, в основе которых лежит такой маятник.¹ Чтобы преодолеть эту неприятность, нужно чтобы маятник двигался не по окружности, а по какой-нибудь другой кривой. Подходящая кривая — циклоида, — была найдена Гюйгенсом. Он показал, что период колебания циклоидального маятника не зависит от начального положения точки на дуге циклоиды. Удивительно, что, как выяснилось через 150 лет, кривая, обладающая таким свойством, единственна. Этот факт был установлен в 1823 году Абелем (Abel), который для этого решил одно из первых в истории интегральных уравнений. Однако теорема Абеля лежит за рамками данного курса. Мы только проверим, следуя Гюйгенсу, что циклоида действительно обладает искомым свойством.

Рассмотрим дугу циклоиды, выпуклую вниз и заданную параметрически так:

$$x(t) = R(t + \pi + \sin t), \quad y(t) = R - R \cos t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

¹Зависимость периода T от угла φ размаха колебаний кругового маятника такова: $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi^2}{16}\right)$, где l — длина маятника, и g — ускорение свободного падения.

Легко сосчитать, что если выбрать в качестве начальной точки самую нижнюю точку O циклоиды, т.е. точку $t = 0$, то натуральный параметр s будет иметь следующий простой вид: $s = \sqrt{8Ry}$. Чтобы найти уравнение движения маятника, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + mgy = \text{const},$$

поэтому, если h_0 — это начальная высота точки, и начальная скорость равна нулю, то имеем: $v^2 = 2g(h_0 - y)$, откуда, учитывая, что при движении от начальной точки расстояние s до точки O убывает, получаем следующее дифференциальное уравнение: $ds/dt = -\sqrt{2g(h_0 - y)}$. Но $y = \frac{s^2}{8R}$, поэтому имеем окончательно:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{4R}(s_0^2 - s^2)}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, находим, что $s = s_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4R}} t\right)$, поэтому период колебаний циклоидального маятника равен $2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}$, что не зависит от начального положения точки на циклоиде. Итак, мы доказали следующее важное свойство циклоиды.

Утверждение 1.3 *Время движения материальной точки по циклоиде к положению равновесия без начальной скорости не зависит от начального положения точки на циклоиде.*

Это свойство циклоиды называется *таутохронностью*.

Однако, мало было открыть это замечательное свойство циклоидального маятника. Нужно было еще решить техническую проблему: а как заставить маятник колебаться вдоль циклоиды? Для этого Гюйгенс воспользовался тем уже известным нам фактом, что среди эвольвент циклоиды имеется ее эволюта, которая, как мы знаем, конгруэнтна самой циклоиде. В итоге возникла конструкция, изображенная на рис. 6. Движение математического маятника ограничено двумя пластинами, имеющими форму дуг циклоид. Поэтому маятник в свою очередь сам описывает циклоиду и, значит, совершает таутохронные колебания.

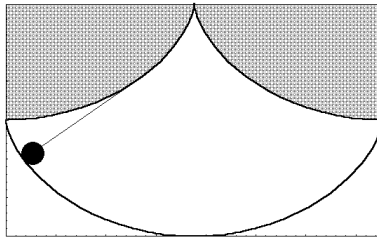


Рис. 6: Маятник Гюйгенса.

Именно с помощью таких часов измеряли время до тех пор, пока не были изобретены храповик и морской хронометр (уже в XVIII веке, в Англии).

Добавление 1.10. Определение кривой как подмногообразия. Обозначим через $I, I \subset \mathbb{R}^1$, конечный или бесконечный *интервал* одного из следующих видов: $[a, b]$, (a, b) , $(a, b]$ или $[a, b)$.

Определение. *Непрерывной параметрической кривой в \mathbb{R}^n* называется произвольное непрерывное отображение $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ из некоторого интервала I в пространство \mathbb{R}^n . Непрерывная параметрическая кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *простой*, если она взаимно однозначна с образом. Непрерывная параметрическая кривая $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *простой*, если она представляет собой ограничение простой непрерывной параметрической кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ на интервал I .

Замечание. Простая непрерывная параметрическая кривая по определению параметризована *конечным* интервалом.

Определение. *Кривой в пространстве \mathbb{R}^n* называется подмножество Γ пространства \mathbb{R}^n , такое что у каждой точки $x \in \Gamma$ имеется некоторая открытая окрестность $V \subset \mathbb{R}^n$, для которой $\Gamma \cap V$ является образом простой непрерывной параметрической кривой γ . При этом γ называется *представлением кривой Γ в окрестности точки x* . Если в окрестности каждой точки x кривой Γ существует гладкое (регулярное) представление γ , то кривая Γ называется *гладкой* (соответственно, *регулярной*).

Упражнение 1.19. Покажите, что график любой гладкой функции $y = f(x)$ задает регулярную кривую на плоскости \mathbb{R}^2 с координатами (x, y) .

Упражнение 1.20. Пусть $F(x, y)$ — гладкая функция, дифференциал которой отличен от нуля во всех точках множества $\Gamma = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$. Покажите, что Γ — регулярная кривая.

Упражнение 1.21. Покажите, что объединение координатных лучей Ox и Oy является гладкой, но не регулярной кривой на плоскости.

Упражнение 1.22. Является ли кривой объединение координатных прямых Ox и Oy на плоскости? Тот же вопрос для замкнутого круга.

2 Кривые в трехмерном пространстве

Рассмотрим теперь регулярные кривые в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . Напомним, что регулярная кривая называется *бигулярной*, если ее кривизна всюду отлична от нуля. Мы начнем с построения аналога репера Френе.

2.1 Формулы Френе

Итак, пусть $\gamma(s)$ — натурально параметризованная бигулярная кривая в \mathbb{R}^3 . Обозначим через τ вектор скорости $\dot{\gamma}(s)$; через ν — нормированный вектор ускорения $\ddot{\gamma}(s)/\|\ddot{\gamma}(s)\|$, который также называется *главной нормалью* к γ в точке $\gamma(s)$; а через β — векторное произведение $[\tau, \nu]$, называемое *бинормалью* к γ в точке $\gamma(s)$. Тройка (τ, ν, β) образует ортонормальный репер, называемый *репером Френе*.

Продифференцируем бинормаль β . По формуле Лейбница, имеем

$$\dot{\beta} = [\tau, \nu] = [\dot{\tau}, \nu] + [\tau, \dot{\nu}] = [\tau, \dot{\nu}],$$

где последнее равенство справедливо, так как вектор $\dot{\tau}$, равный $\ddot{\gamma}$, коллинеарен ν , и, значит, $[\dot{\tau}, \nu] = 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что вектор $\dot{\beta}$ ортогонален τ . Далее, так как вектор $\beta(s)$ — единичный при каждом s , то $\dot{\beta}$ перпендикулярен β . Следовательно, $\dot{\beta}$ коллинеарен вектору ν . Положим $\kappa = -\langle \dot{\beta}, \nu \rangle$, т.е. $\dot{\beta} = -\kappa \nu$. Величина κ называется *кручением* кривой γ в точке $\gamma(s)$. Ясно, что кручение κ является гладкой функцией параметра s .

Теорема 2.1 (Формулы Френе) *В сделанных предположениях, имеет место следующая система уравнений:*

$$\begin{cases} \dot{\tau} = k \nu, \\ \dot{\nu} = -k \tau + \kappa \beta, \\ \dot{\beta} = -\kappa \nu. \end{cases}$$

где k и κ обозначают соответственно кривизну и кручение кривой γ в точке $\gamma(s)$.

Доказательство. Первое и третье уравнения — это фактически определения кривизны и кручения. Осталось доказать второе уравнение.

Так как вектор $\dot{\nu}$ перпендикулярен ν , то его можно разложить по векторам τ и β . Положим $\dot{\nu} = a \tau + b \beta$. В силу ортонормальности репера Френе, имеем: $a = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle$ и $b = \langle \dot{\nu}, \beta \rangle$. Мы должны показать, что $a = -k$, а $b = \kappa$.

Так как $\langle \nu, \tau \rangle = \langle \nu, \beta \rangle = 0$, то, дифференцируя эти равенства, заключаем, что

$$0 = \langle \dot{\nu}, \tau \rangle + \langle \nu, \dot{\tau} \rangle = a + k, \quad 0 = \langle \dot{\nu}, \beta \rangle + \langle \nu, \dot{\beta} \rangle = b - \kappa,$$

что и требовалось. Доказательство закончено.

Приведем теперь явные формулы для вычисления кривизны и кручения кривой в произвольной параметризации.

Теорема 2.2 Пусть $\gamma(t)$ — бирегулярная кривая. Тогда

$$k = \frac{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}, \quad \varkappa = \frac{(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|^2},$$

где через (u, v, w) мы обозначили смешанное произведение векторов u, v и w из \mathbb{R}^3 .

Доказательство. Пусть сначала $t = s$ — натуральный параметр. Тогда

$$\dot{\gamma} = \tau, \quad \|\dot{\gamma}\| = 1, \quad \ddot{\gamma} = k\nu, \quad \|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\| = k,$$

и

$$\ddot{\gamma} = \dot{k}\nu + k(-k\tau + \varkappa\beta), \quad (\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = k^2\varkappa,$$

поэтому в этом случае теорема имеет место.

Сделаем замену параметра. Оказывается, приведенные формулы при этом не изменятся. Действительно, обозначая начальный параметр через s , новый параметр — через t , а дифференцирования по параметрам — соответствующими нижними индексами, получаем

$$\gamma_s = \gamma_t t_s, \quad \gamma_{ss} = \gamma_{tt} t_s^2 + \gamma_t t_{ss}, \quad \gamma_{sss} = \gamma_{ttt} t_s^3 + 3\gamma_{tt} t_s t_{ss} + \gamma_t t_{sss},$$

откуда

$$[\gamma_s, \gamma_{ss}] = [\gamma_t, \gamma_{tt}] t_s^3, \quad (\gamma_s, \gamma_{ss}, \gamma_{sss}) = (\gamma_t, \gamma_{tt}, \gamma_{ttt}) t_s^6,$$

что мгновенно влечет

$$\frac{\|[\gamma_s, \gamma_{ss}]\|}{\|\gamma_s\|^3} = \frac{\|[\gamma_t, \gamma_{tt}]\|}{\|\gamma_t\|^3}, \quad \text{и} \quad \frac{(\gamma_s, \gamma_{ss}, \gamma_{sss})}{\|[\gamma_s, \gamma_{ss}]\|^2} = \frac{(\gamma_t, \gamma_{tt}, \gamma_{ttt})}{\|[\gamma_t, \gamma_{tt}]\|^2}.$$

Доказательство закончено.

Упражнение 2.1. Пусть t — произвольный параметр пространственной бирегулярной кривой γ . Проверить, что вектор бинормали $\beta(t)$ может быть вычислен по формуле

$$\beta(t) = \frac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]}{\|[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}]\|},$$

а вектор главной нормали $\nu(t)$ — по формуле $\nu(t) = [\beta, \tau]$. Эти формулы позволяют легко вычислять репер Френе бирегулярной кривой в произвольной параметризации.

2.2 Натуральные уравнения

Оказывается, кривизна и кручение полностью определяют форму бигулярной кривой в трехмерном пространстве.

Теорема 2.3 Пусть $f(s)$ и $g(s)$ — две гладкие функции на отрезке $[a, b]$, причем функция $f(s)$ везде положительна. Тогда, с точностью до сохраняющего ориентацию движения пространства, существует единственная натурально параметризованная кривая $\gamma(s)$, такая что ее кривизна $k(s)$ и кручение $\varkappa(s)$ равны соответственно $f(s)$ и $g(s)$.

Доказательство. Формулы Френе, в которые вместо кривизны подставлена функция f , а вместо кручения — функция g , можно рассматривать как систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка на девять неизвестных — координаты векторов τ , ν и β . Эту систему будем обозначать символом (*). Нам будет удобно записать ее в матричном виде. Пусть $\tau = (\tau^1, \tau^2, \tau^3)$, $\nu = (\nu^1, \nu^2, \nu^3)$, $\beta = (\beta^1, \beta^2, \beta^3)$, тогда система (*) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\tau}^1 & \dot{\tau}^2 & \dot{\tau}^3 \\ \dot{\nu}^1 & \dot{\nu}^2 & \dot{\nu}^3 \\ \dot{\beta}^1 & \dot{\beta}^2 & \dot{\beta}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 \\ -f & 0 & g \\ 0 & -g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^1 & \tau^2 & \tau^3 \\ \nu^1 & \nu^2 & \nu^3 \\ \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 \end{pmatrix}.$$

Матрицу из системы (*), строками которой являются координаты векторов τ , ν и β , обозначим через η , а матрицу, содержащую f и g — через Ω . Таким образом, система (*) имеет вид $\dot{\eta} = \Omega\eta$. Отметим, что Ω — кососимметричная матрица.

Выберем в \mathbb{R}^3 некоторый ортонормальный положительно ориентированный репер (τ_0, ν_0, β_0) . По теореме существования и единственности решения системы линейных дифференциальных уравнений, существуют и единственны вектор-функции $\tau(s)$, $\nu(s)$ и $\beta(s)$, удовлетворяющие системе (*) и начальным условиям $\tau(a) = \tau_0$, $\nu(a) = \nu_0$ и $\beta(a) = \beta_0$.

Положим

$$\gamma(s) = \gamma_0 + \int_a^s \tau(t) dt,$$

где γ_0 — произвольный вектор, и покажем, что γ — бигулярная кривая, s — натуральный параметр на γ , кривизна $k(s)$ кривой γ равна $f(s)$, а кручение $\varkappa(s)$ кривой γ равно $g(s)$.

Лемма 2.1 При каждом s тройка $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ образует ортонормальный репер.

Доказательство. Утверждение леммы равносильно тому, что матрица η ортогональна при каждом s , т.е. $\eta^T \eta = E$, где E — единичная матрица. Так как начальное условие представляет собой ортонормальный репер, то

при $s = a$ матрица η ортогональна. Мы докажем, что матрица $\eta^T \eta$ не зависит от s , откуда и будет следовать лемма. Имеем

$$(\eta^T \eta)' = \dot{\eta}^T \eta + \eta^T \dot{\eta} = \eta^T \Omega^T \eta + \eta^T \Omega \eta = \eta^T (\Omega^T + \Omega) \eta = 0,$$

где последнее равенство следует из кососимметричности матрицы Ω . Лемма доказана.

Так как $\dot{\gamma}(s) = \tau(s)$, то из леммы 2.1 вытекает, что γ — регулярна, и s — натуральный параметр. Далее, так как $\ddot{\gamma}(s) = \dot{\tau}(s) = f(s) \nu(s)$, функция $f(s)$ положительна, а $\nu(s)$ — единичный вектор, заключаем, что $f(s)$ совпадает с кривизной, а $\nu(s)$ — с главной нормалью кривой γ в точке $\gamma(s)$. Так как $f(s) > 0$ при любом s , то кривая γ — бирегулярна. Далее, так как репер (τ_0, ν_0, β_0) — ортонормален и положительно ориентирован, а вектор-функции $\tau(s)$, $\nu(s)$ и $\beta(s)$ — гладкие, каждый из ортонормальных реперов $(\tau(s), \nu(s), \beta(s))$ также положительно ориентирован, поэтому $\beta(s)$ совпадает с бинормалью к γ . Наконец, условие $\dot{\beta} = -g \nu$ дает, что g совпадает с кручением кривой γ . Таким образом, мы доказали существование кривой γ .

Докажем теперь единственность. Пусть имеются две натурально параметризованные параметром s кривые γ_1 и γ_2 с одинаковыми кривизной k и кручением \varkappa . С помощью движения совместим их начальные точки и начальные реперы Френе. Полученные кривые вновь обозначим теми же буквами. Пусть $(\tau_i(s), \nu_i(s), \beta_i(s))$ — семейство реперов Френе для кривой γ_i . Заметим, что эти реперы удовлетворяют одной и той же системе обыкновенных дифференциальных уравнений Френе и имеют одинаковые начальные условия. Отсюда, по теореме единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, реперы Френе кривых γ_i совпадают в соответствующих точках. В частности, совпадают векторы $\tau_i(s)$. Наконец, так как $\gamma_i(s)$ является решением дифференциального уравнения $\dot{\gamma}_i(s) = \tau_i(s)$, кривые γ_i совпадают, что и заканчивает доказательство теоремы.

Определение. Если $f(s)$ и $g(s)$ — две гладкие функции, такие что $f(s) > 0$ при всех s , то условия $k(s) = f(s)$, $\varkappa(s) = g(s)$ на кривизну k и кручение \varkappa кривой γ называются *натуральными уравнениями пространственной кривой*. Решить натуральные уравнения означает найти натурально параметризованную бирегулярную кривую $\gamma(s)$ с кривизной $f(s)$ и кручением $g(s)$.

Таким образом, мы показали, что натуральные уравнения всегда имеют решение, единственное с точностью до сохраняющего ориентацию движения пространства \mathbb{R}^3 .

Замечание. Напомним, что в плоском случае по одной гладкой функции — ориентированной кривизне однозначно восстанавливается регулярная

(не обязательно бирегулярная) кривая. Дело в том, что в двумерном случае семейство ориентированных главных нормалей регулярной кривой продолжается по нерывности в те точки кривой, в которых ускорение обращается в нуль, т.е. нарушается бирегулярность. В трехмерном пространстве такое продолжение, вообще говоря, невозможно, так как в окрестности точки, в которой нарушается бирегулярность, прямая, проведенная вдоль главной нормали, может меняться скачком.

Упражнение 2.2. Привести пример такой регулярной кривой $\gamma(s)$, что $(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = 0$, и кривая γ не лежит ни в одной двумерной плоскости. Может ли такая кривая быть бирегулярной? Изучить поведение главной нормали построенной кривой в окрестности точек, в которых нарушается бирегулярность.

Задачи к лекции 2

Задача 2.1. Найти векторы репера Френе и вычислить кривизну и кручение

1) винтовой линии

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt);$$

2) кривой

$$\gamma(t) = (t^2, 1 - t, t^3).$$

Задача 2.2. Показать, что если кривые отличаются на движение, то они имеют одинаковые кривизну и кручение в соответствующих точках.

Задача 2.3. Доказать, что кручение бигулярной кривой в \mathbb{R}^3 равно тождественно нулю тогда и только тогда, когда эта кривая лежит в некоторой плоскости. Найти уравнение этой плоскости в пространстве.

Задача 2.4. Верно ли, что если в каждой точке регулярной кривой γ в \mathbb{R}^3 выполняется

$$(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = 0,$$

то γ — плоская кривая?

Задача 2.5. Описать класс бигулярных кривых в \mathbb{R}^3 с постоянными кривизной и кручением.

Задача 2.6. Показать, что каждая кривая постоянной ненулевой кривизны k может быть получена из натурально параметризованной кривой $\tau(s)$, лежащей на единичной сфере, следующим образом:

$$\gamma(s) = \frac{1}{k} \int_0^{sk} \tau(\sigma) d\sigma.$$

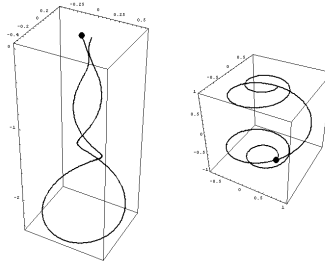


Рис. 7: Пример кривой постоянной кривизны. Слева показана сама кривая γ , а справа — соответствующая кривая τ на сфере.

Задача 2.7. Описать класс бигулярных кривых в \mathbb{R}^3 с постоянным кручением.

Задача 2.8. Доказать, что кривизна бигулярной кривой в \mathbb{R}^3 пропорциональна кручению, если и только если найдется постоянный ненулевой вектор u , такой что $\langle u, \tau \rangle = \text{const}$.

Задача 2.9. Доказать, что бигулярная кривая в \mathbb{R}^3 с ненулевым кручением \varkappa лежит на сфере радиуса R тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$R^2 = \frac{1}{k^2} \left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2} \right),$$

где k — кривизна кривой.

Дополнительный материал к лекции 2

Добавление 2.1. Линии откоса. Бирегулярная кривая называется *линией откоса*, если вдоль нее отношение кручения и кривизны не меняется, т.е. $k(s)/\varkappa(s) = \text{const}$. Опишем класс таких кривых.

Положим для удобства $k(s)/\varkappa(s) = \text{tg } \alpha$, где α — некоторый фиксированный угол. Тогда наше соотношение можно переписать в виде

$$k(s) \cos \alpha - \varkappa(s) \sin \alpha = 0.$$

Умножив первое из уравнений Френе на $\cos \alpha$, а последнее — на $\sin \alpha$, и вычитая из первого уравнения последнее, получим:

$$\tau'(s) \cos \alpha - \beta'(s) \sin \alpha = \nu(s) (k(s) \cos \alpha - \varkappa(s) \sin \alpha) = 0.$$

Поэтому единичный вектор $m = \tau(s) \cos \alpha - \beta(s) \sin \alpha$ не меняется вдоль кривой. С другой стороны, $\langle m, \tau(s) \rangle = \cos \alpha$, поэтому угол между вектором m и касательным вектором к кривой γ постоянен и равен α . Проведем через каждую точку кривой прямую в направлении вектора m . Получим цилиндрическую поверхность. Очевидно, наша кривая лежит на этой цилиндрической поверхности, причем при разворачивании поверхности в плоскость, кривая γ превращается в прямую, пересекающуюся с образующей прямой под углом α . Оказывается, что верно и обратное утверждение.

Утверждение 2.1 *Всякая линия откоса есть такая линия на подходящей цилиндрической поверхности, которая переходит в прямую после разворачивания поверхности в плоскость. Обратное, всякая кривая, обладающая указанным свойством, есть линия откоса.*

Доказательство. Нам осталось доказать лишь обратное утверждение. Пусть m — направляющий вектор прямых, образующих цилиндрическую поверхность. Тогда, по условию, $\langle m, \tau(s) \rangle = \cos \alpha = \text{const}$. Продифференцировав это равенство по s , получим: $\langle m, k(s)\nu(s) \rangle = 0$. Поскольку наша кривая бирегулярна, ее кривизна не обращается в нуль. Поэтому $\langle m, \nu(s) \rangle = 0$ для любого s , т.е. существуют такие функции $x(s)$ и $y(s)$, что $m = x(s)\tau(s) + y(s)\beta(s)$. Но, напомним, $\langle m, \tau(s) \rangle = \cos \alpha$, откуда, очевидно, $x(s) = \text{const} = \cos \alpha$, а $y(s) = \text{const} = \sin \alpha$, т.е. $m = \tau(s) \cos \alpha + \beta(s) \sin \alpha$. Продифференцировав последнее равенство, из формул Френе получим, что $k(s) \cos \alpha + \varkappa(s) \sin \alpha = 0$, т.е. $\varkappa(s)/k(s) = \text{const}$. Итак, γ — это линия откоса. Утверждение доказано.

3 Поверхности. Первая фундаментальная форма

Понятие кривых естественным образом обобщается на объекты большей размерности, которые называются поверхностями. Будем действовать в соответствие с планом построения теории кривых, реализованным на предыдущих лекциях.

3.1 Параметрические поверхности

Мы начнем с определения так называемых параметрических поверхностей, т.е. поверхностей, заданных с помощью подходящего отображения (сравните со случаем кривых).

Определение. *Непрерывной параметрической поверхностью* размерности k в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq k$, называется произвольное непрерывное отображение $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ из некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ в \mathbb{R}^n .

Отметим, что каждое такое r задается набором из n *координатных функций* $x^i(u^1, \dots, u^k)$, где u^i — стандартные координаты в $\mathbb{R}^k \supset \Omega$, а x^1, \dots, x^n — стандартные координаты в \mathbb{R}^n . При этом непрерывность отображения r равносильна непрерывности всех функций $x^i(u^1, \dots, u^k)$. Координаты u^i называются *параметрами* для r или *координатами* на параметрической поверхности r .

Непрерывная параметрическая поверхность r , может, вообще говоря, иметь самопересечения, т.е. могут существовать такие точки P и P' из Ω , что $r(P) = r(P')$. Если самопересечений нет, т.е. отображение r взаимно однозначно с образом, то параметрическая поверхность r называется *простой*.

Определение. Непрерывная параметрическая поверхность $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *гладкой*, если все ее координатные функции $x^i(u^1, \dots, u^k)$ — гладкие. В этом случае определены векторы $r_{u^i} = (x_{u^i}^1, \dots, x_{u^i}^n)$, называемые *базисными касательными векторами для r в точке $r(u^1, \dots, u^k)$* . Здесь через $x_{u^i}^j$ мы обозначили частную производную функции x^j по параметру u^i .

Отметим, что интуитивное представление о гладкости поверхности не соответствует данному определению, что иллюстрируется следующим упражнением.

Упражнение 3.1. Доказать, что конус и двугранный угол можно представить как образы гладких параметрических поверхностей.

Легко видеть, что для поверхностей “изломы” могут возникать лишь в тех точках, в которых базисные касательные векторы линейно зависимы.

Такие точки называются *особыми* или *сингулярными*, а все остальные — *регулярными* или *неособыми*. Запрещая такие точки, мы приходим к следующему определению.

Определение. Гладкая параметрическая поверхность называется *регулярной*, если ее базисные касательные векторы всюду линейно независимы. Это равносильно тому, что матрица Якоби $(x_{u_j}^i)$ имеет во всех точках поверхности максимальный ранг (равный, очевидно, k).

Пусть $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная параметрическая поверхность. Рассмотрим произвольное взаимно-однозначное непрерывное вместе со своим обратным отображение $\varphi: \Omega' \rightarrow \Omega$ области $\Omega' \subset \mathbb{R}^k$ на область $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Каждое такое отображение порождает новую непрерывную параметрическую поверхность $r \circ \varphi: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$ и называется *заменой параметризации для r* . Отметим, r и $r \circ \varphi$ имеют совпадающие образы. Кроме того, если φ — замена параметризации, то φ^{-1} также является заменой параметризации. В случае, когда поверхность r — гладкая, мы будем дополнительно предполагать, что замены параметризации φ и φ^{-1} — гладкие. При этом, как вытекает из теоремы об обратной функции, дифференциалы отображений φ и φ^{-1} всюду невырождены, т.е. задаются невырожденными матрицами. Поэтому, в сделанных предположениях, замена параметризации сохраняет свойство параметрической поверхности быть непрерывной, гладкой или регулярной.

3.2 Поверхности–графики и неявные поверхности

Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, заданная на области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, и (u^1, \dots, u^{n-1}) — стандартные координаты на \mathbb{R}^{n-1} . Тогда ее график

$$\Gamma_f = \left\{ (u^1, \dots, u^{n-1}, f(u^1, \dots, u^{n-1})) \mid (u^1, \dots, u^{n-1}) \in \Omega \right\}$$

называется *поверхностью–графиком* в пространстве \mathbb{R}^n . Ясно, что поверхность–график произвольной гладкой функции f может быть задана как образ регулярной параметрической поверхности $r_f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$r_f: (u^1, \dots, u^{n-1}) \mapsto (u^1, \dots, u^{n-1}, f(u^1, \dots, u^{n-1})).$$

Размерность поверхности r_f равна $n - 1$. Такие поверхности часто называют *гиперповерхностями*.

Не у всякой регулярной поверхности образ представим в виде графика функции. Например, образ следующей простой регулярной поверхности

$$r: (u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v), \quad u \in (0, 2\pi), \quad v \in \mathbb{R},$$

(это — прямой круговой цилиндр с выброшенной прямой) не представим таким образом, так как его проекция на любую плоскость не взаимно однозначна с образом. Тем не менее, *локально* образ регулярной поверхности всегда является графиком.

Утверждение 3.1 Для любой регулярной параметрической гиперповерхности $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ и любой точки $P \in \Omega$ существует такая окрестность Ω' этой точки, что образ отображения $r|_{\Omega'}$ является графиком некоторой гладкой функции.

Доказательство. Пусть x^i — стандартные координаты в \mathbb{R}^n , а u^i — координаты на поверхности r . В силу регулярности поверхности r , ранг матрицы $(x_{u^j}^i(P))$ равен $n - 1$. Без ограничения общности будем считать, что квадратная матрица $(x_{u^j}^i(P))_{i,j=1}^{n-1}$ невырождена. Тогда, по теореме о неявной функции, в некоторой окрестности Ω' точки P отображение

$$(u^1, \dots, u^{n-1}) \mapsto (x^1(u^1, \dots, u^{n-1}), \dots, x^{n-1}(u^1, \dots, u^{n-1}))$$

имеет гладкое обратное отображение

$$\varphi: (x^1, \dots, x^{n-1}) \mapsto (u^1(x^1, \dots, x^{n-1}), \dots, u^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1})),$$

являющееся, по определению, заменой параметризации поверхности $r: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$. По определению отображения φ имеем:

$$x^i(u^1(x^1, \dots, x^{n-1}), \dots, u^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1})) = x^i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

поэтому параметрическая поверхность $r \circ \varphi$ задается так:

$$\begin{aligned} r \circ \varphi: (x^1, \dots, x^{n-1}) &\mapsto \\ &\mapsto (x^1, \dots, x^{n-1}, x^n(u^1(x^1, \dots, x^{n-1}), \dots, u^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1}))) = \\ &= (x^1, \dots, x^{n-1}, f(x^1, \dots, x^{n-1})), \end{aligned}$$

т.е. является графиком функции f , где

$$f(x^1, \dots, x^{n-1}) = x^n(u^1(x^1, \dots, x^{n-1}), \dots, u^{n-1}(x^1, \dots, x^{n-1})).$$

Доказательство закончено.

Пусть $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая функция, заданная на некоторой области $U \subset \mathbb{R}^n$, и пусть c — некоторая вещественная постоянная. Обозначим через M_c множество решений уравнения $F(x^1, \dots, x^n) = c$, т.е. $M_c = \{(x^1, \dots, x^n) \mid F(x^1, \dots, x^n) = c\}$. Множество M_c называется *неявной поверхностью*. Неявная поверхность M_c называется *регулярной*, если в каждой точке P поверхности M_c дифференциал $dF(P) = (F_{x^1}(P), \dots, F_{x^n}(P))$ функции F отличен от нуля.

Ясно, что поверхность–график произвольной гладкой функции f является регулярной неявной поверхностью, так как может быть задана как множество решений уравнения $x^n - f(x^1, \dots, x^{n-1}) = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, стандартная двумерная сфера, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, не является графиком функции. Тем не менее, *локально* каждая *регулярная* неявная поверхность является поверхностью–графиком.

Утверждение 3.2 Для каждой регулярной неявной поверхности M_c , заданной уравнением $F = c$, и каждой точки $P \in M_c$ существует окрестность U точки P в пространстве \mathbb{R}^n , такая что множество $U \cap M_c$ является графиком некоторой гладкой функции.

Доказательство. По условию, $dF(P) = (F_{x^1}(P), \dots, F_{x^n}(P)) \neq 0$. Для определенности предположим, что $F_{x^n}(P) \neq 0$. Обозначим через P' проекцию точки P на координатную гиперплоскость $x^n = 0$. Тогда, по теореме о неявной функции, в некоторой окрестности U' точки P' определена гладкая функция $f: U' \rightarrow \mathbb{R}$, такая что

$$F(x^1, \dots, x^{n-1}, f(x^1, \dots, x^{n-1})) = c \quad \text{для всех } (x^1, \dots, x^{n-1}) \in U'.$$

Другими словами, точки $(x^1, \dots, x^{n-1}, f(x^1, \dots, x^{n-1}))$, где $(x^1, \dots, x^{n-1}) \in U'$ лежат на M_c . Таким образом, положив $U = U' \times \mathbb{R}^1$, заключаем что множество $U \cap M_c$ является графиком гладкой функции f . Утверждение доказано.

3.3 Определение регулярной поверхности

Подмножество пространства \mathbb{R}^n будем называть *регулярной (гипер-)поверхностью*, если оно представимо в виде или поверхности–графика, или регулярной неявной поверхности, или образа регулярной $(n - 1)$ -мерной поверхности. Хотя “в целом” все три перечисленных способа задания поверхностей отличаются друг от друга, из утверждений 3.1 и 3.2 вытекает, что с “локальной” точки эти три способа эквивалентны.

Упражнение 3.2. Обобщить утверждение 3.1 на случай регулярных k -мерных поверхностей в \mathbb{R}^n . Обобщить утверждение 3.2 на случай подмножества пространства \mathbb{R}^n , заданного системой уравнений. См. Дополнительные материалы к данной лекции.

Следствие 3.1 В некоторой окрестности каждой точки области Ω параметризующее отображение $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ регулярной поверхности взаимно-однозначно с образом.

Доказательство. Это очевидно, так как в силу утверждения 3.1 любая регулярная поверхность в окрестности каждой своей точки может быть задана в виде графика некоторой гладкой функции. Соответствующая параметризация, очевидно, взаимно-однозначна.

Мы изучим сначала локальные свойства поверхностей (их глобальными характеристиками занимается теория многообразий, см. ниже). При этом мы всегда будем предполагать, что рассматриваемые поверхности могут быть заданы любым из оговоренных в определении способов. В силу сказанного выше, с локальной точки зрения это наше предположение не ограничивает общности. В частности, в сделанных предположениях, каждую

регулярную поверхность $M \subset \mathbb{R}^n$ можно задать как образ простой регулярной параметрической поверхности r_M , координаты на которой мы будем называть *координатами на регулярной поверхности M* . Если координаты фиксированы, то мы также часто будем отождествлять точки параметрической области Ω и их образы в пространстве, т.е. соответствующие точки регулярной поверхности. Замену параметризации параметрической поверхности r_M будем называть *заменой координат на поверхности M* .

3.4 Отображения регулярной поверхности

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — регулярная поверхность, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ — (векторнозначная) функция на поверхности. Пусть $r_M: \Omega_M \rightarrow \mathbb{R}^n$ — параметризующее отображение поверхности M . Положим $\tilde{f} = f \circ r_M$. Обратно, так как отображение r_M взаимно однозначно с образом, то для каждой функции $\tilde{f}: \Omega_M \rightarrow \mathbb{R}^k$ однозначно определена функция $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$, такая что $\tilde{f} = f \circ r_M$, а именно, $f = \tilde{f} \circ r_M^{-1}$, где $r_M^{-1}: M \rightarrow \Omega_M$.

Более общо, пусть $N \subset \mathbb{R}^n$ — другая регулярная поверхность, $r_N: \Omega_N \rightarrow \mathbb{R}^n$ — ее параметризующее отображение, и $F: M \rightarrow N$ отображение поверхности M в поверхность N . Тогда, в силу взаимной однозначности параметризующих отображений, определено отображение $\tilde{F}: \Omega_M \rightarrow \Omega_N$ следующего вида: $\tilde{F} = r_N^{-1} \circ F \circ r_M$. Обратно, для каждого отображения $\tilde{F}: \Omega_M \rightarrow \Omega_N$ однозначно определено отображение поверхностей $F: M \rightarrow N$, такое что $\tilde{F} = r_N^{-1} \circ F \circ r_M$.

Функция \tilde{f} и отображение \tilde{F} называются *координатными представлениями* функции f и отображения F соответственно. Поскольку соответствие между отображениями и их координатными представлениями взаимно однозначно, мы, как правило, не будем их различать. Отметим при этом, что координатное представление представляет собой обычное отображение из области в \mathbb{R}^n в пространство \mathbb{R}^k или в область. Именно такие отображения рассматриваются в математическом анализе, и поэтому можно говорить об их непрерывности, дифференцируемости и т.п. без каких либо оговорок. Гладкое отображение F одной регулярной поверхности в другую называется *регулярным*, если регулярным является его координатное представление, т.е. если ранг матрицы Якоби отображения \tilde{F} максимален в каждой точке.

3.5 Кривые, координатные линии, касательное пространство и канонический репер на регулярной поверхности

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — регулярная поверхность. Говорят, что *кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ лежит на M* , если $\gamma \subset M$. В силу взаимной однозначности параметризующего поверхность M отображения $r_M: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, каждая такая кривая

γ задает кривую $\tilde{\gamma} \subset \Omega$ в области Ω , такую что $r_M(\tilde{\gamma}) = \gamma$. Обратно, каждая кривая $\tilde{\gamma} \subset \Omega$ задает кривую $\gamma = r_M(\tilde{\gamma})$ в \mathbb{R}^n , лежащую на поверхности M . В силу регулярности поверхности M , кривые γ и $\tilde{\gamma}$ являются гладкими (регулярными) одновременно. В дальнейшем мы, как правило, не будем различать кривые $\tilde{\gamma}$ и γ и будем называть каждую из них *кривой на поверхности M* .

Если (u^1, \dots, u^k) — координаты в области Ω , то для того чтобы задать кривую на поверхности достаточно задать набор функций $u^i(t)$, $t \in I$, $i = 1, \dots, k$, которые называются *координатными функциями* кривой. Ясно, что эти координатные функции определяют соответствующее отображение $r_M(u^1(t), \dots, u^k(t))$ интервала I в \mathbb{R}^n , которое в координатах (x^1, \dots, x^n) выглядит так: $x^i(t) = x^i(u^1(t), \dots, u^k(t))$, где $x^i(u^1, \dots, u^k)$ — координатные функции поверхности r .

Пример. Через каждую точку поверхности M с координатами (u^1, \dots, u^k) проходит k так называемых *координатных линий*, вдоль каждой из которых меняется ровно одна координата u^i , а остальные — постоянны. Более формально, если $P \in M$ — точка на поверхности с координатами (u_0^1, \dots, u_0^k) , то i -ой *координатной линией*, проходящей через точку P , называется кривая, заданная так:

$$u^j(t) = u_0^j, \quad j \neq i; \quad u^i(t) = t, \quad t \in (u_0^i - \varepsilon, u_0^i + \varepsilon).$$

Пусть $P \in M$ — произвольная точка, и $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкая кривая, лежащая на M . Пусть $\gamma(t_0) = P$, т.е. γ проходит через P . Вектор скорости $\dot{\gamma}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ кривой γ в точке P назовем *касательным вектором к M в точке P* . Совокупность касательных векторов в точке P , построенных по всем гладким кривым на поверхности M , проходящим через эту точку, называется *касательным пространством* к поверхности M в точке P и обозначается через $T_P M$.

Изучим структуру касательного пространства $T_P M$. Пусть, как и выше, $x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$, $i = 1, \dots, n$, — координатные функции поверхности M . Возьмем произвольную кривую $\gamma(t)$ на поверхности, проходящую через точку P , и пусть $u^j = u^j(t)$ — координатные функции этой кривой, а $P = \gamma(t_0)$. Тогда i -ая координата соответствующего касательного вектора имеет вид:

$$\left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=t_0} = \sum_{j=1}^k \left. \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right|_P \left. \frac{du^j}{dt} \right|_{t=t_0}$$

Таким образом, касательный вектор к кривой γ — произвольный элемент касательного пространства $T_P M$, — это линейная комбинация следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^k}{\partial u^1} \end{pmatrix} \frac{du^1}{dt} + \dots + \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^k}{\partial u^k} \end{pmatrix} \frac{du^k}{dt},$$

где векторы-столбцы $(\partial x^1/\partial u^i, \dots, \partial x^n/\partial u^i)^T$, $i = 1, \dots, k$, не зависят от выбора кривой γ и однозначно определяются координатными функциями $x^i(u^1, \dots, u^k)$ поверхности M и точкой P . С другой стороны, в силу произвольности гладкой кривой γ , числа $du^i/dt|_{t=t_0}$ произвольны. Поэтому касательное пространство $T_P M$ — это линейное пространство, натянутое на векторы $\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k}$, где через ∂_{u^i} обозначен вектор столбец

$$(\partial x^1/\partial u^i, \dots, \partial x^n/\partial u^i)^T.$$

Отметим, что матрица, составленная из векторов столбцов ∂_{u^i} , — это в точности матрица Якоби отображения $x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$, задающего поверхность M . Ранг этой матрицы, в силу регулярности поверхности M , равен k , поэтому векторы $\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k}$ линейно независимы и образуют базис в пространстве $T_P M$. Этот базис называется *каноническим базисом в точке P* , соответствующим координатам (u^1, \dots, u^k) на поверхности. Коэффициенты разложения касательного вектора к поверхности по элементам канонического базиса (∂_{u^i}) называются *компонентами* или *координатами* этого вектора в этом каноническом базисе или его *координатами* (компонентами) относительно системы координат (u^1, \dots, u^k) .

Что же это за замечательные векторы, образующие канонический базис? Чтобы понять это, вычислим вектор скорости i -ой координатной линии. Из сказанного выше вытекает, что этот вектор равен линейной комбинации векторов ∂_{u^p} с коэффициентами du^p/dt . Но, по определению i -ой координатной линии, $du^p/dt = \delta_i^p$, поэтому касательный вектор к i -ой координатной линии совпадает с ∂_{u^i} . Итак, доказано следующее предложение.

Предложение 3.1 Пусть $P \in M$ — произвольная точка регулярной k -мерной поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$. Тогда касательное пространство $T_P M$ является линейным пространством размерности k , базис в котором образуют, например, векторы скорости координатных линий, проходящих через точку P .

Пусть теперь $v^i = v^i(u^1, \dots, u^k)$ — замена координат на регулярной поверхности M . Тогда в каждой точке $P \in M$ определены сразу два канонических базиса: (∂_{u^i}) и (∂_{v^i}) . Установим, как они связаны между собой. Из определения векторов канонических базисов и теоремы о дифференцировании сложной функции получаем:

$$\partial_{v^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial v^i} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial v^i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j \frac{\partial x^1}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \\ \vdots \\ \sum_j \frac{\partial x^n}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^i} \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^j} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^j} \end{pmatrix} \frac{\partial u^j}{\partial v^i},$$

т.е., окончательно,

$$\partial_{v^i} = \sum_j \partial_{u^j} \frac{\partial u^j}{\partial v^i}.$$

Итак, доказано следующее предложение.

Предложение 3.2 *При замене координат на регулярной поверхности, векторы канонического базиса в каждой точке поверхности преобразуются с помощью матрицы Якоби этой замены координат, которая играет роль матрицы перехода от одного базиса к другому.*

3.6 Индуцированная метрика или первая фундаментальная форма регулярной поверхности

Пусть, как и выше, P — произвольная точка регулярной k -мерной поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$. Скалярное произведение векторов в \mathbb{R}^n порождает скалярное произведение касательных векторов из $T_P M$. А именно, пусть ξ и η — касательные векторы к поверхности M в точке P . Пусть (u^1, \dots, u^k) — координаты на поверхности M , а $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k)$ и $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^k)$ — компоненты касательных векторов ξ и η в относительно этих координат. Тогда $\xi = \sum_i \xi^i \partial_{u^i}$ и $\eta = \sum_j \eta^j \partial_{u^j}$, где $\{\partial_{u^i}\}$ — канонический базис в точке P . Поэтому скалярное произведение векторов ξ и η (как векторов в \mathbb{R}^n) может быть вычислено так:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^k \xi^i \partial_{u^i}, \sum_{j=1}^k \eta^j \partial_{u^j} \right\rangle = \sum_{i,j=1}^k \langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle \xi^i \eta^j.$$

Числа $\langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle$, образующие матрицу Грамма канонического базиса $\{\partial_{u^i}\}$, обозначаются через $g_{ij}(P)$ и называются *компонентами индуцированной метрики*, или *компонентами первой фундаментальной формы поверхности M* или *компонентами первой квадратичной формы поверхности M в координатах (u^1, \dots, u^k)* . Если поверхность задана отображением r с координатными функциями $x^i(u^1, \dots, u^k)$, то

$$g_{ij}(u^1, \dots, u^k) = \langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle = \sum_{p=1}^n \frac{\partial x^p}{\partial u^i} \frac{\partial x^p}{\partial u^j}.$$

Отметим, что компоненты метрики — гладкие функции координат u^i , т.е. гладко зависят от точки P .

Таким образом, если фиксированы координаты (u^1, \dots, u^k) на поверхности M , то в каждой ее точке $P = (u^1, \dots, u^k)$ определена квадратная $(k \times k)$ матрица $G(u) = (g_{ij}(u))$ — *матрица индуцированной метрики* или *матрица первой фундаментальной формы* поверхности. Матрица G по определению — это матрица Грамма, поэтому она симметрична (что очевидно), невырождена и положительно определена (что известно из линейной алгебры). Далее, если задана замена параметризации $v^i = v^i(u^1, \dots, u^k)$ поверхности M , то в каждой точке определено две матрицы: $G(u) = (g_{ij}(u)) =$

$\langle \partial_{u^i}, \partial_{u^j} \rangle$) и $\tilde{G}(v) = (\tilde{g}_{pq}(v) = \langle \partial_{v^p}, \partial_{v^q} \rangle)$. Так как $G(u)$ и $\tilde{G}(v)$ — матрицы Грама двух разных канонических базисов, связанных в силу предложения 3.2 с помощью матрицы Якоби замены параметризации, заключаем, что $G(u) = J^T \tilde{G}(v(u))J$, где $J = (\frac{\partial v^i}{\partial u^j})$ — матрица Якоби замены параметризации. Этот результат можно легко получить и непосредственно, воспользовавшись теоремой о дифференцировании сложной функции. В покомпонентной записи он выглядит так:

$$g_{ij}(u^1, \dots, u^k) = \sum_{pq} \tilde{g}_{pq}(v^1(u^1, \dots, u^k), \dots, v^k(u^1, \dots, u^k)) \frac{\partial v^p}{\partial u^i} \frac{\partial v^q}{\partial u^j},$$

где частные производные вычисляются в точке (u^1, \dots, u^k) .

Итак, мы показали, что при замене координат на поверхности матрица ее первой фундаментальной формы меняется так, как меняется матрица билинейной формы на линейном пространстве при замене базиса. Подведем итог, сформулировав следующее предложение.

Предложение 3.3 Пусть M — произвольная регулярная поверхность в \mathbb{R}^n , и P — любая ее точка. Тогда на касательном пространстве $T_P M$, рассматриваемом как линейное пространство, корректно определена невырожденная положительно определенная симметричная билинейная форма \mathfrak{G} , матрица G которой в каноническом базисе $\{\partial_{u^i}\}$ произвольной системы координат (u^1, \dots, u^k) — это матрица Грама этого канонического базиса. При замене параметризации $v_i = v^i(u^1, \dots, u^k)$ матрица первой фундаментальной формы меняется по закону изменения матриц билинейных форм: $G(u) = J^T \tilde{G}(v(u))J$, где \tilde{G} — матрица формы \mathfrak{G} в координатах (v^1, \dots, v^k) , а $J = (\frac{\partial v^i}{\partial u^j})$ — матрица Якоби замены координат.

Определение. Билинейная форма \mathfrak{G} из предложения 3.3 и соответствующая квадратичная форма называются *первой фундаментальной формой поверхности* или *индуцированной метрикой*.

Замечание. Пусть ξ и η — касательные векторы к регулярной поверхности M в точке P . Тогда их скалярное произведение может быть вычислено с помощью первой фундаментальной формы так: $\langle \xi, \eta \rangle = \mathfrak{G}(\xi, \eta)$. С точки зрения линейной алгебры это — скалярное произведение, заданное в линейном пространстве $T_P M$ билинейной формой \mathfrak{G} . Отметим, что по определению это скалярное произведение совпадает со стандартным скалярным произведением векторов ξ и η , как векторов в \mathbb{R}^n .

Если фиксированы координаты (u^1, \dots, u^k) на поверхности, (ξ^1, \dots, ξ^k) и (η^1, \dots, η^k) — компоненты векторов ξ и η соответственно, а (g_{ij}) — матрица первой квадратичной формы поверхности M в точке P в координатах (u^1, \dots, u^k) , то скалярное произведение вычисляется так:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \mathfrak{G}(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^k g_{ij}(P) \xi^i \eta^j.$$

Отметим, что полученное число не зависит от выбора координат на поверхности. Отметим также, что если задана индуцированная метрика, то для вычисления скалярного произведения касательных векторов, их длин и углов между ними нет необходимости вычислять их координаты в объемлющем пространстве. Достаточно знать их компоненты относительно системы координат на поверхности. В частности, нам не важен конкретный вид отображения r , задающего поверхность. Иногда, чтобы подчеркнуть этот факт, говорят, что *скалярное произведение вычисляется во внутренних терминах*, а индуцированную метрику называют *внутренней метрикой поверхности* или *внутренним скалярным произведением*. Здесь слово “внутренний” подчеркивает независимость вычисления скалярных произведений от объемлющего пространства.

С помощью метрики легко записываются длины касательных векторов и углы между ними. В частности, через компоненты метрики удобно записать длину кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, лежащей на поверхности M , а также величину угла между пересекающимися кривыми. Если $(u^1(t), \dots, u^k(t))$ — координатные функции γ в координатах u^i поверхности M , то

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \dot{u}^i(t) \dot{u}^j(t)} dt.$$

Далее, пусть γ_1 и γ_2 — две кривые на поверхности, пересекающиеся в точке P . Тогда *углом между кривыми γ_1 и γ_2 в точке P* называется меньший из двух углов между касательными векторами к этим кривым в точке P .

Напомним, что угол между векторами определяется через скалярное произведение. А именно, если a и b — произвольные векторы, то косинус угла между ними по определению равен

$$\frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}.$$

Ясно, что если P — точка регулярной поверхности M , кривые γ_p заданы координатными функциями, т.е. в виде $u_p^i = u_p^i(t)$, $p = 1, 2$, и касательные векторы $\dot{\gamma}_p$ записаны в виде столбцов координат относительно канонического базиса (∂_{u^i}) , то косинус угла φ между кривыми γ_p может быть вычислен так:

$$\cos \varphi = \frac{\sum g_{\alpha\beta}(P) \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_2^\beta}{\sqrt{\sum g_{\alpha\beta}(P) \dot{u}_1^\alpha \dot{u}_1^\beta} \sqrt{\sum g_{\alpha\beta}(P) \dot{u}_2^\alpha \dot{u}_2^\beta}}$$

Замечание. В дифференциальной геометрии первую квадратичную форму часто называют “квадратом элемента длины” поверхности. В этом случае

используют так называемую “запись в дифференциалах”. При этом саму форму \mathfrak{G} обозначают через ds^2 — “квадрат элемента длины” — и, в координатах (u^1, \dots, u^k) , записывают форму \mathfrak{G} в виде

$$ds^2 = \sum_{\alpha \beta} g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta.$$

Эта запись приобретает смысл, если договориться обозначать через $\{du^i\}$ линейные функционалы на касательном пространстве $T_P M$, образующие в двойственном пространстве $T_P^* M$ двойственный базис по отношению к каноническому базису $\{\partial_{u^i}\}$. Напомним, что двойственный базис в $T_P^* M$ однозначно определяется из соотношений $du^i(\partial_{u^j}) = \delta_j^i$ (здесь, как обычно, через δ_j^i обозначены символы Кронекера). При этом, очевидно, если $a = (a^1, \dots, a^k)$ — касательный вектор, заданный своими координатами в каноническом базисе $\{\partial_{u^i}\}$, то значение функционала du^j на векторе a равно a^j . Теперь выражение для ds^2 можно воспринимать как запись билинейной формы в виде комбинации произведений линейных форм (т.е. как элемент пространства $T_P^* M \otimes T_P^* M$). Значение формы ds^2 на паре векторов a и b вычисляется так:

$$ds^2(a, b) = \sum_{\alpha \beta} g_{\alpha\beta} du^\alpha(a) du^\beta(b) = \sum_{\alpha \beta} g_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta,$$

где $a = (a^i)$, и $b = (b^i)$, что полностью согласуется с данными выше определениями.

Отметим, что запись в дифференциалах удобно использовать для непосредственных вычислений индуцированной метрики: если записать квадрат элемента длины в объемлющем пространстве \mathbb{R}^n со стандартными координатами (x^1, \dots, x^n) в виде

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2,$$

подставить в это выражение явный вид задающих поверхность координатных функций $x^i = x^i(u^1, \dots, u^k)$, честно вычислить дифференциалы $dx^i = \sum_j \partial x^i / \partial u^j du^j$ и записать полученную формулу как полином от du^j , то получится выражение для первой фундаментальной формы поверхности (проверьте это).

В Дополнительных материалах к лекции 3 приведены примеры вычисления первой фундаментальной формы и угла между кривыми.

3.7 Изометрии поверхностей

Пусть заданы две k -мерные регулярные поверхности: M_i , $i = 1, 2$. Будем говорить, что поверхности M_1 и M_2 *изометричны*, если существует гладкое, взаимно-однозначное, регулярное отображение $\psi: M_1 \rightarrow M_2$, сохраняющее длины всех переходящих друг в друга кривых. Последнее означает,

что если $\gamma_1: I \rightarrow M_1$ — произвольная гладкая кривая на поверхности M_1 , и $\gamma_2 = \psi \circ \gamma_1$ — соответствующая кривая на поверхности M_2 , то длина кривой γ_1 , вычисленная относительно первой фундаментальной формы \mathfrak{G}_1 поверхности M_1 , совпадает с длиной кривой γ_2 , вычисленной относительно первой фундаментальной формы \mathfrak{G}_2 поверхности M_2 . Имеет место следующее важное предложение.

Предложение 3.4 *Гладкое взаимно-однозначное регулярное отображение $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ задает изометрию регулярных поверхностей M_i , если и только если отображение ψ “сохраняет первую фундаментальную форму” в следующем смысле:*

$$G_1 = J^T G_2 J,$$

где G_i — матрица первой фундаментальной формы поверхности M_i , а J — матрица Якоби отображения ψ в соответствующих координатах.

Доказательство. Пусть сначала отображение ψ сохраняет первую фундаментальную форму. Рассмотрим произвольную гладкую кривую γ на поверхности M_1 . Фиксируем на M_1 некоторые координаты (u^1, \dots, u^k) , а на M_2 — координаты (v^1, \dots, v^k) . Пусть $u^i(t)$ — координатные функции кривой γ . Если $v^i(u^1, \dots, u^k)$ — координатные функции, задающие отображение ψ , то образ кривой γ при отображении ψ имеет вид $v^i(t) = v^i(u^1(t), \dots, u^k(t))$. Обозначим через g_{ij} элементы матрицы $G_1(u)$ первой фундаментальной формы поверхности M_1 , а через h_{ij} — элементы матрицы $G_2(v)$ первой фундаментальной формы поверхности M_2 . Тогда, по определению длины кривой, длина кривой γ на M_1 вычисляется так:

$$\ell(\gamma) = \int \sqrt{\sum_{ij} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} dt.$$

С другой стороны, для длины кривой $\psi \circ \gamma$ на M_2 имеем:

$$\ell(\psi \circ \gamma) = \int \sqrt{\sum_{ij} h_{ij} \dot{v}^i \dot{v}^j} dt = \int \sqrt{\sum_{ij} h_{ij} \sum_{\alpha} \frac{\partial v^i}{\partial u^{\alpha}} \dot{u}^{\alpha} \sum_{\beta} \frac{\partial v^j}{\partial u^{\beta}} \dot{u}^{\beta}} dt.$$

Меняя порядок суммирования, получаем:

$$\ell(\psi \circ \gamma) = \int \sqrt{\sum_{\alpha\beta} \left(\sum_{ij} h_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial v^j}{\partial u^{\beta}} \right) \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta}} dt = \int \sqrt{\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta}} dt = \ell(\gamma),$$

что и требовалось.

Докажем теперь справедливость обратного утверждения. Пусть ψ — некоторое регулярное взаимно-однозначное отображение из M_1 в M_2 , сохраняющее длины всех кривых. Это означает, что для произвольной кривой γ , в сделанных выше обозначениях, справедливо предыдущее равенство. Из произвольности кривой γ вытекает совпадение подынтегральных выражений вдоль каждой кривой, а из произвольности касательного

вектора к кривой γ , т.е. чисел $(\dot{u}^1, \dots, \dot{u}^k)$ — совпадение функций $g_{\alpha\beta}$ и $\sum_{ij} h_{ij}(\partial v^i / \partial u^\alpha)(\partial v^j / \partial u^\beta)$ в каждой точке поверхности M_1 . Последнее, по определению, означает, что отображение ψ сохраняет первую квадратичную форму. Доказательство закончено.

Замечание. Легко проверить, что множество всех изометрий данной поверхности относительно композиции образует группу — *группу изометрий поверхности*. Действительно, композиция двух изометрий — очевидно, изометрия. Тожественное преобразование, которое, конечно же, является изометрией — это нейтральный элемент группы. Обратное отображение, существующее в силу взаимной однозначности, тоже является изометрией (проверьте).

Пример. В качестве следующего примера, рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 с декартовыми координатами (x^1, x^2, x^3) прямой цилиндр над регулярной плоской кривой. А именно, пусть $\gamma(s) = (x^1(s), x^2(s))$, $s \in [0, L]$ — регулярная плоская кривая, параметризованная натурально и лежащая в координатной плоскости Ox^1x^2 . *Прямым цилиндром над γ* назовем поверхность M в \mathbb{R}^3 , заданную как отображение полосы $[0, L] \times (-\infty, +\infty)$ в \mathbb{R}^3 в виде:

$$x^1(u^1, u^2) = x^1(u^1), \quad x^2(u^1, u^2) = x^2(u^1), \quad x^3(u^1, u^2) = u^2.$$

Вычислим первую квадратичную форму поверхности M . Ясно, что канонический базис, соответствующий координатам (u^1, u^2) на M , имеет вид:

$$\partial_{u^1} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, 0), \quad \partial_{u^2} = (0, 0, 1).$$

Поэтому первая квадратичная форма цилиндра M в координатах (u^1, u^2) имеет вид:

$$ds^2 = ((\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2)(du^1)^2 + (du^2)^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2.$$

Отсюда легко получается следующее утверждение.

Утверждение 3.3 *Прямой цилиндр над произвольной регулярной плоской кривой изометричен полосе на евклидовой плоскости.*

Доказательство. Действительно, если (y^1, y^2) — декартовы координаты на плоскости, то изометрию ψ между цилиндром и плоскостью можно задать явно так: $\psi: (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2)$, где (u^1, u^2) — координаты на цилиндре, описанные выше. Другими словами, координатные функции $y^i(u^1, u^2)$ отображения ψ имеют вид $y^i(u^1, u^2) = u^i$. Доказательство закончено.

Замечание. Таким образом, в пространстве \mathbb{R}^3 мы построили целое семейство поверхностей, которые очень не похожи друг на друга, но все они изометричны между собой. Это говорит о том, что первой квадратичной формы недостаточно для того, чтобы описать расположение поверхности в \mathbb{R}^n . Поэтому нужны еще какие-то инварианты. Именно с этой целью в следующем разделе строится вторая квадратичная форма поверхности.

Задачи к лекции 3

Задача 3.1. Составить параметрическое уравнение поверхности, образованной касательными к данной кривой $\gamma = \gamma(u)$. Такая поверхность называется **развертывающейся поверхностью**. Исследовать развертывающуюся поверхность на регулярность.

Задача 3.2. Вокруг оси Oz вращается плоская кривая $x = f(v)$, $z = g(v)$. Составить параметрические уравнения поверхности вращения. Рассмотреть частный случай, когда меридиан задан уравнением $x = f(z)$.

Задача 3.3. Прямая движется поступательно с постоянной скоростью, пересекая другую прямую под прямым углом, и одновременно равномерно вращается вокруг этой прямой. Составить уравнение поверхности, которую описывает движущаяся прямая (*прямой геликоид*).

Задача 3.4. Составить уравнение поверхности, образованной вращением трактриссы

$$\gamma(v) = \left\{ a \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2} \right) - a \sin v, a \cos v \right\}$$

вокруг ее асимптоты (*псевдосфера*).

Задача 3.5. Вычислить первую фундаментальную форму для поверхности, заданной неявной функцией $F(x, y, z)$.

Задача 3.6. Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей:

- 1) $r(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ (*сфера*);
- 2) $r(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v)$ (*эллипсоид*);
- 3) $r(s, \lambda) = \gamma(s) + \lambda e(s)$ (*линейчатая поверхность*), где $\gamma(s)$ — натурально параметризованная регулярная кривая, а $e(s)$ — гладкое семейство единичных векторов;
- 4) $r(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$ (*поверхность вращения*).

Задача 3.7. Первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

- 1) Найти периметр криволинейного треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm \frac{1}{2}av^2, \quad v = 1.$$

- 2) Найти углы этого криволинейного треугольника.
- 3) Вычислить площадь треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm av, \quad v = 1.$$

Задача 3.8. Найти на поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = a \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

кривые, пересекающую каждую кривую $v = \operatorname{const}$ под постоянным углом θ (*локсодромы*).

Дополнительный материал к лекции 3

Добавление 3.1. Примеры вычисления индуцированной метрики. Рассмотрим для начала двумерную плоскость Π в \mathbb{R}^3 , заданную параметрически в виде $r(u^1, u^2) = r_0 + a_1 u^1 + a_2 u^2$, где r_0, a_1 и a_2 — фиксированные векторы, причем a_1 и a_2 — линейно независимы. Поскольку, очевидно, $\partial_{u^i} = a_i, i = 1, 2$, поверхность Π невырождена в каждой своей точке. Первая квадратичная форма \mathfrak{G}_Π плоскости Π постоянна и имеет вид

$$ds^2 = \langle a_1, a_1 \rangle (du^1)^2 + 2\langle a_1, a_2 \rangle du^1 du^2 + \langle a_2, a_2 \rangle (du^2)^2,$$

или, в матричном виде,

$$G(u) = \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} = A^T A,$$

где A — матрица, столбцы которой суть векторы a_1 и a_2 соответственно.

В качестве следующего примера возьмем стандартную сферу радиуса R в \mathbb{R}^3 заданную параметрически так:

$$\begin{aligned} x^1 &= R \cos \vartheta \cos \varphi, \\ x^2 &= R \cos \vartheta \sin \varphi, \\ x^3 &= R \sin \vartheta. \end{aligned}$$

В координатах (ϑ, φ) первая квадратичная форма сферы имеет вид:

$$ds^2 = R^2 (d\vartheta)^2 + R^2 \cos^2 \vartheta (d\varphi)^2.$$

Длина четверти меридиана $\varphi = \varphi_0, \vartheta \in [0, \pi/2]$, например, вычисляется так:

$$\int_0^{\pi/2} R \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta} \cdot 0 = R\pi/2.$$

Рассмотрим теперь поверхность-график функции $z = f(x, y)$. Тогда соответствующее параметрическое представление имеет вид:

$$r = (x, y, f(x, y)), \quad r_x = (1, 0, f_x), \quad r_y = (0, 1, f_y),$$

и, значит, матрица метрики имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix},$$

т.е. $ds^2 = (1 + f_x^2) dx^2 + 2f_x f_y dx dy + (1 + f_y^2) dy^2$.

Упражнение 3.3. Вычислить первую квадратичную форму поверхности, заданной как график гладкой функции $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$.

Упражнение 3.4. Вычислить первую квадратичную форму поверхности, заданной как множество решений уравнения $F(x^1, \dots, x^n) = 0, dF \neq 0$.

Вычислим угол между меридианом и параллелью на стандартной сфере S^2 радиуса R . Как и выше параметризуем сферу координатами (ϑ, φ) . Пусть γ_1 — это параллель, координатные функции которой имеют вид $\vartheta(t) = \vartheta_0, \varphi(t) = t$, и γ_2 — это меридиан с координатными функциями $\vartheta(t) = t, \varphi(t) = \varphi_0$. Они пересекаются в точке $P = (\vartheta_0, \varphi_0)$. Касательные векторы имеют вид: $\dot{\gamma}_1 = (0, 1)$ и $\dot{\gamma}_2 = (1, 0)$. Далее, первая квадратичная форма сферы, как мы уже знаем, в этих координатах записывается так:

$$ds^2 = R^2 (d\vartheta)^2 + R^2 \cos^2 \vartheta (d\varphi)^2,$$

поэтому $\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle = 0$, откуда косинус угла между ними тоже равен нулю, и угол равен $\pi/2$.

Добавление 3.2. Локсодрома. Найдем на стандартной двумерной сфере кривую, пересекающую все меридианы под одним и тем же углом α (обладающая этим свойством кривая называется *локсодромой*). Пусть снова на сфере выбраны координаты (ϑ, φ) , и меридианы имеют вид $\vartheta = t$, $\varphi = \varphi_0$. Далее, пусть локсодрома параметризована так: $\vartheta = \vartheta(\varphi)$, $\varphi = t$. Тогда касательные векторы к меридиану и локсодроме имеют, соответственно, вид $(1, 0)$ и $(\vartheta', 1)$, поэтому определение локсодромы записывается в виде

$$\frac{R^2 \dot{\vartheta}}{R\sqrt{R^2 \dot{\vartheta}^2 + R^2 \cos^2 \vartheta}} = \cos \alpha.$$

Получаем на $\vartheta(t)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{\vartheta} = \cos \vartheta \cot \alpha$$

(мы воспользовались тем, что $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$, и предположили, что $\cot \alpha > 0$). Решая это уравнение, получаем вид локсодромы:

$$\varphi = \frac{\tan \alpha}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \vartheta}{1 - \sin \vartheta} \right) + C,$$

На рис. 8 изображена локсодрома для $\alpha = 0.45\pi$ (т.е. близкого к $\pi/2$).

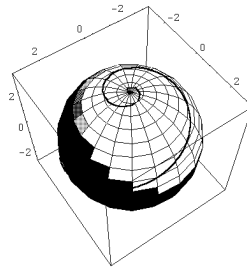


Рис. 8: Локсодрома; $\alpha = 0.45\pi$.

Добавление 3.3. Первая квадратичная форма и объем. Через первую квадратичную форму также естественно записывается k -мерный объем поверхности. Пусть задана регулярная параметрическая поверхность $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, (u^1, \dots, u^k) — координаты на r , и $P \in \Omega$ — произвольная точка. Обозначим через $\Pi(P)$ параллелепипед, натянутый на векторы $\{\partial_{u^i}\}$ канонического репера, а через $|\Pi(P)|$ — его k -мерный объем. Тогда k -мерным объемом или, просто, *объемом параметрической поверхности* r называется следующая величина:

$$\text{vol}_k(M) = \int_{\Omega} |\Pi(P)| du^1 \dots du^k.$$

Напомним, как определяется и вычисляется k -мерный объем параллелепипеда. Двумерный объем (площадь) параллелограмма, как известно, может быть вычислен как произведение одномерного объема (длины) его основания на высоту. Это подводит к следующему индуктивному определению площади параллелепипеда: k -мерный объем параллелепипеда, натянутого на векторы a_1, \dots, a_k , $a_i \in \mathbb{R}^n$, равен произведению $(k-1)$ -мерного объема параллелепипеда, натянутого на векторы a_1, \dots, a_{k-1} , (“площадь основания”) на “высоту”, т.е. на длину ортогональной проекции вектора a_k на ортогональное дополнение к a_1, \dots, a_{k-1} . Напомним следующий результат из линейной алгебры.

Утверждение 3.4 Если определить объем k -мерного параллелепипеда по индукции, как произведение объема его основания — $(k-1)$ -мерного параллелепипеда, на высоту, то полученное число может быть вычислено по формуле $\sqrt{\det G}$, где $G = A^T A$ — матрица Грамма системы векторов a_1, \dots, a_k , на которые натянут параллелепипед.

Доказательство. Пусть сначала $k = 2$. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned} \det(G) &= \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 - \langle a_1, a_2 \rangle^2 = \\ &= \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \|a_1\|^2 \|a_2\|^2 \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

где φ — угол между векторами a_1 и a_2 . В итоге получаем, что

$$\sqrt{\det(G)} = \|a_1\| (\|a_2\| \sin \varphi),$$

т.е. определенная нами площадь равна длине вектора a_1 — длине основания, умноженной на длину проекции вектора a_2 на нормаль к a_1 , проведенную в плоскости (a_1, a_2) . Таким образом, в случае $k = 2$ утверждение имеет место.

Рассмотрим теперь общий случай. Разложим вектор a_k в сумму его проекции T на плоскость Π_{k-1} , натянутую на векторы a_1, \dots, a_{k-1} , и нормальной составляющей N . Воспользовавшись равенством $\langle a_k, a_i \rangle = \langle T, a_i \rangle + \langle N, a_i \rangle$ и полилинейностью определителя как функции строк и столбцов, получим, что $\det(A^T A)$ равен $\det(\tilde{A}^T \tilde{A})$, где матрица \tilde{A} получена из A заменой столбца a_k на столбец N . Осталось заметить, что последняя строка и столбец матрицы $\tilde{A}^T \tilde{A}$ имеют ровно один ненулевой элемент — последний, который равен $\|N\|^2$, поэтому имеет место равенство:

$$\det(\tilde{A}^T \tilde{A}) = \det(A_{k-1}^T A_{k-1}) \|N\|^2,$$

где A_{k-1} — матрица, составленная из первых $k-1$ векторов a_1, \dots, a_{k-1} . Но, по предположению индукции, этот определитель равен квадрату площади параллелепипеда, натянутого на эти векторы, т.е. квадрату площади основания, а длина нормальной составляющей N — это и есть длина высоты. Утверждение доказано.

Таким образом, возвращаясь к определению k -мерного объема поверхности, k -мерный объем $|\Pi(P)|$ параллелепипеда $\Pi(P)$, натянутого на векторы канонического репера, может быть вычислен как корень из определителя матрицы Грамма канонического репера, т.е. матрицы первой квадратичной формы:

$$\text{vol}_k(M) = \int_{\Omega} |\Pi(P)| du^1 \cdots du^k = \int_{\Omega} \sqrt{\det(G)} du^1 \cdots du^k.$$

Следующее предложение немедленно вытекает из теоремы о замене переменных в кратном интеграле и из предложения 3.3.

Предложение 3.5 Определенный нами k -мерный объем поверхности не меняется при замене параметризации.

Таким образом, имеет смысл говорить о k -мерном объеме поверхности, понимая под ней объем произвольного представителя этой поверхности.

Пример. Вычислим площадь стандартной сферы S^2 радиуса R . Для этого вспомним, что первая квадратичная форма сферы может быть записана в виде $ds^2 = R^2(d\varphi)^2 + R^2 \cos^2 \vartheta (d\vartheta)^2$. Поэтому площадь полусферы вычисляется так:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/2} R^2 \cos \vartheta d\vartheta \right) d\varphi = 2\pi R^2,$$

откуда площадь сферы равна, как и положено, $4\pi R^2$.

Упражнение 3.5. Выписать формулы для вычисления площади гиперповерхности, заданной в виде графика функции.

Упражнение 3.6. Выписать формулы для вычисления площади гиперповерхности, заданной неявно.

Добавление 3.4. Изометрии евклидовой метрики. Найдем все изометрии евклидовой метрики $ds^2 = \sum_i (dx^i)^2$ пространства \mathbb{R}^n . Отметим, что в линейной алгебре было получено описание всех *линейных* отображений пространства \mathbb{R}^n в себя, сохраняющих евклидово скалярное произведение (т.е. евклидову метрику). Ими оказались так называемые ортогональные преобразования. Напомним, что линейное преобразование называется *ортогональным*, если его матрица A в ортонормированном базисе обладает свойством $AA^T = E$. Однако, вообще говоря, из результатов линейной алгебры не вытекает, что не существует какого-нибудь нелинейного регулярного отображения \mathbb{R}^n на себя, сохраняющего метрику.

Пусть $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — изометрия \mathbb{R}^n . Выберем в каждом из экземпляров \mathbb{R}^n декартовы координаты, которые обозначим через x^1, \dots, x^n и y^1, \dots, y^n соответственно. Тогда отображение ψ может быть записано в виде $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$. В силу предложения 3.4, в каждой точке \mathbb{R}^n выполнено равенство:

$$\sum_{ij} \delta_{ij} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символы Кронекера. Просуммируем по i в левой части:

$$\sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Продифференцировав последнее равенство по x^γ , получим для произвольной тройки α, β, γ :

$$\sum_j \left(\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} + \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \right) = 0.$$

Чтобы выразить отсюда вторые производные функций y^j , вычтем из этого уравнение точно такое же для тройки β, γ, α , а затем, прибавим еще одно для тройки γ, α, β . Имеем:

$$\sum_j \left(\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} + \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} - \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\gamma \partial x^\beta} \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial y^j}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) = 0.$$

Приводя подобные члены, заключаем, что

$$2 \sum_j \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial y^j}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Итак, мы получили однородную линейную систему уравнений на неизвестные $\partial^2 y^j / \partial x^\beta \partial x^\gamma$, $j = 1, \dots, n$, где β, γ — произвольная фиксированная пара индексов. Матрица этого уравнения по построению невырождена, откуда вытекает, что имеется единственное тривиальное решение

$$\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = 0.$$

Поэтому все функции $y^j(x^1, \dots, x^n)$ — линейны. Отсюда вытекает, что все изометрии пространства \mathbb{R}^n с евклидовой метрикой — суть линейные ортогональные преобразования и сдвиги.

4 Поверхности. Вторая фундаментальная форма

В данном разделе мы ограничимся рассмотрением гиперповерхностей в \mathbb{R}^n . Общий случай будет кратко разобран в дополнении к этому параграфу.

4.1 Определение второй фундаментальной формы регулярной поверхности

Пусть M — регулярная гиперповерхность в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Как обычно, обозначим через (x^1, \dots, x^n) стандартные координаты \mathbb{R}^n , а через (u^1, \dots, u^{n-1}) — координаты на поверхности. Как мы уже знаем, в каждой точке P на M определен канонический базис $\{\partial_{u^i}\}$ касательного пространства $T_P M$. Поэтому в каждой точке P поверхности однозначно определен единичный вектор $N(P)$, ортогональный всем векторам ∂_{u^i} , и дополняющий систему векторов $\{\partial_{u^i}\}$ до положительного базиса в \mathbb{R}^n . Другими словами, вектор $N(P)$ однозначно определяется из соотношений $\langle \partial_{u^i}, N(P) \rangle = 0$, $\langle N(P), N(P) \rangle = 1$, и, наконец,

$$\det(\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^{n-1}}, N(P)) > 0.$$

Векторы ∂_{u^i} гладко зависят от точки поверхности, поэтому и вектор $N(P)$ тоже гладко зависит от точки. Векторы $N(P)$ образуют (*ориентированное*) поле нормалей на поверхности M , соответствующее координатам (u^i) . Имеет место следующее несложное утверждение.

Утверждение 4.1 Пусть на поверхности M заданы две системы координат: (u^1, \dots, u^{n-1}) и (v^1, \dots, v^{n-1}) , причем $v^i = v^i(u^1, \dots, u^{n-1})$. Тогда векторы ориентированных нормалей в точке P , соответствующие координатам (u^i) и (v^i) , отличаются на знак определителя матрицы Якоби $(\partial v^i / \partial u^j)$ замены координат.

Доказательство. Это очевидно, так как направление вектора $N(P)$ в точке P однозначно определяется касательным пространством $T_P M$ и не зависит от выбора базиса в нем. Вторая часть утверждения вытекает из предложения 3.2. Доказательство закончено.

Следствие 4.1 На регулярной поверхности M существует ровно два ориентированных поля нормалей, которые в каждой точке поверхности противонаправлены.

Замечание. Пусть (u^1, \dots, u^{n-1}) — координаты на поверхности M . Ясно, что все замены $v^i = v^i(u^1, \dots, u^{n-1})$ координат на M можно разделить на два непересекающихся класса в зависимости от знака определителя матрицы Якоби. Замена координат внутри каждого из классов имеет, очевидно, положительный якобиан. Из сказанного выше вытекает, что выбор

одного из двух полей нормалей равносильно выбору одного из классов замен координат. Такой выбор часто называют *выбором ориентации поверхности* M . Отметим, что в дальнейшем аналогично будет введено понятие ориентации гладкого многообразия.

Пусть M — регулярная гиперповерхность в \mathbb{R}^n , и $P \in M$ — некоторая ее точка. Обозначим через N одно из двух полей нормалей к поверхности M . Пусть $\gamma(t)$ — произвольная кривая, лежащая на M , такая что $\gamma(t_0) = P$, и ξ — вектор скорости $\dot{\gamma}(t_0)$ кривой γ в точке P . Обозначим через $q(\xi)$ величину $\langle \ddot{\gamma}, N \rangle$.

Пусть (u^1, \dots, u^{n-1}) координаты на поверхности M , и $u^i(t)$ — координатные функции кривой γ . Тогда $\xi = (\dot{u}^1, \dots, \dot{u}^{n-1})$, и

$$\ddot{\gamma} = \left(\sum_i r_{u^i} \dot{u}^i \right)' = \sum_{ij} r_{u^i u^j} \dot{u}^i \dot{u}^j + \sum_i r_{u^i} \ddot{u}^i,$$

поэтому

$$q(\xi) = \langle \ddot{\gamma}, N \rangle = \sum_{ij} \langle r_{u^i u^j}, N \rangle \dot{u}^i \dot{u}^j,$$

поскольку $\langle r_{u^i}, N \rangle = 0$.

Таким образом, $q(\xi)$ зависит лишь от компонент вектора ξ и величин $\langle r_{u^i u^j}(P), N(P) \rangle$, причем эта зависимость имеет вид значения некоторой квадратичной формы, имеющей в координатах (u^i) матрицу $Q(u) = \left(\langle r_{u^i u^j}(P), N(P) \rangle \right)$, на векторе ξ .

С другой стороны, $q(\xi) = \langle \ddot{\gamma}, N \rangle$ не зависит от выбора координат (напомним, что мы зафиксировали поле нормалей N , т.е. мы рассматриваем только замены координат с положительным якобианом). Поэтому, если (v^1, \dots, v^{n-1}) — другие регулярные координаты на поверхности, то

$$q(\xi) = \langle \ddot{\gamma}, N \rangle = \sum_{ij} \langle r_{v^i v^j}, N \rangle \dot{v}^i \dot{v}^j,$$

где \dot{v}^i — компоненты того же касательного вектора ξ в координатах v^i . Поэтому числа $\left(\langle r_{v^i v^j}(P), N(P) \rangle \right)$ образуют матрицу $\tilde{Q}(v)$ той же квадратичной формы в координатах (v^i) .

Итак, доказано следующее предложение.

Предложение 4.1 *Соотношение $q(\xi) = \langle \ddot{\gamma}, N \rangle$, $\xi \in T_P M$, корректно определяет в произвольной точке P гиперповерхности M некоторую квадратичную форму q на касательном пространстве $T_P M$. Если (u^1, \dots, u^{n-1}) — координаты на M , то матрица квадратичной формы q в базисе (∂_{u^i}) имеет вид $q_{ij} = \langle r_{u^i u^j}, N \rangle$.*

Отметим, что закон преобразования чисел $\langle r_{u^i u^j}, N \rangle$ при замене координат легко проверить и прямым подсчетом, см. Дополнительный материал.

Определение. Квадратичная форма q на касательном пространстве $T_P M$ называется *второй фундаментальной формой* или *второй квадратичной формой* гиперповерхности M в точке P (по отношению к нормали N).

Отметим, что если заменить N на $-N$, то вторая фундаментальная форма изменит знак.

Замечание. В отличие от первой фундаментальной формы поверхности, вторая фундаментальная форма, вообще говоря, не обязана быть ни невырожденной, ни положительно определенной.

Замечание. Вторую фундаментальную форму также часто записывают в дифференциальном виде так:

$$dq^2 = \sum_{ij} q_{ij} du^i du^j.$$

Пример. Пусть двумерная гиперповерхность задана в виде графика $z = f(x, y)$. Тогда соответствующее параметрическое представление имеет вид

$$\begin{aligned} r &= (x, y, f(x, y)), & r_x &= (1, 0, f_x), & r_y &= (0, 1, f_y), \\ r_{xx} &= (0, 0, f_{xx}), & r_{xy} &= (0, 0, f_{xy}), & r_{yy} &= (0, 0, f_{yy}), \\ N &= \frac{[r_x, r_y]}{\|[r_x, r_y]\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \end{aligned}$$

и, значит, матрица второй фундаментальной формы в координатах (x, y) выглядит так:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 4.1. Вычислить вторую фундаментальную форму гиперповерхности, заданной в виде графика гладкой функции $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$.

Упражнение 4.2. Вычислить вторую фундаментальную форму гиперповерхности, заданной неявно в виде $F(x^1, \dots, x^n) = 0$, $dF \neq 0$, в окрестности любой ее точки.

Итак, в каждой точке поверхности M определены две квадратичные формы: первая фундаментальная форма \mathfrak{G} , которая, напомним, невырождена и положительно определена, и вторая фундаментальная форма q . Чтобы выяснить геометрический смысл второй фундаментальной формы, нам потребуется рассмотреть на поверхности кривые специального вида.

4.2 Геометрический смысл второй формы — кривизны плоских сечений

Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная проходящая через $P \in M$ двумерная аффинная плоскость, не лежащая в $T_P M$. Несложно показать, что Π пересекает поверхность M около точки P по некоторой регулярной кривой γ . Каждая такая кривая называется *плоским сечением*, проходящим через P . Если плоскость Π проходит через нормаль N к поверхности M в точке P , то плоское сечение γ называется *нормальным*. Если t — произвольный параметр на γ , такой что $\gamma(t_0) = P$, то будем говорить, что сечение γ проведено в направлении вектора $\dot{\gamma}(t_0)$.

Теорема 4.1 (Об отношении форм) Пусть $\xi \in T_P M$ — произвольный ненулевой вектор, γ — плоское сечение, проведенное через P в направлении ξ , и k — кривизна сечения γ в точке P . Тогда или k и $q(\xi)$ одновременно равны нулю, или

$$k \cos \theta = \frac{q(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)},$$

где θ — угол между главной нормалью m к сечению γ и нормалью N к поверхности M в точке P (напомним, что вторая фундаментальная форма вычисляется по отношению к N).

Доказательство. Рассмотрим первую возможность. Условие $k = 0$ равносильно линейной зависимости векторов $\dot{\gamma}$ и $\ddot{\gamma}$, что, в свою очередь, возможно если и только если $\ddot{\gamma}$ лежит в касательной плоскости $T_P M$ (так как задающая γ плоскость Π не содержится в $T_P M$). Значит, условие $k = 0$ равносильно перпендикулярности векторов $\ddot{\gamma}$ и N , что, в свою очередь, равносильно условию $q(\xi) = 0$, что и требовалось.

Рассмотрим теперь случай $k \neq 0$. Каждая квадратичная форма — однородная функция степени однородности 2, поэтому $q(\lambda\xi) = \lambda^2 q(\xi)$ и $\mathfrak{G}(\lambda\xi) = \lambda^2 \mathfrak{G}(\xi)$ для любых вектора $\xi \in T_P M$ и числа λ . Поэтому

$$\frac{q(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)} = \frac{q(\xi/\|\xi\|)}{\mathfrak{G}(\xi/\|\xi\|)},$$

и, значит, теорему достаточно доказать лишь для единичных векторов ξ .

Выберем на кривой γ натуральный параметр s , такой что $\gamma(s_0) = P$, $\dot{\gamma}(s_0) = \xi$, тогда $\ddot{\gamma}(s_0) = k m$, $\mathfrak{G}(\xi) = 1$, и

$$\frac{q(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)} = \langle \ddot{\gamma}(s_0), N \rangle = \langle k m, N \rangle = k \langle m, N \rangle = k \cos \theta,$$

что и требовалось.

Если в теореме 4.1 в качестве γ выбрать плоское нормальное сечение, то векторы m и N окажутся коллинеарны, поэтому $\cos \theta = \pm 1$, где “+1”

получается тогда и только тогда, когда N — главная нормаль к γ . Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Следствие 4.2 *Значение $q(\xi)$ второй фундаментальной формы поверхности M на единичном векторе $\xi \in T_P M$ равно плюс или минус кривизне k плоского нормального сечения γ , проведенного через P в направлении ξ . При этом знак “плюс” выбирается тогда и только тогда, когда N является главной нормалью сечения γ . В частности, $k = |q(\xi)|$.*

Обозначим через γ_n плоское нормальное сечение, проведенное через P в направлении ξ , и пусть k_n — кривизна сечения γ_n в точке P . Приводимое ниже следствие из теоремы 4.1 называется *теоремой Менье*.

Следствие 4.3 (Теорема Менье) *Пусть $\xi \in T_P M$ — ненулевой вектор, а γ и γ_n — некоторое плоское сечение и плоское нормальное сечение, проведенные через P в одном и том же направлении ξ . Тогда или одновременно $k = 0$ и $k_n = 0$, или $k_n = k \cos \theta$, где θ — угол между главными нормалью t и n к сечениям γ и γ_n соответственно.*

Доказательство. Случай $k = 0$ разбирается так же, как и в доказательстве теоремы 4.1.

Пусть теперь $k \neq 0$. Выберем в качестве нормали N к поверхности в точке P главную нормаль n к плоскому нормальному сечению γ_n . По теореме 4.1,

$$k \cos \theta = \frac{q(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)} = k_n \cos 0 = k_n,$$

что и требовалось.

Замечание. В дифференциальной геометрии поверхностей сложилась следующая терминология. Объекты и величины, определяемые первой фундаментальной формой, принято называть элементами *внутренней геометрии*. Напомним, что саму первую форму называют иногда *внутренним скалярным произведением*. К внутренней геометрии, например, принадлежат такие понятия как длина кривых, углы между кривыми, площади областей. Однако, как мы видели, первая фундаментальная форма определяет не все. Например, в терминах первой фундаментальной формы нельзя вычислить кривизну кривой на поверхности. Объекты и величины, для определения которых недостаточно первой фундаментальной формы, называют элементами *внешней геометрии поверхности* или *геометрии погружения*.

4.3 Главные кривизны и главные направления

Пусть, как и выше, P — произвольная точка регулярной гиперповерхности M в \mathbb{R}^n . Тогда, как мы уже знаем, в точке P определены две квадратичные

формы: первая форма \mathfrak{G} и вторая форма \mathfrak{q} . Из линейной алгебры известна так называемая теорема о паре квадратичных форм, которая, напомним, формулируется так.

Предложение 4.2 Пусть в линейном пространстве \mathbb{R}^n , в котором фиксирован произвольный базис, задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ с помощью симметричной невырожденной положительно определенной матрицы G . Пусть, кроме того, задана квадратичная форма \mathfrak{q} . Тогда в \mathbb{R}^n существует базис (e_i) , ортонормальный относительно указанного скалярного произведения, и такой что форма \mathfrak{q} имеет в нем диагональный вид. При этом, если Q — эта матрица формы \mathfrak{q} в исходном базисе, то базис (e_i) и соответствующие собственные числа формы Q относительно формы G могут быть найдены из следующего характеристического уравнения:

$$\det(Q - \lambda G) = 0.$$

Доказательство. Как известно из линейной алгебры (теорема о собственном базисе квадратичной формы) в пространстве \mathbb{R}^n существует базис (f_i) , ортонормированный относительно невырожденной положительно определенной квадратичной формы, задающей скалярное произведение. Пусть A — матрица перехода к этому базису, другими словами, компоненты X_f произвольного вектора в исходном базисе связаны с его компонентами X_f в базисе (f_i) так: $X_f = AX$. Тогда, матрица G_f квадратичной формы \mathfrak{G} , задающей скалярное произведение, связана с матрицей G этой квадратичной формы в исходном базисе так: $A^T G_f A = G$. Аналогично, $A^T Q_f A = Q$. Отметим, что, так как мы выбрали базис (f_i) ортонормированным относительно нашего скалярного произведения, матрица G_f — это единичная матрица, т.е. $A^T A = G$.

Теперь воспользуемся теоремой о приведении квадратичной формы \mathfrak{q} в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n к главным осям. В силу этой теоремы, форма \mathfrak{q} имеет ортонормированный собственный базис (e_i) . Отметим, что, так как базис (e_i) ортонормированный, матрица формы \mathfrak{G} в нем по прежнему единичная. Собственные числа и собственные векторы формы \mathfrak{q} могут быть найдены, как известно, при решении характеристического уравнения $\det(Q_f - \lambda E) = 0$. Умножив это уравнение на не равный нулю квадрат определителя матрицы перехода A и внося матрицу A под знак определителя, получим

$$\det A^T \det(Q_f - \lambda E) \det A = \det(A^T Q_f A - \lambda A E A^T) = \det(Q - \lambda G),$$

таким образом, характеристическое уравнение эквивалентно уравнению $\det(Q - \lambda G) = 0$, что и требовалось.

Применим предложение 4.2 к каноническим формам регулярной гиперповерхности M в произвольной ее точке.

Определение. Пусть G и Q — матрицы первой и второй фундаментальных форм регулярной гиперповерхности M в некоторой ее точке P . Корни уравнения $\det(Q - \lambda G) = 0$ называются *главными кривизнами* поверхности M в точке P . Если λ_0 — главная кривизна, то векторы из $T_P M$ соответствующие нетривиальным решениям линейного уравнения $(Q - \lambda_0 G)X = 0$, которые, очевидно, существуют, называются *главными направлениями* поверхности M в точке P .

Замечание. Из предложения 4.2 вытекает, что главные кривизны и главные направления поверхности не зависят от выбора координат на поверхности.

Следствие 4.4 Пусть P — произвольная точка регулярной гиперповерхности M . Тогда в касательном пространстве $T_P M$ можно выбрать такой базис, что первая и вторая фундаментальные формы поверхности в этом базисе будут иметь вид

$$ds^2 = \sum_i (du^i)^2, \quad dq^2 = \sum_i \lambda_i (du^i)^2$$

соответственно. При этом, указанный базис состоит из векторов главных направлений, а числа λ_i являются главными кривизнами поверхности M в точке P .

Из следствия 4.2 вытекает следующий результат, поясняющий геометрический смысл главных кривизн.

Следствие 4.5 Главная кривизна λ_i поверхности M в точке P равна, с точностью до знака, кривизне нормального сечения поверхности в точке P вдоль соответствующего главного направления.

С помощью главных кривизн и главных направлений можно легко вычислить кривизну любого нормального сечения. Действительно, пусть $V \in T_P M$ — произвольный касательный вектор к поверхности M в точке P , и предположим, что длина вектора V равна единице. Выберем в касательном пространстве $T_P M$ ортонормированный базис, состоящий из единичных векторов главных направлений. Тогда, очевидно, координаты вектора V в этом базисе могут быть записаны в виде:

$$V = (\cos \varphi_1, \dots, \cos \varphi_{n-1}),$$

где φ_i — угол между вектором V и i -ым базисным вектором. В силу следствия 4.2 и следствия 4.4, кривизна $k_n(V)$ нормального сечения поверхности в точке P в направлении V может быть вычислена следующим образом:

$$\pm k_n(V) = dq^2(V, V) = \sum_i \lambda_i (\cos \varphi_i)^2.$$

Особенно полезна эта формула в случае двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 .

Следствие 4.6 (Формула Эйлера) Пусть M^2 — двумерная регулярная поверхность в \mathbb{R}^3 , и P — точка из M . Тогда кривизна $k_n(V)$ нормального сечения в точке P в направлении $V \in T_P M$ может быть вычислена так:

$$\pm k_n(V) = \lambda_1 (\cos \varphi)^2 + \lambda_2 (\sin \varphi)^2,$$

где λ_1, λ_2 — главные кривизны поверхности в точке M , а φ — угол между вектором V и главным направлением, соответствующим главной кривизне λ_1 .

Из формулы Эйлера легко получить следующее интересное следствие.

Следствие 4.7 Главные кривизны и главные направления двумерной регулярной поверхности в точке P соответствуют наибольшему и наименьшему значениям функции $\lambda_1 (\cos \varphi)^2 + \lambda_2 (\sin \varphi)^2$, значение которой равно кривизне нормального сечения, взятой со знаком $\langle m, N \rangle$, где m — главная нормаль этого сечения, а N — та нормаль к поверхности, относительно которой определена ее вторая фундаментальная форма.

Доказательство. Действительно, для доказательства достаточно продифференцировать функцию $k_n(\varphi) = \lambda_1 (\cos \varphi)^2 + \lambda_2 (\sin \varphi)^2$ по φ . Имеем:

$$k'_n(\varphi) = 2(\lambda_2 - \lambda_1) \cos \varphi \sin \varphi = (\lambda_2 - \lambda_1) \sin 2\varphi,$$

поэтому, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то точки экстремума функции $k(\varphi)$ — это точки вида $\varphi = k\pi$ и $\varphi = \pi/2 + k\pi$, т.е. как раз главные направления. Если же $\lambda_1 = \lambda_2$, то все кривизны нормальных сечений одинаковы. Доказательство закончено.

Замечание. Если k_n — кривизна нормального сечения, проведенного в направлении вектора V , то величина k_n , взятая со знаком выражения $\langle m, N \rangle$, — это ориентированная кривизна этого нормального сечения относительно ориентации, задаваемой в секущей плоскости базисом (V, N) .

4.4 Средняя и гауссова кривизна гиперповерхности

В предыдущем пункте мы в каждой точке регулярной гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$ определили базис из главных направлений и главные кривизны. Однако, как и в линейной алгебре, иногда бывает полезно изучать инвариантные функции главных кривизн, а не сами главные кривизны. Мы рассмотрим две такие функции — так называемые среднюю и гауссову кривизны.

Определение. Сумма главных кривизн поверхности M в точке P называется *средней кривизной* поверхности M в точке P и обозначается через $H(P)$. Произведение главных кривизн называется *гауссовой кривизной* и обозначается через $K(P)$.

Имеет место следующее простое утверждение.

Утверждение 4.2 *Средняя кривизна и гауссова кривизна поверхности не зависят от выбора параметризации поверхности. При этом, если G и Q — матрицы первой и второй квадратичных форм поверхности в точке P , то средняя и гауссова кривизны могут быть вычислены так:*

$$H(P) = \text{trace}(G^{-1}Q), \quad K(P) = \det(G^{-1}Q) = \frac{\det Q}{\det G}.$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как сами главные кривизны не зависят от выбора параметризации. Второе утверждение тоже очевидно, так как оно имеет место в базисе, составленном из главных направлений, и поэтому, в силу первого утверждения и инвариантности следа и определителя, в любом другом базисе.

Знак гауссовой кривизны двумерной поверхности имеет простой геометрический смысл.

Предложение 4.3 *Пусть P — произвольная точка двумерной регулярной поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$. Если в точке P гауссова кривизна $K(P)$ поверхности M положительна, то достаточно малая окрестность точки P поверхности целиком лежит в одном из двух полупространств, определяемых касательной плоскостью $T_P M$, рассматриваемой как аффинная гиперплоскость, проходящая через точку P пространства \mathbb{R}^3 . Если же $K(P) < 0$, то это не так, а именно, любая окрестность точки P пересекается с внутренностью обоих полупространств.*

Доказательство. Действительно, пусть гауссова кривизна $K(P)$ положительна. В двумерном случае это равносильно тому, что обе главные кривизны поверхности M в точке P имеют один и тот же знак, т.е. их главные нормали лежат в одном и том же полупространстве по отношению к касательной плоскости $T_P M$. Но тогда из формулы Эйлера вытекает, что главная нормаль любого нормального сечения поверхности в точке P определена и лежит в том же полупространстве. Отсюда следует, что в том же полупространстве лежат и сами сечения (в некоторой достаточно малой окрестности). Если же $K(P) < 0$, то из вышесказанного вытекает, что нормальные сечения вдоль главных направлений лежат в разных полупространствах по отношению к $T_P M$. Доказательство закончено.

Ясно, что предложение 4.3 можно обобщить на многомерный случай только потребовав одинаковости знаков всех главных кривизн поверхности в точке P . Точка двумерной поверхности, в которой $K > 0$, называется *точкой выпуклости* или *сферической точкой*. Точка же, в которой $K < 0$, называется *седловой*.

Геометрический смысл средней кривизны менее очевиден. Определенное представление о нем дает теорема Лапласа–Пуассона, см. Дополнительные материалы к лекции 4.

Средняя кривизна поверхности обладает следующим важным свойством, объясняющим, отчасти, ее название.

Предложение 4.4 Пусть P — произвольная точка гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$, и N — нормаль к M в точке P . Пусть v_1, \dots, v_{n-1} — произвольный набор попарно ортогональных единичных векторов из $T_P M$. Обозначим через k_i кривизну нормального сечения поверхности M вдоль направления v_i , умноженную на знак $\langle m_i, N \rangle$, где m_i — главная нормаль этого сечения. Тогда сумма чисел k_i равна средней кривизне поверхности M в точке P .

Доказательство. Это вытекает из следствия 4.4. Действительно, пусть $A = (a_i^j)$ — матрица, столбцы которой — суть координаты векторов v_i в ортонормированном базисе из главных направлений поверхности M в точке P . Тогда, по определению, матрица A ортогональна. Число k_i равно

$$k_i = \lambda_1 (a_i^1)^2 + \dots + \lambda_{n-1} (a_i^{n-1})^2,$$

поэтому, суммируя все k_i , меняя порядок суммирования и пользуясь тем свойством ортогональной матрицы, что скалярный квадрат любой ее строки равен единице, получаем

$$\sum_i k_i = \sum_i \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha (a_i^\alpha)^2 \right) = \sum_\alpha \left(\lambda_\alpha \sum_i (a_i^\alpha)^2 \right) = \sum_\alpha \lambda_\alpha 1 = H(P),$$

что и требовалось.

Пример. Пусть поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$. Тогда, как мы уже вычисляли, первая и вторая фундаментальные формы имеют вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

поэтому

$$G^{-1} = \frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2} \begin{pmatrix} 1 + f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 + f_x^2 \end{pmatrix},$$

и, значит, средняя и гауссова кривизны, в соответствие с утверждением 4.2, имеют вид:

$$H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}, \quad K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}.$$

Пример. Пусть $M = S^2$ — стандартная сфера радиуса R . В качестве N выберем внутренние нормали к S^2 , т.е. нормали, направленные в противоположную сторону по отношению к соответствующим радиус-векторам. Так как каждое плоское нормальное сечение является окружностью радиуса R , кривизна каждого такого сечения равна $1/R$. Поэтому кривизны главных нормальных сечений также равны $1/R$, и, значит, средняя кривизна равна $2/R$, а гауссова — равна $1/R^2$.

4.5 О теореме Бонне

Возникает вопрос: а все ли знают про поверхность ее первая и вторая квадратичные формы? Может быть следует определить еще несколько квадратичных форм или достаточно уже определенных нами двух? Ответ на эти вопросы дает теорема Бонне. Точно сформулировать ее мы еще не готовы, поэтому дадим лишь “предварительную версию”.

Пусть Ω — область, в точках которой заданы две квадратичные формы g и q , гладко зависящие от точки. Если фиксированы координаты, то можно считать, что просто заданы матрицы G и Q этих форм, гладко зависящие от координат. Предположим, что форма g невырождена и положительно определена. Можно ли задать на Ω параметрическую поверхность r так, чтобы ее первая квадратичная форма совпадала с g , а вторая — с q ?

Оказывается, в общем случае ответ отрицательный. Дело в том, что первая и вторая формы не являются независимыми. Связь между ними выражается в так называемых *условиях Петерсона–Кодацци*.² Мы поговорим о них в следующем разделе. Бонне удалось показать, что этих условий достаточно для восстановления поверхности.

Теорема 4.2 (Бонне, 1867) *Если заданные на Ω положительно определенная квадратичная форма g и произвольная квадратичная форма q удовлетворяют условиям Петерсона–Кодацци, то существует единственная (с точностью до движения объемлющего пространства) регулярная поверхность на Ω , такая что ее первая квадратичная форма совпадает с g , а вторая квадратичная форма совпадает с q .*

²Впервые часть этих условий была найдена Гауссом. Полная система уравнений была независимо найдена Петерсоном (1853), Майнардом (1856) и Кодацци (1867).

Задачи к лекции 4

Задача 4.1. Вычислить вторую фундаментальную форму для поверхности, заданной неявной функцией $F(x, y, z)$.

Задача 4.2. Вычислить среднюю и гауссову кривизны для поверхности, заданной неявной функцией $F(x, y, z)$.

Задача 4.3. Вычислить среднюю и гауссову кривизны для гиперповерхности, заданной графиком: $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$.

Задача 4.4. Вычислить среднюю и гауссову кривизны для поверхности, заданной неявной функцией $F(x^1, \dots, x^n)$.

Задача 4.5. Вычислить вторую фундаментальную форму следующих поверхностей вращения:

- 1) $r = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$ (сфера);
- 2) $r = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$ (тор);
- 3) $r = (a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u)$ (катеноид).

Задача 4.6. Вычислить среднюю и гауссову кривизны сферы, тора и катеноида.

Задача 4.7. Вычислить среднюю и гауссову кривизны поверхности, полученной вращением графика функции $x = f(z) > 0$ вокруг оси z .

Задача 4.8. Пусть S — некоторая данная поверхность. Отложим на нормалях к поверхности S в одном направлении отрезки постоянной длины. Концы отложенных отрезков описывают поверхность S^* , “параллельную” поверхности S . Если уравнение поверхности S есть $r = r(u, v)$, то уравнение S^*

$$\rho = r(u, v) + a n(u, v),$$

где $n(u, v)$ — единичный вектор нормали к S .

Выразить коэффициенты первой и второй фундаментальных форм поверхности S^* через коэффициенты первой и второй фундаментальных форм поверхности S .

Задача 4.9. Выразить гауссову кривизну K^* поверхности S^* , “параллельной” поверхности S , через гауссову и среднюю кривизны поверхности S .

Задача 4.10. Выразить среднюю кривизну H^* поверхности S^* , “параллельной” поверхности S , через гауссову и среднюю кривизны поверхности S .

Дополнительный материал к лекции 4

Добавление 4.1. Другое доказательство предложения 4.1. Итак, пусть (u^i) и (v^i) — две системы координат на регулярной поверхности, и N — фиксированное поле нормалей на ней. Изучим, как связаны наборы чисел $q_{ij} = \langle r_{u^i u^j}, N \rangle$ и $\tilde{q}_{\alpha\beta} = \langle r_{v^\alpha v^\beta}, N \rangle$. Вычислим сначала, как связаны векторы вторых частных производных от r . Имеем:

$$\frac{\partial r}{\partial u^i} = \sum_{\alpha} \frac{\partial r}{\partial v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i},$$

поэтому

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\partial r}{\partial v^\alpha} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} \right) = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta} \frac{\partial^2 r}{\partial v^\alpha \partial v^\beta} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^j} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i} + \frac{\partial r}{\partial v^\alpha} \frac{\partial^2 v^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} \right).$$

Умножая теперь левую и правую части предыдущего равенства скалярно на вектор нормали N и заметив, что вектор $\frac{\partial r}{\partial v^\alpha}$ — это просто вектор $r_{v^\alpha} = \partial_{v^\alpha}$ из канонического репера, и поэтому он перпендикулярен нормали N , получим:

$$\left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}, N \right\rangle = \sum_{\alpha\beta} \left\langle \frac{\partial^2 r}{\partial v^\alpha \partial v^\beta}, N \right\rangle \frac{\partial v^\beta}{\partial u^j} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i},$$

т.е.

$$q_{ij} = \sum_{\alpha\beta} \tilde{q}_{\alpha\beta} \frac{\partial v^\beta}{\partial u^j} \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^i}.$$

Обозначим матрицу (q_{ij}) через $Q(u)$, матрицу $(\tilde{q}_{\alpha\beta})$ через $\tilde{Q}(v)$, а матрицу Якоби $(\partial v^\alpha / \partial u^i)$ — через J . Тогда последнее соотношение переписывается в виде $Q(u) = J^T \tilde{Q}(v(u)) J$.

Добавление 4.2. Вторая форма цилиндра и теорема Менье. Рассмотрим прямой круговой цилиндр в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 , параметрически заданный так:

$$x^1(u^1, u^2) = R \cos u^1, \quad x^2(u^1, u^2) = R \sin u^1, \quad x^3(u^1, u^2) = u^2.$$

Обозначим через N поле нормалей к цилиндру, направленное наружу. Рассмотрим плоскость Π , пересекающую вертикальную координатную ось Ox^3 под углом α . Эта плоскость пересекает цилиндр по некоторому эллипсу. Найдем кривизну этого эллипса в его вершине P , наиболее удаленной от центра эллипса. Обозначим через V касательный вектор к эллипсу в точке P , и пусть Π_N — двумерная плоскость, проходящая через векторы $N(P)$ и V . Эта плоскость, очевидно, пересекает цилиндр по окружности радиуса R (этим и хороша выбранная нами точка эллипса). Из следствия 4.3 получаем, что кривизна $k(P)$ эллипса в точке P может быть вычислена так: $k(P) \cos(\pi/2 - \alpha) = 1/R$, т.е. $k(P) = 1/(R \sin \alpha)$. В частности, если $\alpha = \pi/2$ (плоскость Π совпадает с Π_N), то $k(P) = 1/R$, а если $\alpha = 0$ (плоскость Π пересекает цилиндр по прямой, параллельной оси Ox^3), то $k(P) = \infty$.

Тот же результат, впрочем, можно получить и непосредственно из теоремы 4.1. Для этого нам придется вычислить обе квадратичные формы цилиндра, что мы и сделаем. Векторы канонического базиса цилиндра записываются так:

$$\partial_{u^1} = (-R \sin u^1, R \cos u^1, 0), \quad \partial_{u^2} = (0, 0, 1).$$

Представим вектор нормали N в виде нормированного векторного произведения:

$$N = [\partial_{u^1}, \partial_{u^2}] / \|[\partial_{u^1}, \partial_{u^2}]\|.$$

Получим: $N = (\cos u^1, \sin u^1, 0)$. Далее, первая квадратичная форма цилиндра в координатах (u^1, u^2) имеет вид

$$ds^2 = R^2(du^1)^2 + (du^2)^2.$$

Чтобы найти вторую квадратичную форму цилиндра, вычислим вторые производные параметризующего отображения r . Получим:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^1} = (-R \cos u^1, -R \sin u^1, 0), \quad \frac{\partial^2 r}{\partial u^1 \partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial u^2 \partial u^2} = 0.$$

Поэтому вторая квадратичная форма цилиндра имеет вид:

$$dq^2 = -R(du^1)^2.$$

Обозначим через V единичный касательный вектор к эллипсу в точке P . В координатах (u^1, u^2) этот вектор имеет, очевидно, вид $V = (1/R, 0)$. Вектор главной нормали $n(P)$ к эллипсу направлен внутрь цилиндра, вектор $N(P)$ нормали к поверхности — наружу цилиндра, поэтому угол между векторами $n(P)$ и $N(P)$ равен $\pi/2 + \alpha$. Итак, из теоремы 4.1, получаем:

$$k(P) \cos(\pi/2 + \alpha) = \frac{-R(1/R)^2}{1} = -1/R,$$

поэтому $k(P) = 1/(R \sin \alpha)$, как и выше.

Добавление 4.3. Главные кривизны цилиндра. Рассмотрим снова прямой круговой цилиндр, параметризованный так:

$$x^1(u^1, u^2) = R \cos u^1, \quad x^2(u^1, u^2) = R \sin u^1, \quad x^3(u^1, u^2) = u^2.$$

Выше мы вычислили его первую и вторую квадратичные формы в этой параметризации. В матричном виде ответ можно записать так:

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\det \begin{pmatrix} -R - \lambda R^2 & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = R\lambda(1 + R\lambda) = 0.$$

Поэтому главные кривизны цилиндра равны 0 и $-1/R$. Соответствующие главные направления находятся из линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{pmatrix} X = 0,$$

и, соответственно, имеют вид: $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Другими словами, главные направления кругового цилиндра это направления его параллелей и меридианов.

В этом случае формула Эйлера для кривизны нормального сечения имеет вид:

$$k(\varphi) = \frac{\cos^2 \varphi}{R}.$$

График этой функции на интересующем нас отрезке $[0, 2\pi]$ изображен на рис. 9.

Отметим, что зная формулу Эйлера и приняв во внимание взаимную ортогональность главных направлений, можно найти главные кривизны и главные направления цилиндра не вычисляя его фундаментальные формы. Действительно, рассмотрим всевозможные нормальные сечения цилиндра, проходящие через фиксированную точку P . Все эти сечения, кроме одного особого, представляют собой эллипсы, особое же сечение — это прямолинейная образующая цилиндра. Фиксируем внутреннюю нормаль к цилиндру. Ясно, что вектора ускорений всех сечений-эллипсов направлены внутрь цилиндра, поэтому очевидно, в формулу Эйлера следует выбирать знак "плюс" для произвольного

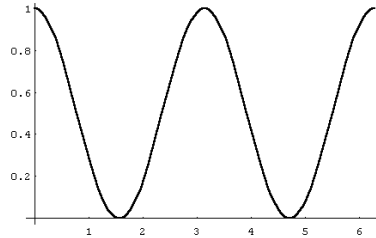


Рис. 9: Кривизна нормальных сечений кругового цилиндра.

направления $V = (\cos \varphi, \sin \varphi)$: $k_n(\varphi) = \lambda_1(\cos \varphi)^2 + \lambda_2(\sin \varphi)^2$. Далее, кривизна прямой равна нулю, поэтому на этом сечении достигается наименьшее возможное значение функции $k_n(\varphi)$. Поэтому направление меридиана — главное, и соответствующая главная кривизна равна 0. Второе главное направление ортогонально первому, поэтому это направление — направление параллели-окружности. Поэтому вторая главная кривизна равна кривизне окружности, т.е. равна $1/R$.

Добавление 4.4. Теорема Лапласа–Пуассона. Понятие средней кривизны двумерной поверхности было впервые определено Томасом Юнгом (1805), а затем независимо Пьером Симоном Лапласом (1806). Лаплас изучал форму поверхности раздела двух физических сред, находящихся в равновесии, и выяснил что средняя кривизна поверхности раздела пропорциональна разности давлений в разделяемых средах. Этот результат в механике сплошной среды называется теоремой Лапласа. Коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом поверхностного натяжения*.

Приведем здесь схему рассуждений Лапласа. Рассмотрим малый участок поверхности раздела двух физических сред, в одной из которых давление равно p_1 , а в другой — p_2 (в окрестности поверхности). Представим себе малое возмущение поверхности, при котором каждая точка поверхности движется вдоль нормального поля N , которое направлено, скажем, в сторону второй среды. При этом, если поверхность смещается на δN , то, очевидно, объем пространства между исходной и возмущенной поверхностями равен $\delta N dS$, где dS — элемент площади исходной поверхности. Полная работа δA при таком возмущении складывается из работы по изменению объема, которая есть $(p_2 - p_1)\delta N dS$ и работы поверхностных сил, которая, в свою очередь, есть $\sigma \delta S$. Здесь через δS обозначено изменение площади поверхности, а через σ — коэффициент поверхностного натяжения. Условие термодинамического равновесия записывается так:

$$\delta A = (p_2 - p_1)\delta N dS + \sigma \delta S = 0.$$

Вычислим площадь возмущенной поверхности. Для этого рассмотрим пару главных нормальных сечений, проведенных через фиксированную точку P , и пусть $r_i(t_i)$ — их натуральные параметризации. Ясно, что элемент dS площади невозмущенной поверхности можно записать в виде $dt_1 dt_2$. Рассмотрим возмущения главных сечений в их плоскостях вдоль вектора $N(P)$ нормали к поверхности в этой точке. Эти возмущения имеют вид $r_i + \varepsilon N$. Однако, по определению, вектор нормали N и вектор главной нормали n_i к кривой r_i коллинеарны, поэтому наши возмущения имеют вид $r_i + \varepsilon s_i n_i$, где $s_i = \langle n_i, N \rangle$. Из плоских формул Френе вытекает, что элемент длины возмущенной кривой r_i имеет вид $(1 + \varepsilon s_i k_i) dt_i$, что, в силу следствия 4.3 и следствия 4.5, можно переписать в виде $(1 + \varepsilon \lambda_i) dt_i$. Здесь через λ_i обозначена главная кривизна, соответствующая i -ому главному направлению. Наконец, элемент площади возмущенной поверхности равен произведению элементов длин возмущенных кривых γ_i (эти кривые ортогональны), поэтому приращение площади имеет вид:

$$\delta S = (1 + \varepsilon \lambda_1)(1 + \varepsilon \lambda_2) dt_1 dt_2 - dS = ((\lambda_1 + \lambda_2)\varepsilon + o(\varepsilon)) dS.$$

Подставив полученный результат в условие термодинамического равновесия, заменив в нем ε на δN и пренебрегая членами порядка $o(\varepsilon)$, получим:

$$\left((p_2 - p_1) + \sigma(\lambda_1 + \lambda_2) \right) dS \delta N = 0,$$

откуда, окончательно получаем уравнение Лапласа $\sigma(P)H(P) = p_1 - p_2$. Итак, доказан следующий результат.

Теорема 4.3 (Лаплас–Пуассон) *Средняя кривизна поверхности раздела двух равновесных физически сред пропорциональна разности давлений в этих средах вблизи поверхности раздела.*

Добавление 4.5. Средняя и гауссова кривизны двумерной поверхности. Пусть двумерная поверхность задана параметрически, (u, v) — координаты на этой поверхности, и пусть метрика ds^2 и вторая форма $d\sigma^2$ имеют вид:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad d\sigma^2 = L du^2 + 2M du dv + N dv^2.$$

Отметим, что такие буквенные обозначения для компонент первой и второй фундаментальных форм являются традиционными в классической теории поверхностей.

Вернемся к нашим вычислениям. Матрица, обратная к матрице метрики, имеет вид:

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

поэтому

$$H = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Добавление 4.6. О выборе координат на поверхности. В разных задачах бывает полезно выбрать такое представление поверхности (т.е. такие координаты на поверхности), для которого первая и/или вторая фундаментальная формы имеют наиболее простой вид. Мы уже знаем, что при замене параметризации матрицы первой и второй форм меняются как матрицы квадратичных форм, причем в качестве матрицы замены надо взять соответствующую матрицу Якоби.

Пусть M — поверхность, заданная параметрически с помощью отображения $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, и (u^1, \dots, u^{n-1}) — координаты на этой поверхности, порожденные r . Пусть $P \in M$. Выберем произвольную невырожденную матрицу (c_α^i) размера $(n-1) \times (n-1)$ и зададим с ее помощью линейное преобразование касательного пространства $T_P M$, переводящее канонический базис $\{\partial_{u^i}\}$ в базис $\{\xi_i\}$, имеющий вид $\xi_\alpha = \sum_i c_\alpha^i \partial_{u^i}$.

Пусть (e_1, \dots, e_{n-1}) — стандартный базис в пространстве $\mathbb{R}^{n-1} \supset \Omega$. Рассмотрим линейное преобразование C , отображающее \mathbb{R}^{n-1} на себя и переводящее базисные векторы e_i в базисные векторы $\bar{e}_\alpha = \sum_i c_\alpha^i e_i$. Тогда координаты \bar{u}^α пространства \mathbb{R}^{n-1} , порожденные базисом \bar{e}_α , связаны с координатами u^i так: $u^i = \sum_\alpha c_\alpha^i \bar{u}^\alpha$.

Построим новую параметризацию $\bar{r}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ поверхности M , положив $\bar{\Omega} = C^{-1}(\Omega)$ и $\bar{r} = r \circ C$. Тогда матрица Якоби, с помощью которой осуществляется преобразование координат фундаментальных форм поверхности, составлена из частных производных $\partial u^i / \partial \bar{u}^\alpha$ и равна C . Итак, мы доказали следующий результат.

Предложение 4.5 *Любое линейное преобразование касательного пространства $T_P M$ поверхности M можно задать заменой координат на поверхности M , т.е. заменой параметрического представления этой поверхности. В частности, для любой точки $P \in M$ существуют такие координаты на M , что в них индуцированная метрика, вычисленная в точке P , задается единичной матрицей, а вторая фундаментальная форма в этой точке — диагональной матрицей.*

Приведем пример координат, часто бывающий полезным в разных вычислениях. Пусть M — некоторая двумерная поверхность в \mathbb{R}^3 , и $P \in M$. Зададим поверхность M в окрестности точки P в виде графика функции $z = f(x, y)$, выбрав в качестве координатной плоскости XU касательную плоскость $T_P M$, и, поэтому, в качестве оси z — прямую, перпендикулярную к $T_P M$. Тогда в этих координатах точка P равна $(0, 0, 0)$, и график функции f касается плоскости XU в точке P , поэтому $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Вспоминая, что матрица метрики имеет вид $\begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}$, видим, что в точке P эта матрица — единичная. Вычислим вторую фундаментальную форму, а также среднюю и гауссову кривизны в точке P . Имеем

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

$$H = f_{xx} + f_{yy}, \quad K = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Упражнение 4.3. Обобщить предыдущую конструкцию на случай гиперповерхности $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$.

Возникает естественный вопрос: можно ли так подобрать координаты на поверхности M , чтобы индуцированная метрика задавалась единичной матрицей в каждой точке? Оказывается, в общем случае ответ отрицателен. В следующем семестре мы введем в рассмотрение так называемый тензор кривизны Римана, исследуя который можно понять, когда существуют такие координаты (существование таких координат равносильно занулению так называемого тензора Римана). В случае двумерных поверхностей кривизна Римана оказывается пропорциональной гауссовой кривизне.

Добавление 4.7. Конформные координаты двумерной поверхности. Оказывается, в двумерном случае вид метрики можно существенно упростить, выбирая подходящие координаты. (Отметим сразу, что этот результат не обобщается на большие размерности.) Назовем координаты (u, v) на двумерной поверхности M *конформными* или *изотермическими*, если в них индуцированная метрика имеет вид $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$, где $\lambda(u, v)$ — некоторая положительная функция. Этот результат мы приводим без доказательства.

Теорема 4.4 (Об униформизации) *На любой двумерной поверхности M можно ввести конформные координаты.*

Ниже мы покажем, как можно использовать эту теорему, на примере исследования важного класса двумерных поверхностей, называемых минимальными поверхностями и поверхностями постоянной кривизны.

Добавление 4.8. Минимальные поверхности. Выше мы привели теорему Лапласа–Пуассона, проясняющую физический смысл средней кривизны двумерной поверхности (напомним, средняя кривизна поверхности раздела двух однородных равновесных физических сред пропорциональна разности давлений). Частными случаями поверхностей раздела двух однородных сред являются мыльные пленки (средняя кривизна равна нулю) и мыльные пузыри (средняя кривизна постоянна).

Определение. Гиперповерхность M называется *минимальной*, если ее средняя кривизна тождественно равна нулю. Поверхность M называется поверхностью *постоянной средней кривизны*, если ее средняя кривизна постоянна.

Рассмотрим двумерную поверхность M в \mathbb{R}^3 , заданную параметрически в виде $x = r(u, v)$, где $x = (x^1, x^2, x^3)$ — стандартные координаты в \mathbb{R}^3 . Предположим, что координаты (u, v) являются конформными (по теореме 4.4, такие координаты всегда можно выбрать), т.е. индуцированная метрика ds^2 в координатах (u, v) имеет вид: $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$, где $\lambda(u, v)$ — некоторая положительная функция.

Теорема 4.5 Пусть двумерная поверхность M в \mathbb{R}^3 задана параметрически в виде $r(u, v)$, причем координаты (u, v) — конформны. Пусть $N = [r_u, r_v] / \|[r_u, r_v]\|$ — единичная нормаль к поверхности M . Тогда

$$\Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = r_{uu} + r_{vv} = \lambda H N,$$

где H — средняя кривизна поверхности M , вычисленная по отношению к N . В частности, лапласиан Δr радиус-вектора r перпендикулярен поверхности M .

Доказательство. Покажем сначала, что $\Delta r \perp M$. Действительно,

$$\begin{aligned} \langle \Delta r, r_u \rangle &= \langle r_{uu} + r_{vv}, r_u \rangle = \langle r_{uu}, r_u \rangle + \langle r_{vv}, r_u \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle r_u, r_u \rangle_u + \langle r_v, r_u \rangle_v - \langle r_v, r_{uv} \rangle = \frac{1}{2} \lambda_u + 0 - \frac{1}{2} \langle r_v, r_v \rangle_u = \frac{1}{2} \lambda_u - \frac{1}{2} \lambda_u = 0. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $\langle \Delta r, r_v \rangle = 0$.

Вычислим теперь $\langle \Delta r, N \rangle$. Имеем

$$\langle \Delta r, N \rangle = \langle r_{uu}, N \rangle + \langle r_{vv}, N \rangle = \text{tr } Q.$$

С другой стороны, $G^{-1}Q = \frac{1}{\lambda}Q$, поэтому $H = \text{tr}(G^{-1}Q) = \text{tr } Q/\lambda$, откуда

$$\langle \Delta r, N \rangle = \lambda H \Rightarrow \Delta r = \lambda H N,$$

что и требовалось.

Радиус-вектор $r(u, v)$ назовем *гармоническим*, если

$$\Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = 0.$$

Приведем важное следствие предыдущей теоремы.

Следствие 4.8 Двумерная поверхность M в \mathbb{R}^3 , заданная параметрически в виде $r(u, v)$, где (u, v) — конформные координаты, является минимальной, если и только если радиус-вектор $r(u, v)$ — гармонический.

Если поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$, то условие ее минимальности, в силу сделанных ранее явных вычислений средней кривизны, записывается так:

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0.$$

Это уравнение, найденное Лагранжем, называется *уравнением минимальных поверхностей*. Интересно отметить, что хотя для малых областей плоскости XY существует много разных решений этого уравнения, решений, определенных на всей плоскости, не так уж много. Одним из очевидных решений является произвольная линейная функция. Оказывается, других таких решений нет. Приведем без доказательства следующую теорему, принадлежащую Бернштейну.

Теорема 4.6 (Бернштейн) Если $f(x, y)$ — решение уравнения минимальных поверхностей, определенное на всей плоскости XY , то функция f — линейна.

Приведем еще некоторые примеры минимальных поверхностей.

Пример. Опишем все минимальные поверхности вращения, т.е. поверхности вращения нулевой средней кривизны. Поверхность вращения, напомним, получается при вращении графика положительной гладкой функции f вокруг оси изменения параметра.

Зададим поверхность вращения M как отображение $r: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ так:

$$x^1(\varphi, z) = f(z) \cos \varphi, \quad x^2(\varphi, z) = f(z) \sin \varphi, \quad x^3(\varphi, z) = z.$$

Векторы канонического базиса в точке (φ, z) имеют вид:

$$\partial_\varphi = (-f(z) \sin \varphi, f(z) \cos \varphi, 0), \quad \partial_z = (f'(z) \cos \varphi, f'(z) \sin \varphi, 1),$$

поэтому первая квадратичная форма поверхности вращения имеет вид:

$$ds^2 = (f(z))^2 (d\varphi)^2 + (1 + (f'(z))^2) (dz)^2.$$

Зададим поле нормалей на поверхности M как нормированное векторное произведение векторов канонического базиса:

$$N(\varphi, z) = \frac{[\partial_\varphi, \partial_z]}{\|[\partial_\varphi, \partial_z]\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(z))^2}} (\cos \varphi, \sin \varphi, -f'(z)).$$

Отметим, что это внешняя нормаль. Вычислим вторую квадратичную форму поверхности M . Получим:

$$dq^2 = \frac{-f(z)(d\varphi)^2 + f''(z)(dz)^2}{\sqrt{1 + (f'(z))^2}}.$$

Вычислим теперь среднюю кривизну поверхности вращения, воспользовавшись для этого утверждением 4.2:

$$H(P) = \text{trace}(G^{-1}Q) = \frac{f''(z)(f(z))^2 - f(z)(1 + (f'(z))^2)}{\sqrt{1 + (f'(z))^2}}.$$

Таким образом, условие равенства нулю средней кривизны поверхности вращения можно записать в виде:

$$f''(z)f(z) - (f'(z))^2 - 1 = 0.$$

Проинтегрировав полученное дифференциальное уравнение, находим: $f(z) = a \cosh(z/a) + b$. Это так называемые *катеноиды* — поверхности, полученные при вращении цепной линии. Их можно наблюдать, опустив в мыльную воду проволочный контур, состоящий из двух окружностей. Один из катеноидов, $a = 1$, $b = 0$, показан на рис. 10.

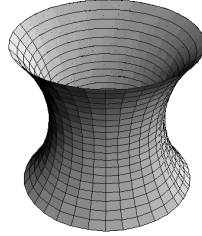


Рис. 10: Катеноид — поверхность вращения нулевой средней кривизны.

Еще одним примером минимальных поверхностей является *геликоид*, замечаемый прямой линией, которая равномерно движется вдоль некоторой оси и вращается вокруг нее. При специальном выборе координат в \mathbb{R}^3 , геликоид можно записать в виде

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = av, \end{cases}$$

где a — некоторая ненулевая постоянная (проверьте, что геликоид является минимальной поверхностью).

Напомним, что *линейчатой поверхностью* называется поверхность, заметаемая прямой линией при произвольном ее движении. Оказывается, что имеет место следующий результат.

Предложение 4.6 (Каталан) *Линейчатая поверхность минимальна, если и только если она является или плоскостью, или геликоидом, см. рис. 11.*

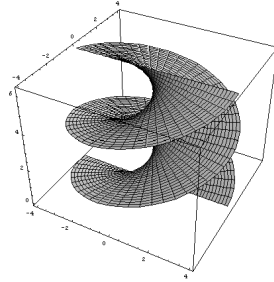


Рис. 11: Геликоид.

Упражнение 4.4. Докажите теорему Каталана.

Добавление 4.9. Поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны. Простейшие примеры поверхностей постоянной гауссовой кривизны нам известны — это сфера ($K = 1/R^2$) и плоскость ($K = 0$). В данном разделе мы построим ряд более сложных примеров поверхностей постоянной гауссовой кривизны, которые можно найти среди поверхностей вращения.

Поверхность вращения может быть задана параметрически в виде

$$r(\varphi, z) = (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, z),$$

где функция $f(z)$ предполагается положительной. Вычислим первую фундаментальную форму:

$$r_\varphi = (-f(z) \sin \varphi, f(z) \cos \varphi, 0), \quad r_z = (f'(z) \cos \varphi, f'(z) \sin \varphi, 1),$$

откуда

$$G = \begin{pmatrix} f(z)^2 & 0 \\ 0 & 1 + f'(z)^2 \end{pmatrix}.$$

Далее, $[r_\varphi, r_z] = (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, -f(z)f'(z))$, поэтому поле (внешних) нормалей к поверхности вращения можно выбрать в виде

$$N(\varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(z)^2}} (f(z) \cos \varphi, f(z) \sin \varphi, -f(z)f'(z)),$$

и, так как вторые частные производные имеют вид

$$r_{\varphi\varphi} = (-f(z) \cos \varphi, -f(z) \sin \varphi, 0), \quad r_{z\varphi} = (-f'(z) \sin \varphi, f'(z) \cos \varphi, 0), \\ r_{zz} = (f''(z) \cos \varphi, f''(z) \sin \varphi, 0),$$

то

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 + f'(z)^2}} \begin{pmatrix} -f(z) & 0 \\ 0 & f''(z) \end{pmatrix}.$$

Поскольку гауссова кривизна равна отношению определителей форм, находим

$$K = \frac{-f''(z)}{f(z)(1 + f'(z)^2)^2}.$$

Решая это дифференциальное уравнение для разных постоянных K можно получить набор примеров поверхностей вращения постоянной гауссовой кривизны. На рис. 12 и рис. 13 приведены примеры таких поверхностей.

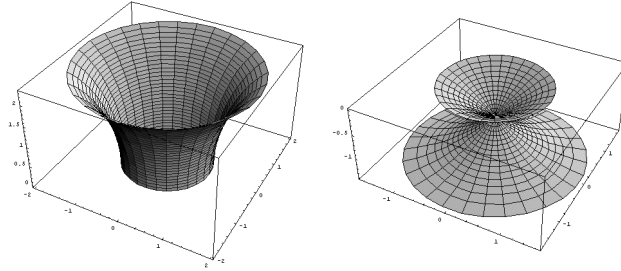


Рис. 12: Поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны.

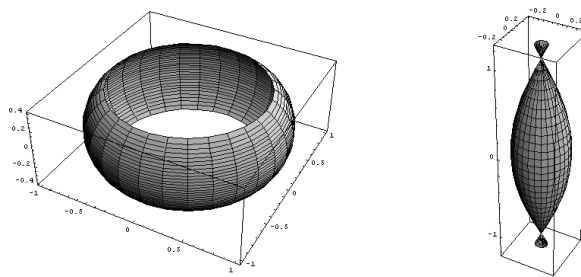


Рис. 13: Поверхности вращения постоянной положительной кривизны.

На самом деле, существуют и гораздо более сложные примеры поверхностей постоянной гауссовой кривизны. На рис. 14 показаны две такие поверхности, слева — поверхность Дини, ее кривизна отрицательна, а справа — поверхность постоянной положительной гауссовой кривизны.

Добавление 4.10. Случай произвольной коразмерности. В данном разделе мы всюду ограничивались случаем гиперповерхностей. Здесь мы вкратце обсудим общий случай. Итак, пусть M — произвольная k -мерная поверхность в \mathbb{R}^n . Рассмотрим произвольную точку $P \in M$, и пусть $T_P M$ — касательное пространство к поверхности в этой точке, а $(T_P M)^\perp$ — ортогональное дополнение к $T_P M$. Для произвольного вектора $X \in \mathbb{R}^n$ обозначим через X^T и X^\perp его ортогональные проекции на подпространства $T_P M$ и $(T_P M)^\perp$ соответственно.

Пусть $\gamma(t)$ — произвольная кривая, лежащая на M и такая, что $\gamma(0) = P$, и ξ — вектор скорости $\dot{\gamma}(0)$ кривой γ в точке P . Обозначим через $\eta(\xi)$ вектор $(\ddot{\gamma})^N$.

Пусть $r(u^1, \dots, u^k)$ — параметрическое задание поверхности M , и пусть кривая γ задается в координатах (u^1, \dots, u^k) так: $u^i = u^i(t)$, $i = 1, \dots, k$. Тогда $\xi = (\dot{u}^1, \dots, \dot{u}^k)$,

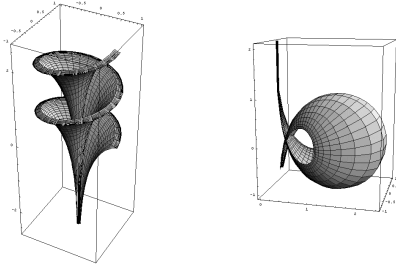


Рис. 14: Поверхности постоянной гауссовой кривизны.

и

$$\ddot{\gamma} = \left(\sum_i r_{u^i} \dot{u}^i \right)' = \sum_{ij} r_{u^i u^j} \dot{u}^i \dot{u}^j + \sum_i r_{u^i} \ddot{u}^i,$$

поэтому

$$q(\xi) = \sum_{ij} (r_{u^i u^j})^N \dot{u}^i \dot{u}^j,$$

поскольку $(r_{u^i})^N = 0$.

Таким образом, величина $q(\xi)$ зависит не от конкретного вида кривой γ , а лишь от компонент вектора скорости ξ и векторов $q_{ij}(P) = (r_{u^i u^j}(P))^N(P)$.

Пусть $\partial_{u^i} = \partial_{u^i}(P)$ — векторы канонического базиса. Фиксируем в ортогональном дополнении $(T_P M)^\perp$ к $T_P M$ ортонормированный базис $N_1 = N_1(P), \dots, N_{n-k} = N_{n-k}(P)$, такой что векторы

$$\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k}, N_1, \dots, N_{n-k}$$

образуют положительно ориентированный базис в \mathbb{R}^n . Легко проверить, что векторы $N_i(Q)$ можно выбрать для каждой достаточно близкой к P точки Q так, чтобы их координаты гладко зависели от точки. Тогда $q_{ij}(P) = \sum_\alpha \langle r_{u^i u^j}, N_\alpha \rangle N_\alpha$.

Можно показать, что векторы $q_{ij}(P)$ задают билинейную форму на линейном пространстве $T_P M$ со значениями в $(T_P M)^\perp$ (т.е. билинейную функцию, значения которой — векторы из $(T_P M)^\perp$). Эта билинейная форма называется *второй фундаментальной формой поверхности*. Многие конструкции, обсуждавшиеся выше, могут быть обобщены на общий случай. В частности, след этой билинейной формы называется *вектором средней кривизны* поверхности. Поверхности нулевой средней кривизны (называемые, как и в двумерном случае, минимальными поверхностями) также обладают рядом важных и интересных свойств, что делает их предметом интенсивного изучения.

5 Элементы дифференциального исчисления на поверхностях

Материал, собранный в данном разделе обычно не входит в стандартный курс лекций по классической дифференциальной геометрии. Это связано с тем, что этот материал (в существенно более общей случае — случае многообразий) излагается во втором семестре. Однако, по нашему мнению, знакомство с данным разделом не только углубит понимание классической теории поверхностей, но, что более важно, облегчит понимание существенно более сложных конструкций тензорного анализа, излагаемых в следующем семестре.

5.1 Деривационные формулы Вейнгартена–Гаусса

В практических задачах часто приходится рассматривать на поверхностях семейства векторов, зависящих от точки поверхности. Такие семейства называются *векторными полями*. Особый интерес представляют так называемые *касательные векторные поля* — семейства векторов $X = X(P)$ из касательных плоскостей $T_P M$ к поверхности.

Если на поверхности M фиксированы координаты (u^1, \dots, u^k) то, каждое касательное векторное поле X может быть задано как набор функций $X^i(u^1, \dots, u^k)$, $i = 1, \dots, k$. По этим функциям однозначно восстанавливается вектор их $T_P M$ как линейная комбинация векторов канонического базиса с коэффициентами X^i :

$$X = X^1 \partial_{u^1} + \dots + X^k \partial_{u^k}.$$

Функции X^i называются *компонентами касательного векторного поля X в координатах (u^1, \dots, u^k)* . Ясно, что если изменить координаты, то изменятся и функции, задающие компоненты данного векторного поля.

Упражнение 5.1. Пусть фиксировано векторное поле на поверхности, и пусть X^i — компоненты этого векторного поля в координатах (u^1, \dots, u^k) , а Y^i — компоненты того же векторного поля в координатах (v^1, \dots, v^k) . Проверьте, что $Y^j = \sum_i \partial v^j / \partial u^i X^i$, т.е. $Y = JX$, где J — матрица Якоби замены координат.

Наша ближайшая цель — научиться дифференцировать векторные поля на поверхности. Для простоты изложения мы вновь ограничимся случаем гиперповерхностей, т.е. $k = n - 1$. Пусть поверхность задана параметрически в виде $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Чтобы продифференцировать поле X записанное в виде $X = \sum_i X^i \partial_{u^i}$, нужно, очевидно, научиться дифференцировать векторы канонического репера. Напомним, что вектор ∂_{u^i} канонического репера в точке P — это производная $\partial r / \partial u^i$ радиус вектора поверхности по координате u^i в точке P . Поэтому производная вектора ∂_{u^i} по координате

u^j — это вектор, равный второй производной радиус вектора:

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \partial_{u^i} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Для краткости, мы будем обозначать дифференцирование по u^i нижним индексом i , например, $\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = r_{ij}$, а $\partial_{u^i} = r_i$. Как и любой другой вектор в точке P , вектор r_{ij} раскладывается по базису объемлющего пространства \mathbb{R}^n , составленного из векторов r_i канонического репера и вектора N нормали к гиперповерхности. Соответствующие формулы и называются *дериационными формулами Гаусса–Вейнгартена*. Выведем их.

Разложим вектор r_{ij} по векторам базиса r_1, \dots, r_{n-1}, N :

$$r_{ij} = \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} r_{\alpha} + q_{ij} N, \quad (*)$$

где через Γ_{ij}^{α} и q_{ij} обозначены соответствующие коэффициенты. Умножив равенство (*) скалярно на N , найдем, что $q_{ij} = \langle r_{ij}, N \rangle$, т.е. матрица q_{ij} — это ни что иное, как матрица второй квадратичной формы поверхности.

Найдем теперь коэффициенты Γ_{ij}^{α} . Прежде всего заметим, что так как r_{ij} и q_{ij} симметричны по i и j , то из равенства (*) вытекает, что то же верно и для любых Γ_{ij}^k , т.е. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Далее, умножим равенство (*) скалярно на вектор r_k . Получим:

$$\langle r_{ij}, r_k \rangle = \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k},$$

где $g_{\alpha k} = \langle r_{\alpha}, r_k \rangle$ — матрица первой квадратичной формы поверхности. С другой стороны, очевидно,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{\partial \langle r_i, r_j \rangle}{\partial u^k} = \langle r_{ik}, r_j \rangle + \langle r_i, r_{jk} \rangle = \sum_{\alpha} \Gamma_{ik}^{\alpha} g_{\alpha j} + \sum_{\alpha} \Gamma_{jk}^{\alpha} g_{\alpha i}.$$

Последнее равенство справедливо для любого набора индексов i, j и k . Поэтому можно записать систему из трех таких уравнений, добавив к нему еще два, получающихся циклической перестановкой индексов. В итоге получим систему следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} &= \sum_{\alpha} \Gamma_{ik}^{\alpha} g_{\alpha j} + \sum_{\alpha} \Gamma_{jk}^{\alpha} g_{\alpha i}, \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} &= \sum_{\alpha} \Gamma_{ji}^{\alpha} g_{\alpha k} + \sum_{\alpha} \Gamma_{ki}^{\alpha} g_{\alpha j}, \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} &= \sum_{\alpha} \Gamma_{kj}^{\alpha} g_{\alpha i} + \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k}. \end{aligned}$$

Теперь вычтем первое уравнение из суммы двух последних. Воспользовавшись симметрией Γ_{ij}^k , получим:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 2 \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} g_{\alpha k}.$$

Итак, мы записали систему линейных уравнений на неизвестные Γ_{ij}^k с матрицей $g_{\alpha k}$ первой квадратичной формы (индексы i и j — произвольные, но фиксированные). Эта система, очевидно, всегда имеет единственное решение, которое легко записать в терминах матрицы, обратной к матрице (g_{ij}) . Эту матрицу в дифференциальной геометрии обычно обозначают через g^{ij} . Тогда ответ записывается в виде:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(g^{k\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{\alpha}} \right) \right)$$

Определение. Набор чисел Γ_{ij}^k , заданный только что выписанными формулами, называется *символами Кристоффеля поверхности M в точке P* в системе координат (u^1, \dots, u^{n-1}) .

К дериационным формулам также, обычно, относят выражения для производных нормального векторного поля N к поверхности. Получим их. Прежде всего, так как поле N по определению имеет единичную длину, его производная N_i вдоль координаты u^i перпендикулярна исходному вектору N . Поэтому вектор N_i принадлежит касательной плоскости и может быть разложен по векторам канонического базиса. Запишем это разложение: $N_i = \sum_j b_i^j \partial_{u^j}$, где b_i^j — некоторые числа. Умножив это выражение скалярно на ∂_{u^k} , получим:

$$\langle N_i, \partial_{u^k} \rangle = \sum_j b_i^j \langle \partial_{u^j}, \partial_{u^k} \rangle = \sum_j b_i^j g_{jk},$$

где, как обычно, через g_{jk} обозначены коэффициенты первой квадратичной формы. Чтобы вычислить скалярное произведение в левой части последнего равенства, заметим, что $\langle N, \partial_{u^k} \rangle = 0$, поэтому

$$0 = \frac{\partial \langle N, \partial_{u^k} \rangle}{\partial u^i} = \langle N_i, \partial_{u^k} \rangle + \langle N, r_{ki} \rangle,$$

где через r_{ki} обозначена, как и выше, вторая производная радиус вектора поверхности. Однако, $\langle N, r_{ki} \rangle = q_{ki}$, где q_{ki} — элемент второй квадратичной формы поверхности. Поэтому, получаем следующие линейные уравнения на коэффициенты b_i^j (индекс i фиксирован):

$$-q_{ki} = \sum_j b_i^j g_{jk}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Матрица этой линейной системы совпадает с матрицей первой квадратичной формы поверхности, поэтому система имеет единственное решение, которое можно легко записать через обратную к матрице (g_{ij}) матрицу (g^{ij}) так:

$$b_i^j = - \sum_k q_{ik} g^{kj}.$$

Таким образом, коэффициенты b_i^j выражаются через первую и вторую квадратичные формы поверхности.

Итак, нами доказано следующее предложение.

Предложение 5.1 Для вторых производных радиус вектора неособой поверхности M имеют место следующие **деривационные формулы Гаусса–Вейнгартена**:

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \partial u^i = r_{ij} = \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} r_{\alpha} + q_{ij} N,$$

где q_{ij} — матрица второй квадратичной формы поверхности, а Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля поверхности M . Символы Кристоффеля вычисляются в терминах первой квадратичной формы поверхности и ее первых производных так:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(g^{k\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^{\alpha}} \right) \right).$$

Производные нормального векторного поля N вдоль на поверхности имеют вид

$$\frac{\partial N}{\partial u^i} = \sum_{\alpha} b_i^{\alpha} \partial u^{\alpha},$$

где коэффициенты b_i^{α} выражаются через первую и вторую квадратичные формы поверхности так:

$$b_i^{\alpha} = - \sum_k q_{ik} g^{k\alpha}.$$

Упражнение 5.2. Выяснить, как преобразуются символы Кристоффеля при замене параметризации поверхности.

Упражнение 5.3. Вычислить символы Кристоффеля для плоскости, цилиндра, сферы, двумерной поверхности вращения.

Коэффициенты деривационных формул связаны соотношениями, которые получаются при вычислении двумя разными способами третьих смешанных производных радиус вектора и вторых смешанных производных вектора нормали. Одно из них было впервые записано Гауссом, а остальные

— Петерсоном, Майнарди и Кодацци. Эти дифференциальные уравнения в частных производных на компоненты квадратичных форм поверхности носят сейчас в литературе название уравнений Петерсона–Кодацци. Именно они, как мы уже отмечали, образуют набор необходимых и достаточных условий интегрируемости системы, к которой сводится задача о восстановлении поверхности по первой и второй квадратичным формам. Однако эти уравнения и эта задача лежат за рамками нашего курса. Нас будет интересовать лишь уравнение Гаусса, записанное им для случая двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 . Из этого уравнения Гаусс получил свою знаменитую *Theorema egregium* — “Блистательную теорему”.

5.2 Теорема Гаусса

Так называемая “Блистательная Теорема Гаусса” состоит в следующем.

Теорема 5.1 (С. Ф. Гаусс) *Гауссова кривизна двумерной поверхности не меняется при изометрии. Другими словами, двумерные изометричные поверхности имеют в соответствующих точках одинаковую гауссову кривизну.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы получить из дериивационных формул уравнения Гаусса, приравняв коэффициенты в выражениях для третьих производных радиус вектора поверхности. Уравнения Гаусса позволяют выразить гауссову кривизну поверхности через элементы ее первой квадратичной формы и их производные, откуда и вытекает утверждение теоремы. Действительно, напомним, что на изометричных поверхностях можно выбрать такие координаты, что их первые квадратичные формы будут просто совпадать, т.е. будут совпадать элементы соответствующих матриц. Поэтому, в таких координатах, будут совпадать и соответствующие производные первых квадратичных форм. Таким образом, в этих координатах совпадают все функции, входящие в выражения для гауссовой кривизны, а значит совпадают и сами гауссовы кривизны.

Итак, пусть M — регулярная гиперповерхность, заданная параметрически в виде $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, и пусть (u^1, \dots, u^{n-1}) — координаты на M . Как и выше, мы будем обозначать нижним индексом i производную вектора по координате u^i . В этих обозначениях, напомним, вектор канонического репера ∂_{u^i} это просто вектор r_i . Тогда, сохраняя обозначения предыдущего

пункта и пользуясь предложением 5.1, найдем, что

$$\begin{aligned}
r_{ij} &= (r_{ii})_j = \left(\sum_k \Gamma_{ii}^k r_k + q_{ii} N \right)_j = \\
&= \sum_k \frac{\partial \Gamma_{ii}^k}{\partial u^j} r_k + \sum_k \Gamma_{ii}^k r_{kj} + \frac{\partial q_{ii}}{\partial u^j} N + q_{ii} \frac{\partial N}{\partial u^j} = \\
&= \sum_k \frac{\partial \Gamma_{ii}^k}{\partial u^j} r_k + \sum_k \Gamma_{ii}^k \left(\sum_\alpha \Gamma_{kj}^\alpha r_\alpha + q_{kj} N \right) + \frac{\partial q_{ii}}{\partial u^j} N + q_{ii} \sum_\alpha b_j^\alpha r_\alpha = \\
&= \sum_\beta \left(\frac{\partial \Gamma_{ii}^\beta}{\partial u^j} + \sum_k \Gamma_{ii}^k \Gamma_{kj}^\beta + q_{ii} b_j^\beta \right) r_\beta + \left(\sum_k \Gamma_{ii}^k q_{kj} + \frac{\partial q_{ii}}{\partial u^j} \right) N.
\end{aligned}$$

С другой стороны, аналогично

$$\begin{aligned}
r_{ij} &= (r_{ij})_i = \\
&= \sum_\beta \left(\frac{\partial \Gamma_{ij}^\beta}{\partial u^i} + \sum_k \Gamma_{ij}^k \Gamma_{ki}^\beta + q_{ij} b_i^\beta \right) r_\beta + \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k q_{ki} + \frac{\partial q_{ij}}{\partial u^i} \right) N.
\end{aligned}$$

Очевидно, $r_{ij} = r_{ji}$. Приравняв коэффициенты при r_β и воспользовавшись выражением для b_i^β , получим для любого набора индексов i, j и β следующее равенство:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_{ii}^\beta}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^\beta}{\partial u^i} + \sum_k \left(\Gamma_{ii}^k \Gamma_{kj}^\beta - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{ki}^\beta \right) &= q_{ij} b_i^\beta - q_{ii} b_j^\beta \\
&= \sum_\alpha (q_{ii} q_{j\alpha} - q_{ij} q_{i\alpha}) g^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

Умножим последнее равенство на $g_{\beta j}$ и просуммируем по всем β . Поскольку $\sum_\beta g^{\alpha\beta} g_{\beta j} = \delta_\alpha^j$ — символ Кронекера, получим в итоге *уравнения Гаусса*:

$$\sum_\beta g_{\beta j} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{ii}^\beta}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^\beta}{\partial u^i} + \sum_k \left(\Gamma_{ii}^k \Gamma_{kj}^\beta - \Gamma_{ij}^k \Gamma_{ki}^\beta \right) \right\} = q_{ii} q_{jj} - q_{ij} q_{ij}.$$

До этого момента, заметим, мы нигде не пользовались тем, что поверхность M двумерна.

Теперь запишем уравнение Гаусса для двумерной поверхности, положив $i = 1$ и $j = 2$. Получим:

$$\sum_\beta g_{\beta 2} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^\beta}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^\beta}{\partial u^1} + \sum_k \left(\Gamma_{11}^k \Gamma_{k2}^\beta - \Gamma_{12}^k \Gamma_{k1}^\beta \right) \right\} = \det Q,$$

где Q — матрица второй квадратичной формы. Однако, в силу утверждения 4.2, гауссова кривизна K равна отношению определителей первой

и второй квадратичных форм. Из этого факта и уравнения Гаусса вытекает, что гауссова кривизна выражается только через элементы первой квадратичной формы. Доказательство закончено.

Приведем пример того, как работает теорема 5.1.

Следствие 5.1 *Никакую часть стандартной двумерной сферы нельзя изометрично отобразить на плоскость.*

Доказательство. Действительно, в противном случае их гауссовы кривизны совпадали бы. Однако, гауссова кривизна сферы радиуса R равна $1/R^2$, а гауссова кривизна плоскости равна нулю. Доказательство закончено.

Упражнение 5.4. Выведите оставшиеся уравнения Петерсона–Кодацци.

5.3 Ковариантная производная касательного векторного поля

Запишем теперь производную произвольного касательного векторного поля X вдоль координаты u^i . Как и выше, запишем векторное поле X в виде линейной комбинации координатных векторных полей: $X = \sum_{\alpha} X^{\alpha} \partial_{u^{\alpha}}$. Тогда, в силу предложения 5.1, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u^i} &= \sum_{\alpha} \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial u^i} \partial_{u^{\alpha}} + \sum_{\beta} X^{\beta} \frac{\partial}{\partial u^i} \partial_{u^{\beta}} = \\ &= \sum_{\alpha} \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial u^i} \partial_{u^{\alpha}} + \sum_{\beta} \left(X^{\beta} \left(\sum_{\alpha} \Gamma_{i\beta}^{\alpha} \partial_{u^{\alpha}} + q_{i\beta} N \right) \right) = \\ &= \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial u^i} + \sum_{\beta} \Gamma_{i\beta}^{\alpha} X^{\beta} \right) \partial_{u^{\alpha}} + \left(\sum_{\beta} q_{i\beta} X^{\beta} \right) N. \end{aligned}$$

Мы видим, что производная касательного векторного поля X по координате u^i имеет, вообще говоря, нормальную составляющую, и поэтому не является касательным векторным полем. Естественно определить на касательных векторных полях другое дифференцирование, такое, чтобы его результат был бы все-таки касательным векторным полем.

Определение. *Ковариантной производной $\nabla_i X$ касательного векторного поля X по координате u^i называется касательное векторное поле, полученное в каждой точке из вектора $\frac{\partial X}{\partial u^i}$ ортогональной проекцией на касательную плоскость:*

$$\nabla_i X = \left(\frac{\partial X}{\partial u^i} \right)^T,$$

где через $(\cdot)^T$ обозначена операция ортогонального проектирования на касательную плоскость.

Непосредственно из определения получаем следующее выражение для координат векторного поля $\nabla_i X$.

Предложение 5.2 Пусть в окрестности точки P регулярной гиперповерхности M задано касательное векторное поле X , имеющее в координатах (u^1, \dots, u^{n-1}) вид $X = \sum_{\alpha} X^{\alpha} \partial_{u^{\alpha}}$. Тогда координаты касательного векторного поля $\nabla_i X$ относительно (u^1, \dots, u^{n-1}) могут быть вычислены так:

$$(\nabla_i X)^j = \frac{\partial X^j}{\partial u^i} + \sum_{\alpha} \Gamma_{i\alpha}^j X^{\alpha}.$$

Здесь Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля поверхности M .

Замечание. Операция ковариантного дифференцирования определяется только первой квадратичной формой поверхности.

В следующем упражнении собраны элементарные свойства операции ковариантного дифференцирования, которые легко выводятся из определения.

Упражнение 5.5. Показать, что операция ковариантного дифференцирования обладает следующими свойствами.

- Линейность: $\nabla_i(\alpha X + \beta Y) = \alpha \nabla_i X + \beta \nabla_i Y$, где X и Y — произвольные касательные векторные поля, а α и β — произвольные числа.
- Правило Лейбница: $\nabla_i(fX) = (\partial f / \partial u^i)X + f \nabla_i X$, где X — произвольное касательное векторное поле, и f — произвольная гладкая функция на поверхности.

Замечание. В терминах ковариантного дифференцирования, символы Кристоффеля Γ_{ij}^k имеют следующий прозрачный геометрический смысл: это коэффициенты разложения по векторам канонического репера ковариантной производной j -го координатного поля по i -й координате:

$$\nabla_i \partial_{u^j} = \sum_{\alpha} \Gamma_{ij}^{\alpha} \partial_{u^{\alpha}}$$

Замечание. Удобно распространить операцию ковариантного дифференцирования на функции на поверхности, положив по определению $\nabla_i f = \partial f / \partial u^i$ для произвольной функции f .

Нам также будет важно установить следующее важное правило дифференцирования скалярного произведения векторных полей.

Предложение 5.3 Ковариантное дифференцирование сохраняет первую квадратичную форму поверхности в следующем смысле: если X и Y — произвольные касательные векторные поля на поверхности, то

$$\nabla_i \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_i X, Y \rangle + \langle X, \nabla_i Y \rangle.$$

Доказательство. Этот факт может быть доказан двумя способами. Первое доказательство получается прямым подсчетом. Оно довольно громоздко и приведено в добавлениях. Второе доказательство не требует громоздких вычислений. Воспользуемся определением ковариантной производной. Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial X}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial X}{\partial u^i}\right)^T + \left(\frac{\partial X}{\partial u^i}\right)^N = \nabla_i X + \left(\frac{\partial X}{\partial u^i}\right)^N,$$

где через $(\cdot)^N$ обозначена ортогональная проекция на нормаль к поверхности. Очевидно, для любого касательного поля Y ,

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u^i}, Y \right\rangle = \langle \nabla_i X, Y \rangle,$$

так как нормальный вектор $(Z)^N$ перпендикулярен касательному вектору Y для любого исходного вектора Z . Итак,

$$\nabla_i \langle X, Y \rangle = \frac{\partial \langle X, Y \rangle}{\partial u^i} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u^i}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{\partial Y}{\partial u^i} \right\rangle = \langle \nabla_i X, Y \rangle + \langle X, \nabla_i Y \rangle,$$

что и требовалось.

Замечание. Предложение 5.3 иногда называют предложением о ковариантном постоянстве метрики.

Как и в случае обычного дифференцирования, естественно определить ковариантную производную по направлению произвольного касательного векторного поля. А именно, если X и Y — касательные векторные поля, то определим *ковариантную производную* $\nabla_X Y$ поля Y вдоль поля X так:

$$\nabla_X Y = \sum_{\alpha} X^{\alpha} \nabla_{\alpha} Y.$$

Непосредственно из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение 5.1 Пусть X и Y — касательные векторные поля на регулярной гиперповерхности M с координатами (u^1, \dots, u^{n-1}) . Тогда $\nabla_X Y$ — это векторное поле, i -ая координата которого имеет вид

$$(\nabla_X Y)^i = \sum_{\alpha} \frac{\partial Y^i}{\partial u^{\alpha}} X^{\alpha} + \sum_{k\alpha} \Gamma_{\alpha k}^i X^{\alpha} Y^k$$

Доказательство. Доказательство получается прямым вычислением. Действительно, в силу определений и предложения 5.2 имеем:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_{\alpha} X^{\alpha} \nabla_{\alpha} Y = \sum_{\alpha} \left(X^{\alpha} \sum_{\beta} (\nabla_{\alpha} Y)^{\beta} r_{\beta} \right) = \\ &= \sum_{\alpha} X^{\alpha} \left(\sum_{\beta} \left(\frac{\partial Y^{\beta}}{\partial u^{\alpha}} + \sum_k \Gamma_{\alpha k}^{\beta} Y^k \right) r_{\beta} \right) = \\ &= \sum_{\beta} \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial Y^{\beta}}{\partial u^{\alpha}} X^{\alpha} + \sum_{k\alpha} \Gamma_{\alpha k}^{\beta} X^{\alpha} Y^k \right) r_{\beta},\end{aligned}$$

что и требовалось.

Из утверждения 5.1 и предложения 5.3 немедленно вытекает следующий факт.

Следствие 5.2 Пусть на поверхности M задано три касательных векторных поля X_1 , X_2 и Y . Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\nabla_Y \langle X_1, X_2 \rangle = \langle \nabla_Y X_1, X_2 \rangle + \langle X_1, \nabla_Y X_2 \rangle.$$

В дальнейшем нам также понадобятся следующие обозначения. Пусть X — векторное поле на поверхности M , и γ — регулярная кривая на M , параметризованная параметром t . Рассмотрим ограничение $X(t)$ векторного поля X на кривую γ . Обозначим через $\nabla_t X$ ковариантную производную поля X вдоль касательного к кривой поля $\dot{\gamma}$. Геометрический смысл этой операции ясен: мы дифференцируем поле $X(t)$ по t и результат дифференцирования ортогонально проектируем на M . Если (u^1, \dots, u^{n-1}) — регулярные координаты на M , то поле $\nabla_t X$ имеет вид:

$$(\nabla_t X)^k = \sum_i \frac{\partial X^k}{\partial u^i} \dot{u}^i + \sum_{ip} \Gamma_{ip}^k \dot{u}^i X^p.$$

Дополнительный материал к лекции 5

Добавление 5.1. О многомерных обобщениях теоремы Гаусса. Теорема Гаусса имеет ряд нетривиальных обобщений на случаи поверхностей произвольной размерности. Например, оказывается аналогично можно доказать, что все четные элементарные симметричные многочлены от главных кривизн, т.е. выражения вида

$$\sum_{i_1 < \dots < i_{2p}} k_{i_1} \cdots k_{i_{2p}},$$

где $2 \leq 2p \leq n$ определяются первой квадратичной формой гиперповерхности в \mathbb{R}^n .

Добавление 5.2. Другое доказательство предложения 5.3. Пусть (u^1, \dots, u^{n-1}) — координаты на поверхности. В силу предложения 5.2, имеем:

$$\langle \nabla_i X, Y \rangle = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial u^i} Y^\beta + \sum_{\gamma} \Gamma_{i\gamma}^\alpha X^\gamma Y^\beta \right).$$

Точно так же

$$\langle X, \nabla_i Y \rangle = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \left(X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial u^i} + X^\alpha \sum_{\gamma} \Gamma_{i\gamma}^\beta Y^\gamma \right).$$

Складывая эти два равенства, и пользуясь определением символов Кристоффеля получаем:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_i X, Y \rangle + \langle X, \nabla_i Y \rangle &= \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial u^i} Y^\beta + X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial u^i} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \left\{ g_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \left(\sum_k g^{\alpha k} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma k}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{i\gamma}}{\partial u^k} \right) X^\gamma Y^\beta + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{\gamma} \left(\sum_k g^{\beta k} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma k}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{i\gamma}}{\partial u^k} \right) \right) X^\alpha Y^\gamma \right\}. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что после преобразований типа $\sum_{\alpha} g_{k\alpha} g^{\alpha l} = \delta_k^l$ в выражениях для символов Кристоффеля в последней формуле четыре из шести слагаемых сокращаются, а два оставшихся сворачиваются. В итоге —

$$\langle \nabla_i X, Y \rangle + \langle X, \nabla_i Y \rangle = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial u^i} Y^\beta + X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial u^i} \right) + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^i} X^\alpha Y^\beta.$$

Последнее выражение, очевидно, совпадает с ковариантной производной скалярного произведения векторных полей X и Y :

$$\begin{aligned} \nabla_i \langle X, Y \rangle &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \right) \\ &= \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^i} X^\alpha Y^\beta + g_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial u^i} Y^\beta + g_{\alpha\beta} X^\alpha \frac{\partial Y^\beta}{\partial u^i} \right). \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

6 Геодезические на поверхностях

Материал данного раздела использует разработанную выше технику для определения важного понятия геодезической линии на поверхности. Обычно в курсах дифференциальной геометрии понятие геодезической вводится позднее, сразу для общего случая римановых многообразий. Нам, однако, кажется что знакомство с геодезическими на обычных поверхностях упрощает понимание сути дела, делая предмет изучения более наглядным.

6.1 Определение и простейшие свойства геодезических

Воспользуемся теперь разработанной выше техникой для вычисления вектора ускорения произвольной регулярной кривой на поверхности.

Пусть M — регулярная гиперповерхность заданная параметрически в виде $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, и пусть γ — регулярная кривая на M , параметризованная параметром s . Фиксируем на M какие-нибудь координаты (u^1, \dots, u^{n-1}) , и пусть $u^i(s)$, $i = 1, \dots, n$, — координатные функции кривой γ . Обозначим через $x^k(u^1, \dots, u^{n-1})$ координатные функции поверхности M . Как и выше, будем обозначать дифференцирование по u^i нижним индексом i , и точкой — дифференцирование по параметру s . Тогда вектор скорости $\dot{\gamma}$ кривой γ как элемент касательного пространства к поверхности имеет вид:

$$\dot{\gamma} = \sum_{\alpha} r_{\alpha} \dot{u}^{\alpha}.$$

Продифференцируем еще раз. Получим следующее выражение для вектора ускорения $\ddot{\gamma}$:

$$\frac{d}{ds} \dot{\gamma} = \sum_{\alpha} \frac{d}{ds} (r_{\alpha} \dot{u}^{\alpha}) = \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta} r_{\alpha\beta} \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta} + r_{\alpha} \ddot{u}^{\alpha} \right).$$

Перепишем последнее выражение, воспользовавшись деривационными формулами, см. предложение 5.1, и затем переменим порядок суммирования. Получим:

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} &= \sum_{\alpha} \left(\sum_{\beta} \left(\sum_k \Gamma_{\alpha\beta}^k r_k + q_{\alpha\beta} N \right) \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta} + r_{\alpha} \ddot{u}^{\alpha} \right) = \\ &= \sum_k \left(\sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^k \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta} + \ddot{u}^k \right) r_k + \left(\sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta} \right) N. \end{aligned}$$

Посмотрим повнимательнее на коэффициент при векторе r_k и выполним ряд формальных преобразований. Представив производную по параметру s в виде

$$\frac{d}{ds} = \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} \dot{u}^{\alpha},$$

можно переписать вторую производную \ddot{u}^k в виде

$$\ddot{u}^k = \sum_{\alpha} \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial u^{\alpha}} \dot{u}^{\alpha},$$

поэтому, в силу утверждения 5.1, выражение для вектора ускорения окончательно переписывается в виде

$$\ddot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} + \mathfrak{q}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})N,$$

где через \mathfrak{q} обозначена вторая квадратичная форма поверхности.

Замечание. Выражение $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ в данном контексте имеет лишь следующий формальный смысл: это касательный вектор к поверхности, определенный в точках кривой, компоненты которого в каноническом базисе $\{r_k\}$ имеют вид

$$\sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^k \dot{u}^{\alpha} \dot{u}^{\beta} + \ddot{u}^k.$$

Отметим, что так как векторное поле $\dot{\gamma}$ определено, вообще говоря, лишь в точках кривой γ , операция $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ не определена. На самом деле, можно показать, что поле $\dot{\gamma}$ можно продолжить на некоторую окрестность кривой γ в M , и что результат ковариантного дифференцирования вдоль $\dot{\gamma}$ в точках кривой не зависит от такого продолжения. Но мы не будем сейчас тратить на это время (в дальнейшем мы сделаем это в существенно более общих предположениях).

Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 6.1 *Вектор ускорения кривой γ на гиперповерхности в каждой точке раскладывается в сумму касательного вектора $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ и нормального вектора $\mathfrak{q}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$.*

Пусть теперь параметр s пропорционален натуральному параметру. Напомним, что в этом случае вектор ускорения кривой перпендикулярен ее вектору скорости, см. предложение 1.4. Таким образом, если γ — произвольная регулярная кривая на поверхности, параметризованная пропорционально натуральному параметру, то в каждой точке из γ определено два перпендикулярных к кривой вектора: первый — это вектор $N(P)$ нормали к поверхности, и второй — это вектор $\ddot{\gamma}(P)$ ускорения кривой в выбранной параметризации. Если кривая бирегулярна, т.е. вектор ускорения отличен от нуля, то определен сонаправленный с ним единичный вектор главной нормали к кривой в точке P . Вообще говоря, вектор ускорения $\ddot{\gamma}(P)$ и вектор $N(P)$ не обязаны быть коллинеарны. Кривые для которых это так обладают многими замечательными свойствами и выделяются в отдельный класс.

Определение. Параметризованная пропорционально натуральному параметру кривая γ на поверхности M называется *геодезической*, если в каждой точке P из γ вектор ускорения $\ddot{\gamma}(P)$ в натуральной параметризации коллинеарен вектору нормали $N(P)$ к поверхности.

Имеет место следующее описание геодезических, которое может быть принято за их эквивалентное определение.

Утверждение 6.2 *Регулярная кривая γ на поверхности M является геодезической, если и только если в каждой точке из γ имеет место равенство*

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Если на поверхности фиксированы координаты (u^1, \dots, u^{n-1}) , то последнее равенство эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\ddot{u}^k + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^k \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Доказательство. Из утверждения 6.1 немедленно вытекает, что координатные функции геодезической удовлетворяют соотношению $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$. Обратно, если координатные функции кривой γ с параметром t удовлетворяют этому уравнению, то вектор ускорения $\ddot{\gamma}$ (относительно параметра t), очевидно, коллинеарен нормали к поверхности. Осталось проверить, что параметр t пропорционален натуральному. Действительно, воспользовавшись следствием 5.2, имеем

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \nabla_{\dot{\gamma}} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2 \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0,$$

что и требовалось.

Определение. Уравнения из утверждения 6.2 называются *уравнениями геодезических на гиперповерхности M* .

Итак, кривая γ является геодезической на поверхности M если и только если ее координатные функции удовлетворяют уравнениям геодезических.

Упражнение 6.1. Показать, что если $\gamma(t)$ — геодезическая, то для произвольного числа $a \neq 0$ кривая $\gamma(at)$ — тоже геодезическая в своей области определения.

Упражнение 6.2. Какие еще замены параметризации $t = t(\tau)$ сохраняют свойство кривой $\gamma(t)$ быть решением уравнений из утверждения 6.2?

Заметим, что уравнения геодезической представляют собой систему дифференциальных уравнений второго порядка. Поэтому для них справедлива стандартная теорема существования и единственности решения задачи Коши. Из этой теоремы немедленно вытекает теорема существования и единственности геодезической на поверхности.

Следствие 6.1 Пусть M — регулярная гиперповерхность, P — ее произвольная точка, и $v \in T_P M$ — произвольный касательный вектор к M в точке P . Тогда на M существует геодезическая γ , выходящая из P и такая, что ее вектор скорости в точке P равен v . Более того, геодезическая γ единственна в том смысле, что любые две такие геодезические совпадают в пересечении областей определения.

Вернемся к выражению для вектора $\ddot{\gamma}$ ускорения произвольной натурально параметризованной кривой γ на поверхности. Напомним, что модуль вектора $\ddot{\gamma}$ называется кривизной кривой. Из утверждения 6.1 и теоремы Пифагора вытекает, что кривизна $k(P)$ натурально параметризованной кривой γ в произвольной точке P может быть вычислена так:

$$k(P) = \sqrt{\|\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}\|^2 + (\mathfrak{q}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}))^2}.$$

Поскольку вектор $\dot{\gamma}$ имеет единичную длину, то $\mathfrak{q}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ — это в точности кривизна $k_N(P)$ нормального сечения в направлении $\dot{\gamma}$, см. следствие 4.5. Величину $\|\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}\|$ обычно обозначают через $k_g(P)$ и называют геодезической кривизной кривой γ в точке P . Непосредственно из определений и утверждения 6.2 вытекает следующий результат.

Утверждение 6.3 Регулярная кривая γ на поверхности является геодезической если и только если ее геодезическая кривизна равна нулю в каждой точке.

В терминах геодезической и нормальной кривизны можно, как мы уже видели, вычислить кривизну регулярной кривой на поверхности (как кривой в объемлющем пространстве). А именно, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 6.4 Кривизна k регулярной кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, лежащей на поверхности M , может быть вычислена так:

$$k = \sqrt{k_g^2 + k_N^2},$$

где k_g — геодезическая кривизна кривой γ , а k_N — кривизна нормального сечения в направлении вектора $\dot{\gamma}$.

Замечание. Отметим, что мы, фактически, дали три эквивалентных определения геодезической:

- 1) кривая на поверхности, вектор ускорения которой, в натуральной параметризации, коллинеарен вектору нормали к поверхности,
- 2) кривая, удовлетворяющая уравнениям геодезической $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$,

3) кривая нулевой геодезической кривизны.

Отметим, что коэффициенты, входящие в уравнения геодезических — это символы Кристоффеля, которые, напомним, вычисляются в терминах первой квадратичной формы поверхности. Из сделанного наблюдения вытекает справедливость следующего полезного результата.

Утверждение 6.5 *Если $F: M_1 \rightarrow M_2$ — изометрия регулярных поверхностей, то F переводит геодезические в геодезические. Более формально, образ геодезической $\gamma_1 \subset M_1$ при изометрии F — это геодезическая на M_2 , и, обратно, кривая γ_2 является геодезической на M_2 , если и только если она является F -образом некоторой геодезической на M_1 .*

6.2 Примеры геодезических, теорема Клеро

В данном разделе мы приведем несколько простейших примеров геодезических, а также подробно изучим свойства геодезических на поверхностях вращения.

Пусть \mathbb{R}^2 — стандартная евклидова плоскость с декартовыми координатами (x, y) . Напомним, что метрика на \mathbb{R}^2 имеет вид $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Поэтому все символы Кристоффеля тождественно равны нулю, и уравнения геодезических принимают вид

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0.$$

Очевидно, их решения — это всевозможные прямые на плоскости и только они. Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 6.6 *Геодезические на стандартной евклидовой плоскости — это всевозможные прямые линии.*

Упражнение 6.3. Описать геодезические на следующих поверхностях:

- прямой цилиндр в \mathbb{R}^3 над плоской кривой;
- круговой конус, заданный в \mathbb{R}^3 уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Изучим геодезические на поверхности вращения, заданной в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 параметрически так:

$$x(\varphi, z) = f(z) \cos \varphi, \quad y(\varphi, z) = f(z) \sin \varphi, \quad z(\varphi, z) = z,$$

где $f(z)$ — строго положительная гладкая функция. Поскольку канонический репер имеет вид

$$\partial_\varphi = (-f(z) \sin \varphi, f(z) \cos \varphi, 0), \quad \partial_z = (f'(z) \cos \varphi, f'(z) \sin \varphi, 1),$$

первая квадратичная форма поверхности вращения записывается так:

$$ds^2 = (f(z))^2 d\varphi^2 + (1 + (f'(z))^2) dz^2.$$

Вектор нормали к поверхности вращения найдем как нормированное векторное произведение векторов канонического репера. Получим:

$$N = \frac{1}{1 + f'(z)^2} (\cos \varphi, \sin \varphi, -f'(z))$$

Выясним, какие из параллелей и меридианов (т.е. координатных линий $z = z_0$ и $\varphi = \varphi_0$ соответственно) являются геодезическими. Начнем с параллелей. Каждая из них представляет собой окружность, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси Oz . Вектор ускорения плоской окружности в точке $P = (\varphi, z_0)$ коллинеарен вектору $(\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$. Этот вектор, очевидно, коллинеарен вектору $N(P)$ нормали к поверхности, если и только если $f'(z_0) = 0$. Итак параллель $z = z_0$ является геодезической, если и только если функция $f(z)$ имеет в z_0 критическую точку.

Рассмотрим теперь меридиан $\varphi = \varphi_0$. Он тоже является плоской кривой, лежащей в плоскости, содержащей ось Oz и получающейся из координатной плоскости Oxz поворотом вокруг Oz на угол φ_0 . Пусть сначала $\varphi_0 = 0$. Тогда меридиан лежит в плоскости Oxz и задается в этой плоскости так: $x - f(z) = 0$. Поэтому вектор нормали к меридиану в этой плоскости может быть записан в виде $(1, -f'(z))$. Вернувшись обратно в \mathbb{R}^3 , получим вектор $(1, 0, -f'(z))$. Случай произвольного φ_0 получается из рассмотренного поворотом на угол φ вокруг оси Oz . Итого, вектор нормали к меридиану $\varphi = \varphi_0$ в точке $P = (\varphi_0, z)$ имеет вид $(\cos \varphi, \sin \varphi, -f'(z))$, т.е. коллинеарен вектору $N(P)$. Таким образом, любой меридиан является геодезической на поверхности вращения.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 6.7 Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность вращения графика положительной гладкой функции $f(z)$. Тогда каждый меридиан на M является геодезической. Среди параллелей геодезическими являются те и только те, которые соответствуют критическим точкам функции f .

Следствие 6.2 Геодезические на стандартной двумерной сфере — это большие круги и только они.

Доказательство. То что большие круги являются геодезическими вытекает из утверждения 6.7. То что других геодезических нет вытекает из следствия 6.1. Доказательство закончено.

Запишем теперь уравнения геодезических на поверхности вращения. Для этого удобно перепараметризовать ее, выбрав на графике функции f натуральный параметр. Будем считать, что эта кривая задана как плоская естественно параметризованная кривая в плоскости Oxz в виде $x = x(t)$, $z = z(t)$, где $x(t) \neq 0$. Тогда поверхность вращения параметризуется так:

$$x(\varphi, t) = x(t) \cos \varphi, \quad y(\varphi, t) = x(t) \sin \varphi, \quad z(\varphi, t) = z(t).$$

В этой параметризации канонический базис имеет вид

$$\partial_\varphi = (-x(t) \sin \varphi, x(t) \cos \varphi, 0), \quad \partial_t = (x'(t) \cos \varphi, x'(t) \sin \varphi, z'(t)),$$

поэтому первая квадратичная форма записывается так:

$$ds^2 = x(t)^2 d\varphi^2 + (x'(t)^2 + z'(t)^2) dt^2 = x(t)^2 \left(d\varphi^2 + \frac{dt^2}{x(t)^2} \right).$$

Перейдем к новому параметру $\tau = \tau(t)$, такому что $d\tau = dt/x(t)$. Окончательно, первая квадратичная форма поверхности вращения в параметрах (φ, τ) имеет вид:

$$ds^2 = \rho(\tau)(d\varphi^2 + d\tau^2),$$

где $\rho(\tau) = x(t(\tau))$. Отметим, что геометрический смысл функции $\rho(\tau)$ по-прежнему очень прост: это расстояние от точки (φ, τ) поверхности до оси вращения.

Чтобы записать уравнения геодезических на поверхности вращения, нам нужна матрица G первой квадратичной формы и обратная к ней матрица G^{-1} , которые могут быть записаны так:

$$G = \begin{pmatrix} \rho(\tau)^2 & 0 \\ 0 & \rho(\tau)^2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\rho(\tau)^2 & 0 \\ 0 & 1/\rho(\tau)^2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем символы Кристоффеля для поверхности вращения. Поскольку матрица G^{-1} диагональна, в выражении для каждого символа Кристоффеля будет ровно одно слагаемое. Положив $u^1 = \varphi$ и $u^2 = \tau$, обратив внимание на то, что первая квадратичная форма не зависит от u^1 , получаем:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = \frac{2\rho(\tau)\rho'(\tau)}{2\rho(\tau)^2} = \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)} = \Gamma_{21}^1, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = 0. \end{aligned}$$

Точно так же, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = \frac{-2\rho(\tau)\rho'(\tau)}{2\rho(\tau)^2} = \frac{-\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = 0 = \Gamma_{21}^2, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \right) = \frac{2\rho(\tau)\rho'(\tau)}{2\rho(\tau)^2} = \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}. \end{aligned}$$

В итоге, уравнения геодезических имеют вид:

$$\begin{cases} 0 = \ddot{\varphi} + 2\frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}\dot{\varphi}\dot{\tau}, \\ 0 = \ddot{\tau} + \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}(\dot{\tau}^2 - \dot{\varphi}^2). \end{cases}$$

Пусть $\gamma(s) = (\varphi(s), \tau(s))$ — решение уравнения геодезических. Вычислим угол α между геодезической и меридианом (φ_0, τ) , с которым геодезическая γ пересекается в точке $\varphi(s_0) = \varphi_0$, $\tau_0 = \tau(s_0)$. Касательный вектор к геодезической имеет вид $\dot{\gamma} = (\dot{\varphi}, \dot{\tau})$, а касательный вектор к меридиану — $(0, 1)$ (мы обозначаем точкой производную по параметру геодезической s , а штрихом — производную по τ). Поэтому,

$$\cos \alpha = \frac{\dot{\tau}\rho(\tau)^2}{\sqrt{\rho(\tau)^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2)}\sqrt{\rho(\tau)^2}} = \frac{\dot{\tau}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2}},$$

и, соответственно,

$$\sin \alpha = \frac{\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2}},$$

(мы пользуемся предположением, что $\rho(\tau) > 0$). Рассмотрим на геодезической $\gamma(s)$ функцию $c(s) = \rho(\tau) \sin \alpha$, и продифференцируем ее по параметру s . Получим:

$$\dot{c}(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\rho(\tau)\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2}} \right) = \frac{(\rho'\dot{\tau} + \rho\ddot{\varphi})(\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2) - \rho\dot{\varphi}(\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \dot{\tau}\ddot{\tau})}{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\tau}^2)^{3/2}}$$

Перепишем числитель последнего выражения в виде

$$\rho\dot{\tau}^2 \left(\ddot{\varphi} + 2\frac{\rho'}{\rho}\dot{\varphi}\dot{\tau} \right) - \rho\dot{\varphi}\dot{\tau} \left(\ddot{\tau} + \frac{\rho'}{\rho}(\dot{\tau}^2 - \dot{\varphi}^2) \right).$$

Так как выражения в больших скобках равны нулю в силу уравнений геодезических, заключаем, что $c(s) = \text{const}$ вдоль произвольной геодезической. Этот факт носит название теоремы Клеро.

Теорема 6.1 (Клеро) Пусть $\gamma(s)$ — произвольная геодезическая на поверхности, полученной вращением плоской регулярной кривой вокруг прямой, лежащей в той же плоскости, причем ось вращения и кривая не пересекаются. Тогда произведение $c(s)$ расстояния от оси вращения до точки $\gamma(s)$ на синус угла между $\gamma(s)$ и соответствующим меридианом есть величина постоянная вдоль γ :

$$c(s) = \rho(\tau(s)) \sin \alpha(s) = \text{const}$$

С помощью теоремы Клеро можно решить, например, следующую задачу.

Упражнение 6.4. Описать все поверхности вращения, на которых имеются замкнутые геодезические.

Задачи к лекции 6

Задача 6.1. Пусть $F: M \rightarrow M$ некоторая изометрия, переводящая регулярную поверхность M в себя, и регулярная кривая $\gamma \subset M$ совпадает с множеством неподвижных точек изометрии F , т.е. $\gamma = \{x \in M | F(x) = x\}$. Докажите, кривая γ — геодезическая на M .

Задача 6.2. Воспользовавшись предыдущей задачей, описать геодезические на стандартной плоскости и стандартной сфере.

Задача 6.3. Пусть γ — регулярная кривая на регулярной поверхности M^2 в \mathbb{R}^3 , и P — произвольная точка кривой γ . Пусть γ_π — образ кривой γ при ортогональной проекции на касательную плоскость $T_P M$. Показать, что геодезическая кривизна кривой γ , вычисленная в точке P , совпадает с кривизной плоской кривой γ_π в той же точке.

Задача 6.4. Обобщить результат предыдущей задачи на случай гиперповерхности в \mathbb{R}^n .

Задача 6.5. Будем говорить, что регулярные поверхности M_1 и M_2 *касаются вдоль кривой* γ , если $\gamma \subset M_i$, $i = 1, 2$, и в каждой точке $P \in \gamma$ касательные плоскости $T_P M_1$ и $T_P M_2$ совпадают. Показать, что если регулярные поверхности касаются вдоль некоторой кривой γ , являющейся геодезической на одной из поверхностей, то γ — геодезическая и на второй поверхности.

Задача 6.6. Показать, что если поверхность M содержит прямую ℓ , то эта прямая (в подходящей параметризации) — геодезическая на M .

Дополнительный материал к лекции 6

Добавление 6.1. Экстремальные свойства геодезических. Пусть M — регулярная поверхность. Рассмотрим на M произвольную регулярную кривую $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow M$, и обозначим через $P = \gamma(t_1)$ и $Q = \gamma(t_2)$ ее концевые точки. Далее, пусть G — некоторое подмножество плоскости \mathbb{R}^2 с координатами (τ, t) , ограниченное прямыми $\tau = \pm\tau_0$ и двумя кривыми $t = t_1(\tau)$ и $t = t_2(\tau)$, где $t_1(\tau) < t_2(\tau)$ для любого $\tau \in [-\tau_0, \tau_0]$, и $t_1(0) = t_1$, а $t_2(0) = t_2$, см. рис. 15. Гладкое отображение Φ области G в поверхность M называется *вариацией кривой* γ , если $\Phi(0, t) = \gamma(t)$. Кривые $p(\tau) = \Phi(\tau, t_1(\tau))$ и $q(\tau) = \Phi(\tau, t_2(\tau))$, по которым движутся точки $P = \Phi(0, t_1(0)) = p(0)$ и $Q = \Phi(0, t_2(0)) = q(0)$, называются *концевыми кривыми*. Если $p(\tau) = P$ и $q(\tau) = Q$ для любого τ , то отображение Φ называется *вариацией с закрепленными концами*.

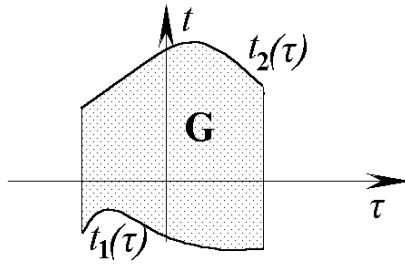


Рис. 15: Область определения вариации Φ

Каждая вариация Φ задает, очевидно, семейство кривых $\gamma_\tau(t) = \Phi(\tau, t)$, причем $\gamma_0(t) = \gamma(t)$. Кроме того, в каждой точке $\gamma(t)$, вариация Φ определяет векторное поле

$$E(t) = \frac{\partial \Phi(0, t)}{\partial \tau},$$

которое называется *полем вариации*. Поле вариации — это касательное векторное поле к другому семейству кривых, задаваемых отображением Φ : к кривым $\nu_t(\tau) = \Phi(\tau, t)$. Отметим, что в концевых точках поле вариации вовсе не совпадает с касательными векторами к концевым кривым. А именно, имеет место следующая лемма (здесь и ниже точкой обозначается дифференцирование по t , а штрихом — дифференцирование по τ).

Лемма 6.1 *Вектора скоростей концевых кривых в начальный момент $\tau = 0$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$p'(0) = t_1'(0)\dot{\gamma}(t_1) + E(t_1), \quad q'(0) = t_2'(0)\dot{\gamma}(t_2) + E(t_2).$$

Доказательство. Докажем, например, первое соотношение. По определению имеем:

$$p'(\tau) = \frac{d\Phi(\tau, t_1(\tau))}{d\tau} = \frac{\partial \Phi(\tau, t_1(\tau))}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi(\tau, t_1(\tau))}{\partial t} \frac{dt_1(\tau)}{d\tau}.$$

Подставив значение $\tau = 0$ и вспомнив, что $t_1(0) = t_1$, получим:

$$p'(0) = \frac{\partial \Phi(0, t_1(0))}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi(0, t_1(0))}{\partial t} t_1'(0) = E(t_1) + \dot{\gamma}(t_1) t_1'(0).$$

Доказательство закончено.

Рассмотрим функцию $\ell(\tau)$, определенную на отрезке $[-\tau_0, \tau_0]$ и равную длине кривой γ_τ . Вычислим производную этой функции в $\tau = 0$. Дополнительно предположим для простоты, что кривая $\gamma(t)$ натурально параметризована. Запишем функцию $\ell(\tau)$ в виде

$$\ell(\tau) = \int_{t_1(\tau)}^{t_2(\tau)} \|\dot{\gamma}_\tau\| dt,$$

и воспользуемся теоремой о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра. Получим:

$$\frac{d\ell(\tau)}{d\tau} = t'_2(\tau)\|\dot{\gamma}_\tau(t_2(\tau))\| - t'_1(\tau)\|\dot{\gamma}_\tau(t_1(\tau))\| + \int_{t_1(\tau)}^{t_2(\tau)} \|\dot{\gamma}_\tau(t)\|' dt,$$

Вычислим производную $\|\dot{\gamma}_\tau(t)\|'$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6.2 *В сделанных выше обозначениях, имеет место следующее равенство:*

$$\nabla_\tau \dot{\gamma}_\tau(t) = \nabla_t \nu'_t(\tau).$$

Доказательство. Пусть на поверхности фиксированы координаты (u^1, \dots, u^{n-1}) . Обозначим через $u^i(\tau, t)$ координатное представление вариации Φ . Тогда k -ая компонента поля $\nabla_\tau \dot{\gamma}_\tau(t)$ имеет вид:

$$\sum_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tau} \nabla_\alpha \dot{u}^k = \frac{\partial^2 u^k}{\partial t \partial \tau} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^k \dot{u}^\alpha (u^\beta)' = \sum_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} \nabla_\alpha (u^k)',$$

т.е. совпадает с k -ой компонентой поля $\nabla_t \nu'_t(\tau)$. Доказательство закончено.

Теперь, с помощью леммы 6.2, найдем:

$$\|\dot{\gamma}_\tau(t)\|' = \nabla_\tau \sqrt{\langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle} = \frac{1}{2} \frac{\nabla_\tau \langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle}{\sqrt{\langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle}} = \frac{\langle \nabla_t \nu'_t, \dot{\gamma}_\tau \rangle}{\sqrt{\langle \dot{\gamma}_\tau, \dot{\gamma}_\tau \rangle}}.$$

Подставим полученное выражение в формулу для производной функции длины $\ell(\tau)$, положим $\tau = 0$, воспользуемся предположением о том, что кривая $\gamma(t)$ натурально параметризована, и тем, что $E(t) = \nu'_t(0)$ по определению. Получим:

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = t'_2(0) - t'_1(0) + \int_{t_1}^{t_2} \langle \nabla_t E(t), \dot{\gamma} \rangle dt,$$

Далее,

$$\nabla_t \langle E(t), \dot{\gamma} \rangle = \langle \nabla_t E(t), \dot{\gamma} \rangle + \langle E(t), \nabla_t \dot{\gamma} \rangle,$$

поэтому выражение для производной переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\ell(0)}{d\tau} &= t'_2(0) - t'_1(0) + \int_{t_1}^{t_2} (\nabla_t \langle E(t), \dot{\gamma} \rangle - \langle E(t), \nabla_t \dot{\gamma} \rangle) dt \\ &= t'_2(0) - t'_1(0) + \langle E(t_2), \dot{\gamma}(t_2) \rangle - \langle E(t_1), \dot{\gamma}(t_1) \rangle - \int_{t_1}^{t_2} \langle E(t), \nabla_t \dot{\gamma} \rangle dt. \end{aligned}$$

Теперь, представив $t'_i(0)$ в виде $t'_i(0)\langle \dot{\gamma}(t_i), \dot{\gamma}(t_i) \rangle$, $i = 1, 2$, заметим, что

$$t'_i(0) + \langle E(t_i), \dot{\gamma}(t_i) \rangle = \langle t'_i(0)\dot{\gamma}(t_i) + E(t_i), \dot{\gamma}(t_i) \rangle.$$

Наконец, воспользовавшись леммой 6.1 и определением производной вдоль кривой, переписем выражение для производной в виде

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = \langle q'(0), \dot{\gamma}(t_2) \rangle - \langle p'(0), \dot{\gamma}(t_1) \rangle - \int_{t_1}^{t_2} \langle E(t), \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle dt.$$

Итак, доказано следующее важное предложение.

Предложение 6.1 (Первая вариация длины) Рассмотрим произвольную вариацию $\Phi(\tau, t)$ кривой $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow M$, и $p(\tau)$ и $q(\tau)$ — концевые кривые вариации Φ . Тогда первая производная длины $\ell(\tau)$ кривой $\gamma_\tau(t) = \Phi(\tau, t)$ в начальный момент времени $\tau = 0$ имеет вид

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = \langle q'(0), \dot{\gamma}(t_2) \rangle - \langle p'(0), \dot{\gamma}(t_1) \rangle - \int_{t_1}^{t_2} \langle E(t), \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle dt.$$

Из предложения 6.1 вытекают несколько важных следствий.

Следствие 6.3 (Стационарность геодезических) Любая геодезическая $\gamma(t)$ на поверхности M является кривой стационарной длины по отношению к произвольной вариации кривой γ с закрепленными концами, т.е. производная длины геодезической при таких вариациях в начальный момент времени равна нулю.

Следствие 6.4 Если кривая γ — геодезическая, то для произвольной ее вариации $\Phi(\tau, t)$ производная функции длины $\ell(\tau)$ в начальный момент времени $\tau = 0$ имеет вид

$$\frac{d\ell(0)}{d\tau} = \langle q'(0), \dot{\gamma}(t_2) \rangle - \langle p'(0), \dot{\gamma}(t_1) \rangle,$$

где $p(\tau)$ и $q(\tau)$ — концевые кривые вариации Φ .

7 Криволинейные координаты в области и на поверхности

Выше мы уже видели, как выбор подходящих координат на поверхности позволяет проще решать те или иные задачи. В настоящем разделе мы разберем общую теорию координат, обобщив линейные замены, рассматриваемые в линейной алгебре и аналитической геометрии. Если при линейных заменах координатные линии всегда оставались прямолинейными, то в обобщенных координатах они могут, вообще говоря, отличаться от прямых. Чтобы подчеркнуть это отличие, обобщенные координаты часто называют криволинейными.

Общая идея, лежащая в основе понятия координат, состоит в “оцифровке” точек пространства. Иными словами, каждой точке из рассматриваемой области пространства \mathbb{R}^n приписывается n чисел, причем разным точкам приписываются разные наборы чисел. Ясно, что оцифровка одной и той же области может быть выполнена многими разными способами. Например, каждую точку P плоскости \mathbb{R}^2 мы можем задать ее стандартными евклидовыми координатами (x, y) , а можем поставить в соответствие точке P пару чисел (r, φ) , где r — расстояние от P до начала координат O , а φ — угол от направления оси OX до направления радиус-вектора точки P . Напомним, что пара (r, φ) называется полярными координатами точки P .

Отметим возникающие здесь сложности. Во-первых, если P совпадает с O , то направление радиус-вектора OP не определено. Во-вторых, для точек P , отличных от O , угол от направления оси OX до направления вектора OP определен неоднозначно (с точностью до 2π). Таким образом, нам не удастся корректно определить полярные координаты на всей плоскости \mathbb{R}^2 . Однако, если ограничиться областью Ω , полученной из \mathbb{R}^2 выбрасыванием, скажем, неотрицательной полуоси OX_+ , и положить, что φ меняется в пределах от 0 до 2π , мы получим корректно определенную “оцифровку” области Ω , являющуюся примером криволинейной системы координат. Именно такими объектами мы будем здесь заниматься.

7.1 Определение криволинейной системы координат

Пусть Ω — некоторая область в \mathbb{R}^n , и (x^1, \dots, x^n) — стандартные координаты в \mathbb{R}^n . Рассмотрим еще один экземпляр \mathbb{R}^n (мы его обозначим через \mathbb{R}_1^n) со стандартными координатами (y^1, \dots, y^n) . Система из n функций $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, n$, заданных на Ω , называется *непрерывной системой координат*, если отображение $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_1^n$, заданное в виде

$$\begin{cases} y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n), \\ \dots \\ y^n = y^n(x^1, \dots, x^n) \end{cases}$$

является взаимно-однозначным, непрерывным, и обратное к нему отображение ψ^{-1} , заданное системой функций

$$\begin{cases} x^1 = x^1(y^1, \dots, y^n), \\ \dots \\ x^n = x^n(y^1, \dots, y^n), \end{cases}$$

— также непрерывно. Набор чисел $(y^1(P), \dots, y^n(P))$ для произвольной точки $P \in \Omega$ называется *криволинейными координатами точки P* (по отношению к системе координат, заданной функциями y^i , или, что тоже самое, заданной отображением ψ).

Если все функции $x^i(y^1, \dots, y^n)$ — гладкие, то координаты y^i называются *гладкими*. Отметим, что из гладкости системы координат не вытекает гладкость отображения ψ (достаточно рассмотреть пример замены координат на прямой \mathbb{R}^1 , заданное в виде $x = y^3$; в точке $y = 0$ обратное отображение, т.е. отображение ϕ , гладким не является).

Для гладкой системы координат определена *матрица Якоби J* , составленная из частных производных $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$, и *якобиан $|J|$* , равный определителю матрицы Якоби.

Гладкая система координат называется *регулярной*, если ее якобиан всюду отличен от нуля, иными словами, матрица Якоби всюду невырождена. Из теоремы об обратной функции вытекает, что для регулярной криволинейной системы координат отображение ψ также гладкое, и его матрица Якоби равна J^{-1} , поэтому, в частности, матрица Якоби отображения ψ невырождена.

Замечание. Понятие регулярности криволинейных координат может быть определено и другим эквивалентным образом: криволинейные координаты называются *регулярными*, если как функции $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$, так и функции $y^\alpha = y^\alpha(x^1, \dots, x^n)$, являются гладкими. Как уже было отмечено, этим свойством обладают регулярные координаты в смысле предыдущего определения. Докажем обратное. Из гладкости функций $y^\alpha(x^1, \dots, x^n)$ вытекает, что в каждой точке $P \in \Omega$ и ее образе $\psi(P)$ определены матрицы Якоби отображений ψ и ψ^{-1} соответственно. По теореме о дифференцировании сложной функции, произведение этих матриц равно единичной матрице, поэтому оба соответствующих якобиана отличны от нуля, и, значит, система регулярна в смысле предыдущего определения.

Отметим, что при решении конкретных задач намного проще бывает проверять, что якобиан отличен от нуля, чем искать обратное отображение и проверять его гладкость. Иными словами, первое определение регулярности криволинейной системы координат часто бывает предпочтительнее второго.

Пусть (y_0^1, \dots, y_0^n) — криволинейные координаты некоторой точки $P \in \Omega$. Для каждого i рассмотрим кривую $\delta_i(t)$, определенную для t , близких к

y_0^i так:

$$\begin{cases} x^1(t) = x^1(y_0^1, \dots, y_0^{i-1}, t, y_0^{i+1}, \dots, y_0^n), \\ \dots \\ x^n(t) = x^n(y_0^1, \dots, y_0^{i-1}, t, y_0^{i+1}, \dots, y_0^n). \end{cases}$$

Кривая $\delta_i(t)$ называется *i -ой координатной кривой*, проходящей через точку P . Отметим, что если координаты регулярны, то кривая $\delta_i(t)$ также регулярна (докажите).

Аналогично определим *k -мерные координатные поверхности*. Для этого выберем $k < n$ индексов (i_1, \dots, i_k) и для t^{i_p} , близких к $y_0^{i_p}$, зададим параметрически k -мерную поверхность так:

$$\begin{cases} x^1(t^{i_1}, \dots, t^{i_p}) = x^1(y_0^1, \dots, t^{i_1}, \dots, t^{i_p}, \dots, y_0^n), \\ \dots \\ x^n(t^{i_1}, \dots, t^{i_p}) = x^n(y_0^1, \dots, t^{i_1}, \dots, t^{i_p}, \dots, y_0^n). \end{cases}$$

Если $k = n - 1$, то k -мерные координатные поверхности называются *координатными гиперповерхностями*. Отметим, что, как и в случае координатных кривых, k -мерные координатные поверхности регулярной системы координат являются регулярными поверхностями (проверьте).

Если в области Ω заданы две регулярных системы координат, скажем (y^1, \dots, y^n) и (z^1, \dots, z^n) , то, в силу взаимной однозначности отображений, задающих эти координаты, определена *замена координат* (y^1, \dots, y^n) на *координаты* (z^1, \dots, z^n) , порожденная функциями

$$\begin{cases} y^1 = y^1(z^1, \dots, z^n), \\ \dots \\ y^n = y^n(z^1, \dots, z^n) \end{cases}$$

Матрица Якоби $J(y, z) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial z^j} \right)$ этой системы функций и определитель $|J(y, z)|$ матрицы $J(y, z)$ называются соответственно *матрицей Якоби* и *якобианом* этой замены.

Замечание. Фактически, регулярные криволинейные координаты $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — это регулярная вложенная параметрическая поверхность размерности n в \mathbb{R}^n . Поэтому многие дальнейшие конструкции и вычисления аналогичны теории поверхностей. Однако, мы приводим формулировки и краткие доказательства, на которые теперь можно взглянуть с несколько иной точки зрения.

7.2 Примеры криволинейных систем координат

Приведем некоторые стандартные примеры криволинейных систем координат.

7.2.1 Евклидовы координаты

Если отображение ψ определено на всем \mathbb{R}^n и является тождественным отображением, то криволинейная система координат, порожденная ψ , совпадает с самой евклидовой системой координат. При этом матрица Якоби в каждой точке \mathbb{R}^n постоянна и равна единичной матрице, якобиан равен 1, поэтому это — регулярная система координат; координатные кривые — это параллельные координатным осям прямые, проходящие через данную точку; координатные k -мерные поверхности — это k -мерные плоскости, проходящие через данную точку параллельно некоторой k -мерной координатной плоскости.

7.2.2 Линейная система координат

Линейное отображение ψ , заданное на \mathbb{R}^n , порождает на \mathbb{R}^n криволинейную систему координат, если и только если матрица A_ψ отображения ψ — невырождена. Матрица Якоби линейной системы постоянна и совпадает с матрицей $(A_\psi)^{-1}$; якобиан равен $1/\det(A_\psi)$. Координатные кривые и k -мерные координатные поверхности — это соответствующие прямые и k -мерные плоскости.

7.2.3 Полярная система координат

Если (x, y) — стандартные координаты на плоскости, то положим

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

где $r > 0$, а $0 < \varphi < 2\pi$. Описанное только что отображение задает регулярную систему координат (r, φ) на области $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$. Эта система координат называется *полярной*. Матрица Якоби равна

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

а якобиан равен r . Координатные линии — открытые лучи, выходящие из начала координат (за исключением положительной полуоси OX_+), а также окружности с центром в O (проколотые в точке пересечения с лучом OX_+).

Отметим, что полярной системой координат называется любая регулярная система, основанная на функциях (r, φ) (при разном корректном выборе области Ω и области изменения функций r и φ).

7.2.4 Цилиндрическая система координат

Если (x, y, z) — стандартные координаты в \mathbb{R}^3 , то положим

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

где $r > 0$, а $0 < \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Описанное только что отображение задает регулярную систему координат (r, φ, z) в подходящей области. Эта система координат называется *цилиндрической*.

Упражнение 7.1. Опишите какую-нибудь максимальную область, в которой цилиндрическая система координат корректно определена, найдите матрицу Якоби, якобиан, координатные кривые, координатные поверхности, докажите регулярность этой системы.

7.2.5 Сферические координаты

Если (x, y, z) — стандартные евклидовы координаты, то для каждой точки $P = (x, y, z)$ определим три числа (r, θ, φ) , выбрав в качестве r расстояние между P и началом координат O , в качестве θ — угол между вектором OP и плоскостью XOY , а в качестве φ — угол между радиус-вектором проекции точки P на плоскость XOY и положительным направлением оси X . Чтобы избежать неприятностей, аналогичных тем, которые возникли при рассмотрении полярных координат, функции (r, θ, φ) зададим в области $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \Pi$, где Π — замкнутая полуплоскость в координатной плоскости XOZ , ограниченная осью OZ и содержащая положительную полуось OX_+ . Кроме того, будем считать, что $r > 0$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ и $0 < \varphi < 2\pi$. Связь между координатами (x, y, z) и (r, θ, φ) в явном виде выглядит так:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi, \\ y = r \cos \theta \sin \varphi, \\ z = r \sin \theta. \end{cases}$$

При описанных ограничениях функции (r, θ, φ) задают регулярную криволинейную систему координат, называемую *сферической*.

Упражнение 7.2. Для сферической системы координат найдите матрицу Якоби, якобиан, координатные кривые, координатные поверхности, и докажите регулярность этой системы.

Упражнение 7.3. Часто в качестве сферической координаты θ точки $P \in \mathbb{R}^3$ выбирают угол между направлением оси OZ и вектором OP . В этом случае угол θ меняется в пределах $0 < \theta < \pi$. Запишите соответствующее отображение ψ , опишите область, в которой корректно определены соответствующие криволинейные координаты, найдите матрицу Якоби, якобиан, координатные кривые, координатные поверхности, и докажите регулярность этой системы.

7.3 Касательное пространство к области в точке

По аналогии с касательным пространством к поверхности, определим касательное пространство $T_P\Omega$ в точке P области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ как множество вычисленных в точке P векторов скоростей всевозможных гладких кривых, проходящих через P . Если (x^1, \dots, x^n) — стандартные координаты в \mathbb{R}^n , и $v \in T_P\Omega$ является вектором скорости кривой $(x^1(t), \dots, x^n(t))$, причем $P = (x^1(0), \dots, x^n(0))$, то компоненты вектора v в координатах (x^1, \dots, x^n) равны $(\dot{x}^1(0), \dots, \dot{x}^n(0))$.

Так как отображение в точку является гладкой кривой, то $0 \in T_P\Omega$. Так как в направлении любого вектора v можно выпустить прямую, параметризованную так, чтобы скорость полученной кривой была равна v , то $T_P\Omega = \mathbb{R}^n$, что определяет структуру векторного пространства на $T_P\Omega$.

Пусть теперь в области Ω заданы регулярные координаты (y^1, \dots, y^n) . Пусть $v \in T_P\Omega$ — касательный вектор с компонентами (по отношению к стандартной евклидовой системе координат), равными (v^1, \dots, v^n) , и $\gamma(t)$ — гладкая кривая, такая что $\gamma(0) = P$, $\dot{\gamma}(0) = v$. Кривая $\gamma(t)$ может быть записана в координатах y^i : $\gamma(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t))$. Набор чисел $(\dot{y}^1(0), \dots, \dot{y}^n(0))$ называется *компонентами вектора v по отношению к регулярным координатам y^i* . Как связаны компоненты вектора v по отношению к стандартной евклидовой системе координат и по отношению к регулярной криволинейной системе координат?

По теореме о дифференцировании сложной функции, имеем

$$\dot{x}^i(0) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \dot{y}^j(0), \quad \text{иными словами } \dot{x} = J\dot{y},$$

где J — матрица Якоби координат y^i .

По аналогии со случаем поверхностей, обозначим через ∂_{y^i} касательные векторы из $T_P\Omega$ с компонентами $(x_{y^i}^1, \dots, x_{y^i}^n)$, где через $x_{y^i}^k$ обозначена частная производная $\frac{\partial x^k}{\partial y^i}$. Иными словами, ∂_{y^i} — это столбцы матрицы Якоби системы координат y^i . В силу невырожденности матрицы Якоби, ее столбцы линейно независимы, поэтому векторы ∂_{y^i} образуют базис касательного пространства $T_P\Omega$, который называется *каноническим базисом в $T_P\Omega$, соответствующим регулярным координатам y^i* . Отметим, что ∂_{y^i} являются векторами скоростей координатных линий, проходящих через точку P . Далее

$$\dot{x} = \sum_i \dot{y}^i \partial_{y^i}.$$

Иными словами, *касательный вектор равен линейной комбинации базисных векторов криволинейной системы с коэффициентами — компонентами этого вектора по отношению к этой криволинейной системе.*

Посмотрим, как меняются компоненты касательного вектора при замене координат. Если (z^1, \dots, z^n) — другие криволинейные координаты в

Ω , то, записав кривую γ в виде $(z^1(t), \dots, z^n(t))$, найдем, что

$$\dot{y}^i(0) = \frac{\partial y^i}{\partial z^j} \dot{z}^j(0), \quad \text{иными словами} \quad \dot{y} = J(y, z)\dot{z},$$

где $J(y, z)$ — матрица Якоби замены координат y^i на z^i . Итак, мы вывели закон преобразования компонент касательного вектора при замене криволинейной системы координат. Отметим, что он такой же как для поверхностей.

Вычислим теперь, как меняются базисные вектора при замене криволинейной системы координат y^i на z^i . Имеем:

$$\begin{aligned} \partial_{z^i} &= \left(\frac{\partial x^1}{\partial z^i}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial z^i} \right) = \left(\sum_j \frac{\partial x^1}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial z^i}, \dots, \sum_j \frac{\partial x^n}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial z^i} \right) = \\ &= \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial z^i} \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^j}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial y^j} \right) = \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial z^i} \partial_{y^j}. \end{aligned}$$

В матричном виде,

$$(\partial_{z^1}, \dots, \partial_{z^n}) = (\partial_{y^1}, \dots, \partial_{y^n}) J(y, z).$$

7.4 Евклидова метрика в криволинейных координатах

В каждом касательном пространстве $T_P\Omega$ определено евклидово скалярное произведение касательных векторов. Если v и w — касательные вектора из $T_P\Omega$, а (v^1, \dots, v^n) и (w^1, \dots, w^n) — их координаты (по отношению к стандартной системе координат), то их (евклидово) скалярное произведение $\langle v, w \rangle$ равно $\sum_i v^i w^i$. Пусть теперь y^i — регулярные криволинейные координаты в Ω , и пусть $(\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^n)$ и $(\bar{w}^1, \dots, \bar{w}^n)$ — координаты векторов v и w по отношению к y^i . Мы хотим записать скалярное произведение векторов v и w через эти координаты. Имеем

$$v = \sum_i \bar{v}^i \partial_{y^i}, \quad w = \sum_i \bar{w}^i \partial_{y^i}, \quad \langle v, w \rangle = \sum_{i,j} \langle \partial_{y^i}, \partial_{y^j} \rangle \bar{v}^i \bar{w}^j.$$

Положим $g_{ij} = \langle \partial_{y^i}, \partial_{y^j} \rangle$. Иными словами, матрица $G = (g_{ij})$ — это матрица Грама канонического базиса $(\partial_{y^1}, \dots, \partial_{y^n})$ касательного пространства $T_P\Omega$. В явном виде,

$$g_{ij} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j}.$$

Функции g_{ij} , определенные на Ω , называются *компонентами евклидовой метрики, записанными в регулярной системе координат y^i* . Отметим, что мы получили точно такую же формулу, как в теории поверхностей.

На дифференциальном языке,

$$ds^2 = \sum_k (dx^k)^2 = \sum_k \left(\sum_i \frac{\partial x^k}{\partial y^i} dy^i \right)^2 = \sum_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \right) dy^i dy^j = \sum_{i,j} g_{ij} dy^i dy^j.$$

7.4.1 Закон изменения компонент метрики при замене координат

Посмотрим, как меняются компоненты метрики g_{ij} при замене регулярных координат y^i на регулярные координаты z^i . Обозначим через h_{ij} компоненты евклидовой метрики в координатах z^i . По определению, $h_{ij} = \langle \partial_{z^i}, \partial_{z^j} \rangle$. Имеем

$$h_{ij} = \langle \partial_{z^i}, \partial_{z^j} \rangle = \left\langle \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial z^i} \partial_{y^k}, \sum_l \frac{\partial y^l}{\partial z^j} \partial_{y^l} \right\rangle = \sum_{k,l} \frac{\partial y^k}{\partial z^i} \frac{\partial y^l}{\partial z^j} \langle \partial_{y^k}, \partial_{y^l} \rangle = \sum_{k,l} \frac{\partial y^k}{\partial z^i} \frac{\partial y^l}{\partial z^j} g_{kl}.$$

Иными словами, если $G = (g_{ij})$, $H = (h_{ij})$, то $H = J(y, z)^T G J(y, z)$, где $(\cdot)^T$ обозначает транспонирование матрицы. Снова отметим, что мы получили точно такую же формулу, как в теории поверхностей.

7.4.2 Примеры вычисления евклидовой метрики

Вычислим компоненты евклидовой метрики в полярных, цилиндрических и сферических координатах. Легко видеть, что в каждом из этих случаев векторы канонического репера взаимно ортогональны. Поэтому все компоненты g_{ij} при $i \neq j$ равны нулю. Осталось вычислить длины векторов скоростей координатных линий. Очевидные вычисления приводят к следующему результату:

1) в полярной системе координат (r, φ) евклидова метрика ds^2 имеет вид:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2;$$

2) в цилиндрической системе координат (r, φ, z) евклидова метрика ds^2 имеет вид:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2;$$

3) в сферической системе координат (r, θ, φ) евклидова метрика ds^2 имеет вид:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\varphi^2.$$

7.5 Криволинейные координаты на поверхностях

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ — некоторая область, и M — регулярная поверхность в \mathbb{R}^n , заданная отображением $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Мы определяли координатные функции такой поверхности, рассматривая стандартные координаты (x^1, \dots, x^n) в \mathbb{R}^n , стандартные координаты (u^1, \dots, u^k) в \mathbb{R}^k , и задавая отображение f с помощью семейства функций

$$\begin{cases} x^1 = x^1(u^1, \dots, u^k), \\ \dots \\ x^n = x^n(u^1, \dots, u^k). \end{cases}$$

Если теперь в области Ω выбрать криволинейные координаты (v^1, \dots, v^k) , заданные отображением $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, то поверхность M может быть задана отображением $f \circ \psi^{-1}$, и ее параметрическое представление будет иметь вид:

$$\begin{cases} x^1 = x^1(v^1, \dots, v^k), \\ \dots \\ x^n = x^n(v^1, \dots, v^k). \end{cases}$$

Если M представлена таким образом, то говорят, что на M выбрана криволинейная система координат (v^1, \dots, v^k) . Ясно, что если координаты v^i регулярны, то поверхность M , заданная отображением $f \circ \psi^{-1}$, также регулярна. Фактически, криволинейные координаты задают то, что мы называли заменой координат (заменой параметризации) на поверхности. Другими словами, замену координат на поверхности можно рассматривать как введение на этой поверхности криволинейных координат. Таким образом, криволинейные системы координат на поверхности мы уже изучали.

Замечание. Выше мы описали, как выглядит евклидова метрика в криволинейной системе координат, и как меняется евклидова метрика при замене криволинейной системы координат. Отметим, что все эти рассуждения применимы и к метрике, индуцированной на поверхности.

Приведем пример полезных криволинейных координат на сфере, называемых *стереографическими*.

7.6 Стереографические координаты на сфере

Для простоты, рассмотрим двумерную сферу радиуса R . Пусть (x, y, z) — стандартные координаты в \mathbb{R}^3 , тогда сфера S^2 задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Обозначим через N северный полюс сферы S^2 , т.е. точку с координатами $(0, 0, R)$, а через S — южный полюс, т.е. точку с координатами $(0, 0, -R)$. Пусть Π — координатная плоскость $z = 0$. Зададим отображение

$$\nu: S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \Pi$$

следующим образом. Для каждой точки $P \in S^2 \setminus \{N\}$ рассмотрим точку P' пересечения прямой NP с плоскостью Π . Положим по определению $\nu(P) = P'$. Отображение ν называется *стереографической проекцией из северного полюса N* . Отметим, что аналогично можно определить стереографическую проекцию из южного полюса.

Стереографическая проекция ν задает координаты на сфере S^2 без северного полюса. Эти координаты называются *стереографическими*. Вычислим в явном виде стереографические координаты.

Пусть $P = (x, y, z)$, и $P' = \nu(P) = (u, v, 0)$. Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) . Пусть в этих координатах $P = (r, \varphi, z)$, а $P' = (\rho, \varphi, 0)$. Легко видеть, что r и ρ связаны следующим соотношением: $\rho = rR/(R-z)$, откуда $r^2 = x^2 + y^2 = (R-z)^2 \rho^2 / R^2$. Так как $P \in S^2$, то

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\rho^2}{R^2}(R-z)^2 + z^2.$$

Так как $z \neq R$, имеем

$$\begin{aligned} R^2 - z^2 &= (R-z)(R+z) = \frac{\rho^2}{R^2}(R-z)^2 \\ \Rightarrow R+z &= \frac{\rho^2}{R^2}(R-z) \\ \Rightarrow z &= R \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2} = R \frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$r = \frac{\rho}{R}(R-z) = \frac{2R^2 \rho}{\rho^2 + R^2} \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \varphi = \frac{2R^2 \rho \cos \varphi}{\rho^2 + R^2} = \frac{2R^2 u}{u^2 + v^2 + R^2}, \\ y = r \sin \varphi = \frac{2R^2 \rho \sin \varphi}{\rho^2 + R^2} = \frac{2R^2 v}{u^2 + v^2 + R^2}. \end{cases}$$

Итак, в стереографических координатах (u, v) сфера S^2 радиуса R без северного полюса N записывается так:

$$\left(x = \frac{2R^2 u}{u^2 + v^2 + R^2}, y = \frac{2R^2 v}{u^2 + v^2 + R^2}, z = R \frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2} \right),$$

или, в полярных координатах (ρ, φ) , так:

$$\left(x = \frac{2R^2 \rho \cos \varphi}{\rho^2 + R^2}, y = \frac{2R^2 \rho \sin \varphi}{\rho^2 + R^2}, z = R \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2} \right).$$

Кроме того, нам понадобится связь между цилиндрическими координатами (r, φ, z) точки P и полярными координатами (ρ, φ) точки $P' = \nu(P)$:

$$\left(r = \frac{2R^2 \rho}{\rho^2 + R^2}, \varphi = \varphi, z = R \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2} \right).$$

Упражнение 7.4. Обобщить только что приведенные выкладки на случай гиперсферы в \mathbb{R}^n .

Вычислим теперь, как выглядит индуцированная метрика на $S^2 \setminus \{N\}$ в стереографических координатах.

Теорема 7.1 *Индукцированная метрика $d\sigma^2$ на сфере S^2 радиуса R в стереографических координатах (u, v) или (ρ, φ) имеет вид:*

$$d\sigma^2 = \frac{4R^4}{(u^2 + v^2 + R^2)^2} (du^2 + dv^2) = \frac{4R^4}{(\rho^2 + R^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2).$$

Доказательство. Напомним, что евклидова метрика в цилиндрических координатах (r, φ, z) имеет вид:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

а сфера параметризуется координатами (ρ, φ) так:

$$\left(r = \frac{2R^2\rho}{\rho^2 + R^2}, \varphi = \varphi, z = R \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2} \right),$$

поэтому

$$\begin{aligned} dr &= \frac{2R^2(R^2 + \rho^2) - 4R^2\rho^2}{(\rho^2 + R^2)^2} d\rho = \frac{2R^2(R^2 - \rho^2)}{(\rho^2 + R^2)^2} d\rho, \\ d\varphi &= d\varphi, \\ dz &= R \frac{2\rho(\rho^2 + R^2) - 2\rho(\rho^2 - R^2)}{(\rho^2 + R^2)^2} d\rho = \frac{4R^2\rho}{(\rho^2 + R^2)^2} d\rho, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= \frac{4R^4(R^2 - \rho^2)^2}{(\rho^2 + R^2)^4} d\rho^2 + \frac{4R^4\rho^2}{(\rho^2 + R^2)^2} d\varphi^2 + \frac{16R^4\rho^2}{(\rho^2 + R^2)^4} d\rho^2 = \\ &= \frac{4R^4}{(\rho^2 + R^2)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2), \end{aligned}$$

что и требовалось. Выкладка для координат (u, v) аналогична.

Упражнение 7.5. Записать метрику сферы $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ в стереографических координатах.

Отметим, что метрика на сфере, записанная в стереографических координатах, отличается от евклидовой на функциональный множитель, т.е. имеет вид $\lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2)$. Такие метрики называются *конформно евклидовыми*. Метрики, отличающиеся на функциональный множитель, обладают следующим важным свойством.

Утверждение 7.1 *Предположим, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ заданы две римановы метрики ds^2 и $d\sigma^2$, отличающиеся на положительную функцию λ^2 , т.е. $d\sigma^2 = \lambda^2 ds^2$. Тогда углы между парой пересекающихся кривых, вычисленные по отношению к обеим этим метрикам, одинаковы.*

Доказательство. Пусть γ и δ — две кривые в Ω , пересекающиеся в точке P под углом α по отношению к ds^2 , и под углом β по отношению к $d\sigma^2$. Обозначим через ξ и η векторы скоростей этих кривых. Тогда

$$\cos \alpha = \frac{ds^2(\xi, \eta)}{ds(\xi)ds(\eta)} = \frac{\lambda^2 ds^2(\xi, \eta)}{\lambda ds(\xi)\lambda ds(\eta)} = \frac{d\sigma^2(\xi, \eta)}{d\sigma(\xi)d\sigma(\eta)} = \cos \beta,$$

что и требовалось. Здесь через $ds^2(\xi, \eta)$ и $d\sigma^2(\xi, \eta)$ мы обозначили скалярные произведения векторов ξ и η по отношению к метрикам ds^2 и $d\sigma^2$ соответственно, а через $ds(\xi)$ и $d\sigma(\xi)$ — длину вектора ξ , вычисленную по отношению к этим метрикам.

Следствие 7.1 *Стереографическая проекция сохраняет углы между кривыми на сфере S^2 .*

Упражнение 7.6. Обобщить результат следствия 7.1 на случай стереографической проекции гиперсферы.

Задачи к лекции 7

Определение. Криволинейная система координат (q^1, \dots, q^n) , заданная в области пространства \mathbb{R}^n , называется *ортогональной*, если в ней евклидова метрика $ds^2 = [dx^1]^2 + \dots + [dx^n]^2$ имеет вид $H_1^2 [dq^1]^2 + \dots + H_n^2 [dq^n]^2$, где H_i — положительные функции координат q^i , называемые *коэффициентами Ламе*.

Задача 7.1. Вычислить якобиан перехода $J = \left| \frac{\partial x^s}{\partial q^k} \right|$ от декартовых координат (x^1, \dots, x^n) к ортогональным криволинейным координатам (q^1, \dots, q^n) в пространстве \mathbb{R}^n .

Задача 7.2. *Эллиптические координаты* в \mathbb{R}^3

$$q^1 = \lambda, \quad q^2 = \mu, \quad q^3 = z$$

определяются с помощью формул

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = z,$$

где c — масштабный множитель.

- а) Найти координатные поверхности эллиптических координат.
- б) Вычислить коэффициенты Ламе.

Задача 7.3. *Эллипсоидальные координаты* в \mathbb{R}^3 вводятся с помощью уравнений ($a > b > c$):

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} &= 1 & (\lambda > -c^2) & \quad \text{(уравнение эллипсоида)} \\ \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \frac{y^2}{b^2 + \mu} + \frac{z^2}{c^2 + \mu} &= 1 & (-c^2 > \mu > -b^2) & \quad \text{(уравнение однополостного гиперboloида)} \\ \frac{x^2}{a^2 + \nu} + \frac{y^2}{b^2 + \nu} + \frac{z^2}{c^2 + \nu} &= 1 & (-b^2 > \nu > -a^2) & \quad \text{(уравнение двуполостного гиперboloида)} \end{aligned}$$

Каждой точке $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ соответствует только одна система значений λ, μ, ν .

Параметры $q^1 = \lambda, q^2 = \mu, q^3 = \nu$ и называются эллипсоидальными координатами.

- а) Выразить декартовы координаты x, y, z через эллипсоидальные координаты λ, μ, ν .
- б) Вычислить коэффициенты Ламе.
- в) Найти выражение для оператора Лапласа в эллипсоидальных координатах.

Дополнительный материал к лекции 7

Добавление 7.1. Свойства стереографической проекции. Отметим важное свойство стереографической проекции.

Теорема 7.2 *Сtereoграфическая проекция $\nu: S^2 \rightarrow \Pi$ переводит каждую (невыврожденную) окружность на S^2 , не проходящую через северный полюс N , в некоторую окружность на плоскости Π , а окружность на S^2 , проходящую через N , — в некоторую прямую на Π .*

Доказательство. Второе утверждение теоремы очевидно, так как каждая окружность на S^2 , проходящая через N , переходит, по определению, в прямую пересечения плоскости, задающей эту окружность, с плоскостью Π .

Докажем первое утверждение теоремы. Для простоты, положим $R = 1$. Пусть окружность $\gamma \subset S^2$ получается как пересечение плоскости Π' и сферы S^2 . Пусть плоскость Π' задается уравнением $ax + by + cz = d$. Подставляя в это уравнение выражение для x, y и z через стереографические координаты u и v , получаем

$$ax + by + cz = a \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} + b \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} + c \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} = \frac{2au + 2bv + c(u^2 + v^2 - 1)}{u^2 + v^2 + 1} = d,$$

откуда

$$2au + 2bv + c(u^2 + v^2 - 1) - d(u^2 + v^2 + 1) = (c - d)(u^2 + v^2) + 2au + 2bv - (d + c) = 0.$$

Так как при u^2 и v^2 стоят одинаковые коэффициенты, то это уравнение второго порядка задает или окружность (если $c \neq d$ и есть хотя бы два разных решения), или прямую (если $c = d$ и $a^2 + b^2 \neq 0$), или точку, или пустое множество. Но, по предположению, окружность γ невырождена (состоит более чем из одной точки) и не проходит через N , поэтому ее образ состоит более чем из одной точки и ограничен, откуда немедленно заключаем, что $\nu(\gamma)$ — окружность, что и требовалось.

Добавление 7.2. Многомерная стереографическая проекция. Как мы уже отмечали, понятие стереографической проекции легко обобщается на случай стандартной сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ радиуса R . Пусть в \mathbb{R}^{n+1} заданы стандартные евклидовы координаты (x^1, \dots, x^{n+1}) . В качестве параметризующей области выберем координатную плоскость Π , заданную уравнением $x^{n+1} = 0$. Стандартные декартовы координаты в этой плоскости обозначим через (u^1, \dots, u^n) .

Пусть сфера S^n задана как множество решений уравнения $\sum (x^i)^2 = R^2$. Обозначим через N точку сферы с координатами $(0, \dots, 0, 1)$, и назовем N *северным полюсом сферы*. Пусть P — произвольная точка из $S^n \setminus \{N\}$. Выпустим из точки N луч, проходящий через P . Очевидно, построенный луч пересекает плоскость Π по единственной точке, которую мы обозначим через $\nu(P)$. Таким образом, возникает взаимно однозначное соответствие $\nu: S^n \setminus \{N\} \rightarrow \Pi$ между точками сферы S^n , из которой удален северный полюс, и точками плоскости Π . Отображение ν называется *стереографической проекцией*.

Запишем отображение ν в координатах. Заметим, что координаты (u^1, \dots, u^n) точки $\nu(P)$ и первые n координат (x^1, \dots, x^n) точки $P \in S^n \setminus \{N\}$ пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности равен коэффициенту подобия k между треугольником $NO\nu(P)$ и треугольником $NO'P$, где через O обозначено начало координат в \mathbb{R}^{n+1} , а через O' — проекция точки P на ось Ox^{n+1} , см. рис. 16. Более точно, $x^i = u^i |PN| / |\nu(P)N|$, $i = 1, \dots, n$. В свою очередь, величину $|PN|$ вычислим из подобия треугольников $\nu(P)NO$ и SNP , где S — точка сферы, противоположная северному

полосу (ее, кстати, называют *южным полюсом*): $|PN| = |NS||NO|/|\nu(P)N|$. Поэтому, учитывая, что $|NS| = 2|NO| = 2R$, окончательно получаем:

$$x^i = \frac{2R^2 u^i}{|\nu(P)N|^2} = \frac{2R^2 u^i}{\sum_j (u^j)^2 + R^2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Воспользовавшись задающим сферу уравнением, получим, что

$$(x^{n+1})^2 = R^2 \frac{\left(R^2 - \sum_j (u^j)^2\right)^2}{\left(R^2 + \sum_j (u^j)^2\right)^2}.$$

Осталось заметить, что $(n+1)$ -ая координата x^{n+1} точки P положительна тогда и только тогда, когда точка $\nu(P)$ лежит вне круга радиуса R . Это дает возможность избавиться от модулей после извлечения корня в последнем равенстве. Окончательно:

$$x^{n+1} = R \frac{\sum_j (u^j)^2 - R^2}{R^2 + \sum_j (u^j)^2}.$$

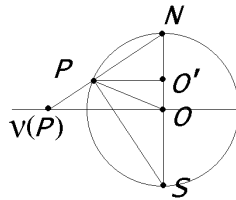


Рис. 16: Стереографическая проекция

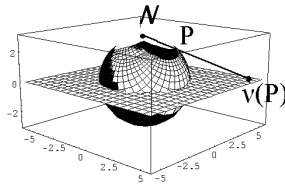


Рис. 17: Стереографическая проекция, ограниченная на квадрат с центром в нуле

Первая квадратичная форма сферы в координатах (u^1, \dots, u^n) имеет вид:

$$ds^2 = 4R^4 \frac{\sum_j (du^j)^2}{\left(R^2 + \sum_j (u^j)^2\right)^2}. \quad (*)$$

Добавление 7.3. Нормальные координаты. С помощью геодезических мы определим на поверхности так называемые *нормальные координаты*, которые оказываются удобными для многих вычислений. Итак, пусть $M = \{r: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}\}$ — регулярная поверхность, заданная в параметрическом виде, P — некоторая точка на M , и $T_P M$ — касательное пространство к поверхности M в точке P . Пусть V — произвольный касательный вектор из $T_P M$. Тогда, в силу следствия 6.1, существует и единственная геодезическая $\xi_V(s)$, удовлетворяющая начальным условиям $\xi_V(0) = P$, и $\dot{\xi}_V(0) = V$ (здесь точкой обозначено дифференцирование по s). Пусть a — произвольное вещественное число. Тогда для вектора aV существует своя такая геодезическая $\xi_{aV}(s)$. Оказывается геодезические $\xi_V(s)$ и $\xi_{aV}(s)$ отличаются на перепараметризацию.

Лемма 7.1 В сделанных выше обозначениях,

$$\xi_{aV}(s) = \xi_V(as)$$

в общей области определения.

Доказательство. Действительно, касательный вектор геодезической $\xi_V(as)$ в точке $P = \xi_V(0)$ имеет вид

$$\left. \frac{d\xi_V(as)}{ds} \right|_{s=0} = \dot{\xi}_V(0)a = aV,$$

поэтому геодезическая $\xi_V(as)$ удовлетворяет тем же начальным условиям, что и геодезическая $\xi_{aV}(s)$. Теперь утверждение леммы вытекает из следствия 6.1.

Определим *экспоненциальное отображение* \exp_P некоторой окрестности нуля в касательном пространстве $T_P M$ в поверхность M так:

$$\exp_P: V \mapsto \xi_V(1).$$

Ясно, что отображение \exp_P — гладкое в области определения (в силу теоремы о гладкой зависимости решения задачи Коши от начальных условий). Оказывается, отображение \exp_P является также регулярным в некоторой окрестности нуля.

Предложение 7.1 Пусть P — произвольная точка регулярной поверхности M . Тогда отображение \exp_P задает регулярные координаты в некоторой окрестности точки P . Другими словами, отображение \exp_P гладко и взаимно однозначно отображает некоторую окрестность нуля из $T_P M$ на окрестность точки P в M , причем матрица Якоби этого отображения невырождена.

Доказательство. Для доказательства предложения достаточно показать, что матрица Якоби отображения \exp_P невырождена в точке $0 \in T_P M$. Действительно, если это так, то матрица Якоби невырождена и в некоторой окрестности нуля, и тогда утверждение предложения вытекает из теоремы о неявной функции.

Итак, по определению, $\exp_P(V) = \xi_V(1)$. Фиксируем на M какие-нибудь регулярные координаты (u^1, \dots, u^n) , и пусть $u^i(s, V)$ — координатное представление геодезической $\xi_V(s)$. Если мы фиксируем какой-нибудь базис в $T_P M$, и в этом базисе $V = (v^1, \dots, v^n)$, то координатное представление отображения \exp_P в координатах (u^1, \dots, u^n) на $T_P M$ и (u^1, \dots, u^n) на M имеет, очевидно, вид

$$u^i = u^i(1, V) = u^i(1, v^1, \dots, v^n).$$

Пусть t — произвольное число. Поскольку, в силу леммы 7.1, $\xi_{tV}(s) = \xi_V(st)$, в координатах имеем

$$u^i(s, tV) = u^i(st, V), \quad (*)$$

Продифференцируем соотношение (*) по t и положим $t = 0$. Дифференцируя левую часть, получим:

$$\left. \frac{\partial u^i(s, tV)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_j \left. \frac{\partial u^i(s, tV)}{\partial v^j} \right|_{t=0} v^j = \sum_j \frac{\partial u^i(s, 0)}{\partial v^j} v^j.$$

С другой стороны, дифференцируя правую часть соотношения (*), имеем:

$$\left. \frac{\partial u^i(st, V)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial u^i(st, V)}{\partial s} \right|_{t=0} s = \frac{\partial u^i(0, V)}{\partial s} s = (\dot{\xi}_V(0))^i s = v^i s.$$

Приравняв полученные выражения и положив в них $s = 1$, получим окончательно:

$$\sum_j \frac{\partial u^i(1, 0)}{\partial v^j} v^j = v^i$$

для произвольного вектора V . Поэтому матрица Якоби $\left(\frac{\partial u^i(1, 0)}{\partial v^j} \right)$ отображения \exp_P в точке $V = 0$ равна единичной матрице и, в частности, невырождена. Предложение доказано.

В силу только-что доказанного предложения 7.1, следующее определение корректно.

Определение. Пусть в касательном пространстве $T_P M$ фиксирован произвольный ортонормированный базис (e_i) , и (v^1, \dots, v^n) — декартовы координаты в $T_P M$, порожденные этим базисом. Регулярные координаты, порожденные отображением

$$V = (v^1, \dots, v^n) \mapsto \exp_P(V),$$

переводящим некоторую окрестность точки $0 \in T_P M$ на некоторую окрестность точки P в M , называются *нормальными координатами с центром в точке P , порожденными базисом (e_i)* . Сама окрестность точки P , в которой заданы нормальные координаты, а также соответствующая окрестность точки 0 в $T_P M$ называется *нормальной окрестностью*.

Упражнение 7.7. Построить нормальные координаты на стандартной двумерной сфере. Как устроена максимальная по включению нормальная окрестность точки сферы?

Пусть в некоторой нормальной окрестности точки P фиксированы нормальные координаты. Рассмотрим в касательном пространстве $T_P M$ сферу $S^n(\varepsilon)$ радиуса ε , целиком лежащую в нормальной окрестности точки $0 \in T_P M$. Образ $\exp_P(S^n(\varepsilon))$ сферы $S^n(\varepsilon)$ при экспоненциальном отображении называется *геодезической сферой с центром в точке P и радиуса ε* . Имеет место следующее интересное утверждение.

Предложение 7.2 (Лемма Гаусса) Пусть Q — произвольная точка геодезической сферы Σ с центром в точке P . Тогда геодезическая, соединяющая точки P и Q и целиком лежащая в нормальной окрестности точки P , — единственна. Более того, эта геодезическая приходит на геодезическую сферу Σ под прямым углом. Последнее означает, что геодезическая перпендикулярна любой регулярной кривой, проходящей через Q и лежащей в Σ .

Доказательство. Первое утверждение предложения вытекает из предложения 7.1, т.е. из взаимной однозначности отображения \exp_P в нормальной окрестности. Докажем второе утверждение.

Пусть $\gamma(t)$ — геодезическая, соединяющая точки P и Q и лежащая в нормальной окрестности точки P , и пусть $\sigma(\tau)$, $\tau \in [-\tau_0, \tau_0]$, — произвольная регулярная кривая на геодезической сфере Σ , такая что $\sigma(0) = Q$. Рассмотрим семейство геодезических $\gamma_\tau(t)$, целиком лежащих в нормальной окрестности точки P и соединяющих P с точкой $\sigma(\tau) \in \Sigma$. В силу первого утверждения предложения, каждая геодезическая $\gamma_\tau(t)$ однозначно определена. Ясно, что семейство геодезических $\gamma_\tau(t)$ определяет вариацию $\Phi(\tau, t) = \gamma_\tau(t)$ геодезической $\gamma(t) = \gamma_0(t)$. При этом, по определению, одна концевая кривая $p(\tau)$ вариации Φ состоит из одной точки P , а другая — $q(\tau)$ совпадает с кривой $\sigma(\tau)$.

Воспользуемся формулой первой вариации длины, см. следствие 6.4. Поскольку длины всех геодезических $\gamma_\tau(t)$ равны между собой и равны радиусу сферы Σ , имеем:

$$0 = \frac{d\ell(0)}{d\tau} = \langle \sigma'(0), \dot{\gamma} \rangle,$$

где вектор скорости $\dot{\gamma}$ вычисляется в точке Q , т.е. геодезическая γ перпендикулярна кривой σ , лежащей на сфере Σ . Доказательство закончено.

Упражнение 7.8. Пусть (u^1, \dots, u^n) — нормальные координаты с центром в точке P . Показать, что в этих координатах матрица первой квадратичной формы в точке P равна единичной, а символы Кристоффеля в точке P равны нулю.

Добавление 7.4. Полугеодезические координаты на двумерной поверхности. Нормальные координаты, которые мы определили в предыдущем разделе, являются весьма частным случаем так называемых координат Ферми. Координаты Ферми мы определим в следующем семестре для подмногообразия в римановом многообразии, а сейчас ограничимся еще одним частным случаем — так называемыми *полугеодезическими координатами на двумерной поверхности*.

Итак, пусть $M = \{r: U \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ — регулярная двумерная поверхность, и $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ — регулярная кривая на M . Пусть $E(t)$ — гладкое касательное векторное поле единичной длины, заданное в точках кривой γ и перпендикулярное вектору скорости $\dot{\gamma}(t)$ в точке $\gamma(t)$. Построим отображение некоторой окрестности отрезка $I \times \{0\}$ в прямом произведении $I \times \mathbb{R}^1$ в поверхность M . В каждой точке $\gamma(t)$ кривой γ мы построим геодезическую $\nu_t(s)$, определенную на некотором интервале $[-s_0(t), s_0(t)]$, и удовлетворяющую начальным условиям $\nu_t(0) = \gamma(t)$, $\nu_t'(0) = E(t)$. Точке $(t, s) \in I \times \mathbb{R}^1$ мы поставим в соответствие точку $\nu_t(s)$ поверхности M . Построенное отображение мы обозначим через exp_γ и назовем *экспоненциальным отображением нормалей вдоль γ* .

Замечание. Так как $\|E(t)\| = 1$, все геодезические $\nu_t(s)$ параметризованы натурально.

Лемма 7.2 *Экспоненциальное отображение exp_γ нормалей вдоль γ является гладким взаимно однозначным и регулярным в некоторой окрестности отрезка $I \times 0 \subset I \times \mathbb{R}^1$.*

Доказательство. Действительно, ограничение отображения exp_γ на $I \times 0$ совпадает с отображением γ , а ограничение отображения exp_γ на $t \times \mathbb{R}^1$ совпадает с ограничением отображения $\text{exp}_{\gamma(t)}$ на прямую в касательной плоскости $T_{\gamma(t)}M$, проходящую через 0 в направлении вектора $E(t)$. Поэтому матрица Якоби отображения exp_γ невырождена в каждой точке отрезка $I \times 0$, и, следовательно, в силу его компактности, в некоторой окрестности отрезка $I \times 0$. Лемма доказана.

В силу леммы 7.2, следующее определение корректно.

Определение. Регулярные координаты, порожденные в некоторой окрестности кривой γ отображением exp_γ , называются *полугеодезическими координатами, ассоциированными с γ* .

Имеет место следующий важный аналог леммы Гаусса (см. предложение 7.2).

Предложение 7.3 (Обобщенная лемма Гаусса) *Полугеодезические координаты в окрестности регулярной натурально параметризованной кривой на неособой двумерной поверхности ортогональны.*

Доказательство. Пусть $\text{exp}_\gamma : (t, s) \rightarrow M$ — полугеодезические координаты в окрестности естественно параметризованной кривой $\gamma(t)$. Обозначим через $\nu_t(s)$ координатные линии $t = \text{const}$, а через $\gamma_s(t)$ — координатные линии $s = \text{const}$. Нам нужно показать, что для любого t координатная линия $\nu_t(s)$ пересекает все координатные линии $\gamma_s(t)$ под прямым углом. Фиксируем некоторое s_0 . Ясно, что семейство геодезических $\nu_t(s)$, проходящих на кривую $\gamma_{s_0}(t)$, порождают гладкую вариацию геодезической $\nu_{t_0}(s)$. При этом, концевые кривые этой гладкой вариации совпадают с $\gamma_0(t)$ и $\gamma_{s_0}(t)$, а сама вариация — это просто ограничение отображения exp_γ на прямоугольник $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times [0, s_0]$. Длины всех геодезических $\nu_t(s)$ при этом одинаковы и равны s_0 . Воспользуемся формулой первой вариации длины геодезической, см. следствие 6.4. Будем обозначать дифференцирование по s штрихом, а по t — точкой. Имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\ell(0)}{dt} = \langle \dot{\gamma}_{s_0}(t_0), \nu'_{t_0}(s_0) \rangle - \langle \dot{\gamma}(t_0), \nu'_{t_0}(0) \rangle \\ &= \langle \dot{\gamma}_{s_0}(t_0), \nu'_{t_0}(s_0) \rangle - \langle \dot{\gamma}(t_0), E(t_0) \rangle. \end{aligned}$$

Второе слагаемое равно нулю по определению, поэтому и первое слагаемое равно нулю. В силу произвольности выбора s_0 и t_0 , доказательство закончено.

8 Риманова и псевдориманова метрики

Прежде чем двигаться дальше, мы обобщим понятия евклидовой и индуцированной метрики. Это позволит нам “задаром” расширить класс примеров метрик, не заботясь о построении конкретной поверхности и индуцированной метрики на ней. На самом деле, заметим, мы не определим ничего нового (см. замечание ниже), но доказательство этого последнего факта лежит далеко за рамками данного курса.

Как было отмечено выше, индуцированная на поверхности метрика в общем случае не является евклидовой. Однако, у индуцированной метрики и евклидовой метрики много общего, например, обе они позволяют вычислять скалярное произведение касательных векторов и, как следствие, длины кривых, углы между кривыми и т.д.; обе меняются по одинаковому закону при замене (регулярных) координат, и т.п. Мы определим сейчас общий объект, называемый римановой метрикой, частными случаями которой являются евклидова и индуцированная метрики. Однако предварительно, для упрощения вида используемых формул, установим следующие соглашения.

1) В дальнейшем, мы будем опускать символ суммирования, молчаливо предполагая, что по всем повторяющимся индексам (если не оговорено противное), суммирование происходит.

2) Для работы с компонентами, меняющимися при замене координат (например, с координатами касательного вектора, или с компонентами метрики), часто будем пользоваться следующим приемом. Новые криволинейные координаты обозначать той же буквой, однако над индексами писать штрихи (при этом, конечно, индексы i_1 и i'_1 различны). Так, если в области Ω были заданы криволинейные координаты y^i , то новые криволинейные координаты будем обозначать через $y^{i'}$. Матрица Якоби замены координат y^i на $y^{i'}$ имеет вид $(\partial y^i / \partial y^{i'})$, обратная к ней матрица, совпадающая с матрицей Якоби замены координат $y^{i'}$ на y^i , равна $(\partial y^{i'} / \partial y^i)$. При этом, условие взаимной обратности этих матриц, с учетом сделанных соглашений, записывается так:

$$\frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}} \frac{\partial y^{i'}}{\partial y^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial y^{i'}}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial y^{j'}} = \delta_{j'}^{i'}$$

где через δ_j^i и $\delta_{j'}^{i'}$ мы обозначили символы Кронекера (напомним, что мы не пишем суммирование по повторяющимся индексам).

Далее, компоненты метрики g_{ij} в новых координатах будем обозначать через $g_{i'j'}$. Во введенных обозначениях, закон преобразования компонент метрики будет выглядеть так:

$$g_{i'j'} = \frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}} \frac{\partial y^j}{\partial y^{j'}} g_{ij}. \quad (*)$$

8.1 Риманова метрика и скалярное произведение

Вернемся к изучению метрики. Выше мы показали, что компоненты g_{ij} евклидовой метрики, записанной в криволинейных координатах, являются гладкими функциями от точки, удовлетворяющими следующим условиям:

- 1) при каждом фиксированном y матрица $(g_{ij}(y))$ симметрична и положительно определена (так как она является матрицей Грамма векторов канонического базиса касательного пространства);
- 2) при замене координат компоненты g_{ij} меняются по закону (*).

Если эти свойства взять в качестве определения, то мы придем к понятию римановой метрики. Более формально, заданный в области Ω в каждой регулярной системе координат y^i набор гладких функций $g_{ij}(y)$, таких что

- 1) при каждом фиксированном y матрица $(g_{ij}(y))$ симметрична и положительно определена,
- 2) при замене координат y^i на $y^{i'}$ компоненты g_{ij} меняются по закону (*),

называется *римановой метрикой*, заданной в области Ω . Другими словами, риманова метрика — это соответствие, которое каждой системе координат (y^1, \dots, y^n) сопоставляет набор гладких функций $(g_{ij}(y))$ образующих в каждой точке (y_0^1, \dots, y_0^n) симметричную положительно определенную матрицу, причем матрицы, соответствующие разным системам координат связаны по закону (*). Числа $g_{ij}(y)$ называются *компонентами метрики в координатах* (y^1, \dots, y^n) . Как уже было отмечено, примерами римановой метрики является стандартная евклидова метрика и индуцированная метрика на поверхности.

Если задана риманова метрика на области Ω , то в каждой точки $P \in \Omega$ можно естественно определить скалярное произведение касательных векторов v и w из $T_P M$ так. Если в области фиксированы регулярные координаты, то относительно этой системы координат определены компоненты (v^1, \dots, v^n) и (w^1, \dots, w^n) векторов v и w и компоненты метрики g_{ij} . Положим:

$$\langle v, w \rangle = g_{ij} v^i w^j.$$

Утверждение 8.1 *Определенное выше скалярное произведение не зависит от выбора координат.*

Доказательство. Действительно, если в новой системе координат $y^{i'}$ векторы v и w имеют соответственно компоненты $v^{i'}$ и $w^{i'}$, а компоненты римановой метрики выглядят как $g_{i'j'}$, то

$$g_{i'j'} v^{i'} w^{j'} = \frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}} \frac{\partial y^j}{\partial y^{j'}} g_{ij} \frac{\partial y^{i'}}{\partial y^k} v^k \frac{\partial y^{j'}}{\partial y^l} w^l = g_{ij} \delta_k^i \delta_l^j v^k w^l = g_{ij} v^i w^j,$$

где через δ_j^i обозначены символы Кронекера. Доказательство закончено.

Таким образом, если в области Ω задана риманова метрика, то по отношению к этой метрике можно вычислять все то, что мы вычисляли для евклидовой метрики, а именно, длины касательных векторов и длины кривых в области Ω , углы между касательными векторами и углы между пересекающимися кривыми в точке пересечения.

Более того, если в области Ω с римановой метрикой задана регулярная k -мерная поверхность, то на ней можно определить *индуцированную метрику* точно так же, как мы это проделали для случая евклидовой метрики.

Замечание. Практически все конструкции, описанные нами выше для индуцированной метрики на поверхности, дословно переносятся на случай римановой метрики в области. В частности, определены изометрии областей с метриками, геодезические в области с метрикой, и т.п.

Замечание. Естественно поставить следующую обратную задачу. Пусть $g_{\alpha\beta}(u^1, \dots, u^k)$ — некоторая риманова метрика в области $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Является ли эта метрика индуцированной? Другими словами, существует ли такая регулярная параметрическая поверхность $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, что соответствующая индуцированная метрика на Ω совпадает с заданной. Это — так называемая задача о *локальном изометричном погружении*. Она весьма сложна и выходит за рамки нашего курса. Оказывается, если не требовать бесконечной гладкости поверхности, то эта задача разрешима положительно. В противном случае — все становится существенно сложнее.

8.2 Билинейные формы и псевдориманова метрика

Отметим, что в доказательстве утверждения 8.1 мы нигде не пользовались ни симметричностью, ни положительной определенностью матрицы $G = (g_{ij})$. Это соображение приводит к общему определению *билинейной* (или *квадратичной*) формы b_{ij} на поверхности (или в области евклидова пространства) как заданного в каждой системе координат y^i набора гладких функций $b_{ij}(y)$, которые при замене этих координат на координаты $y^{i'}$ меняются по закону

$$b_{i'j'} = \frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}} \frac{\partial y^j}{\partial y^{j'}} b_{ij}.$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве утверждения 8.1, показывают, что для любых двух касательных векторов с координатами v^i и w^i выражение $b_{ij}v^i w^j$ не зависит от выбора системы координат (*инвариантно*). Последнее означает, что можно корректно определить значение билинейной формы на паре векторов v и w , положив его равным $b_{ij}v^i w^j$.

Билинейная форма называется *симметричной*, если в некоторых координатах y^i ее компоненты b_{ij} симметричны по i и j , т.е. $b_{ij} = b_{ji}$. Легко

видеть, что симметричность не зависит от выбора координат y^i . Действительно, если $y^{i'}$ — новые координаты, то

$$b_{i'j'} = \frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}} \frac{\partial y^j}{\partial y^{j'}} b_{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}} \frac{\partial y^j}{\partial y^{j'}} b_{ji} = \frac{\partial y^j}{\partial y^{j'}} \frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}} b_{ji} = b_{j'i'}.$$

Таким образом, если компоненты билинейной формы в некоторых координатах симметричны, то они симметричны и в любых координатах.

Частным случаем симметричной билинейной формы является так называемая *псевдориманова метрика*, определяемая следующим дополнительным условием: в некоторых координатах y^i для любой точки $P \in \Omega$ матрица $(b_{ij}(P))$ невырождена. Из явного вида преобразования билинейной формы при замене координат вытекает, что это свойство также не зависит от выбора координат y^i : если в некоторой системе координат матрицы $(b_{ij}(P))$ невырождены, то это же имеет место и в любой системе координат.

Рассмотрим пример псевдоримановой метрики в \mathbb{R}^n , заданной в стандартных координатах в виде

$$ds^2 = - \sum_{i=1}^s (dx^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (dx^j)^2.$$

Такая метрика называется *псевдоевклидовой метрикой индекса s* . Эта метрика порождает в каждом касательном пространстве $T_P \mathbb{R}^n$ *псевдоскалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$* : если $v = (v^1, \dots, v^n)$ и $w = (w^1, \dots, w^n)$ — два вектора из $T_P \mathbb{R}^n$, то

$$\langle v, w \rangle_s = - \sum_{i=1}^s v^i w^i + \sum_{j=s+1}^n v^j w^j.$$

Пространство \mathbb{R}^n , наделенное псевдоевклидовой метрикой индекса s (псевдоскалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$), будем обозначать через \mathbb{R}_s^n и называть *псевдоевклидовым пространством индекса s* .

Назовем *псевдосферой $S_s^{n-1}(R)$ индекса s и радиуса R* множество точек пространства \mathbb{R}_s^n , удовлетворяющих уравнению

$$- \sum_{i=1}^s (x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (x^j)^2 = R^2.$$

Псевдосфера может быть положительного вещественного радиуса, нулевого радиуса и чисто мнимого (комплексного) радиуса, т.е. радиуса $R = i\rho$ (при этом $R^2 = -\rho^2$). Ясно, что псевдосфера нулевого радиуса является конусом, который называется *изотропным конусом*.

Пример. В качестве примера рассмотрим плоскость \mathbb{R}_1^2 , на которой фиксированы стандартные координаты (x^1, x^2) , в которых псевдоскалярное произведение записывается в виде $-(dx^1)^2 + (dx^2)^2$. Тогда изотропный конус — это пара прямых $x^1 = \pm x^2$. Псевдосферы вещественного радиуса расположены в области, ограниченной изотропным конусом, и определяемой неравенством $|x^2| > |x^1|$. Они представляют собой гиперболы. Аналогично, в ограниченной изотропным конусом дополнительной области $|x^1| > |x^2|$, см. рис. 18, расположены псевдосферы мнимого радиуса. Они тоже суть гиперболы.

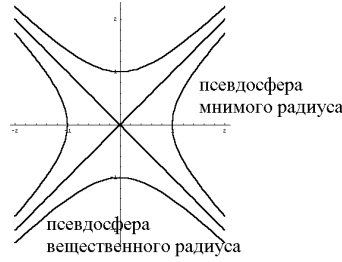


Рис. 18: Плоскость Минковского и псевдосферы.

Упражнение 8.1. Описать все линейные преобразования плоскости Минковского \mathbb{R}_1^2 , сохраняющие псевдоскалярное произведение. Показать, что эти преобразования образуют группу гиперболических поворотов, которая состоит из всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} \pm \cosh \varphi & \pm \sinh \varphi \\ \pm \sinh \varphi & \pm \cosh \varphi \end{pmatrix},$$

где знаки в каждом из столбцов — одинаковы.

8.3 Пространство Минковского

Рассмотрим важный для физики частный случай псевдоевклидова пространства — пространство \mathbb{R}_1^4 , называемое *пространством Минковского* или *пространственно-временным континуумом*. Это пространство возникает в специальной теории относительности. Точки этого пространства имеют координаты (t, x^1, x^2, x^3) и называются *событиями*, причем координата t соответствует времени реализации события, а пространственные координаты (x^1, x^2, x^3) — месту реализации этого события. В качестве псевдоевклидовых координат принято брать координаты $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$, где c — скорость света в вакууме. Таким образом, псевдоевклидово скалярное произведение векторов $P = (P^0 = ct_P, P^1, P^2, P^3)$ и $Q = (Q^0 = ct_Q, Q^1, Q^2, Q^3)$ имеет вид:

$$\langle P, Q \rangle_1 = -P^0 Q^0 + P^1 Q^1 + P^2 Q^2 + P^3 Q^3 = -c^2 t_P t_Q + P^1 Q^1 + P^2 Q^2 + P^3 Q^3.$$

Псевдоевклидово расстояние между точками P и Q , т.е. величина, равная $\sqrt{\langle P - Q, P - Q \rangle_1}$, называется *пространственно-временным интервалом между событиями P и Q* ; нулевые векторы, т.е. векторы V , такие что $\langle V, V \rangle_1 = 0$, называются *световыми* (поэтому изотропный конус называется *световым*), векторы P , для которых $\langle P, P \rangle_1 < 0$, называются *временноподобными*, а векторы P , для которых $\langle P, P \rangle_1 > 0$ — *пространственноподобными*.

Из постулата теории относительности, гласящего, что скорость любого объекта не может превосходить скорости света c , вытекает следующее описание траекторий движения материальных точек: это всевозможные траектории в \mathbb{R}_1^4 с времениподобными векторами скорости. Действительно, каждой траектории $x(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$ соответствует траектория $m(t) = (ct, x(t))$ в пространстве–времени, называемая *мировой линией*. Ясно, что $\langle \dot{m}, \dot{m} \rangle_1 = -c^2 + \langle v, v \rangle$, где $v = \dot{x}$ — вектор скорости материальной точки. Постулат $\langle v, v \rangle < c^2$, очевидно, равносильно условию $\langle \dot{m}, \dot{m} \rangle_1 < 0$.

Пусть M — регулярная поверхность в пространстве \mathbb{R}_s^{n+1} , заданная параметрически в виде $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_s^{n+1}$. Точно также, как и в случае евклидова пространства, заданное в \mathbb{R}_s^{n+1} псевдоевклидово скалярное произведение индуцирует в каждой касательной плоскости $T_P M$ поверхности M псевдоевклидово скалярное произведение — *индуцированную псевдориманову метрику*. Если это псевдоскалярное произведение положительно определено для каждой точки P поверхности M , т.е. является настоящим скалярным произведением, то поверхность M называется *пространственно подобной*.

Пример. Рассмотрим в пространстве Минковского \mathbb{R}_1^{n+1} псевдосферу S_1^n чисто мнимого радиуса iR . По определению, псевдосфера S_1^n задается уравнением

$$-(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = -R^2.$$

Ясно, что псевдосфера S_1^n состоит из двух компонент, разделенных координатной гиперплоскостью $x^1 = 0$ (скажем, при $n = 2$ это обычный двуполостный гиперболоид). Точка $N = (R, 0, \dots, 0)$ называется *северным полюсом псевдосферы*, а точка $S = (-R, 0, \dots, 0)$ — *южным полюсом*. Определим *стереографическую проекцию* σ половинки псевдосферы S_1^n , однозначно определенной неравенством $x^1 > 0$, в координатную плоскость $x^1 = 0$ так. Произвольную точку P из S_1^n соединим с южным полюсом отрезком SP . Этот отрезок, очевидно, пересекает плоскость $x^1 = 0$ в некоторой точке, которую мы обозначим через $\sigma(P)$. Определим отображение σ , положив $\sigma: P \mapsto \sigma(P)$. Если мы обозначим через (u^1, \dots, u^n) стандартные координаты в плоскости $x^1 = 0$ (для точек плоскости $x^1 = 0$ по определению положим $x^i = u^{i-1}$, $i = 2, \dots, n+1$). В этих координатах стереографическая проекция псевдосферы выглядит так.

Лемма 8.1 В сделанных выше обозначениях, если (u^1, \dots, u^n) — точки $\sigma(P)$, то координаты (x^1, \dots, x^{n+1}) точки P могут быть вычислены так:

$$x^1 = R \frac{R^2 + \sum_i (u^i)^2}{R^2 - \sum_i (u^i)^2},$$

$$x^{i+1} = \frac{2R^2 u^i}{R^2 - \sum_i (u^i)^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

Доказательство. Действительно, поскольку треугольники $S\sigma(P)O$ и SPO' подобны, см. рис. 19 имеют место следующие равенства:

$$\frac{u^i}{x^{i+1}} = \frac{R}{R + x^1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Подставляя их в уравнение для псевдосферы, см. выше, и пользуясь предположением $x^1 > 0$, находим:

$$x^1 = R \frac{R^2 + \sum_i (u^i)^2}{R^2 - \sum_i (u^i)^2}.$$

Подставляя это соотношение в предыдущие, получаем:

$$x^{i+1} = \frac{2R^2 u^i}{R^2 - \sum_i (u^i)^2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

что и требовалось.

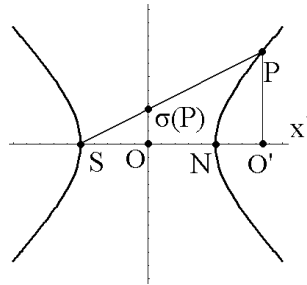


Рис. 19: Стереографическая проекция псевдосферы

Регулярные координаты (u^1, \dots, u^n) на псевдосфере S_1^n называются *координатами стереографической проекции*. Очевидно, координатное отображение σ взаимно однозначно отображает полусферу $S_1^n(x^1 > 0)$ на открытый шар радиуса R в плоскости $x^1 = 0$.

Из леммы 8.1 легко получается следующее утверждение.

Утверждение 8.2 *Псевдосфера чисто мнимого радиуса iR с центром в начале координат в пространстве Минковского \mathbb{R}_1^{n+1} является пространственно подобной поверхностью. Индуцированная на ней первая квадратичная форма в координатах стереографической проекции (соответствующая риманова метрика в шаре радиуса R) имеет вид:*

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - \sum_i (u^i)^2)^2} \sum_i (du^i)^2.$$

Открытый шар радиуса R в \mathbb{R}^n с метрикой

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - \sum_i (u^i)^2)^2} \sum_i (du^i)^2$$

называется *шаром Пуанкаре* (при $n = 2$ — *кругом Пуанкаре*).

Ниже мы воспользуемся псевдоевклидовой метрикой и псевдосферой для построения метрик постоянной отрицательной кривизны и для изучения замечательной геометрии таких метрик, обнаруженной Лобачевским.

Задачи к лекции 8

Задача 8.1. Доказать, что меньший из двух отрезков большого круга, на которые его делят две точки A и B , является кратчайшей кривой на сфере среди всех регулярных кривых, соединяющих A и B .

Задача 8.2. Вычислить длину окружности и площадь круга радиуса ρ на сфере (радиус понимается в смысле метрики на сфере).

Задача 8.3. Показать, что сумма углов сферического треугольника равна $\pi + S$, где S — площадь этого треугольника.

Задача 8.4. Пусть ABC — сферический треугольник на сфере S^2 ; α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C ; a, b, c — длины сторон BC, AC, AB . Доказать теорему косинусов:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha;$$

В частности, доказать теорему Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами b, c и гипотенузой a :

$$\cos a = \cos b \cos c$$

Задача 8.5. Пусть $L \subset \mathbb{R}_s^n$ — линейное подпространство, и $L^\perp = \{v \in \mathbb{R}_s^n \mid \forall w \in L, \langle v, w \rangle_s = 0\}$. Верно ли, что

- 1) $L \oplus L^\perp = \mathbb{R}_s^n$;
- 2) $\dim L + \dim L^\perp = n$?

Задача 8.6. Пусть L^2 — круг Пуанкаре радиуса R , и A и B — точки на одном из его диаметров. Доказать, что отрезок AB является кратчайшей кривой среди всех регулярных кривых, соединяющих A и B в круге Пуанкаре.

Задача 8.7. Вычислить длину окружности и площадь круга радиуса ρ с центром в начале координат в круге Пуанкаре (радиус понимается в смысле соответствующей римановой метрики).

Дополнительный материал к лекции 8

Добавление 8.1. Двумерные поверхности постоянной гауссовой кривизны. В данном разделе мы применим разработанную нами технику для изучения поверхностей постоянной кривизны.

Знаменитая теорема Гаусса, доказанная нами выше, утверждает, что изометричные двумерные поверхности имеют одинаковую гауссову кривизну. В данном разделе мы покажем, что если гауссова кривизна поверхности постоянна, то верно и обратное, т.е. *две поверхности одинаковой постоянной гауссовой кривизны локально изометричны.*

Для доказательства этого факта мы введем на поверхности координаты специального вида — полугеодезические координаты, ассоциированные с натурально параметризованной геодезической (см. Дополнительные материалы к предыдущей лекции). А именно, пусть M , как и выше, — регулярная двумерная поверхность, и пусть $\gamma(t)$ — натурально параметризованная геодезическая на M . Введем в окрестности геодезической $\gamma(t)$ ассоциированные с ней полугеодезические координаты $\text{exp}_\gamma : (t, s) \rightarrow M$. В этих координатах первая квадратичная форма поверхности M записывается особенно просто.

Лемма 8.2 Пусть $\text{exp}_\gamma : (t, s) \rightarrow M$ — полугеодезические координаты на регулярной поверхности M , ассоциированные с натурально параметризованной геодезической $\gamma(t)$. Первая квадратичная форма поверхности в этих координатах имеет вид:

$$ds^2 + G(t, s)dt^2,$$

причем функция G удовлетворяет следующим соотношениям:

$$G(t, 0) = 1, \quad \frac{\partial G(t, 0)}{\partial s} = 0.$$

Доказательство. В силу предложения 7.3, координаты (t, s) являются ортогональными, поэтому первая квадратичная форма имеет вид

$$E(t, s)ds^2 + G(t, s)dt^2.$$

Функция $E(t, s)$ равна, по определению, скалярному квадрату вектора ∂_s , т.е. вектора скорости соответствующей геодезической $\nu_t(s)$, поэтому $E(t, s) = 1$. Далее, функция $G(t, 0)$ равна скалярному квадрату вектора скорости натурально параметризованной геодезической $\gamma_0(t) = \gamma(t)$, поэтому $G(t, 0) = 1$. Осталось вычислить производную от $G(t, s)$ по s при $s = 0$. Имеем:

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial s} = \frac{\partial \langle \partial_t, \partial_t \rangle}{\partial s} = \nabla_s \langle \dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s \rangle = 2 \langle \nabla_s \dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s \rangle.$$

Ясно, что отображение exp_γ задает гладкую вариацию геодезической $\nu_t(s)$ (для каждого t), поэтому мы находимся в условиях леммы 6.2. Получаем в результате, что

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial s} = 2 \langle \nabla_s \dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s \rangle = 2 \langle \nabla_t \nu'_t, \dot{\gamma}_s \rangle.$$

Наконец, так как векторы ν'_t и $\dot{\gamma}_s$ ортогональны,

$$\langle \nabla_t \nu'_t, \dot{\gamma}_s \rangle = - \langle \nu'_t, \nabla_t \dot{\gamma}_s \rangle,$$

поэтому, окончательно

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial s} = 2 \langle \nabla_t \nu'_t, \dot{\gamma}_s \rangle = -2 \langle \nu'_t, \nabla_t \dot{\gamma}_s \rangle.$$

Положив в последнем равенстве $s = 0$, и воспользовавшись тем, что γ_0 — геодезическая, и поэтому $\nabla_t \dot{\gamma} = 0$, получаем, наконец, что

$$\frac{\partial G(t, 0)}{\partial s} = 0.$$

Лемма доказана.

Вычислим теперь гауссову кривизну поверхности в координатах (t, s) . Для этого воспользуемся формулой Гаусса:

$$\sum_{\beta} g_{\beta 2} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^{\beta}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^{\beta}}{\partial u^1} + \sum_k \left(\Gamma_{11}^k \Gamma_{k2}^{\beta} - \Gamma_{12}^k \Gamma_{k1}^{\beta} \right) \right\} = \det Q,$$

где Q — матрица второй квадратичной формы поверхности, g_{ij} — матрица первой квадратичной формы, и Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля. В силу диагональности матрицы первой квадратичной формы, получаем для гауссовой кривизны K следующее выражение:

$$K = \frac{g_{22}}{\det(g_{ij})} \left\{ \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u^1} + \sum_k \left(\Gamma_{11}^k \Gamma_{k2}^2 - \Gamma_{12}^k \Gamma_{k1}^2 \right) \right\}.$$

Вычислим символы Кристоффеля. Положим $u^1 = s$, а $u^2 = t$, и заметим, что матрицы первой квадратичной формы и обратная к ней диагональны, причем $g_{11} = g^{11} = 1$. Получим:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = 0 = \Gamma_{21}^1, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = \frac{-G_s}{2}, \end{aligned}$$

где дифференцирования по t и s обозначены нижними индексами. Точно так же, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = \frac{G_s}{2G} = \Gamma_{21}^2, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \right) = \frac{G_t}{2G}. \end{aligned}$$

Подставив выражения для символов Кристоффеля в формулу Гаусса для кривизны, получим:

$$\begin{aligned} K &= \frac{G}{G} \left\{ 0 - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{G_s}{2G} \right) + 0 + 0 - 0 - \left(\frac{G_s}{2G} \right)^2 \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{G_s}{G} \right)_s - \frac{1}{4} \left(\frac{G_s}{G} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{G_s}{G} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{G_{ss}}{G} = -\frac{(\sqrt{G})_{ss}}{\sqrt{G}} \end{aligned}$$

Полученная формула нам понадобится ниже, поэтому выделим ее в виде леммы.

Лемма 8.3 Пусть метрика двумерной поверхности M в регулярных координатах (u, v) имеет вид $du^2 + G(u, v)dv^2$. Тогда гауссова кривизна K поверхности M может быть вычислена так:

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uv}}{\sqrt{G}}$$

Предположим теперь, что гауссова кривизна K поверхности M постоянна. Тогда мы получаем следующее дифференциальное уравнение на функцию \sqrt{G} :

$$(\sqrt{G})_{ss} + K\sqrt{G} = 0.$$

Это уравнение легко решается, а именно:

$$\sqrt{G} = \begin{cases} A \cos(a(s+B)), & \text{если } K = a^2 > 0, \\ As + B, & \text{если } K = 0, \\ A \cosh(a(s+B)), & \text{если } K = -a^2 < 0, \end{cases}$$

где a — некоторая постоянная, а A и B — произвольные функции от t . Однако, в силу леммы 8.2, для любого t должны иметь место следующие соотношения:

$$1 = \sqrt{G(t, 0)} = \begin{cases} A \cos(aB), & \text{при } K > 0, \\ B, & \text{при } K = 0, \\ A \cosh(aB), & \text{при } K < 0; \end{cases} \quad (*)$$

а также, так как

$$(\sqrt{G})_s = \frac{1}{2} \frac{G_s}{\sqrt{G}} = \begin{cases} -Aa \sin(a(s+B)), & \text{при } K > 0, \\ A, & \text{при } K = 0, \\ Aa \sinh(a(s+B)), & \text{при } K < 0, \end{cases}$$

для любого t имеют также место равенства

$$0 = (\sqrt{G(t, 0)})_s = \begin{cases} -Aa \sin(aB), & \text{если } K = a^2 > 0, \\ A, & \text{если } K = 0, \\ Aa \sinh(aB), & \text{если } K = -a^2 < 0. \end{cases} \quad (**)$$

Осталось заметить, что из тождеств (*) и (**) однозначно находятся функции A и B в каждом из трех рассматриваемых случаев. Окончательно получаем:

$$\sqrt{G} = \begin{cases} \cos(as), & \text{если } K = a^2 > 0, \\ 1, & \text{если } K = 0, \\ \cosh(as), & \text{если } K = -a^2 < 0. \end{cases}$$

Таким образом, задание постоянной гауссовой кривизны однозначно определяет первую квадратичную форму поверхности в некоторой окрестности отрезка любой натурально параметризованной геодезической на ней. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 8.1 Пусть M_1 и M_2 — двумерные регулярные поверхности постоянной гауссовой кривизны K , и пусть P_i — произвольная точка на M_i , $i = 1, 2$. Тогда у точек P_i на M_i , $i = 1, 2$, существуют изометричные окрестности. Другими словами, поверхности M_1 и M_2 локально изометричны.

Поверхности нулевой и положительной постоянной гауссовой кривизны нам уже встречались — это, соответственно, плоскость и сфера.

Следствие 8.1 Двумерная поверхность нулевой гауссовой кривизны локально изометрична плоскости.

Двумерная поверхность положительной гауссовой кривизны a^2 локально изометрична стандартной сфере радиуса $1/a$.

Осталось выяснить, как выглядят поверхности постоянной отрицательной кривизны. Пока про них мы знаем только, что в полугеодезических координатах их метрика имеет вид $ds^2 = du^2 + (\cosh(au))^2 dv^2$, где a — некоторая константа (квадрат которой равен кривизне поверхности с точностью до знака).

Упражнение 8.2. Выяснить, существуют ли поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Если да, то описать их.

Рассмотрим псевдосферу в трехмерном пространстве Минковского \mathbb{R}_1^3 . В этом случае метрика псевдосферы в открытом круге с центром в нуле радиуса R в стандартных координатах (u^1, u^2) имеет вид

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2)^2} ((du^1)^2 + (du^2)^2)$$

и называется *метрикой Лобачевского в координатах стереографической проекции*. Иногда удобно записывать эту метрику в полярных координатах (r, φ) на плоскости, в которых она, очевидно, имеет вид

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - r^2)^2} ((dr)^2 + r^2(d\varphi)^2)$$

Круг радиуса R с введенной на нем метрикой Лобачевского называется *моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского*, или, как мы уже говорили, *кругом Пуанкаре*, см. комментарии в следующем разделе.

Нам, однако, будет удобно переписать эту метрику в других координатах. Для этого мы сначала введем в пространстве Минковского так называемые *псевдосферические координаты*, положив:

$$\begin{aligned} x^1(\rho, \chi, \varphi) &= \rho \cosh \chi, \\ x^2(\rho, \chi, \varphi) &= \rho \sinh \chi \cos \varphi, \\ x^3(\rho, \chi, \varphi) &= \rho \sinh \chi \sin \varphi \end{aligned}$$

Легко проверить, что это — действительно регулярные координаты в \mathbb{R}_1^3 при $\rho > 0$ и $\varphi \in (0, 2\pi)$. С другой стороны, координатная поверхность $\rho = R$, очевидно, совпадает с псевдосферой чисто мнимого радиуса iR . Наконец, псевдоевклидово скалярное произведение в этих координатах имеет вид

$$-(d\rho)^2 + \rho^2(d\chi)^2 + \rho^2(\sinh \chi)^2(d\varphi)^2,$$

поэтому на псевдосфере радиуса iR мы получаем метрику следующего вида:

$$ds^2 = R^2 ((d\chi)^2 + (\sinh \chi)^2(d\varphi)^2).$$

Введем новые параметры $\xi = R\chi$ и $\psi = R\varphi$. Тогда метрика псевдосферы переписется в виде

$$ds^2 = (d\xi)^2 + \left(\sinh \frac{\xi}{R}\right)^2 (d\psi)^2.$$

Для метрик такого вида мы уже вычисляли гауссову кривизну по формуле Гаусса. Из леммы 8.3 получаем, что гауссова кривизна K псевдосферы радиуса iR равна

$$K = -\frac{\left(\sinh \frac{\xi}{R}\right)_{\xi\xi}}{\sinh \frac{\xi}{R}} = -\frac{1}{R^2}.$$

Итак, доказано следующее предложение.

Предложение 8.1 *Гауссова кривизна псевдосферы S_1^2 радиуса iR в \mathbb{R}_1^3 постоянна и равна $-1/R^2$.*

Из теоремы 8.1 немедленно получаем следующее следствие.

Следствие 8.2 *Двумерная поверхность отрицательной гауссовой кривизны $-a^2$ локально изометрична псевдосфере радиуса i/a .*

Упражнение 8.3. Показать, что геодезическими на круге радиуса R с метрикой Лобачевского являются дуги окружностей, пересекающие ограничивающую этот круг окружность под прямым углом, и только они.

Упражнение 8.4. Пусть на верхней полуплоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0$ задана риманова метрика

$$ds^2 = R^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Эта метрика называется *метрикой Лобачевского на верхней полуплоскости*. Вычислить гауссову кривизну верхней полуплоскости в метрике Лобачевского. Как устроены геодезические в этой метрике?

9 Геометрия Лобачевского

В данном разделе мы подробнее остановимся на изучении геометрии метрик постоянной отрицательной кривизны — геометрий Лобачевского. Отметим, однако, что Лобачевский нашел свою знаменитую геометрию из совсем других соображений, с обсуждения которых мы и начнем этот раздел.

9.1 Неевклидовы геометрии

Школьная геометрия, или *евклидова геометрия*, была аксиоматизирована в знаменитых “Началах” Евклида (яобы 3 век до н.э.) Свои построения Евклид базировал на пяти основных *постулатах*.

- 1) через две точки можно провести прямую,
- 2) любой отрезок можно неограниченно продолжить,
- 3) данным радиусом из данной точки можно провести окружность,
- 4) все прямые углы равны между собой (обеспечивается единственность продолжения прямой),
- 5) если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересечены третьей, и если сумма внутренних односторонних углов меньше суммы двух прямых, то прямые пересекаются при неограниченном продолжении с той стороны, с которой эта сумма меньше.

У Евклида были, впрочем, и другие аксиомы (например, аксиомы равенства и порядка).

Обычно пятый постулат формулируют в следующем (эквивалентном) виде:

5') *через данную точку вне прямой можно провести единственную параллельную ей (т.е. не пересекающуюся с ней) прямую.*

Пятый постулат отличается от остальных более громоздкой формулировкой. Он похож на теорему, поэтому многие комментаторы “Начал” Евклида пытались вывести пятый постулат из остальных аксиом евклидовой геометрии, однако их попытки не увенчались успехом.

Существенной переработкой аксиом евклидовой геометрии занялся Гильберт (во второй половине 19-ого века было выяснено, что система аксиом Евклида не полна). В его аксиоматике (1899 год) выделяются три основных неопределяемых понятия: точка, прямая и плоскость, и основные неопределяемые отношения: принадлежит, между, движение (конгруэнтность). Аксиомы делятся на пять групп: аксиомы принадлежности, порядка, движения, непрерывности и параллельности.

Оказывается, пятый постулат Евклида (аксиома параллельности) является независимой аксиомой: существуют геометрии, в которых выполняются все аксиомы, кроме аксиомы параллельности.

9.1.1 Эллиптическая геометрия

Начнем с примера геометрии, в которой пятый постулат не выполнен, а из остальных аксиом выполняются почти все. Рассмотрим стандартную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ единичного радиуса с центром в нуле. Точками будут точки из S^2 , прямыми — большие круги (пересечение сферы S^2 с плоскостями, проходящими через ее центр), а движениями — преобразования сферы, индуцированные ортогональными преобразованиями пространства \mathbb{R}^3 . Ясно, что в такой геометрии вообще нет параллельных прямых. Недостаток — через диаметрально противоположные точки сферы проходит больше одной (фактически, бесконечно много) прямых. От этого неприятного обстоятельства можно легко избавиться, отождествив противоположные точки x и $-x$. В результате мы получим проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ и естественную проекцию $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$. В качестве прямых на $\mathbb{R}P^2$ рассмотрим образы больших кругов при проекции π . Теперь через две разные точки проходит ровно одна прямая, однако имеется еще одно неприятное обстоятельство: как на сфере, так и на $\mathbb{R}P^2$ не определено корректно понятие “между”. Можно показать, что на $\mathbb{R}P^2$ выполняются все аксиомы евклидовой геометрии, за исключением аксиомы параллельности и аксиомы порядка. Построенная только что геометрия на $\mathbb{R}P^2$ называется *эллиптической* или *проективной геометрией*.

Можно ли построить пример геометрии, где выполняются *все* постулаты, кроме пятого? Ответ на этот вопрос положительной. Геометрия, в которой это так, называется геометрией Лобачевского. Оказывается, надо вместо сферы взять псевдосферу. Приведем соответствующее построение.

9.1.2 Плоскость Лобачевского (гиперболическая геометрия)

Рассмотрим пространство \mathbb{R}_1^3 . В координатах (x, y, z) псевдосфера много радиуса iR (двуполостный гиперболоид) задается уравнением

$$-x^2 + y^2 + z^2 = -R^2.$$

Обозначим половинку этой псевдосферы, выделенную условием $x > 0$, через $L^2(R)$, и рассмотрим на $L^2(R)$ геометрию, в которой *прямые* — это пересечения $L^2(R)$ с плоскостями, проходящими через начало координат в \mathbb{R}_1^3 , а движения — преобразования $L^2(R)$, индуцированные преобразованиями пространства \mathbb{R}_1^3 , сохраняющими псевдоскалярное произведение и переводящими $L^2(R)$ в себя. Поверхность $L^2(R)$ называется *плоскостью Лобачевского*, а определенная на ней геометрия — *геометрией Лобачевского* или *гиперболической геометрией*.

Оказывается, построенная геометрия удовлетворяет всем аксиомам евклидовой геометрии, кроме аксиомы параллельности. Проверим последнее. Действительно, пусть ℓ — прямая в $L^2(R)$, порожденная плоскостью \mathcal{L} , и $P \in L^2(R)$ — произвольная точка, не лежащая на ℓ . Обозначим через \mathcal{C}

множество всех векторов из \mathcal{L} неотрицательной (псевдоевклидовой) длины. Легко видеть, что это множество не пусто и ограничено пересечением плоскости \mathcal{L} с изотропным конусом, поэтому само является невырожденным конусом с центром в начале координат. Рассмотрим произвольную прямую m' , лежащую в C , и пусть \mathcal{L}' — плоскость, проходящая через P и m' . Так как $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}' = m'$, и прямая m' не пересекает $L^2(R)$, то соответствующая плоскости \mathcal{L}' прямая ℓ' на $L^2(R)$, проходящая, очевидно, через P , не пересекает прямой ℓ . Из построения видно, что существует бесконечно много таких прямых ℓ' (так как имеется бесконечно много прямых m' из конуса C), что и требовалось.

Для того, чтобы представить себе геометрию Лобачевского более наглядно, удобно воспользоваться другими координатами на $L^2(R)$, а именно, координатами стереографической проекции (мы их обсуждали в предыдущем разделе).

9.2 Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского

Как мы уже знаем, стереографическая проекция переводит плоскость Лобачевского $L^2(R)$ во внутренность круга $D^2(R)$ радиуса R , причем центр этого круга находится в начале координат координатной плоскости Π . Окружность, ограничивающая диск $D^2(R)$, называется *абсолютом*. Обозначим через (u, v) координаты на Π , а через (x, y, z) — координаты в \mathbb{R}_1^3 , причем будем предполагать, что псевдоскалярное произведение в \mathbb{R}_1^3 задано так: $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. Тогда стереографическая проекция записывается так (см. лемму 8.1):

$$\left(x = \frac{2R^2u}{R^2 - u^2 - v^2}, y = \frac{2R^2v}{R^2 - u^2 - v^2}, z = R \frac{R^2 + u^2 + v^2}{R^2 - u^2 - v^2} \right).$$

Метрика на плоскости Лобачевского в этих координатах, как мы уже считали в предыдущем разделе, имеет вид

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} ((du)^2 + (dv)^2).$$

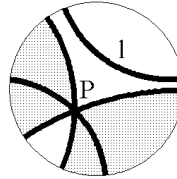
Отметим, что полученная метрика конформно эквивалентна евклидовой метрике.

Следствие 9.1 *Углы между кривыми на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре совпадают с евклидовыми углами, т.е. углами, измеренными в евклидовой метрике.*

Стереографическая проекция обладает следующим важным свойством, доказательство которого получается прямым подсчетом.

Утверждение 9.1 *Стереографическая проекция $\sigma: L^2(R) \rightarrow \Pi$ переводит каждую прямую Лобачевского в дугу окружности, перпендикулярную абсолюту, или в диаметр диска $D^2(R)$.*

Теперь невыполнимость аксиомы параллельных становится еще более наглядной, см. рис. 20.



Через точку P проходит бесконечно много прямых, параллельных прямой l.

Рис. 20: Пятый постулат на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре.

Отметим, что модель Пуанкаре, в сущности, это просто удобная система координат на псевдосфере. Как мы уже не раз видели, в разных задачах удобны разные координаты. Поэтому естественно ожидать, что кроме модели Пуанкаре плоскости Лобачевского, существуют и другие стандартные модели. Для понимания некоторых из них нам понадобятся так называемые дробно-линейные преобразования плоскости.

9.3 Дробно линейные преобразования плоскости

Напомним, что каждую точку плоскости \mathbb{R}^2 , на которой введены стандартные декартовы координаты (u, v) , можно рассматривать как комплексное число $z = u + iv$. Если (r, φ) — полярные координаты на \mathbb{R}^2 , то комплексное число z равно $re^{i\varphi}$, где $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$. Напомним, что комплексное число $\bar{z} = u - iv$ называется *сопряженным* к $z = u + iv$. Преобразование, ставящее в соответствие каждому числу z число \bar{z} , является осевой симметрией относительно оси u .

Рассмотрим преобразования плоскости, связанные с арифметическими операциями над комплексными числами. Пусть $c = c_1 + ic_2$ — некоторое комплексное число. Рассмотрим преобразование плоскости, ставящее каждой точке z точку $z + c$. В явном виде,

$$z = u + iv \mapsto z + c = (u + c_1) + i(v + c_2),$$

поэтому такое преобразование является сдвигом плоскости на вектор c .

Далее, пусть $a = r_a e^{i\varphi_a}$ — некоторое ненулевое комплексное число. Тогда преобразование, ставящее в соответствие каждому числу $z = r e^{i\varphi}$ число

az выглядит так:

$$z = re^{i\varphi} \mapsto az = rr_a e^{i(\varphi+\varphi_a)},$$

иными словами, полярный радиус точки z увеличивается в r_a раз (это — растяжение в r_a раз), а полярный угол φ увеличивается на φ_a (это — поворот плоскости на угол φ_a вокруг начала координат). Таким образом, рассмотренное преобразование есть композиция растяжения и поворота.

Рассмотрим теперь преобразование, ставящее каждой точке z точку $1/z$. В явном виде,

$$z = re^{i\varphi} \mapsto \frac{1}{r} e^{-i\varphi},$$

поэтому полярный радиус r меняется на $1/r$ (это — инверсия относительно стандартной единичной окружности с центром в нуле), а полярный угол меняется с φ на $-\varphi$ (это — осевая симметрия относительно оси u).

Замечание. Отметим, что инверсия определена на всей плоскости, кроме центра инверсии (центр инверсии переходит в бесконечность). Чтобы определить инверсию на всей плоскости, обычно рассматривают *пополненную или расширенную плоскость*, добавляя к плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ бесконечность ∞ . Пополненная плоскость в действительности является двумерной сферой (подробности будут рассказаны в курсе теории функций комплексного переменного). Чтобы это продемонстрировать, рассмотрим стереографическую проекцию сферы S^2 из северного полюса N . Эта проекция отождествляет $S^2 \setminus \{N\}$ с плоскостью \mathbb{R}^2 , при этом бесконечности соответствует северный полюс N . Инверсия порождает естественное взаимнооднозначное отображение сферы S^2 на себя, при котором центр инверсии и северный полюс N меняются местами (центр инверсии отображается в бесконечность, а бесконечность — в центр инверсии).

Пусть теперь a , b , c и d — комплексные числа. Определим *дробно-линейное преобразование* так:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Каждому дробно-линейному преобразованию поставим в соответствие комплексную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Легко проверяется, что это отображение

есть отображение в точку если и только если матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ вырождена (это в точности условие того, что пары комплексных чисел (a, b) и (c, d) пропорциональны с некоторым комплексным коэффициентом, поэтому отношение числителя к знаменателю дробно-линейного отображения постоянно). Так как нас интересуют преобразования (расширенной)

плоскости, *всюду ниже будем предполагать, что матрица* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *невырождена.*

Представим дробно-линейное преобразование в виде композиции преобразований, рассмотренных выше. А именно, возможно два разных случая: $c = 0$ и $c \neq 0$. В первом случае $d \neq 0$ (матрица преобразования невырождена), поэтому

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B,$$

т.е. дробно-линейное преобразование есть композиция поворота, растяжения и сдвига. Во втором случае имеем

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(z + d/c) + b - ad/c}{c(z + d/c)} = \frac{A}{z + B} + C,$$

поэтому рассматриваемое преобразование есть композиция сдвига, инверсии, осевой симметрии, поворота, растяжения и сдвига. Итак, имеет место следующее предложение.

Предложение 9.1 *Каждое дробно-линейное преобразование представимо в одном из двух видов:*

$$z \mapsto Az + B \quad \text{или} \quad z \mapsto \frac{A}{z + B} + C,$$

где A , B , C и D — некоторые комплексные числа. Поэтому каждое дробно-линейное преобразование есть или композиция поворота, растяжения и сдвига (в первом случае), или композиция сдвига, инверсии, осевой симметрии, поворота, растяжения и сдвига (во втором случае).

Отметим, что все преобразования, из которых складывается дробно-линейное преобразование как в первом, так и во втором случаях, переводят окружности в окружности и прямые, а прямые — также в окружности и прямые. Для дальнейшего нам будет удобно рассматривать прямую как *окружность бесконечного радиуса*. После сделанного соглашения, мы можем сформулировать только что доказанный результат так.

Предложение 9.2 *Каждое дробно-линейное преобразование переводит окружности в окружности.*

Рассмотрим композицию $\mu \circ \nu$ двух дробно-линейных преобразований

$$\mu : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{и} \quad \nu : z \mapsto \frac{a'z + b'}{c'z + d'}.$$

Имеем

$$\frac{\frac{a}{c'}z + \frac{b}{d'} + b}{\frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d} = \frac{(aa' + bc')z + ab' + bd'}{(ca' + dc')z + cb' + dd'},$$

т.е. эта композиция также является дробно-линейным преобразованием. Легко видеть, что матрица $M_{\mu \circ \nu}$ этого дробно-линейного преобразования совпадает с произведением матриц $M_\mu = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $M_\nu = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, преобразований μ и ν .

Заметим, что как множество комплексных невырожденных 2×2 -матриц, так и множество дробно-линейных преобразований, образуют группы (первое — по умножению, второе — по композиции). Группа невырожденных комплексных 2×2 -матриц обозначается через $\text{GL}(2, \mathbb{C})$.

Рассмотрим отображение ψ из группы $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ в группу дробно-линейных преобразований:

$$\psi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right).$$

Предложение 9.3 *Отображение ψ из группы комплексных невырожденных 2×2 -матриц в группу дробно-линейных преобразований плоскости является гомоморфизмом на всю группу преобразований, т.е. является эпиморфизмом.*

Вычислим ядро эпиморфизма ψ . Если $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ задает тождественное дробно-линейное отображение $z \mapsto z$, то

$$z = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ откуда } cz^2 + dz = az + b, \Rightarrow c = b = 0, a = d.$$

Итак, ядро отображения ψ состоит из всех диагональных невырожденных матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Ясно, что это ядро изоморфно группе \mathbb{C}^* всех ненулевых комплексных чисел (с операцией умножения).

Итак, мы доказали следующий результат.

Предложение 9.4 *Группа дробно-линейных отображений плоскости изоморфна группе $\text{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$.*

Приведем еще одно полезное представление группы дробно-линейных преобразований. Рассмотрим множество комплексных 2×2 -матриц с единичным определителем. Это множество, очевидно, образует группу, которая называется *комплексной специальной линейной группой* и обозначается через $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Так как дробно-линейное преобразование $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ не

меняется, если поделить числитель и знаменатель на квадратный корень из определителя матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, а эта операция приводит к матрице из $SL(2, \mathbb{C})$, мы заключаем, что каждое дробно-линейное преобразование можно представить некоторой матрицей из $SL(2, \mathbb{C})$. Таким образом, определен эпиморфизм ψ' из $SL(2, \mathbb{C})$ в группу дробно-линейных преобразований. Аналогично проделанному выше, вычислим ядро эпиморфизма ψ' . На сей раз к полученным выше условиям $b = c = 0$ и $a = d$ добавляется условия равенства 1 определителя, т.е. условие $a^2 = 1$. Поэтому в этом случае ядро состоит из двух матриц: единичной I и минус единичной $-I$. Это ядро изоморфно \mathbb{Z}_2 . Итак, доказано следующее предложение.

Предложение 9.5 *Группа дробно-линейных отображений плоскости изоморфна группе $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm I\} = SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.*

9.4 Запись метрики в комплексной форме

В комплексном виде удобно записывать метрику и работать с ней. Особенно удобно работать с конформно-евклидовыми метриками, т.е. метриками, заданными в виде $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$. Для того, чтобы записать метрику в комплексной форме, введем следующие комплексные дифференциалы:

$$dz = du + i dv, \quad d\bar{z} = du - i dv.$$

Легко видеть, что $du^2 + dv^2 = dz d\bar{z}$, поэтому конформно-евклидова метрика $ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2)$ в комплексном виде выглядит так: $ds^2 = \lambda(z, \bar{z}) dz d\bar{z}$.

Замечание. На самом деле, переход к координатам (z, \bar{z}) имеет следующий естественный смысл. Пусть \mathbb{R}^2 — стандартная плоскость и (u, v) — стандартные координаты на ней. Соответствующий базис в линейном пространстве \mathbb{R}^2 — это базис $(\partial/\partial u, \partial/\partial v)$. Рассмотрим *комплексификацию* \mathbb{C}^2 пространства \mathbb{R}^2 , т.е. \mathbb{C}^2 — это множество всевозможных линейных комбинаций векторов $\partial/\partial u$ и $\partial/\partial v$, но уже с комплексными коэффициентами. Ясно, что \mathbb{R}^2 — подпространство в \mathbb{C}^2 , и, кроме того, $(\partial/\partial u, \partial/\partial v)$ — базис в \mathbb{C}^2 . Выберем теперь в \mathbb{C}^2 новый базис $(\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z})$, положив

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Если (u, v) — координаты произвольного вектора V из \mathbb{C}^2 в базисе $(\partial/\partial u, \partial/\partial v)$, то координаты (z, \bar{z}) этого вектора в базисе $(\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z})$ имеют вид $z = u + iv$, и $\bar{z} = u - iv$. Соответствующие линейные формы dz и $d\bar{z}$ связаны с линейными формами du и dv так: $dz = du + idv$, и $d\bar{z} = du - idv$.

Любая риманова метрика на плоской области, это, как мы знаем, симметричная билинейная форма, заданная в каждой точке области (на соответствующем касательном пространстве, которое отождествляется с \mathbb{R}^2). Она, очевидно, задает симметричную билинейную форму на \mathbb{C}^2 . Так вот, именно эта форма в базисе $(\partial/\partial z, \partial/\partial \bar{z})$ имеет указанный вид. Мы же рассматриваем ограничение этой формы на подпространство $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$.

Пусть $z = \frac{aw + b}{cw + d}$ — дробно-линейное преобразование. Тогда

$$dz = \frac{a(cw + d) - c(aw + b)}{(cw + d)^2} dw = \frac{ad - cb}{(cw + d)^2} dw, \quad d\bar{z} = \frac{\overline{ad - cb}}{(cw + d)^2} d\bar{w},$$

поэтому

$$ds^2 = \lambda dz d\bar{z} = \lambda \frac{|ad - cb|^2}{|cw + d|^4} dw d\bar{w},$$

т.е. метрика по-прежнему имеет конформно-евклидов вид. Итак, мы доказали следующий результат.

Предложение 9.6 *Дробно-линейные преобразования сохраняют конформно-евклидов вид метрики. В частности, для конформно-евклидовых метрик, дробно-линейные преобразования сохраняют углы между кривыми.*

Приведем пример комплексной записи метрики евклидовой плоскости, сферы и плоскости Лобачевского:

- 1) $ds^2 = dz d\bar{z}$ (метрика плоскости), $z = u + iv$, (u, v) — стандартные евклидова координаты;
- 2) $ds^2 = \frac{4R^4 dz d\bar{z}}{(R^2 + |z|^2)^2}$ (метрика сферы радиуса R), $z = u + iv$, (u, v) — стереографические координаты;
- 3) $ds^2 = \frac{4R^4 dz d\bar{z}}{(R^2 - |z|^2)^2}$ (метрика плоскости Лобачевского $L^2(R)$ в модели Пуанкаре), $z = u + iv$, (u, v) — стереографические координаты.

9.5 Модель верхней полуплоскости

Построим теперь новую модель плоскости Лобачевского. Рассмотрим дробно-линейное преобразование плоскости, заданное так: $w = -iR \frac{z + iR}{z - iR}$. Это дробно-линейное преобразование задает новые координаты на круге Пуанкаре. Выясним, куда перейдет окружность $S^1 = \{|z| = R\}$, т.е. абсолют плоскости Лобачевского. Так как дробно-линейные преобразования переводят окружности в окружности (напомним, что прямые мы рассматриваем как частный случай окружностей), то образ каждой окружности

однозначно задается образами любых трех ее точек. В качестве таких точек возьмем $-R$, $-iR$ и R . Имеем:

$$\begin{aligned} -R &\mapsto -iR \frac{-R+iR}{-R-iR} = -iR \frac{-1+i}{-1-i} = -iR \frac{(-1+i)(-1+i)}{2} = -iR \frac{-2i}{2} = -R \\ -iR &\mapsto 0 \\ R &\mapsto -iR \frac{R+iR}{R-iR} = -iR \frac{1+i}{1-i} = -i \frac{(1+i)(1+i)}{2} = -iR \frac{2i}{2} = R, \end{aligned}$$

поэтому абсолют переходит в вещественную ось. Отсюда вытекает, что внутренность круга $D^2(R)$ при рассматриваемом преобразовании переходит или в верхнюю, или в нижнюю полуплоскость. Поскольку точка $0 \in D^2(R)$ переходит в точку iR , внутренность $D^2(R)$ переходит в верхнюю полуплоскость. Из предложений 9.2 и 9.6 вытекает, что прямые модели Пуанкаре переходят в окружности и прямые, перпендикулярные вещественной оси. Эта модель плоскости Лобачевского называется *моделью верхней полуплоскости*.

Легко вычислить, как выглядит метрика Лобачевского в модели верхней полуплоскости.

Предложение 9.7 *В модели верхней полуплоскости метрика Лобачевского имеет вид:*

$$ds^2 = R^2 \frac{du^2 + dv^2}{v^2} = -\frac{4R^2 dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2},$$

где $w = u + iv$ — соответствующая комплексная координата.

9.6 Изометрии плоскости Лобачевского

Для понимания геометрии Лобачевского, а также для конкретных вычислений в этой геометрии очень полезно выяснить, как устроены движения в этой геометрии. Для этого мы воспользуемся моделью верхней полуплоскости.

Напомним, что в этой модели

$$ds^2 = -\frac{4R^2 dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2},$$

где $z = u + iv$. Будем искать движения в виде дробно-линейных преобразований:

$$z = \frac{aw + b}{cw + d}.$$

Для простоты, в дальнейших вычислениях положим $R = 1$.

Рассмотрим важный частный случай *вещественных* дробно-линейных преобразований, определяемых тем, что все их коэффициенты a , b , c и d —

вещественны. Выясним, когда вещественное дробно-линейное преобразование сохраняет верхнюю полуплоскость (каждое движение, по определению, должно сохранять верхнюю полуплоскость). Для этого вычислим мнимую часть такого преобразования. Имеем

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \left(\frac{aw + b}{cw + d} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{ac|w|^2 + bd + adw + bc\bar{w}}{|cw + d|^2} \right) = \frac{(ad - bc) \operatorname{Im} w}{|cw + d|^2},$$

поэтому если для любого w , такого что $\operatorname{Im} w > 0$, выполняется $\operatorname{Im} z > 0$, то величина $ad - bc$, равная определителю матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, положительна. Верно, очевидно, и обратное. Таким образом, мы доказали следующие результаты.

Теорема 9.1 *Вещественное дробно-линейное преобразование $z = \frac{aw + b}{cw + d}$ сохраняет верхнюю полуплоскость если и только если матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ этого преобразования имеет положительный определитель.*

Замечание. В теории функций комплексного переменного будет доказано, что *любое* дробно-линейное преобразование, сохраняющее верхнюю полуплоскость, может быть представлено в виде вещественного преобразования, для которого соответствующая матрица имеет положительный определитель.

Далее, пусть $z = \frac{aw + b}{cw + d}$ — вещественное преобразование с положительным определителем Δ . Деля числитель и знаменатель на $\sqrt{\Delta}$, мы не изменим наше преобразование, однако превратим матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в матрицу с единичным определителем. Множество вещественных 2×2 -матриц с единичным определителем образует, очевидно, группу, которая называется *специальной линейной группой* и обозначается через $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$.

Предложение 9.8 *Каждое вещественное дробно-линейное преобразование, сохраняющее верхнюю полуплоскость, можно представить матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$. Обратное, каждое дробно-линейное преобразование вида $z = \frac{aw + b}{cw + d}$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — матрица из $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$, сохраняет верхнюю полуплоскость.*

Покажем, что дробно-линейные преобразования $z = \frac{aw + b}{cw + d}$, соответствующие матрицам из $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$, сохраняют метрику Лобачевского, т.е. явля-

ются движениями. Действительно,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\frac{4dz d\bar{z}}{(z - \bar{z})^2} = -\frac{4\frac{a(cw+d)-c(aw+b)}{(cw+d)^2}dw \frac{a(c\bar{w}+d)-c(a\bar{w}+b)}{(c\bar{w}+d)^2}d\bar{w}}{\left(\frac{aw+b}{cw+d} - \frac{a\bar{w}+b}{c\bar{w}+d}\right)^2} = \\ &= -\frac{4\frac{ad-cb}{(cw+d)^2} \frac{ad-cb}{(c\bar{w}+d)^2}dw d\bar{w}}{\left(\frac{(aw+b)(c\bar{w}+d)-(cw+d)(a\bar{w}+b)}{(cw+d)(c\bar{w}+d)}\right)^2} = -\frac{4\frac{(ad-cb)^2}{|cw+d|^4}}{\left(\frac{(ad-bc)(w-\bar{w})}{|cw+d|^2}\right)^2} = -\frac{4dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Предложение 9.9 *Вещественные дробно-линейные преобразования, сохраняющие верхнюю полуплоскость, являются движениями плоскости Лобачевского.*

Далее, легко видеть, что вещественные дробно-линейные преобразования, сохраняющие верхнюю полуплоскость, образуют группу. Из общих результатов, касающихся дробно-линейных преобразований, немедленно вытекает следующий результат.

Лемма 9.1 *Отображение ν , ставящее в соответствие каждой матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из $SL(2, \mathbb{R})$ дробно-линейное преобразование $z = \frac{aw+b}{cw+d}$, является эпиморфизмом групп.*

Также как и выше, легко найти ядро этого гомоморфизма.

Лемма 9.2 *Ядро гомоморфизма ν состоит из единичной матрицы E и минус единичной матрицы $-E$. Таким образом, ядро гомоморфизма ν изоморфно группе \mathbb{Z}_2 .*

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 9.2 *Подгруппа группы движений плоскости Лобачевского, составленная из всех вещественных дробно-линейных преобразований, изоморфна $SL(2, \mathbb{R})/\{E, -E\}$.*

Замечание. Чтобы получить полную группу движений плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости, надо добавить еще композиции описанных только что вещественных дробно-линейных преобразований с преобразованием $z \mapsto -\bar{z}$.

На этом кратком обзоре геометрии Лобачевского мы заканчиваем знакомство с классической дифференциальной геометрией.

Задачи к лекции 9

Задача 9.1. Доказать, что если $w = f(z)$ — дробно-линейное отображение, то для любых четырех точек z, z_1, z_2, z_3 и их образов w, w_1, w_2, w_3 выполняется следующее равенство:

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{w - w_1}{w - w_3} : \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3}.$$

Иными словами, двойное отношение $\frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$ сохраняется при дробно-линейных преобразованиях. Вывести отсюда, что для любые три различные точки можно перевести в любые три различные точки с помощью некоторого дробно-линейного преобразования, причем такое преобразование единственно.

Задача 9.2. Даны две точки на плоскости Лобачевского: $A = (1/2, 1/2)$, $B = (0.3, 0.9)$. Найти середину отрезка AB в случае, когда координаты точек рассматриваются

- 1) в модели Пуанкаре;
- 2) в модели верхней полуплоскости.

Задача 9.3. Доказать, что отрезок прямой на плоскости Лобачевского между точками A и B есть кратчайшая кривая, соединяющая точки A и B .

Задача 9.4. Расстояние между точками на плоскости Лобачевского — это длина отрезка прямой Лобачевского между этими точка. Найти расстояние между точками на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре и в модели верхней полуплоскости.

Задача 9.5. Как выглядят окружности на плоскости Лобачевского? Вычислить длину окружности и площадь круга радиуса ρ на плоскости Лобачевского (радиус понимается в смысле метрики на плоскости Лобачевского).

Задача 9.6. Показать, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского равна $\pi - S$, где S — площадь этого треугольника.

Задача 9.7. Пусть ABC — треугольник на плоскости Лобачевского; α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C ; a, b, c — длины сторон BC, AC, AB . Доказать две теоремы косинусов:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \gamma \\ (2) \quad & \cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \operatorname{ch} c \end{aligned}$$

В частности, доказать теорему Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c :

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$$

Задача 9.8. Пусть ABC — треугольник на плоскости Лобачевского; α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C ; a, b, c — длины сторон BC, AC, AB . Доказать теорему синусов на плоскости Лобачевского:

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin \gamma}.$$

Задача 9.9. Во всякий ли треугольник на плоскости Лобачевского можно вписать окружность? Всякий ли треугольник на плоскости Лобачевского можно описать окружностью?

Дополнительный материал к лекции 9

Добавление 9.1. Свойства стереографической проекции. Приведем здесь доказательство утверждения 9.1, т.е. проверим, что стереографическая проекция $\sigma: L^2(R) \rightarrow \Pi$ переводит каждую прямую Лобачевского в дугу окружности, перпендикулярную абсолюту, или в диаметр диска $D^2(R)$.

Пусть ℓ — прямая на плоскости Лобачевского, полученная пересечением плоскости Лобачевского $L^2(R)$ с плоскостью \mathcal{L} , проходящей через начало координат. Если \mathcal{L} проходит через северный полюс $N = (0, 0, R)$, то южный полюс S и все прямые, соединяющие S и точки из ℓ , лежат в плоскости \mathcal{L} , поэтому стереографический образ прямой ℓ есть диаметр диска $D^2(R)$, полученный пересечением плоскости \mathcal{L} и $D^2(R)$, проходящей через центр круга $D^2(R)$.

Пусть теперь ℓ не проходит через северный полюс N . Пусть плоскость \mathcal{L} задается уравнением $ax + by + cz = 0$. Из сделанных выше предположений вытекает, что $c \neq 0$. Подставляя в это уравнение выражение для x, y и z через стереографические координаты u и v , получаем

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= a \frac{2R^2 u}{R^2 - u^2 - v^2} + b \frac{2R^2 v}{R^2 - u^2 - v^2} + cR \frac{R^2 + u^2 + v^2}{R^2 - u^2 - v^2} = \\ &= \frac{2aR^2 u + 2bR^2 v + cR(R^2 + u^2 + v^2)}{R^2 - u^2 - v^2} = 0, \end{aligned}$$

откуда, разделив на $cR \neq 0$,

$$\begin{aligned} 2 \frac{aR}{c} u + 2 \frac{bR}{c} v + (R^2 + u^2 + v^2) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(u + \frac{aR}{c} \right)^2 + \left(v + \frac{bR}{c} \right)^2 &= R^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{c^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Последнее уравнение задает некоторую окружность \bar{S}^1 в плоскости Π . Легко видеть, что радиус R абсолюта S^1 , радиус $R\sqrt{(a^2 + b^2)/c^2 - 1}$ окружности \bar{S}^1 , и расстояние $R\sqrt{(a^2 + b^2)/c^2}$ между центрами окружностей S^1 и \bar{S}^1 образуют Пифагорову тройку, т.е. сумма квадратов радиусов равна квадрату расстояния между центрами. Поэтому рассматриваемые окружности ортогональны, что и требовалось.

Добавление 9.2. Метрика в модели верхней полуплоскости. Докажем предложение 9.7.

Напомним, что дробно-линейное преобразование, переводящее круг Пуанкаре в верхнюю полуплоскость выглядит так: $w = -iR \frac{z + iR}{z - iR}$, а метрика Лобачевского в модели

Пуанкаре имеет (в комплексной форме) вид $ds^2 = \frac{4R^4 dz d\bar{z}}{(R^2 - |z|^2)^2}$.

Найдем обратное дробно-линейное преобразование, переводящее модель верхней полуплоскости в модель Пуанкаре. В силу предложения 9.4, обратное преобразование задается обратной матрицей и, поэтому, имеет вид:

$$z = iR \frac{-R - iw}{R - iw} = iR \frac{w - iR}{w + iR}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} dz &= iR \frac{1(w + iR) - 1(w - iR)}{(w + iR)^2} dw = -\frac{2R^2}{(w + iR)^2} dw, \quad d\bar{z} = -\frac{2R^2}{(w + iR)^2} d\bar{w}, \\ dz d\bar{z} &= \frac{4R^4 dw d\bar{w}}{|w + iR|^4}. \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} (R^2 - |z|^2)^2 &= R^4 \left(1 - \frac{w - iR \overline{w - iR}}{w + iR \overline{w + iR}} \right)^2 = \\ &= \frac{R^4}{|w + iR|^4} (-iRw + iR\bar{w} - iRw + iR\bar{w})^2 = -\frac{4R^6(w - \bar{w})^2}{|w + iR|^4}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{4R^4 dz d\bar{z}}{(R^2 - |z|^2)^2} = \\ &= -\frac{16R^8 dw d\bar{w}}{|w + iR|^4} \Big/ \frac{4R^6(w - \bar{w})^2}{|w + iR|^4} = -\frac{4R^2 dw d\bar{w}}{(w - \bar{w})^2} = R^2 \frac{du^2 + dv^2}{v^2}. \end{aligned}$$

Добавление 9.3. Движения плоскости Лобачевского в Модели Пуанкаре. Зная движения плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости, несложно получить описание движений в модели Пуанкаре. Для этого, очевидно, достаточно сделать соответствующую замену координат. Приведем соответствующий результат.

Дробно-линейные преобразования, сохраняющие единичный круг, являются движениями метрики Лобачевского в модели Пуанкаре. Матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ таких преобразований удовлетворяют следующим условиям:

$$|a|^2 - |c|^2 = 1, \quad |b|^2 - |d|^2 = -1, \quad a\bar{b} - c\bar{d} = 0,$$

и, поэтому, записываются в виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Группа таких матриц обозначается через $SU(1, 1)$. Другое удобное представление дробно-линейных преобразований, сохраняющих единичный круг:

$$z \mapsto e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad |z_0| < 1.$$

Чтобы получить полную группу движений плоскости Лобачевского, необходимо добавить сопряжение $z \mapsto \bar{z}$.

Добавление 9.4. Расстояние между точками на плоскости Лобачевского. В данном разделе мы приведем несколько фактов, иллюстрирующих метрические соотношения на плоскости Лобачевского. Многие из них приводятся в виде упражнений.

Упражнение 9.1. Рассмотрим модель Пуанкаре плоскости Лобачевского $L^2(R)$, и пусть O центр круга $D^2(R)$. Диаметры круга $L^2(R)$, по определению, являются прямыми в геометрии Лобачевского. Показать, что длина l_L прямолинейного отрезка OA в метрике Лобачевского равна

$$l_L = 2R \operatorname{arctanh} \frac{l_E}{R},$$

где $l_E = |OA|$ — евклидова длина отрезка OA .

Упражнение 9.2. Показать, что длина окружности с центром в точке O и радиуса ρ на плоскости Лобачевского $L^2(R)$ равна $2\pi R \sinh(\rho/R)$.

Упражнение 9.3. Рассмотрим модель верхней полуплоскости. Пусть P_1 и P_2 — точки на верхней полуплоскости, имеющие полярные координаты (r_0, φ_i) , $i = 1, 2$. Через P_1 и P_2 проходит, очевидно, единственная прямая на плоскости Лобачевского, которая совпадает с координатной линией $r = r_0$ полярных координат. Показать, что длина отрезка P_1P_2 прямой на плоскости Лобачевского может быть вычислена так:

$$|P_1P_2|_L = \log \left(\frac{\tan(\varphi_2/2)}{\tan(\varphi_1/2)} \right).$$

Упражнение 9.4. Пусть P_1 и P_2 — точки на верхней полуплоскости, лежащие на одной вертикальной прямой, и пусть (x_i, y_i) — их декартовы координаты. Показать, что длина отрезка P_1P_2 прямой на плоскости Лобачевского может быть вычислена так:

$$|P_1P_2|_L = \log\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Упражнение 9.5. Вычислить длину отрезка прямой на плоскости Лобачевского, соединяющего любые две точки P_1 и P_2 верхней полуплоскости.

Добавление 9.5. Треугольники на плоскости Лобачевского. Соотношения между элементами треугольника на плоскости Лобачевского в целом аналогичны соотношениям между элементами треугольника на евклидовой плоскости, хотя вид конкретных формул довольно сильно отличается. Мы докажем здесь несколько характерных утверждений, и приведем ряд задач, позволяющих получить более полное представление о геометрии Лобачевского. Всюду ниже длину единственного отрезка прямой на плоскости Лобачевского, соединяющего две фиксированных точки A и B , вычисленную в метрике Лобачевского, будем обозначать через $|AB|_L$. Отметим также, что при доказательстве разных утверждений удобно пользоваться разными моделями геометрии Лобачевского.

Предложение 9.10 (Неравенство треугольника) Пусть ABC — произвольный треугольник на плоскости Лобачевского. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$|AB|_L + |BC|_L \geq |AC|_L.$$

Доказательство. Мы докажем это неравенство непосредственно на псевдосфере S_1^2 радиуса iR в \mathbb{R}_1^3 . Прямые на плоскости Лобачевского, напомним, соответствуют плоские сечения половинки псевдосферы $S_1^2(x^1 > 0)$ плоскостями, проходящими через нуль. Пусть A и B — произвольные точки на этой половине псевдосферы, и обозначим через e_A и e_B соответствующие векторы в \mathbb{R}_1^3 . Рассмотрим плоскость Π_{AB} , проходящую через нуль и точки A и B .

Поскольку псевдоскалярный квадрат векторов e_A и e_B равен $-R^2$, псевдоскалярное произведение, индуцированное на Π_{AB} из \mathbb{R}_1^3 — индефинитно и невырождено, поэтому Π_{AB} — это \mathbb{R}_1^2 . Ясно, что на Π_{AB} , как и на любой плоскости Минковского, можно сделать такую линейную замену координат, сохраняющую псевдоскалярное произведение, что в новых координатах, которые мы обозначим через (x, y) , псевдоскалярное произведение запишется в виде $-dx^2 + dy^2$. Пересечение плоскости Π_{AB} с псевдосферой чисто мнимого радиуса iR — это псевдоокружность того же радиуса iR , которая в координатах (x, y) имеет вид $-x^2 + y^2 = -R^2$.

Пусть вектор e_A имеет в координатах (x, y) координаты (x_A, y_A) , а вектор e_B — (x_B, y_B) . Вычислим длину дуги гиперболы между точками A и B . Для этого параметризуем гиперболу в виде $x(\chi) = R \cosh \chi$, $y(\chi) = R \sinh \chi$, положим $x_A = R \cosh \chi_A$, $y_A = R \sinh \chi_A$, и $x_B = R \cosh \chi_B$, $y_B = R \sinh \chi_B$, и пусть $\chi_B > \chi_A$. Имеем:

$$\begin{aligned} |AB|_L &= \int_{\chi_A}^{\chi_B} \sqrt{-R^2(\sin \chi)^2 + R^2(\cosh \chi)^2} d\chi \\ &= R(\chi_B - \chi_A) = R(\operatorname{arccosh}(x_B/R) - \operatorname{arccosh}(x_A/R)). \end{aligned}$$

Теперь, воспользовавшись тем, что $\cosh(\alpha - \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta - \sinh \alpha \sinh \beta$, а также основным гиперболическим тождеством $\sinh \alpha = \sqrt{(\cosh \alpha)^2 - 1}$, получим:

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{|AB|_L}{R}\right) &= \frac{x_A x_B}{R^2} - \frac{\sqrt{x_A^2 - R^2} \sqrt{x_B^2 - R^2}}{R^2} \\ &= \frac{x_A x_B - y_A y_B}{R^2} = \frac{-\langle e_A, e_B \rangle}{R^2}, \end{aligned}$$

где через $\langle e_A, e_B \rangle$ обозначено псевдоскалярное произведение векторов e_A и e_B . Поэтому:

$$|AB|_L = R \operatorname{arccosh} \left(\frac{-\langle e_A, e_B \rangle}{R^2} \right).$$

Полученный нами результат имеет и самостоятельный интерес. Напомним, что $\cos(x/i) = \cosh x$. Поэтому предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$\cos \left(\frac{|AB|_L}{iR} \right) = \frac{\langle e_A, e_B \rangle}{(iR)^2}.$$

Утверждение 9.2 *Косинус отношения длины дуги AB псевдоокружности к ее радиусу равен псевдоскалярному произведению радиус-векторов точек A и B , деленному на квадрат радиуса окружности. В этом смысле, отношение длины дуги окружности к радиусу может играть роль меры угла между радиус-векторами концевых точек этой дуги.*

Вернемся к доказательству предложения. Пусть A, B и C — произвольные точки на половине $S_1^2(x^1 > 0)$ псевдосферы, и e_A, e_B и e_C — соответствующие векторы из \mathbb{R}_1^3 . Из только что полученной формулы вытекает, что неравенство треугольника эквивалентно следующему соотношению:

$$\operatorname{arccosh} \left(\frac{-\langle e_A, e_B \rangle}{R^2} \right) + \operatorname{arccosh} \left(\frac{-\langle e_B, e_C \rangle}{R^2} \right) \geq \operatorname{arccosh} \left(\frac{-\langle e_A, e_C \rangle}{R^2} \right).$$

Отметим, что все попарные скалярные произведения времениподобных векторов e_A, e_B и e_C отрицательны, поэтому, применяя к последнему неравенству функцию \cosh , и воспользовавшись формулой гиперболического косинуса суммы, мы получим следующее эквивалентное неравенство:

$$\langle e_A, e_B \rangle \langle e_B, e_C \rangle + \sqrt{\langle e_A, e_B \rangle^2 - R^4} \sqrt{\langle e_B, e_C \rangle^2 - R^4} \geq -R^2 \langle e_A, e_C \rangle,$$

которое естественно переписать в виде

$$\sqrt{\langle e_A, e_B \rangle^2 - R^4} \sqrt{\langle e_B, e_C \rangle^2 - R^4} \geq -R^2 \langle e_A, e_C \rangle - \langle e_A, e_B \rangle \langle e_B, e_C \rangle.$$

Возводя обе части в квадрат, имеем:

$$\begin{aligned} \langle e_A, e_B \rangle^2 \langle e_B, e_C \rangle^2 - R^4 \langle e_A, e_B \rangle^2 - R^4 \langle e_B, e_C \rangle^2 + R^8 \geq \\ R^4 \langle e_A, e_C \rangle^2 + \langle e_A, e_B \rangle^2 \langle e_B, e_C \rangle^2 + 2R^2 \langle e_A, e_C \rangle \langle e_A, e_B \rangle \langle e_B, e_C \rangle, \end{aligned}$$

или, приводя подобные, перенося все в одну сторону, и сокращая на R^2 ,

$$\begin{aligned} 0 \geq -R^6 + 2\langle e_A, e_C \rangle \langle e_A, e_B \rangle \langle e_B, e_C \rangle \\ + R^2 \langle e_A, e_C \rangle^2 + R^2 \langle e_A, e_B \rangle^2 + R^2 \langle e_B, e_C \rangle^2. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что последнее выражение совпадает с определителем матрицы Грамма системы векторов (e_A, e_B, e_C) . Знак этого определителя не меняется при заменах координат, поэтому он отрицателен. Тем самым, неравенство треугольника доказано.

Упражнение 9.6. Показать, что длина прямолинейного отрезка, соединяющего две любые фиксированные точки на плоскости Лобачевского, меньше длины любой другой кривой, соединяющей эти точки.

Следующее утверждение, как несложно проверить, эквивалентно наличию бесконечного числа прямых проходящих через фиксированную точку и параллельных данной.

Предложение 9.11 *Сумма углов произвольного треугольника ABC на плоскости Лобачевского строго меньше чем π .*

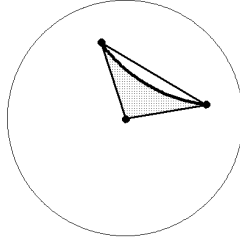


Рис. 21: Сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского.

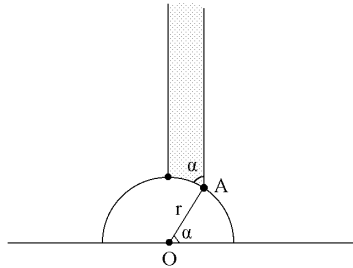
Доказательство. Доказательство этого факта проще всего провести в модели Пуанкаре на круге. Действительно, сначала совместим с помощью движения плоскости Лобачевского одну из вершин треугольника с центром круга. Ясно, что сумма углов при этом не изменится. С другой стороны, теперь очевидно, см. рис. 21, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского меньше чем сумма углов соответствующего евклидова треугольника (мы воспользовались конформностью метрики Лобачевского). Доказательство закончено.

Оказывается, на плоскости Лобачевского существует связь между суммой углов треугольника и его площадью. А именно, имеет место следующее предложение.

Предложение 9.12 Пусть ABC — произвольный треугольник на плоскости Лобачевского $L^2(R)$, и α , β и γ — его углы в вершинах A , B и C . Тогда, если S — площадь треугольника ABC , то

$$S = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma).$$

Доказательство. Воспользуемся теперь моделью на верхней полуплоскости. Напомним, что площадь области в римановой метрике — это интеграл по этой области от корня из определителя матрицы метрики. На верхней полуплоскости определитель метрики равен R^4/y^4 , поэтому следует интегрировать функцию R^2/y^2 .

Рис. 22: Треугольник с углами α , $\pi/2$ и 0.

Докажем сначала требуемое равенство для треугольника с углами α , $\pi/2$ и 0. При этом движением плоскости Лобачевского переведем параллельные стороны рассматриваемого треугольника в параллельные оси ординат лучи, причем будем предполагать, что один из этих лучей лежит на самой оси ординат, см. рис. 22. Обозначив через r

евклидов радиус окружности и заметив, что угол между радиусом этой окружности, приходящим в вершину A и осью ординат равен α , получим:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{r \cos \alpha} dx \int_{\sqrt{r^2 - x^2}}^{\infty} \frac{R^2 dy}{y^2} \\ &= R^2 \int_0^{r \cos \alpha} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = R^2 \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^{r \cos \alpha} = R^2 \sin(\cos \alpha) \\ &= R^2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = R^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2} - 0 - \alpha \right), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Пусть теперь углы треугольника ABC — суть α , β и 0 . Без ограничения общности можно предполагать, что стороны этого треугольника параллельны оси ординат. Пусть, для определенности, параллельные стороны AC и BC треугольника ABC лежат по разные стороны от вертикального луча, перпендикулярного соответствующей стороне AB окружности, см. рис. 23. (Второй случай разбирается аналогично.) Площадь этого треугольника складывается из площадей двух треугольников, углы которых равны соответственно α , $\pi/2$, 0 и β , $\pi/2$, 0 . Поэтому для площади такого треугольника имеем:

$$S = R^2(\pi - \pi/2 - \alpha) + R^2(\pi - \pi/2 - \beta) = R^2(\pi - \alpha - \beta),$$

что и требовалось.

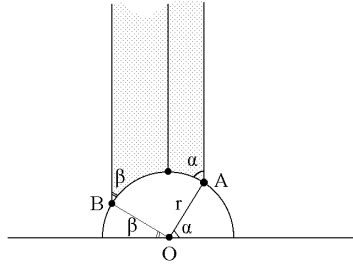


Рис. 23: Треугольник с углами α , β и 0 .

Отметим, что вершина треугольника с нулевым углом может лежать и на вещественной оси. Действительно, треугольник с вершиной на вещественной оси в точке a переводится в треугольник с вершиной на бесконечности изометрией плоскости Лобачевского вида $w(z) = -1/(z - a)$ (проверьте, что это изометрия).

Пусть, наконец, мы имеем треугольник общего вида, т.е. все его вершины лежат в верхней полуплоскости $y > 0$. Продолжим одну из сторон треугольника, скажем AB за точку B до пересечения с абсолютном в точке D , и проведем луч CD , см. рис. 24. Тогда треугольники ACD и CBD имеют нулевой угол в точке D . Обозначим угол CBD через δ , а угол BDC через ε . Искомая площадь S треугольника ABC может быть найдена как разность площадей треугольника ACD и треугольника CBD . Получим:

$$\begin{aligned} S &= R^2(\pi - \alpha - (\gamma + \varepsilon)) - R^2(\pi - \varepsilon - \delta) \\ &= R^2(\pi - \alpha - (\pi - \delta) - \gamma) = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma). \end{aligned}$$

Таким образом, предложение полностью доказано.

Ниже в виде задач приведены аналоги теоремы Пифагора, теоремы косинусов и теоремы синусов для плоскости Лобачевского. Пусть, как и выше ABC — произвольный треугольник на плоскости Лобачевского, α , β и γ — углы в вершинах A , B и C , а a , b и c — длины сторон, противоположащих вершинам A , B и C соответственно.

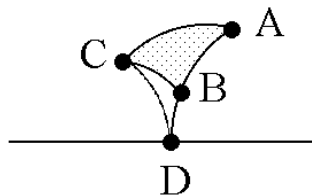


Рис. 24: Треугольник с произвольными углами.

Упражнение 9.7. Доказать теорему Пифагора для геометрии Лобачевского: если угол γ — прямой, то имеет место следующее соотношение: $\cosh c = \cosh a \cosh b$.

Упражнение 9.8. Доказать теорему синусов для геометрии Лобачевского:

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

Упражнение 9.9. Доказать теорему косинусов для геометрии Лобачевского:

$$\cos \alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}.$$

Упражнение 9.10. Доказать следующее равенство, не имеющее аналогов в евклидовой геометрии, и выражающее сторону треугольника через его углы:

$$\cosh a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$$

Из этой формулы вытекает, в частности, признак конгруэнтности треугольников на плоскости Лобачевского “по трем углам”.

10 Топологические пространства

В данном разделе мы познакомимся с общей топологией — частью математики, которая изучает наиболее общие свойства геометрических объектов, не меняющиеся при “непрерывных деформациях”. Понятие непрерывности знакомо нам из математического анализа. В основе его лежит, на самом деле, некое представление о “близости” между элементами рассматриваемых множеств. Однако, на абстрактном множестве понятие близости не определено. Общая топология изучает множества, на которых введена дополнительная структура — структура топологического пространства, позволяющая определить понятие близости элементов такого множества — точек, наиболее общим образом. Множество близких точек называется в топологии “окрестностью”.

Для нас понятие топологического пространства послужит основой для определения центрального объекта современной дифференциальной геометрии — гладкого многообразия. Выше мы подробно изучили кривые и поверхности, однако построенная нами теория носила *локальный* характер. Говоря неформально, многообразие — это объект “склеенный” из кусочков, каждый из которых представляет собой регулярную поверхность. Чтобы определить правила такого склеивания нам и понадобится язык топологии.

10.1 Метрические и топологические пространства

В данном разделе мы определяем основные объекты, изучаемые в общей топологии — метрические и топологические пространства, а также непрерывные отображения таких пространств. Мы начнем с более привычного объекта — с метрического пространства, возможно, уже знакомого из курса математического анализа.

10.1.1 Метрические пространства

В качестве “меры близости” в метрических пространствах выступает обладающая специальными свойствами функция расстояния между точками. В терминах этой функции можно легко определить понятие окрестности точки.

Пусть X — произвольное множество. *Метрикой* или *функцией расстояния* на множестве X называется неотрицательная вещественная функция ρ , определенная на декартовом произведении $X \times X$ и обладающая следующими свойствами:

- 1) невырожденность: $\rho(x, y) = 0$ если и только если $x = y$,
- 2) симметричность: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых x и y из X ,
- 3) неравенство треугольника: $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ для любых точек x, y и z из X .

Определение. Множество X вместе с введенной на нем метрикой ρ называется *метрическим пространством* и обозначается через (X, ρ) . Впрочем мы довольно часто для краткости будем обозначать метрическое пространство (X, ρ) просто через X . Элементы метрического пространства называются *точками*. Значение $\rho(x, y)$ метрики ρ на паре точек x и y называется *расстоянием между точками*.

Пусть x — произвольная точка метрического пространства (X, ρ) . *Шаровой окрестностью* $O_\varepsilon(x)$ точки x радиуса ε или *открытым шаром с центром в x радиуса ε* называется множество всех таких точек y из X , что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Точка a множества A называется *внутренней точкой* для A , если в A содержится некоторая шаровая окрестность $O_\varepsilon(a)$. Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью множества A* и обозначается через $\text{int } A$. Множество A называется *открытым в X* , если его внутренность совпадает с ним самим: $A = \text{int } A$.

Пусть A и B — произвольные подмножества метрического пространства (X, ρ) . *Расстоянием $\rho(A, B)$ между множествами A и B* называется число, определяемое так:

$$\rho(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} \rho(a, b).$$

Ясно, что если $A \cap B$ не пусто, то $\rho(A, B) = 0$, хотя обратное, вообще говоря, неверно. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения множества $A \subset X$* , если $\rho(x, A) = 0$. В частности, каждая точка $a \in A$ является точкой прикосновения множества A , хотя обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. Пусть $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$. Тогда, очевидно, множество всех точек прикосновения интервала (a, b) совпадает с отрезком $[a, b]$. В частности, $a \in (a, b)$ — точка прикосновения для (a, b) .

Пример. Пусть $X = C[a, b]$ — множество непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Положим

$$\rho^0(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|,$$

где f и g — произвольные элементы из $C[a, b]$. Несложно проверить, что ρ^0 удовлетворяет аксиомам метрики. Поэтому пара $(C[a, b], \rho^0)$ — метрическое пространство.

Замыканием \bar{A} произвольного подмножества A метрического пространства (X, ρ) называется множество всех точек прикосновения множества A . Ясно, что $A \subset \bar{A}$, обратное, вообще говоря, неверно. Если замыкание \bar{A} множества A совпадает с самим A , т.е. $\bar{A} = A$, то множество A называется *замкнутым в X* .

Пример. Пусть $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$. Тогда, очевидно, замыкание $\overline{(a, b)}$ совпадает с отрезком $[a, b]$.

Упражнение 10.1. Проверить следующие свойства операций взятия внутренности и замыкания:

- Пусть $A_1 \subset A_2$. Тогда $\text{int } A_1 \subset \text{int } A_2$, и $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$.
- Для произвольного подмножества A метрического пространства имеем: $\text{int}(\text{int } A) = \text{int } A$, и $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$.

Оказывается понятия замкнутого и открытого множества тесно связаны между собой. А именно, имеет место следующее предложение.

Предложение 10.1 Пусть (X, ρ) — некоторое метрическое пространство. Подмножество $A \subset X$ является открытым если и только если его дополнение, т.е. множество $X \setminus A$, замкнуто.

Доказательство. Пусть сначала A — открыто. Рассмотрим произвольную точку $a \in A$. По определению, существует шаровая окрестность $O_\varepsilon(a)$, целиком лежащая в A . Но тогда, очевидно, $\rho(a, X \setminus A) \geq \varepsilon$, так как для любой точки $x \in X \setminus A$ выполнено неравенство $\rho(a, x) \geq \varepsilon$. Поэтому a не является точкой прикосновения множества $X \setminus A$. Но тогда $\bar{X \setminus A} = X \setminus A$, т.е. дополнение до A замкнуто в X .

Обратно, пусть теперь множество $X \setminus A$ замкнуто в X . Это означает, что никакая точка из A не является точкой прикосновения для $X \setminus A$. Пусть a — произвольная точка из A . Из вышесказанного вытекает, что $\rho(a, X \setminus A) = \varepsilon > 0$. Рассмотрим окрестность $O_\varepsilon(a)$ и покажем, что она целиком лежит в A . Действительно, если $x \in O_\varepsilon(a)$ содержится в $X \setminus A$, то

$$\varepsilon = \rho(a, X \setminus A) \leq \rho(a, x) < \varepsilon,$$

противоречие. Доказательство закончено.

Открытые множества метрического пространства обладают рядом важных свойств, которые мы выделим в отдельное предложение.

Предложение 10.2 Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Объединение любого семейства множеств, открытых в X , открыто в X , и пересечение конечного числа множеств, открытых в X , также открыто в X .

Доказательство. Действительно, пусть $\{A_\alpha\}$ — произвольное семейство открытых подмножеств пространства X . Обозначим через A объединение всех множеств A_α , и пусть a — произвольная точка множества A . Тогда существует такое α_0 , что $a \in A_{\alpha_0}$, а множество A_{α_0} — открыто по условию. Поэтому существует открытая окрестность $O_\varepsilon(a)$, целиком лежащая в A_{α_0} .

Но тогда $O_\varepsilon(a) \subset A$, и, значит, множество A содержит некоторую шаровую окрестность каждой своей точки, т.е. A — открыто.

Пусть теперь индекс α пробегает конечное число значений: $\alpha = 1, \dots, N$. Обозначим через A' пересечение всех множеств A_α , и пусть a — произвольная точка из A' . Тогда $a \in A_\alpha$ для каждого $\alpha = 1, \dots, n$. Поэтому, для каждого α существует такое ε_α , что окрестность $O_{\varepsilon_\alpha}(a)$ целиком лежит в A_α . Положим $\varepsilon = \min_\alpha \varepsilon_\alpha > 0$ (здесь мы пользуемся конечностью набора множеств A_α). Тогда, очевидно, $O_\varepsilon(a) \subset O_{\varepsilon_\alpha}(a)$ для любого α , и поэтому $O_\varepsilon(a) \subset A'$, т.е. каждая точка a из A' входит в A' вместе с некоторой своей шаровой окрестностью. Доказательство закончено.

Из предложений 10.1 и 10.2 и свойств операций взятия дополнения, объединения и пересечения немедленно получаются двойственные свойства замкнутых множеств.

Следствие 10.1 Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда пересечение произвольного семейства замкнутых множеств замкнуто. Объединение конечного семейства замкнутых множеств — тоже замкнуто.

Отметим, что при доказательстве предложений 10.1 и 10.2 мы нигде не пользовались неравенством треугольника для метрики. В следующем пункте мы расширим класс пространств, в которых можно говорить об открытых и замкнутых множествах, точках прикосновения и т.п., определив топологические пространства.

10.1.2 Топологические пространства

В самом общем случае оказывается достаточным просто выделить класс подмножеств абстрактного множества, которые и будут называться “окрестностями” его элементов. Чтобы соответствующая теория была содержательной, необходимо требовать, чтобы эти “окрестности” обладали естественными свойствами. Именно эта идея и лежит в определении топологического пространства.

Пусть X — произвольное множество и $\tau = \{U_\alpha\}$ — некоторое семейство подмножеств множества X . Семейство τ называется *топологией*, если оно удовлетворяет следующим свойствам (сравните с предложением 10.2):

- 1) само пространство X и пустое множество принадлежат τ ;
- 2) объединение любого семейства множеств из τ принадлежит τ ;
- 3) пересечение любого конечного семейства множеств из семейства τ также принадлежит τ .

Свойства 1–3 называются *аксиомами топологии*.

Определение. Множество X , на котором фиксирована топология τ называется *топологическим пространством* и обозначается через (X, τ) . Впрочем, мы часто для краткости будем обозначать топологическое пространство (X, τ) просто через X . Элементы множества X называются *точками*. Множества из τ называются *открытыми в X* .

Пример. Пусть X — произвольное множество. Семейство τ , состоящее из всех подмножеств множества X , очевидно, является топологией. Эта топология называется *дискретной*.

Пример. Пусть X — произвольное множество. Семейство $\tau = \{X, \emptyset\}$, очевидно, является топологией. Эта топология называется *тривиальной*.

Пример. Из предложения 10.2 немедленно следует, что каждое метрическое пространство (X, ρ) вместе с семейством τ_ρ своих открытых (относительно метрики ρ) множеств порождает топологическое пространство (X, τ_ρ) . Топология τ_ρ называется *метрической топологией*.

Упражнение 10.2. Всякая ли топология является метрической?

Упражнение 10.3. Сколько различных топологий можно ввести на множестве X , состоящем из двух элементов?

Две топологии τ_1 и τ_2 на множестве X называются *согласованными* или *эквивалентными*, если каждое подмножество $U \in \tau_1$ содержится в некотором подмножестве $V \in \tau_2$, и наоборот, каждый элемент топологии τ_2 содержится в некотором элементе из τ_1 как подмножество.

Пример. Пусть Y — произвольное непустое подмножество топологического пространства X с топологией τ . Положим $\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$. Ясно, что τ_Y является топологией. Топологическое пространство (Y, τ_Y) называется *подпространством* в (X, τ) , а топология τ_Y — *индуцированной топологией*.

Пример. Пусть (X, τ) — топологическое пространство, и $\varphi: X \rightarrow M$ — некоторое отображение X на множество M . Положим $\tau_\varphi = \{U \subset M \mid \varphi^{-1}(U) \in \tau\}$. Несложно показать, что τ_φ задает на M топологию. Говорят, что топология τ_φ *порождена* отображением φ .

Пример. Если (X, τ_X) и (Y, τ_Y) — топологические пространства, причем X и Y не имеют общих точек. Множество $X \cup Y$ с топологией $\tau = \tau_X \cup \tau_Y$ называется *несвязной суммой топологических пространств X и Y* .

Пример. Рассмотрим два топологических пространства (X, τ_X) и (Y, τ_Y) . Образует новое топологическое пространство $X \times Y$. Множество $X \times Y$

— это множество всевозможных упорядоченных пар (x, y) , которое называется, напомним, *декартовым произведением множеств X и Y* . Множество $U \subset X \times Y$ назовем *открытым* если и только если оно представимо в виде объединения некоторого семейства множеств вида $U \times V$, где $U \in \tau_X$, а $V \in \tau_Y$. Легко проверить, что определенное нами семейство открытых множеств удовлетворяет аксиомам топологии. Построенная топология обозначается через $\tau_X \times \tau_Y$ и называется *топологией прямого произведения*.

Упражнение 10.4. Эквивалентна ли построенная выше топология на \mathbb{R}^n топологии прямого произведения n экземпляров \mathbb{R}^1 ?

Упражнение 10.5. Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) — метрические пространства. Построим по ним соответствующие топологические, и рассмотрим топологическое пространство $X_1 \times X_2$. Показать, что на множестве $X_1 \times X_2$ можно ввести такую метрику ρ , что соответствующая метрическая топология будет эквивалентна топологии прямого произведения.

Пример. Пусть X — топологическое пространство с топологией τ , на котором задано некоторое отношение эквивалентности \sim . Обозначим через X/\sim множество классов эквивалентности, и пусть $\pi: X \rightarrow X/\sim$ — стандартная проекция. Тогда топология τ_π на X/\sim , порожденная проекцией π , называется *фактор-топологией*, а само пространство $(X/\sim, \tau_\pi)$ — *фактор-пространством*. В частности, если задано отображение $\varphi: X \rightarrow M$ топологического пространства на множество M , то можно определить отношение эквивалентности \sim на X , положив $x_1 \sim x_2$ если и только если $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. В этом случае X/\sim естественно отождествляется с M , а фактор-топология на X/\sim — с топологией, порожденной на M отображением φ .

Подмножество A топологического пространства (X, τ) называется *замкнутым относительно топологии τ* , если дополнение до него открыто. Очевидно, что замкнутые множества обладают следующими свойствами:

- 1) Само пространство X и пустое множество замкнуты в X .
- 2) Объединение любого конечного семейства замкнутых множеств замкнуто в X .
- 3) Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто в X .

Ясно, что для задания топологии на множестве X достаточно фиксировать произвольное семейство подмножеств, обладающее свойствами 1–3 замкнутых множеств, и назвать эти фиксированные множества замкнутыми.

В топологических пространствах можно воспроизвести многие важные понятия, определенные выше для метрических пространств. *Окрестностью точки x* в топологическом пространстве (X, τ) называется произвольное открытое подмножество U содержащее x . Точка a множества $A \subset X$ называется *внутренней*, если существует такая окрестность $U(a)$ точки a , что $U(a) \subset A$. Множество всех внутренних точек множества

A называется *внутренностью* множества A и обозначается через $\text{int } A$. Очевидно, $\text{int } A \subset A$.

Далее, точка x топологического пространства X называется *точкой прикосновения* множества A , где $A \subset X$, если каждая окрестность $U(x)$ точки x пересекается с A . Множество всех точек прикосновения множества A называется *замыканием* множества A и обозначается через \bar{A} . Очевидно, $A \subset \bar{A}$. Множество $\bar{A} \setminus \text{int } A$ обозначается через ∂A и называется *границей* множества A .

Упражнение 10.6. Проверить следующие свойства операций взятия внутреннейности и замыкания:

- Пусть $A_1 \subset A_2$. Тогда $\text{int } A_1 \subset \text{int } A_2$, и $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$.
- Для произвольного подмножества A топологического пространства имеем: $\text{int}(\text{int } A) = \text{int } A$, и $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$.

Как и в случае метрических пространств, операции взятия внутреннейности и замыкания оказываются тесно связанными с понятиями замкнутого и открытого множества.

Предложение 10.3 Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Множество $A \subset X$ является открытым, если и только если $\text{int } A = A$. Множество $A \subset X$ является замкнутым, если и только если $\bar{A} = A$.

Доказательство. Действительно, каждое открытое множество само является окрестностью каждой своей точки, поэтому совпадает со своей внутреннейностью. С другой стороны, если каждая точка множества A является внутренней, то для каждой точки $a \in A$ существует открытое множество $U(a) \subset A$. Возьмем объединение $U = \cup_{a \in A} U(a)$. По определению, U — открыто. Кроме того, так как каждое $U(a) \subset A$, само множество U содержится в A . С другой стороны, $A \subset U$, так как каждая точка $a \in U(a)$. Поэтому $U = A$, и, в частности, A — открыто.

Далее, множество A — замкнуто, если и только если $X \setminus A$ — открыто, т.е. каждая точка из $X \setminus A$ обладает окрестностью, не пересекающейся с A , что равносильно включению $\bar{A} \subset A$, т.е. $\bar{A} = A$. Доказательство закончено.

Следствие 10.2 Пусть A — произвольное подмножество топологического пространства (X, ρ) . Тогда внутренность $\text{int } A$ множества A открыта, а замыкание \bar{A} множества A — замкнуто.

10.2 Непрерывные отображения

Как мы уже упоминали выше, топологические пространства — это объекты, введенные в рассмотрение для того, чтобы определить непрерывные отображения в самом общем случае.

Определение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ топологического пространства (X, τ_X) в топологическое пространство (Y, τ_Y) называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности $V(f(x_0)) \in \tau_Y$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестность $U(x_0) \in \tau_X$ точки x_0 , что $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Пример. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Превратим их в топологические пространства, наделив стандартными метрическими топологиями. Тогда определение непрерывности принимает следующий стандартный для метрических пространств вид. Отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств называется непрерывным в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $f(U_\delta(x)) \subset V_\varepsilon(f(x))$, т.е. из $\rho_X(x, x') < \delta(\varepsilon)$ вытекает, что $\rho_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$.

Пример. Очень важный частный случай — это отображения топологического пространства X в числа. Такие отображения называют *функциями*. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая зависящая от ε окрестность $U(x)$ точки x в пространстве X , что для любой точки x' из $U(x)$ имеет место неравенство $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Упражнение 10.7. Показать, что произвольное отображение пространства X с дискретной топологией в любое топологическое пространство непрерывно.

Упражнение 10.8. Пусть $f: X \rightarrow Y$ произвольное отображение топологического пространства X в пространство Y , причем на Y топология порождена отображением f . Показать, что f — непрерывно.

Упражнение 10.9. Пусть $\pi: X \rightarrow X/\sim$ — стандартная проекция топологического пространства X на некоторое его фактор пространство. Показать, что π — непрерывно.

Упражнение 10.10. Пусть $\pi: X \times Y \rightarrow X$ — стандартная проекция декартова произведения на сомножитель: $\pi: (x, y) \mapsto x$. Показать, что отображение X — непрерывно.

Упражнение 10.11. Показать, что композиция двух непрерывных отображений непрерывна.

В дальнейшем нам будет полезен следующий критерий непрерывности отображения.

Предложение 10.4 *Отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

- прообраз любого открытого множества $A \subset Y$ открыт в X ,
- прообраз любого замкнутого множества замкнут.

Доказательство. Пусть сначала f непрерывно. Пусть $A \subset Y$ — произвольное открытое множество, и обозначим через $f^{-1}(A)$ его прообраз при отображении f . Пусть $x \in f^{-1}(A)$ — произвольная точка из прообраза, и обозначим через $y = f(x)$ образ точки x при отображении f . Тогда, очевидно, y принадлежит открытому множеству A , и существует окрестность $V(y)$ точки y , целиком лежащая в A . Так как отображение f непрерывно в точке x , существует окрестность $U(x)$ точки x , такая что $f(U(x)) \subset V(y)$. Но тогда $f(U(x)) \subset A$, и поэтому $U(x) \subset f^{-1}(A)$, т.е. $f^{-1}(A)$ открыто. Пусть теперь прообраз произвольного открытого подмножества из Y открыт в X . Фиксируем произвольную точку $x \in X$, и пусть, как и выше, $y = f(x)$. Рассмотрим произвольную окрестность $V(y)$ точки Y . По определению, $V(y)$ — открытое множество, значит $f^{-1}(V(y))$ — открытое подмножество в X , причем $x \in f^{-1}(V(y))$. Но тогда существует окрестность $U(x)$ точки X , целиком лежащая в $f^{-1}(V(y))$. Осталось заметить, что $f(U(x)) \subset V(y)$, поэтому отображение f непрерывно в произвольной точке x , что и требовалось.

Для завершения доказательства предложения, осталось показать, что сформулированные в нем условия непрерывности эквивалентны. Это немедленно вытекает из следующего соотношения, справедливого для произвольного множества $A \subset Y$:

$$f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A).$$

Доказательство закончено.

Упражнение 10.12. Вообще говоря, образ открытого (замкнутого) множества при непрерывном отображении не обязан быть открытым (замкнутым). Построить соответствующие примеры.

Упражнение 10.13. Описать все непрерывные отображения из произвольного топологического пространства X в пространство с тривиальной топологией. Описать все непрерывные отображения из пространства с дискретной топологией в произвольное топологическое пространство.

Как и в математическом анализе, понятие непрерывности может быть определено в терминах сходящихся последовательностей. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность точек топологического пространства (X, τ) . Говорят, что *последовательность x_n сходится к $x \in X$* , если для любой окрестности $U(x)$ точки x в X существует такое N , что для любого $n > N$ все точки x_n лежат в $U(x)$.

Упражнение 10.14. Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства. Показать, что отображение $f: X_1 \rightarrow X_2$ непрерывно в точке x_0 если и только если для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\}$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ совпадает с $f(x_0)$.

Упражнение 10.15. Показать, что подмножество A топологического пространства X замкнуто если и только если для любой сходящейся в X последовательности $\{x_n\} \subset A$ точек из A предел $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ также лежит в A .

Теперь введем на множестве всех топологических пространств естественное отношение эквивалентности.

Определение. Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства. Взаимно однозначное непрерывное отображение $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ называется *гомеоморфизмом* пространств X_1 и X_2 , если обратное отображение также непрерывно. Если существует гомеоморфизм пространств X_1 и X_2 , то сами пространства называются *гомеоморфными*. Отображение $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ называется *вложением* X_1 в X_2 , если оно задает гомеоморфизм между X_1 и $\varphi(X_1) \subset X_2$. Свойство пространства называется *топологическим*, если оно сохраняется при гомеоморфизме.

Упражнение 10.16. Показать, что следующие подпространства \mathbb{R}^1 попарно не гомеоморфны: интервал (a, b) , полуинтервал $(a, b]$, отрезок $[a, b]$.

Упражнение 10.17. Построить пример двух топологических пространств X и Y , таких, что

- существуют непрерывные взаимно однозначные отображения f и g , где $f: X \rightarrow Y$, и $g: Y \rightarrow X$,
- пространства X и Y не гомеоморфны.

Задачи к лекции 10

Задача 10.1. Пусть топологическое пространство X представлено в виде объединения двух своих замкнутых подмножеств F_1 и F_2 . Показать, что отображение f пространства X в произвольное топологическое пространство Y непрерывно если и только если ограничение f на каждое из F_i , $i = 1, 2$, непрерывно.

Задача 10.2. Привести пример непрерывного взаимно-однозначного соответствия, не являющегося гомеоморфизмом со своим образом.

Задача 10.3. Показать, что справедлива следующая формула $\partial(X \times Y) = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y)$.

Задача 10.4. Доказать, что отрезок и буква “Г” не гомеоморфны.

Задача 10.5. Гомеоморфны ли буквы “Г” и “Х”.

Дополнительный материал к лекции 10

Добавление 10.1. Примеры метрических пространств. Приведем несколько стандартных примеров метрических пространств.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}^n$. Расстояние между точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ из \mathbb{R}^n может быть определено многими способами. Мы приведем следующие два, отличающиеся от стандартного евклидова расстояния:

$$\rho_\infty(x, y) = \max_i \{|x_i - y_i|\};$$

$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad \text{манхейтенское расстояние.}$$

Нетрудно показать, что функции ρ_1 и ρ_∞ являются метриками на \mathbb{R}^n , поэтому и (\mathbb{R}^n, ρ_1) , и $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ являются метрическими пространствами.

Пример. Пусть $X = C^k[a, b]$, $0 \leq k \leq \infty$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$. Положим

$$\rho^k(f, g) = \max_{0 \leq n \leq k} \max_{t \in [a, b]} |f^{(n)}(t) - g^{(n)}(t)|,$$

где f и g — произвольные элементы из $C^k[a, b]$, и $f^{(n)}$ — производная n -го порядка. Определенная так функция ρ^k удовлетворяет аксиомам метрики. Поэтому пара $(C^k[a, b], \rho^k)$ — метрическое пространство.

Пример. Пусть A — произвольное непустое подмножество метрического пространства X с метрикой ρ . Обозначим через ρ_A ограничение функции $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ на множество $A \times A$. Ясно, что ρ_A удовлетворяет аксиомам метрики. Метрическое пространство (A, ρ_A) называется *подпространством* пространства (X, ρ) , а метрика ρ_A — *индуцированной метрикой*.

Добавление 10.2. Свойства метрических пространств. Предложение 10.5 Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда шаровая окрестность $O_\varepsilon(x)$ произвольной точки $x \in X$ является открытым множеством.

Доказательство. Пусть y — произвольная точка из $O_\varepsilon(x)$. Тогда, по определению, $\rho(x, y) < \varepsilon$, поэтому существует такое число $\delta > 0$, что $\rho(x, y) + \delta < \varepsilon$. Для доказательства предложения достаточно проверить, что шаровая окрестность $O_\delta(y)$ точки y целиком содержится в $O_\varepsilon(x)$. Действительно, пусть z — произвольная точка из $O_\delta(y)$. Тогда, в силу неравенства треугольника,

$$\rho(z, x) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x) < \delta + \rho(x, y) < \varepsilon,$$

т.е. $z \in O_\varepsilon(x)$, что и требовалось.

Наконец, оказывается что операции замыкания и взятия внутренности, определенные выше на подмножествах метрического пространства, естественным образом согласованы с понятиями открытых и замкнутых множеств.

Утверждение 10.1 Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, и A — его произвольное подмножество. Тогда множество \bar{A} замкнуто, а множество $\text{int } A$ — открыто.

Доказательство. Покажем сначала, что $\text{int } A$ — открыто. Каждая точка a из $\text{int } A$ обладает окрестностью $O_\varepsilon(a)$ целиком лежащей в A . Но тогда, очевидно, $\text{int}(O_\varepsilon(a)) \subset \text{int } A$, а с другой стороны, в силу предложения 10.5, $\text{int}(O_\varepsilon(a)) = O_\varepsilon(a)$, поэтому множество $\text{int}(A)$ содержит шаровую окрестность своей точки a , и поэтому открыто.

Далее, точка x из X не принадлежит замыканию \bar{A} множества A если и только если $\rho(a, A) = \varepsilon > 0$, поэтому $X \setminus \bar{A} = \text{int } X \setminus A$, а последнее множество открыто. Поэтому, в силу предложения 10.1, \bar{A} — замкнуто. Доказательство закончено.

Добавление 10.3. Примеры топологических пространств. Приведем еще несколько стандартных конструкций топологических пространств.

Пример. Пусть $X \cup Y$ — несвязная сумма топологических пространств X и Y , и предположим что фиксированы точка x_0 в X и точка y_0 в Y . Зададим на множестве $X \cup Y$ отношение эквивалентности, положив $x_0 \sim y_0$. Тогда фактор пространство X/\sim называется *связной суммой* или *букетом пространств* X и Y по точке $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$. Это пространство обозначают через $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ или просто $X \vee Y$.

Пример. Пусть Y — подпространство топологического пространства X . Зададим на X отношение эквивалентности, положив $x_1 \sim x_2$ если и только если $x_i \in Y$. Говорят, что фактор-пространство X/\sim получено из X факторизацией по множеству Y . Это пространство часто обозначают через X/Y . Например, если D^n — стандартный замкнутый диск в \mathbb{R}^n , а S^{n-1} — ограничивающая диск D^n сфера, то $D^n/\partial D^n$ — стандартная n -мерная сфера S^n .

Пример. Пусть $K = [-1, 1] \times [-1, 1]$ — квадрат. Отождествляя граничные точки разными способами, получим хорошо известные пространства.

- Отождествим точки вида $(-1, t)$ и $(1, t)$. Получим цилиндр.
- Отождествим точки вида $(-1, t)$ и $(1, -t)$. Получим лист Мебиуса.
- Отождествим точки вида $(-1, t)$ и $(1, t)$, а также точки вида $(s, -1)$ и $(s, 1)$. Получим тор.
- Отождествим точки вида $(-1, t)$ и $(1, t)$, а также точки вида $(s, -1)$ и $(-s, 1)$. Получим бутылку Клейна.
- Отождествим точки вида $(-1, t)$ и $(1, -t)$, а также точки вида $(s, -1)$ и $(-s, 1)$. Получим проективную плоскость. Напомним, что проективная плоскость определяется как множество всех прямых в \mathbb{R}^3 , проходящих через 0. Так как каждая такая прямая пересекает стандартную сферу S^2 ровно в двух точках вида x и $-x$, проективную плоскость можно рассматривать как фактор-пространство, полученное из сферы S^2 отождествлением точек x и $-x$. Последнее эквивалентно фактор-пространству, полученному из замкнутой полусферы отождествлением диаметрально противоположных точек экватора. Осталось применить естественный гомеоморфизм квадрата K на замкнутую полусферу, переводящий симметричные относительно начала координат точки в симметричные.

Добавление 10.4. Функциональная сходимости в топологических пространствах.

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность вещественных функций на топологическом пространстве (X, τ) . Последовательность $\{f_n\}$ называется *сходящейся в точке* x , если множество чисел $\{f_n(x)\}$ образует сходящуюся числовую последовательность. Если последовательность $\{f_n\}$ сходится в каждой точке $x \in X$, то определим предельную функцию $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, положив $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Предположим теперь, что все функции f_n — непрерывны. Предельная функция в этом случае, вообще говоря, не обязана быть непрерывной. Однако, можно усилить определение сходимости так. Последовательность $\{f_n\}$ функций на топологическом пространстве X называется *равномерно сходящейся к функции* f , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in X$ и всех $n > N(\varepsilon)$.

Упражнение 10.18. Показать, что равномерная сходимость функций на отрезке $[a, b]$ — это не что иное как сходимость в метрическом пространстве $C[a, b]$.

Имеет место следующее простое предложение.

Предложение 10.6 Пусть последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ топологическом пространстве X сходится равномерно к некоторой функции f . Тогда функция f — непрерывна на X .

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$ — произвольная точка, и $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Выберем $n = n(\varepsilon)$ так, чтобы $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/3$ для всех $x \in X$. Далее, функция f_n — непрерывна, поэтому существует такая окрестность U точки x_0 , что для всех x из U выполнено неравенство $|f_n(x_0) - f_n(x)| < \varepsilon/3$. В итоге для всех x из U имеем:

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

11 Классы топологических пространств

Среди огромного множества топологических пространств естественно выделять некоторые классы, обладающие специальными топологически инвариантными свойствами. В данном разделе мы рассмотрим некоторые из таких классов.

11.1 Связность

Топологическое пространство X называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых подмножеств A_1 и A_2 , каждое из которых является открытым в X . Если такое представление возможно, пространство X называется *несвязным*. Ясно, что если $X = A_1 \cup A_2$, где A_i — открытые подмножества в X , и $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то каждое из A_i — замкнуто в X . Подмножество A топологического пространства X называется *связным*, если связным является топологическое пространство A с топологией, индуцированной из X .

Пример. Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ — связан. Действительно, предположим противное, и пусть $[a, b] = A \cup B$, где множества A и B открыты, не пусты и не пересекаются. Предположим для определенности, что $a \in A$. Рассмотрим множество всех таких ε , что полуинтервал $[a, a + \varepsilon)$ содержится в A , и пусть ε_0 — верхняя грань этого множества. Тогда, так как A — открыто, $\varepsilon_0 > 0$. Так как множество A — замкнуто, точка $a + \varepsilon_0$ принадлежит A . Но тогда, если только $a + \varepsilon_0 \neq b$, существует открытый интервал $(a + \varepsilon_0 - \delta, a + \varepsilon_0 + \delta)$, целиком лежащий в A , и поэтому полуинтервал $[a, a + (\varepsilon_0 + \delta))$ содержится в A , что противоречит выбору ε_0 . Поэтому $a + \varepsilon_0 = b$. Но тогда $A = [a, b]$, и B — пусто. Полученное противоречие завершает доказательство.

Упражнение 11.1. Показать что интервал (a, b) — связан.

Упражнение 11.2. Пусть $X \cup Y$ — несвязная сумма произвольных топологических пространств. Показать что пространство $X \cup Y$ несвязно.

Упражнение 11.3. Показать что букет связных топологических пространств по любой паре точек является связным.

Максимальные по включению связные подпространства пространства X называются его *связными компонентами*.

Упражнение 11.4. Показать, что связные компоненты пространства X попарно не пересекаются, и являются открытыми и замкнутыми подмножествами пространства X .

Упражнение 11.5. Сколько компонент связности имеет пространство X , наделенное дискретной топологией?

Приведем несколько утверждений, позволяющих проверять связность топологического пространства.

Предложение 11.1 Пусть топологическое пространство X представлено в виде объединения своих подмножеств X_α , каждое из которых связно. Предположим, что пересечение $\bigcap_\alpha X_\alpha$ непусто. Тогда пространство X — связно.

Доказательство. Предположим противно, т.е. $X = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты, причем $A \cap B = \emptyset$. Тогда, очевидно, каждое X_α можно представить в виде $X_\alpha = (X_\alpha \cap A) \cup (X_\alpha \cap B)$. Однако, так как X_α — связно, то или $X_\alpha \cap A = \emptyset$, или $X_\alpha \cap B = \emptyset$, т.е. каждое из X_α целиком лежит или в A , или в B . С другой стороны, так как A и B не пусты, существуют $X_{\alpha_0} \subset A$ и $X_{\alpha_1} \subset B$. Однако $A \cap B = \emptyset$, поэтому и $X_{\alpha_0} \cap X_{\alpha_1} = \emptyset$, что противоречит условию. Предложение доказано.

Предложение 11.2 Пусть в топологическом пространстве X для каждой пары его различных точек (x, y) найдется связное подмножество C_{xy} , содержащее как x , так и y . Тогда пространство X — связно.

Доказательство. Предположим противное, и пусть $X = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты, причем $A \cap B = \emptyset$. Выберем точки $a \in A$ и $b \in B$, и рассмотрим связное множество C_{ab} , содержащее a и b . Однако множество C_{ab} разлагается в объединение двух своих непустых, открытых и непересекающихся подмножеств $C_{ab} \cap A$ и $C_{ab} \cap B$, что противоречит связности C_{ab} . Доказательство закончено.

Предложение 11.3 Образ связного подмножества топологического пространства при непрерывном отображении связан.

Доказательство. В самом деле, если образ $Y = f(X)$ связного множества X при непрерывном отображении f несвязен, то, по определению, $Y = A \cup B$, где A и B — открыты, непусты и не пересекаются. Но тогда $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, причем множества $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$ не пусты, открыты и не пересекаются, т.е. X — несвязно. Полученное противоречие и завершает доказательство.

Следствие 11.1 Связность топологического пространства — топологический инвариант, т.е. сохраняется при гомеоморфизмах.

Следствие 11.2 Непрерывная функция, заданная на связном топологическом пространстве X принимает все промежуточные значения.

Доказательство. Действительно, если, скажем, значение y_0 не принимается непрерывной функцией $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, но принимаются некоторые значения больше и меньше чем y_0 , то образ $f(X)$ распадается в объединение двух открытых непустых непересекающихся множеств $f(X) \cap (y_0, +\infty)$ и $f(X) \cap (-\infty, y_0)$. Последнее противоречит предложению 11.3. Следствие доказано.

Часто удобно пользоваться другим, более сильным понятием связности. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если любые две точки из X можно соединить непрерывной кривой, т.е. для любых x и y из X существует непрерывное отображение $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$, такое что $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$. Ясно, что в силу предложения 11.2 каждое линейно связное пространство является связным. Обратное, вообще говоря, неверно.

Упражнение 11.6. Рассмотрим замыкание X в плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ графика функции $y = \sin(1/x)$. Ясно, что X состоит из графика функции $y = \sin(1/x)$ и вертикального отрезка, соединяющего точки $(0, -1)$ и $(0, 1)$. Показать, что пространство X (топология индуцирована из \mathbb{R}^2) связно, но не линейно связно.

11.2 Аксиомы отделимости

Две различных точки топологического пространства X называются *отделимыми*, если у них существуют непересекающиеся окрестности. Более общо, два произвольных подмножества A_1 и A_2 топологического пространства называются *отделимыми*, если существуют непересекающиеся открытые множества U_1 и U_2 , такие что $A_i \subset U_i$, $i = 1, 2$.

Топологическое пространство X называется *хаусдорфовым*, если любые его две различных точки отделимы. Ясно, что не любое топологическое пространство является хаусдорфовым.

Пример. Рассмотрим множество X , состоящее из двух элементов x и y , и зададим на X топологию, положив $\tau = \{\emptyset, X, \{x\}\}$. Очевидно, точки x и y из X неотделимы, так как точка y обладает единственной окрестностью X .

Пример. Приведем еще один важный пример нехаусдорфова пространства. Пусть X — произвольное бесконечное множество. Зададим на X топологию, объявив замкнутыми все возможные конечные подмножества из X .

Упражнение 11.7. Проверьте, что так определенная система замкнутых множеств задает на X топологию. Докажите, что полученное топологическое пространство не является хаусдорфовым.

Полученная топология называется *топологией Зарисского*.

Пример. Топологическое пространство X , наделенное дискретной топологией, хаусдорфово.

Хаусдорфовы пространства обладают рядом полезных свойств.

Предложение 11.4 *Каждая точка хаусдорфова пространства является его замкнутым подмножеством.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, и x — произвольная точка из X . Так как любая точка $y \in X \setminus \{x\}$ отделима от X , т.е. существует открытое множество U_y , содержащее y и не содержащее x , то множество $X \setminus \{x\}$ представимо в виде $\cup_{y \neq x} U_y$ и, поэтому, открыто в X . Следовательно, $\{x\}$ — замкнуто. Доказательство закончено.

Упражнение 11.8. Пусть X и Y — хаусдорфовы топологические пространства. Показать, что тогда их декартово произведение, несвязная сумма и букет также являются хаусдорфовыми.

Упражнение 11.9. Является ли хаусдорфовость топологическим инвариантом?

Определение. Топологическое пространство называется *нормальным*, если оно хаусдорфово, и, более того, любые его два непересекающихся замкнутых подмножества отделимы.

Класс нормальных пространств достаточно широк.

Предложение 11.5 Каждое метрическое пространство нормально.

Доказательство. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, и A_1 и A_2 — два произвольных непересекающихся замкнутых подмножества в X . Для каждой точки x из множества A_1 определим число $\varepsilon(x) > 0$ так: $\varepsilon(x) = (1/3)\rho(x, A_2)$. Аналогично, для каждой точки y из A_2 определим число $\varepsilon'(y) = (1/3)\rho(y, A_1)$. Построим открытые множества U_1 и U_2 , положив

$$U_1 = \cup_{x \in A_1} O_{\varepsilon(x)}(x), \quad U_2 = \cup_{y \in A_2} O_{\varepsilon'(y)}(y).$$

Очевидно, $U_i \supset A_i$, $i = 1, 2$. Покажем, что U_1 и U_2 не пересекаются. Действительно, пусть существует $z \in U_1 \cap U_2$. Тогда имеются такие $x \in A_1$ и $y \in A_2$, что $z \in O_{\varepsilon(x)}(x)$ и $z \in O_{\varepsilon'(y)}(y)$. Но тогда $\rho(z, x) < (1/3)\rho(x, A_2) \leq (1/3)\rho(x, y)$, и $\rho(z, y) < (1/3)\rho(y, A_1) \leq (1/3)\rho(y, x)$. Складывая последние два неравенства, получаем $\rho(y, z) + \rho(z, x) < (2/3)\rho(y, x)$, что противоречит неравенству треугольника. Предложение доказано.

Упражнение 11.10. Является ли нормальность топологическим инвариантом?

11.3 Компактность

В топологии часто бывает удобным язык покрытий. Система открытых множеств $\{U_\alpha\}$ топологического пространства X называется *открытым покрытием пространства X* , если $\cup_\alpha U_\alpha = X$. Открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ называется *эффективным*, если из него нельзя выбросить ни одного элемента U_α так, чтобы в результате снова получилось открытое покрытие.

Пусть задано два открытых покрытия $U = \{U_\alpha\}$ и $V = \{V_\beta\}$ пространства X . Говорят, что покрытие V *измельчает покрытие U* или *вписано в покрытие U* , если каждое множество V_β лежит в некотором множестве U_α .

Топологическое пространство X называется *компактным*, если всякое его открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ содержит конечное покрытие $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^N$ пространства X .

Пример. Отрезок $[a, b]$ в топологии, индуцированной из \mathbb{R}^1 , компактен (докажите), а интервал (a, b) — нет.

Пример. Более общо, каждое замкнутое ограниченное подмножество метрического пространства \mathbb{R}^n компактно (теорема Бореля).

Приведем несколько полезных свойств компактных пространств.

Предложение 11.6 *Замкнутое подмножество компактного пространства компактно.*

Доказательство. Действительно, пусть $\{V_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие замкнутого подмножества A компактного топологического пространства X . Тогда каждое V_α — это пересечение некоторого открытого в X множества U_α с множеством A . Ясно, что набор открытых множеств $\{U_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$ образует открытое покрытие пространства X , и из него можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_{\alpha_k}\} \cup \{X \setminus A\}$. Но тогда, очевидно, конечная система множеств $\{V_{\alpha_k}\}$ образует конечное подпокрытие множества A . Предложение доказано.

Предложение 11.7 *Хаусдорфово компактное топологическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть X — компактное пространство, A — произвольное замкнутое подмножество в X , и x — точка из X , не лежащая в A . Покажем, что $\{x\}$ и A отделимы в X . Действительно, в силу хаусдорфовости пространства X , для каждой точки $a \in A$ существует окрестность $U(a)$ точки a и окрестность $V(x, a)$ точки x (вообще говоря, зависящая от a) такие что $U(a) \cap V(x, a) = \emptyset$. Семейство $U(a)$ образует, очевидно, открытое покрытие множества A , в котором, в силу предложения 11.6, можно выбрать конечное подпокрытие $\{U(a_k)\}_{k=1}^N$. Поэтому окрестность $\bigcap_{k=1}^N V(x, a_k)$ точки x определена и не пересекается с содержащим A открытым множеством $\bigcup_{k=1}^N U(a_k)$.

Рассмотрим теперь два произвольных непересекающихся замкнутых множества A_1 и A_2 в компактном пространстве X . Как мы только что доказали, для любой точки $a \in A_1$ существует открытая окрестность $U(a)$ точки a и содержащее множество A_2 открытое множество V_a , такие что $U(a) \cap V_a = \emptyset$. Семейство $\{U(a)\}$ образует открытое покрытие замкнутого множества A_1 , в котором, в силу предложения 11.6, можно выделить конечное подпокрытие $\{U(a_k)\}_{k=1}^N$. Поэтому определено открытое множество $\bigcap_{k=1}^N V_{a_k}$, содержащее множество A_2 и не пересекающееся с содержащим множество A_1 открытым множеством $\bigcup_{k=1}^N U(a_k)$. Предложение доказано.

Предложение 11.6 имеет следующее обращение.

Предложение 11.8 Пусть A — компактное подпространство в хаусдорфовом пространстве X . Тогда A — замкнуто.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x из $X \setminus A$. Нам достаточно показать, что x не является точкой прикосновения для A . В силу хаусдорфовости пространства X , для каждой точки a из A существуют окрестность $U(a)$ точки a и окрестность $V(x, a)$ точки x , такие что $U(a) \cap V(x, a) = \emptyset$. Семейство $\{U(a)\}$ образует открытое покрытие компакта A , поэтому в нем можно выделить конечное подпокрытие $\{U(a_k)\}_{k=1}^N$. Поэтому определена открытая окрестность $\bigcap_{k=1}^N V(x, a_k)$ точки x , которая, очевидно, не пересекается с множеством A , т.е. $x \notin \bar{A}$. Предложение доказано.

Компактность пространства является топологическим инвариантом. А именно, имеет место следующее предложение.

Предложение 11.9 Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение компактного пространства X в произвольное топологическое пространство Y . Тогда образ $f(X)$ компактен в Y .

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ множества $f(X)$. Тогда система множеств $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$ образует, очевидно, открытое покрытие пространства X , поэтому в ней можно выделить конечное подпокрытие, образ которого и даст искомое конечное покрытие для $f(X)$. Доказательство закончено.

Непрерывные функции на компактных пространствах обладают теми же свойствами, что и непрерывные функции на отрезке.

Предложение 11.10 (Теорема Вейерштрасса–Коши) Функция непрерывная на компактном топологическом пространстве X ограничена и принимает максимальное и минимальные значения.

Доказательство. В силу предложения 11.9 образ $f(X)$ функции f компактен, а в силу предложения 11.8 — замкнут. Если бы образ $f(X)$ не был бы ограничен, то система открытых интервалов $U_n = (-n, n)$ покрывала бы $f(X)$, но не содержала бы конечного подпокрытия, поэтому множество $f(X)$ ограничено. Далее, очевидно что точки $\sup_{x \in X} f(x)$ и $\inf_{x \in X} f(x)$ являются точками прикосновения замкнутого множества $f(X)$ и поэтому принадлежат $f(X)$. Предложение доказано.

Упражнение 11.11. Проверить следующие свойства компактных пространств:

- если пространство X представимо в виде конечного объединения своих компактных подмножеств, то X компактно;

- декартово произведение компактных пространств компактно.

В заключение настоящего раздела мы сформулируем несколько специфических свойств компактных *метрических* пространств (отметим, что в общем случае эти свойства не имеют места).

Упражнение 11.12. Пусть X — метрическое пространство. Показать, что следующие свойства эквивалентны:

- пространство X компактно;
- всякая последовательность $\{x_n\}$ элементов из X содержит сходящуюся подпоследовательность;
- всякая последовательность непустых замкнутых подмножеств A_n , таких что $A_{n+1} \subset A_n$, имеет непустое пересечение.

Упражнение 11.13. Привести пример метрического пространства X и замкнутого ограниченного некомпактного подмножества в нем (другими словами, в общем случае теорема Бореля не верна).

В следующей главе с помощью топологических пространств мы определим основные объекты дифференциальной геометрии — гладкие многообразия.

Задачи к лекции 11

Задача 11.1. Доказать, что замыкание связного множества связно.

Задача 11.2. Доказать, что образ связного (линейно связного) множества при непрерывном отображении связан (линейно связан).

Задача 11.3. Доказать, что подмножество плоскости, составленное из графика функции $y = \sin 1/x$, $x \neq 0$, и отрезка $[-1, 1]$ оси ординат, наделенное индуцированной топологией, является связным, но не линейно связным.

Задача 11.4. Доказать, что замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

Задача 11.5. Доказать, что компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто.

Задача 11.6. Выяснить, какие из следующих матричных групп связны, какие компактны:

$$O(n), SO(n), GL(n)?$$

Задача 11.7. Доказать, что непрерывное взаимно-однозначное отображение компактного пространства в хаусдорфово является гомеоморфизмом.

Дополнительный материал к лекции 11

Добавление 11.1. Функциональная отделимость. Рассматриваемая в данном пункте версия аксиомы отделимости очень полезна с технической точки зрения.

Мы начнем со следующего важного свойства нормальных пространств.

Предложение 11.11 Пусть X — нормальное пространство, и $U = \{U_i\}$, $i = 1, \dots, N$, — некоторое его конечное открытое покрытие. Тогда существует вписанное в U покрытие $V = \{V_i\}$, $i = 1, \dots, N$, причем $\bar{V}_i \subset U_i$ для каждого i .

Доказательство. Если $N = 1$, то можно взять $V = U$.

Пусть теперь $N \geq 2$. Предположим сначала, что покрытие U эффективно. Рассмотрим замкнутые множества $X \setminus U_1$ и $X \setminus \bigcup_{i=2}^N U_i$. В силу эффективности покрытия U , оба эти множества не пусты. Кроме того, они, очевидно, замкнуты и не пересекаются. Поэтому, в силу нормальности пространства X , существует открытое множество V_1 , такое что

$$X \setminus \bigcup_{i=2}^N U_i \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_1.$$

Система множеств $\{V_1, U_2, \dots, U_N\}$ снова образует эффективное покрытие пространства X , поэтому к ней можно применить аналогичную процедуру, построив множество $V_2 \subset \bar{V}_2 \subset U_2$, такое что $\{V_1, V_2, \dots, U_N\}$ — эффективное покрытие. Продолжим эту процедуру до тех пор, пока не построим требуемое измельчение V покрытия U . Для эффективных покрытий предложение доказано.

Если же покрытие U не эффективно, то, очевидно его можно представить в виде объединения конечного числа эффективных покрытий, для каждого из которых можно построить покрытие V . Объединение соответствующих покрытий V и даст искомое покрытие. Предложение доказано.

Два подмножества A_1 и A_2 топологического пространства X называются *функционально отделимыми*, если существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [a, b]$, $a < b$, такая что $f|_{A_1} = a$, и $f|_{A_2} = b$. Если два замкнутых множества A_1 и A_2 функционально отделимы в X , то они отделимы и в обычном смысле. Действительно, достаточно взять число $c \in (a, b)$ и рассмотреть два открытых множества $f^{-1}([a, c])$ и $f^{-1}((c, b])$. Эти множества, очевидно, не пересекаются, причем первое из них содержит A_1 , а второе — A_2 . Оказывается для “хороших” пространств имеет место и обратное.

Предложение 11.12 (Лемма Урысона) Пусть X — нормальное топологическое пространство, и A_0 и A_1 — два его замкнутых непересекающихся подмножества. Тогда существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, такая что $f|_{A_0} \approx 0$, и $f|_{A_1} \approx 1$, т.е. множества A_0 и A_1 функционально отделимы.

Доказательство. Предположим, что мы построили такую систему открытых множеств U_r , занумерованных всеми двоично-рациональными (т.е. вида $p/2^n$) числами $r \in [0, 1]$, что

- 1) множество A_0 содержится в U_0 ,
- 2) замыкание \bar{U}_1 множества U_1 содержится в $X \setminus A_1$,
- 3) множества U_r последовательно вложены, т.е. если $r < r'$, то $\bar{U}_r \subset U_{r'}$.

Тогда систему открытых множеств $\{U_r\}$ можно расширить, добавив множества $U_t = \bigcup_{r < t} U_r$, где t — произвольное вещественное число из $[0, 1]$. Система множеств $\{U_t\}$ удовлетворяет свойству (3). Действительно, для любых чисел t и t' из $[0, 1]$, где $t < t'$, найдутся рациональные числа r и r' , такие что $t < r < r' < t'$. Тогда $U_t \subset U_r$, и $U_{r'} \subset U_{t'}$. Но тогда, очевидно, $\bar{U}_t \subset \bar{U}_r$, а $\bar{U}_r \subset U_{r'}$, откуда получаем, что $\bar{U}_t \subset U_{t'}$. Определим функцию $f: X \rightarrow [0, 1]$, положив $f(x) = \sup\{t \mid x \notin U_t\}$. Покажем, что функция f непрерывна на X . Фиксируем произвольную точку x_0 и число $\varepsilon > 0$, и положим

$t_0 = f(x_0)$. По определению функции f имеем: $x_0 \notin U_{t_0-\varepsilon/2}^-$, и $x_0 \in U_{t_0+\varepsilon/2}^-$. Рассмотрим окрестность $V = U_{t_0+\varepsilon/2}^- \setminus U_{t_0-\varepsilon/2}^-$ точки x_0 . Тогда, так как любая точка x из V принадлежит, очевидно, $U_{t_0+\varepsilon/2}^-$ и не принадлежит $U_{t_0-\varepsilon/2}^-$, имеет место неравенство $t_0 - \varepsilon/2 \leq f(x) \leq t_0 + \varepsilon/2$, т.е. $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon$, что и доказывает непрерывность функции f . Очевидно, наконец, что функция f равна тождественно нулю на множестве A_0 , и равна единице на A_1 .

Итак, для доказательства предложения осталось построить систему открытых множеств U_r , удовлетворяющую требованиям 1–3. В силу нормальности пространства X , очевидно, для любого замкнутого множества A и его окрестности U найдется такая другая окрестность V множества A , что $A \subset V \subset \bar{V} \subset U$. Для краткости будем обозначать $V \setminus U$ тот факт, что $V \subset \bar{V} \subset U$. Итак, $A_0 = \bar{A}_0 \subset X \setminus A_1$, поэтому существует открытое множество U_0 , такое что $A_0 \subset U_0 \subset X \setminus A_1$. Точно также, \bar{A}_1 — замкнутое множество, содержащееся в открытом $X \setminus A_1$, поэтому найдется открытое множество U_1 , такое что $U_0 \subset U_1$. Предположим теперь, что для всех двоично-рациональных чисел вида $r = p/2^n$, где $0 \leq p \leq 2^n$ уже построены открытые множества U_r , причем $U_{p/2^n} \subset U_{(p+1)/2^n}$. Тогда так как $U_{p/2^n}$ — замкнутое множество, содержащееся в открытом множестве $U_{(p+1)/2^n}$, найдется открытое множество $U_{(2p+1)/2^{n+1}}$, такое что $U_{p/2^n} \subset U_{(2p+1)/2^{n+1}} \subset U_{(p+1)/2^n}$. Таким образом, по индукции, мы построили требуемое семейство множеств $\{U_r\}$ для всех двоично-рациональных чисел r из отрезка $[0, 1]$. Предложение доказано.

Из леммы Урысона вытекает следующее важное предложение о продолжении непрерывной функции, заданной на замкнутом подмножестве нормального топологического пространства.

Предложение 11.13 Пусть X — нормальное топологическое пространство, F — его произвольное замкнутое подмножество, и $f: F \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция на F . Тогда функция f продолжается до непрерывной функции $g: X \rightarrow \mathbb{R}^1$, где $g|_F \approx f$. Если при этом функция f ограничена некоторой константой c , т.е. $|f(x)| < c$, то и функция g может быть выбрана ограниченной той же константой c .

Доказательство. Предположим сначала, что функция f ограничена: существует константа c , такая что $|f(x)| < c$. Положим $\varphi_0(x) = f(x)$, и рассмотрим два замкнутых подмножества A_0 и B_0 множества F , положив

$$A_0 = \{x \mid \varphi_0(x) \leq -c/3\}, \quad \text{и} \quad B_0 = \{x \mid \varphi_0(x) \geq c/3\}.$$

Множества A_0 и B_0 , очевидно, не пересекаются и замкнуты в X (так как F замкнуто), поэтому в силу предложения 11.12 существует непрерывная функция $f_0: X \rightarrow [-c/3, c/3]$, такая что $f_0|_{A_0} \approx -c/3$, а $f_0|_{B_0} \approx c/3$. В частности, $|f_0(x)| \leq c/3$ для всех $x \in X$, и $|\varphi_0(x) - f_0(x)| \leq 2c/3$.

Определим на F новую функцию $\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - f_0(x)$. Эта непрерывная функция ограничена на F константой $2c/3$. Поэтому, повторяя конструкцию предыдущего абзаца, можно построить два непересекающихся замкнутых множества

$$A_1 = \{x \mid \varphi_1(x) \leq -2c/9\}, \quad \text{и} \quad B_1 = \{x \mid \varphi_1(x) \geq 2c/9\},$$

и непрерывную функцию $f_1: X \rightarrow [-2c/9, 2c/9]$, такую что $f_1|_{A_1} \approx -2c/9$ и $f_1|_{B_1} \approx 2c/9$. В частности, $|f_1(x)| \leq 2c/9$, и $|\varphi_1(x) - f_1(x)| \leq 4c/9$.

Повторяя этот процесс бесконечное число раз, мы построим две последовательности функций $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ и $\varphi_n: F \rightarrow \mathbb{R}^1$, такие что $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - f_n(x)$, и выполнены оценки

$$|f_n(x)| \leq (2/3)^n (c/3), \quad |\varphi_{n+1}(x)| \leq (2/3)^{n+1} c.$$

Далее, при всех x из F имеем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi_0(x) = f_0(x) + \varphi_1(x) = \dots \\ &= f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) + \varphi_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на всем пространстве X , так как $|f_n(x)| \leq (2/3)^n (c/3)$. Поэтому, в силу предложения 10.6, функция $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывна на всем X . Далее, так как $|\varphi_{n+1}(x)| \leq (2/3)^{n+1} c$, функция $g(x)$ совпадает с $f(x)$ на всем множестве F . Наконец,

$$|g(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \leq (c/3) \sum_{n=1}^{\infty} (2/3)^n = c,$$

что и завершает доказательство предложения для случая ограниченной функции.

Пусть теперь функция f неограничена. Рассмотрим гомеоморфизм $h: \mathbb{R}^1 \rightarrow (-1, 1)$. Тогда композиция $h \circ f$ — это непрерывная ограниченная функция на пространстве X , и для нее, как мы уже доказали, существует продолжение $g: X \rightarrow [-1, 1]$. Значения ± 1 функция g принимает на некотором замкнутом множестве F_1 , причем, очевидно, F_1 не пересекается с F . По предложению 11.12, существует непрерывная функция $\xi: X \rightarrow [0, 1]$, равная нулю на множестве F_1 и единице на F . Тогда функция $u(x) = g(x)\xi(x)$ совпадает с функцией $h \circ f$ на множестве F и переводит все пространство X в открытый интервал $(-1, 1)$. Положим, наконец, $w(x) = h^{-1} \circ u(x)$. Ясно, что на множестве F функции w и f совпадают, поэтому w — это искомое продолжение. Предложение доказано.

Добавление 11.2. Разбиение единицы. В данном разделе мы разовьем очень полезную для дальнейшей технику, позволяющую работать с непрерывными функциями на топологических пространствах в целом.

Пусть f — непрерывная функция на топологическом пространстве X . *Носителем функции f* называется замыкание множества всех точек x из X , в которых функция f отлична от нуля. Будем обозначать носитель функции f через $\text{supp } f$. По определению, вне своего носителя функция тождественно равна нулю. Очень полезным техническим приемом в топологии является разложение непрерывной функции в сумму непрерывных функций, носитель которых в некотором смысле мал.

Пусть $U = \{U_\alpha\}$ — некоторое открытое покрытие пространства X . Покрытие U называется *локально конечным*, если каждая точка x пространства X имеет такую окрестность $O(x)$, которая пересекается лишь с конечным набором элементов покрытия U .

Пусть $U = \{U_\alpha\}$ — локально конечное покрытие пространства X . Система функций $\varphi_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ удовлетворяющая следующим условиям

- для каждого α и $x \in X$ имеет место неравенство $0 \leq \varphi_\alpha(x) \leq 1$;
- для каждого α носитель функции φ_α содержится в соответствующем элементе покрытия: $\text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$;
- $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) \approx 1$;

называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию U* . Отметим, что сумма из определения разбиения единицы имеет смысл, так как в каждой точке x лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Оказывается, для любого локально конечного покрытия нормального пространства X существует подчиненное ему разбиение единицы. Мы докажем здесь этот факт только для конечных покрытий.

Предложение 11.14 Пусть X — нормальное пространство, и $\{U_\alpha\}$ — его конечное покрытие. Тогда существует подчиненное этому покрытию разбиение единицы.

Доказательство. Итак, пусть $\{U_\alpha\}$ — конечное покрытие. В силу предложения 11.11, существует измельчение $\{V_\alpha\}$ покрытия $\{U_\alpha\}$, причем $V_\alpha \subset U_\alpha$. Воспользовавшись предложением 11.12, построим на пространстве X непрерывную функцию ψ_α , такую что $\psi_\alpha|_{\bar{V}} \approx 1$, $\psi_\alpha|_{X \setminus U_\alpha} \approx 0$, и $0 \leq \psi_\alpha(x) \leq 1$. Это означает, что носитель $\text{supp } \psi_\alpha$ содержится в U_α , и $\psi_\alpha(x) > 0$ при $x \in V_\alpha$. Положим $\psi(x) = \sum_\alpha \psi_\alpha(x)$. Эта функция,

очевидно непрерывна. Покажем теперь, что $\psi(x) > 0$ на всем пространстве X . Действительно, для любой точки x из X существует окрестность V_{α_0} , такая что $x \in V_{\alpha_0}$, и, в частности, $\psi_{\alpha_0}(x) > 0$. Но тогда и $\psi(x) \geq \psi_{\alpha_0} > 0$. Определим, наконец, непрерывные функции $\varphi_\alpha(x)$, положив $\varphi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x)/\psi(x)$. Очевидно, $\text{supp } \varphi_\alpha = \text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha$, и, кроме того, $0 \leq \varphi_\alpha \leq 1$, а

$$\sum_{\alpha} \varphi_\alpha(x) = \sum_{\alpha} \psi_\alpha(x)/\psi(x) = \psi(x)/\psi(x) = 1.$$

Итак, мы построили разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Предложение доказано.

Замечание. Для перенесения доказательства предложения 11.14 на случай локально конечного покрытия, нужно получить обобщение на случай таких покрытий предложения 11.11.

Упражнение 11.14. Пусть X — евклидово пространство \mathbb{R}^n . Показать что в этом случае можно построить разбиение единицы с гладкими функциями φ_α .

12 Многообразия

Идея, лежащая в основе понятия многообразия, впервые, по-видимому, возникла при построении географических карт земной поверхности. Такие построения сводятся к отображению сферической поверхности Земли на плоскость. Естественно требовать, чтобы используемые отображения были взаимно однозначны и непрерывны, т.е. являлись гомеоморфизмами. Однако, можно показать, что сфера не гомеоморфна ни какой части плоскости, иными словами, нельзя построить карту всей Земли. Кроме того, при попытке построения карт достаточно больших кусков земной поверхности неизбежно возникают искажения (напомним, что сфера и плоскость локально не изометричны, так как имеют разные гауссовы кривизны). Поэтому картографы разбивают поверхность Земли, т.е. сферу, на несколько достаточно маленьких перекрывающихся кусочков, каждый из них отдельно проектируют на плоскость, получая тем самым атлас карт, а исходная сфера–Земля получается при обратной склейке этих кусочков. Неформально говоря, многообразие размерности n — это топологическое пространство, склеенное из областей пространства \mathbb{R}^n , как поверхность Земли из карт атласа.

Отметим, что с многообразиями мы уже не раз сталкивались в нашем курсе: а именно, регулярные кривые и поверхности — все это многообразия. Перейдем теперь к формальным определениям.

12.1 Топологические многообразия

Определение. Хаусдорфово топологическое пространство называется *топологическим многообразием размерности n* , если существует не более чем счетное покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства X его открытыми связными подмножествами U_α , такое что каждое U_α гомеоморфно некоторому открытому подмножеству V_α в \mathbb{R}^n . Если $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ — соответствующий гомеоморфизм, то пара $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ называется *картой*, а совокупность всех карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ — *атласом*. Если $U_\alpha \cap U_\beta$ не пусто, то возникает гомеоморфизм

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n,$$

который называется *отображением склейки* или *функцией перехода* (от одной карты к другой).

Пример. Простейший пример многообразия — это область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В качестве атласа можно выбрать карту $(\Omega, \text{id} : \Omega \rightarrow \Omega)$, где id — тождественное отображение.

Пример. Следующий тривиальный пример многообразия — график $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ непрерывной функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, для которого атлас состоит из

одной карты

$$(M, \varphi: (x^1, \dots, x^n, f(x^1, \dots, x^n)) \mapsto (x^1, \dots, x^n)).$$

Пример. Стандартная сфера $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданная в стандартных координатах (x^1, \dots, x^{n+1}) как множество вида $\{\sum_i (x^i)^2 = 1\}$, с топологией, индуцированной из объемлющего пространства, превращается в многообразие, если в качестве атласа выбрать карты вида

$$\begin{aligned} (U_i^+ = \{x^i > 0\}, \varphi_i^+ : (x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1})), \\ (U_i^- = \{x^i < 0\}, \varphi_i^- : (x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto (x^1, \dots, \widehat{x^i}, \dots, x^{n+1})), \end{aligned}$$

где $\widehat{x^i}$ означает, что координата x^i пропущена.

Другой пример атласа на сфере можно получить, если воспользоваться стереографическими проекциями. Пусть $N = (0, 0, \dots, 1) \in S^n$ — “северный полюс”, а $S = (0, 0, \dots, -1)$ — “южный полюс” сферы S^n . Обозначим через φ_N и φ_S стереографические проекции из северного и южного полюсов соответственно на координатную гиперплоскость $\Pi = \{x^{n+1} = 0\}$. Так как стереографические проекции являются гомеоморфизмами, $(S^n \setminus \{N\}, \varphi_N)$ и $(S^n \setminus \{S\}, \varphi_S)$ задают на S^n структуру n -мерного многообразия. Таким образом, на сфере можно выбрать атлас, состоящий из двух карт.

Упражнение 12.1. Выпишите функции перехода для обоих атласов из предыдущего примера.

Выбор карты $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ в окрестности данной точки P на многообразии задает в окрестности этой точки координаты (мы считаем, что в открытом подмножестве V_α пространства \mathbb{R}^n заданы некоторые криволинейные координаты (x^1, \dots, x^n) , т.е. каждой точке $P \in U_\alpha$ ставится в соответствие набор чисел $\varphi_\alpha(P) = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. Пусть точка P принадлежит двум разным картам U_α и U_β , и пусть (x^1, \dots, x^n) — координаты в V_α , а (y^1, \dots, y^n) — координаты в V_β . Тогда в окрестности $U_\alpha \cap U_\beta$ заданы две системы координат, определенные картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ и (U_β, φ_β) : каждой точке $P \in U_\alpha \cap U_\beta$ ставится в соответствие два набора чисел $\varphi_\alpha(P) = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ и $\varphi_\beta(P) = (y_0^1, \dots, y_0^n)$. При этом отображение склейки задает замену координат, которая может быть записана или в виде $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$, или в виде $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$.

Упражнение 12.2. Показать, что если X — топологическое многообразие размерности n , то на X существует не более чем счетный атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, где каждый координатный гомеоморфизм имеет вид $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. без ограничения общности можно предполагать, что координатные гомеоморфизмы отображают карты на все \mathbb{R}^n .

12.2 Функции и отображения

Пусть M^n — топологическое многообразие, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ — некоторая непрерывная функция на M . Рассмотрим произвольную карту (U, φ) многообразия M , т.е. гомеоморфизм $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда определена функция $\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$, отображающая \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^1 . Обозначим через (x^1, \dots, x^n) координаты в \mathbb{R}^n , которые, напомним, предполагаются фиксированными. Тогда функция \tilde{f} может быть записана в этих координатах в виде $\tilde{f}(x^1, \dots, x^n)$. Функцию $\tilde{f}(x^1, \dots, x^n)$ мы будем называть *координатным представлением функции f в карте (U, φ)* или *координатным представлением функции f в локальных координатах (x^1, \dots, x^n)* . При этом мы часто, допуская некоторую вольность речи, будем отождествлять *разные* функции f и \tilde{f} и записывать координатное представление \tilde{f} функции f просто в виде $f(x^1, \dots, x^n)$.

Далее, пусть имеется два многообразия M^m и N^n , и пусть задано непрерывное отображение $F: M \rightarrow N$ из многообразия M в многообразие N . Фиксируем в многообразии M точку P , и пусть $Q = F(P)$. Рассмотрим карту (W, ξ) многообразия N , такую, что $Q \in W$. Тогда, в силу непрерывности отображения F , существует открытое в M множество $U \subset M$, содержащее точку P , такое что $F(U) \subset W$. При этом, очевидно, множество U можно выбрать целиком лежащим в некоторой карте многообразия M . Ограничение отображения φ на U также, очевидно, является картой, которую, без ограничения общности, можно считать входящей в наш атлас. Итак, существует карта (U, φ) многообразия M , такая что $P \in U$ и $F(U) \subset W$. Отображение F порождает отображение $\tilde{F} = \xi \circ F \circ \varphi^{-1}$, заданное на области $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ и переводящее ее в область $\xi(W) \subset \mathbb{R}^n$.

Обозначим через (x^1, \dots, x^m) локальные координаты на M , порожденные картой (U, φ) , а через (y^1, \dots, y^n) — локальные координаты на N , порожденные картой (W, ξ) . Отображение \tilde{F} в этих координатах может быть записано в виде

$$y^i = \tilde{F}^i(x^1, \dots, x^m), \quad i = 1, \dots, n.$$

Это отображение называется *координатным представлением отображения F в картах (U, φ) и (W, ξ)* или *координатным представлением отображения F в локальных координатах (x^1, \dots, x^m) и (y^1, \dots, y^n)* . При этом мы часто, допуская некоторую вольность речи, будем отождествлять *разные* отображения F и \tilde{F} и записывать координатное представление \tilde{F} отображения F просто в виде $F^i(x^1, \dots, x^m)$.

12.3 Гладкие многообразия

Пусть M^n — топологическое многообразие, $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция на M^n , и P — произвольная точка из M^n . Как определить дифференцируемость f в точке P ? Естественно было бы воспользоваться координатным представлением функции f в каких-нибудь локальных координатах

в окрестности точки P , которое, напомним, является *обычной* функцией на области в \mathbb{R}^n и определить дифференцируемость f в $P \in M^n$ как *обычную* дифференцируемость ее координатного представления в точке $\varphi^{-1}(P)$. Собственно для этого и нужна карта т.е. локальные координаты. Однако как мы уже отмечали, точка P может принадлежать нескольким картам, и, тем самым, в окрестности точки P может быть определено несколько локальных координат. Тогда естественно требовать, чтобы определение дифференцируемости функции в точке P не зависело от выбора карты или, другими словами, чтобы все локальные координаты на многообразии были бы равноправны. Ясно, что это “равноправие” есть в точности условие на функции перехода. Оно приводит к следующему определению.

Определение. Топологическое многообразие называется *гладким*, если все отображения склейки — гладкие.

Замечание. Напомним, что в дифференциальной геометрии под словом “гладкий” обычно понимают непрерывную дифференцируемость столько раз, сколько нужно, хотя, конечно, можно определить *многообразия класса* C^r , $0 \leq r \leq \infty$ (случай $r = 0$ соответствует топологическим многообразиям), а также *вещественно аналитические многообразия* и, для четных n , *комплексно аналитические многообразия*. Ниже, мы обычно будем иметь дело с бесконечно гладкими многообразиями (если противное не будет оговорено специально).

Замечание. Если структура топологического многообразия задана атласом, состоящим из одной карты, то оно автоматически является гладким. (Функций перехода нет вообще, гладкость проверять не у чего.)

Замечание. Существуют примеры топологических многообразий размерности $n > 10$, на которых нельзя ввести структуру гладкого многообразия.

Пусть на многообразии M заданы два атласа $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\mathcal{A}' = \{(U'_\alpha, \varphi'_\alpha)\}$, каждый из которых задает на M структуру гладкого многообразия. Атласы \mathcal{A} и \mathcal{A}' называются *эквивалентными*, если их объединение $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ также задает на многообразии M структуру гладкого многообразия (т.е. все функции перехода между всеми картами атласов \mathcal{A} и \mathcal{A}' являются гладкими).

Упражнение 12.3. Являются ли эквивалентными следующие два атласа на вещественной прямой: $\mathcal{A} = \{(U = \mathbb{R}^1(x), \varphi(x) = x)\}$, и $\mathcal{A}' = \{(U' = \mathbb{R}^1(x), \varphi'(x) = x^3)\}$?

Пусть \mathcal{A} — некоторый атлас, задающий на M структуру гладкого многообразия. Обозначим через \mathcal{A}_{\max} максимальный атлас на M , эквивалентный \mathcal{A} . Другими словами, если \mathcal{A}' — произвольный эквивалентный \mathcal{A} атлас на M , то \mathcal{A}' по определению содержится в \mathcal{A}_{\max} . Ясно, что два атласа на M

эквивалентны, если и только если они содержатся в одном и том же максимальном атласе. Максимальные атласы на многообразии M называют *гладкими структурами* многообразия M . В дальнейшем, говоря о гладком многообразии мы будем всегда предполагать фиксированной некоторую его гладкую структуру. Заметим, что определение гладкости функции, даваемое ниже, зависит, вообще говоря от гладкой структуры.

12.4 Простейшие примеры гладких многообразий

Пример. Рассмотренные выше многообразия, т.е. область Ω , график непрерывной функции и сфера S^n , являются гладкими. (В первых двух случаях это очевидно, в последнем — вытекает из явного вида функций перехода.)

Пример. Важным примером гладкого многообразия является проективное пространство $\mathbb{R}P^n$. Напомним, что проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ размерности n называется множество всех прямых в \mathbb{R}^{n+1} , проходящих через начало координат. Введем на $\mathbb{R}P^n$ функцию расстояния $\rho(P, Q)$, равную углу между прямыми P и Q (проверьте, что функция ρ удовлетворяет всем аксиомам расстояния). Функция расстояния ρ превращает $\mathbb{R}P^n$ в метрическое, а, значит, и в топологическое пространство. Зададим теперь на $\mathbb{R}P^n$ карты следующим образом. Обозначим через U_i множество всех проходящих через начало координат прямых в \mathbb{R}^{n+1} , не перпендикулярных i -ому координатному вектору. Иными словами, прямая ℓ с направляющим вектором $e = (x^1, \dots, x^{n+1})$ входит в U_i , если и только если $x^i \neq 0$. Отображение $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ определим так:

$$\varphi_i: \ell \mapsto \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right).$$

(Проверьте, что φ_i — гомеоморфизмы).

Выпишем в явном виде отображения склейки. Рассмотрим две карты (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) , и пусть $\varphi_{ij}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ — отображение склейки. Если $e = (x^1, \dots, x^{n+1})$ — направляющий вектор прямой $\ell \in U_i \cap U_j$, то

$$\begin{aligned} \varphi_i(\ell) &= \left(\frac{x^1}{x^i}, \dots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^i} \right) = (\alpha^1, \alpha^{i-1}, \alpha^{i+1}, \dots, \alpha^{n+1}), \\ \varphi_j(\ell) &= \left(\frac{x^1}{x^j}, \dots, \frac{x^{j-1}}{x^j}, \frac{x^{j+1}}{x^j}, \dots, \frac{x^{n+1}}{x^j} \right) = (\beta^1, \beta^{j-1}, \beta^{j+1}, \dots, \beta^{n+1}), \end{aligned}$$

поэтому

$$\beta^k = \frac{x^i}{x^j} \alpha^k = \frac{\alpha^k}{\alpha^j} \quad \text{при } k \neq i, \quad \text{и} \quad \beta^i = \frac{x^i}{x^j} = \frac{1}{\alpha^j}.$$

Таким образом, отображения склейки действительно являются гладкими, и, значит, $\mathbb{R}P^n$ — гладкое n -мерное многообразие.

Пример. Пусть M_1 и M_2 — два гладких многообразия. Рассмотрим прямое произведение $M_1 \times M_2$ топологических пространств M_1 и M_2 , и введем на нем структуру гладкого многообразия. А именно, пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ — атласы на многообразиях M_1 и M_2 соответственно. Тогда пары $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ задают на $M_1 \times M_2$ гладкий атлас (проверьте!).

12.5 Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизмы

Пусть M — гладкое многообразие, и $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция на M .

Определение. Функция f называется *гладкой в точке* $P \in M$, если для некоторой карты (U, φ) , такой что $P \in U$, координатное представление функции f является гладким в точке $\varphi(P)$. Функция f называется *гладкой на многообразии* M , если она гладкая во всех точках многообразия M .

Далее, пусть M и N — два гладких многообразия, и $F: M \rightarrow N$ — непрерывное отображение из M в N .

Определение. Отображение F называется *гладким в точке* $P \in M$, если для некоторых карт (U, φ) на M и (W, ξ) на N , таких что $P \in U$ и $F(U) \subset W$ (напомним, что такие карты существуют для любой точки $P \in M$), соответствующее координатное представление отображения F является гладким в точке $\varphi(P)$. Отображение F называется *гладким*, если оно является гладким в каждой точке $P \in M$.

Очевидно, что гладкая функция — это просто частный случай гладкого отображения многообразий: многообразие M отображается в многообразие \mathbb{R}^1 со стандартной гладкой структурой.

Отметим, что определения гладкой функции и гладкого отображения зависят только от гладкой структуры многообразия и не зависят от выбора локальных координат (в фиксированной гладкой структуре). Действительно, если (U, φ) и (U', φ') — две карты на M , содержащие точку P , и f — непрерывная функция на M , то координатные представления $f \circ \varphi^{-1}$ и $f \circ (\varphi')^{-1}$ функции f в этих разных картах одновременно являются гладкими в точках $\varphi(P)$ и $\varphi'(P)$ соответственно, поскольку отличаются друг от друга на гладкую функцию перехода $\varphi' \circ \varphi^{-1}$.

Замечание. Аналогично можно определить функции и отображения класса C^r , а также вещественно аналитические и комплексно аналитические функции (отображения). Отметим, что класс гладкости многообразия должен быть не ниже определяемого класса гладкости отображения.

Пусть $F: M^m \rightarrow N^n$ — гладкое отображение гладких многообразий, P — произвольная точка из M , и $Q = F(P)$. Рассмотрим координатное представление функции F в локальных координатах (x^1, \dots, x^m) в окрестности $P \in M$ и (y^1, \dots, y^n) в окрестности Q , которое запишем в виде

$$y^i = f^i(x^1, \dots, x^m), \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда матрица Якоби этого координатного представления, т.е. матрица

$$\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}(P) \right)$$

называется *матрицей Якоби отображения F в точке P* в координатах (x^1, \dots, x^m) и (y^1, \dots, y^n) . Отметим, что при замене локальных координат матрица Якоби изменяется как матрица линейного отображения, где в качестве матриц перехода выступают матрицы Якоби соответствующих функций перехода.

Пример. Пусть M — гладкое многообразие. *Гладкой кривой γ на многообразии M* называется гладкое отображение интервала I (со стандартной гладкой структурой) в многообразие M . Если точка P из M лежит в образе отображения γ , т.е. $P \in \gamma(I)$, то будем говорить, что кривая γ *проходит через точку P* . Ясно, что если $\gamma: I \rightarrow M$ — гладкая кривая на M , и $\tau: I' \rightarrow I$ — взаимно однозначное гладкое в обе стороны отображение интервала I' в интервал I , то отображение $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau: I' \rightarrow M$ — снова гладкая кривая. Будем говорить, что кривая $\tilde{\gamma}$ получена из кривой γ *заменой параметризации*. С точностью до параметризации всегда можно считать, что кривая параметризована, скажем, интервалом $(-1, 1)$.

Напомним, что на классе топологических пространств мы определили отношение эквивалентности с помощью понятия гомеоморфизма. Однако, очевидно, гомеоморфизмы не сохраняют структуру гладкого многообразия (хотя карта по-прежнему переходит в карту, гладкость функций перехода разрушается). Поэтому требуется усилить определение гомеоморфизма так, чтобы гладкая структура сохранялась.

Определение. Пусть F — гомеоморфизм гладкого многообразия M в гладкое многообразие N . Если отображение F является гладким, и, более того, обратное отображение F^{-1} так же является гладким, то отображение F называется *диффеоморфизмом*. Если существует диффеоморфизм M в N , то говорят, что многообразия M и N *диффеоморфны*.

Понятие диффеоморфизма играет для класса гладких многообразий ту же роль, что и понятие гомеоморфизма на классе топологических пространств. А именно, очевидно, отношение диффеоморфности является отношением эквивалентности на классе гладких многообразий, и мы, обычно,

не будем различать диффеоморфные многообразия. Свойства многообразий, сохраняющиеся при диффеоморфизмах называются *дифференциальными инвариантами*. Такие свойства являются важными характеристиками многообразий. Одним из таких инвариантов, как мы вскоре увидим, является размерность многообразия.

Замечание. Оказывается, в размерности $n = 4$, и только в ней, на \mathbb{R}^n существуют гладкости, не диффеоморфные стандартной гладкости на \mathbb{R}^n .

Теорема 12.1 *Если гладкие многообразия M и N диффеоморфны, то их размерности совпадают.*

Доказательство. Пусть $F: M \rightarrow N$ — диффеоморфизм. Обозначим через m и n размерности многообразий M и N соответственно. Фиксируем произвольную точку P на многообразии M , обозначим через Q ее образ при отображении F и рассмотрим координатные представления отображений F и F^{-1} в локальных координатах (x^1, \dots, x^m) в окрестности точки P на M и в локальных координатах (y^1, \dots, y^n) в окрестности точки Q на N . Эти координатные представления — суть векторзначные функции

$$(y^1, \dots, y^n) = F(x^1, \dots, x^m), \quad (x^1, \dots, x^m) = F^{-1}(y^1, \dots, y^n),$$

причем эти функции взаимно обратны:

$$F(F^{-1}(y^1, \dots, y^n)) = (y^1, \dots, y^n), \quad F^{-1}(F(x^1, \dots, x^m)) = (x^1, \dots, x^m).$$

Обозначим через $dF(P)$ и $dF^{-1}(Q)$ матрицы Якоби координатных представлений отображений F и F^{-1} в точках P и Q соответственно.³ Напомним стандартную теорему о дифференцировании сложной функции.

Лемма 12.1 *Пусть U_i , $i = 1, 2, 3$ — область в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n_i} . Предположим, что заданы гладкие отображения $F: U_1 \rightarrow U_2$ и $G: U_2 \rightarrow U_3$, и $H = G \circ F$ — композиция отображений F и G . Тогда, отображение H — гладкое, и если P — точка из U_1 , то для матриц Якоби выполнено следующее соотношение: $dH(P) = dG(F(P)) \cdot dF(P)$.*

Применим эту теорему к композициям $F \circ F^{-1}$ и $F^{-1} \circ F$. Получим

$$E_m = dF^{-1}(Q) \cdot dF(P), \quad E_n = dF(P) \cdot dF^{-1}(Q),$$

где E_k — единичная матрица размера $k \times k$, так как матрица Якоби тождественного отображения — это единичная матрица.

³Здесь мы, избегая громоздких формул, допускаем определенную вольность, отождествляя отображение с его координатным представлением, а точку многообразия с ее образом при координатном гомеоморфизме. Формально следует писать $d\tilde{F}(\varphi(P))$.

Поскольку матрицы $dF(P)$ и $dF^{-1}(Q)$ — прямоугольные размера $n \times m$ и $m \times n$ соответственно, имеем $\text{rank } dF(P) \leq \min(m, n)$ и $\text{rank } dF^{-1}(Q) \leq \min(m, n)$. Вспомним, что ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей. Получаем: $m \leq \min(m, n)$ и $n \leq \min(m, n)$, поэтому $\max(m, n) \leq \min(m, n)$, т.е. $m = n$, что и требовалось.

Замечание. Отметим, что аналогичный результат для гомеоморфных топологических многообразий — весьма нетривиален, и находится поэтому за рамками настоящего курса.

Замечание. Пусть X — топологическое пространство, M — гладкое многообразие и F — гомеоморфизм из X в M . Тогда на X можно ввести структуру гладкого многообразия так, чтобы отображение F стало диффеоморфизмом. Действительно, для этого достаточно построить атлас на X так. Для каждой карты (U, φ) на M рассмотрим карту $(F^{-1}(U), \varphi \circ F)$. Очевидно, что полученный в результате атлас задает на X гладкую структуру, которая называется *перенесенной на X с M с помощью отображения F* .

12.6 Задание многообразий уравнениями — геометрический смысл теоремы о неявной функции

Один из наиболее часто встречающихся в приложениях объектов — это подмножество евклидова пространства \mathbb{R}^n , заданное системой уравнений. Оказывается, если система уравнений “хорошая”, т.е. удовлетворяет естественным ограничениям, то такие подмножества являются гладкими многообразиями.

А именно, пусть задана система уравнений

$$f^i(x^1, \dots, x^n) = c^i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Множество решений этой системы уравнений удобно представлять как множество уровня векторзначной функции $F(x^1, \dots, x^n) = (f^1, \dots, f^k)$:

$$M_c = \{(x^1, \dots, x^n) \mid F(x^1, \dots, x^n) = c\},$$

где $c = (c^1, \dots, c^k)$ — постоянный вектор. Имеет место следующий результат.

Теорема 12.2 *Если матрица Якоби отображения F имеет в каждой точке множества уровня M_c максимальный ранг, равный k , то M_c является гладким многообразием размерности $n - k$. При этом в окрестностях каждой точки из M_c в качестве локальных координат можно выбрать некоторые $n - k$ декартовых координат объемлющего пространства \mathbb{R}^n .*

Доказательство. Пусть P — произвольная точка из M_c . По условию, ранг матрицы Якоби $dF(P)$ отображения f в точке P равен k . Это означает, что имеется набор из k столбцов матрицы Якоби, такой что определитель соответствующего $k \times k$ минора матрицы $dF(P)$ отличен от нуля. Без ограничения общности предположим, что это столбцы с номерами $1, \dots, k$. Обозначим через \tilde{P} образ точки P при стандартной проекции на координатную плоскость \mathbb{R}^{n-k} , определенную соотношениями $x^1 = \dots = x^k = 0$. Тогда, по теореме о неявной функции, известной из математического анализа, в некоторой окрестности W точки \tilde{P} в координатной плоскости \mathbb{R}^{n-k} существуют гладкие функции

$$x^i(x^{k+1}, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, k,$$

разрешающие нашу систему уравнений $F(x^1, \dots, x^n) = c$, т.е.

$$F(x^1(x^{k+1}, \dots, x^n), \dots, x^k(x^{k+1}, \dots, x^n), x^{k+1}, \dots, x^n) = c$$

для всех (x^{k+1}, \dots, x^n) из W .

Обозначим через U окрестность точки P в M_c , проектирующуюся на W . В качестве карты в окрестности точки P на M_c возьмем пару (U, π) , где π — стандартная проекция на координатную плоскость \mathbb{R}^{n-k} . Обратное отображение π^{-1} задается так:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(x^{k+1}, \dots, x^n) &= \\ &= (x^1(x^{k+1}, \dots, x^n), \dots, x^k(x^{k+1}, \dots, x^n), x^{k+1}, \dots, x^n). \end{aligned}$$

По построению, для каждой точки (x^{k+1}, \dots, x^n) из $W \subset \mathbb{R}^{n-k}$ точка $\pi^{-1}(x^{k+1}, \dots, x^n)$ попадает на множество уровня M_c . Отображения π и π^{-1} , очевидно, непрерывны и взаимно обратны. Итак, для каждой точки $P \in M_c$ мы построили карту. Тем самым, доказано, что M_c — топологическое многообразие размерности $n - k$.

Осталось проверить гладкость многообразия M_c . Предположим, что точка P содержится как в построенной выше карте (U, π) , так и в другой карте (U', π') . Напомним, что во всех картах в качестве локальных координат выступают некоторые $n - k$ декартовых координат объемлющего пространства. В карте (U, π) локальные координаты это (x^{k+1}, \dots, x^n) , а в карте (U', π') — $(x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-k}})$. Тогда функции перехода выглядят так:

$$x^{i_p} = \begin{cases} x^{i_p}(x^{k+1}, \dots, x^n), & \text{если } i_p \leq k \\ x^{i_p}, & \text{если } i_p > k. \end{cases}$$

Но, по построению, функции x^{i_p} , $p = 1, \dots, k$, являются гладкими, что и доказывает гладкость многообразия M_c .

Упражнение 12.4. Доказательство теоремы 12.2, приведенное выше, содержит пробел. Найдите и устраните его.

Следующие два утверждения являются важными частными случаями теоремы 12.2.

Следствие 12.1 Пусть f — гладкая функция на \mathbb{R}^n . Рассмотрим множество уровня $M_c = \{(x^1, \dots, x^n) \mid f(x^1, \dots, x^n) = c\}$ функции f . Если дифференциал df отличен от нуля во всех точках множества M_c , то M_c является многообразием размерности $n - 1$.

Следствие 12.2 Регулярные поверхности в евклидовом пространстве, изученные нами в классическом случае, являются гладкими многообразиями.

Пример. Сфера S^n , заданная в \mathbb{R}^{n+1} уравнением $\sum_k (x^k)^2 = 1$, является гладким многообразием, так как дифференциал уравнения обращается в нуль только в начале координат, которое не принадлежит сфере.

Пример. Рассмотрим специальную линейную группу $SL(n, \mathbb{R})$ вещественных матриц размера $n \times n$. Напомним, что по определению $SL(n, \mathbb{R})$ — множество всех квадратных вещественных матриц с определителем 1. Множество всех вещественных матриц размера $n \times n$ естественным образом отождествляется с линейным пространством \mathbb{R}^{n^2} (для этого достаточно записать квадратную матрицу X в виде одной длинной строки). Покажем, что $SL(n, \mathbb{R})$ является гладким многообразием размерности $n^2 - 1$. Действительно, $SL(n, \mathbb{R})$ может быть задано как множество уровня функции $\det X$ определенной на пространстве \mathbb{R}^{n^2} всех квадратных матриц:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det X = 1\}.$$

Поэтому, в силу следствия 12.1, достаточно проверить, что $d(\det(X))$ не обращается в нуль в точках из $SL(n, \mathbb{R})$. Вычислим дифференциал функции $\det(X)$ в декартовых координатах (x_{ij}) , $1 \leq i, j \leq n$, пространства \mathbb{R}^{n^2} . Для этого заметим, что

$$\frac{\partial \det(X)}{\partial x_{ij}} = (-1)^{i+j} X_{ij},$$

где через X_{ij} обозначен минор матрицы X , соответствующий элементу x_{ij} этой матрицы (это немедленно вытекает из формулы разложения определителя по строке или столбцу). Осталось заметить, что одновременно все миноры размера $(n-1) \times (n-1)$ матрицы из $SL(n, \mathbb{R})$ не могут равняться нулю, поэтому $d(\det(X))$ не равен нулю, если $X \in SL(n, \mathbb{R})$. Таким образом, мы находимся в условиях следствия 12.1, из которого вытекает, что $SL(n, \mathbb{R})$ — гладкое многообразие размерности $n^2 - 1$.

12.7 Подмногообразия

Выше мы показали, что заданные системой уравнений регулярные поверхности в евклидовом пространстве являются многообразиями. Напомним,

что само \mathbb{R}^n также представляет собой многообразие. Таким образом, мы имеем дело с многообразием (поверхностью), лежащим в другом многообразии (в \mathbb{R}^n). Это рассмотрение приводит к следующему важному понятию.

Определение. Подмножество M гладкого многообразия N размерности n называется *гладким подмногообразием размерности t* , если для каждой точки $P \in M$ существует такая карта (U, φ) , $P \in U$, что множество $\varphi(M \cap U)$ является t -мерной регулярной поверхностью.

Из доказанного выше вытекает, что каждое множество $M \cap U$ является гладким многообразием размерности t , поэтому и все подмногообразие M является многообразием размерности t (в качестве атласа надо взять объединение карт по всем $M \cap U$).

Задачи к лекции 12

Задача 12.1. Показать, что объединение двух координатных осей не является многообразием.

Задача 12.2. Задать на двумерном торе $T^2 = S^1 \times S^1$ структуру двумерного топологического многообразия.

Задача 12.3. Привести пример различных гладких структур на прямой \mathbb{R}^1 .

Задача 12.4. Проверить эквивалентность двух описанных выше атласов на стандартной сфере.

Задача 12.5. Рассмотрим на прямой \mathbb{R} атлас, состоящий из двух карт: $(\mathbb{R}, \varphi : x \mapsto x)$ и $(\mathbb{R}, \psi : x \mapsto x^3)$. Так как φ и ψ , очевидно, гомеоморфизмы, мы задали на \mathbb{R} структуру топологического многообразия. Показать, что оно не является гладким. Модифицировать предыдущий пример так, чтобы получилось многообразие класса C^2 , но не C^3 .

Задача 12.6. Показать, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ является комплексно аналитическим многообразием комплексной размерности n .

Задача 12.7. Показать, что гладкие многообразия $\mathbb{R}^1(x)$ с картой $(\mathbb{R}^1, \varphi(x) = x)$ и $\mathbb{R}^1(y)$ с картой $(\mathbb{R}^1, \varphi(y) = y^3)$ диффеоморфны.

Задача 12.8. Показать, что любое некомпактное связное одномерное многообразие диффеоморфно \mathbb{R}^1 , а любое компактное связное одномерное многообразие диффеоморфно окружности S^1 .

Задача 12.9. Рассмотрим в \mathbb{R}^4 поверхность, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \\ (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1. \end{cases}$$

Показать, что эта поверхность в \mathbb{R}^4 является гладким многообразием размерности 2, и это многообразие диффеоморфно двумерному тору $T^2 = S^1 \times S^1$.

Задача 12.10. Показать, что следующие матричные группы являются гладкими многообразиями и определить их размерность:

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det X \neq 0\}, \\ O(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid XX^T = E\}, \\ SO(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid XX^T = E, \det X = 1\}, \\ U(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2} \mid X\bar{X}^T = E\}, \\ SU(n, \mathbb{R}) &= \{X \in \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2} \mid X\bar{X}^T = E, \det X = 1\}. \end{aligned}$$

Исследовать эти матричные группы на компактность и линейную связность.

Задача 12.11. Показать, что многообразие $O(2)$ гомеоморфно объединению двух окружностей. Чему равны радиусы этих окружностей? Как расположены эти окружности в \mathbb{R}^4 (зацеплены ли они)?

Задача 12.12. Доказать, что отображение $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, сопоставляющее точке p на сфере S^2 прямую, проходящую через начало координат и точку p , является гладким отображением гладких многообразий.

Задача 12.13. Доказать, что при $n \neq m$ пространства \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m не диффеоморфны.

Задача 12.14. Какому многообразию гомеоморфно множество всех прямых на плоскости? Всех ориентированных прямых на плоскости?

Задача 12.15. Докажите, что $O(n)$ и $SL(n, \mathbb{R})$ являются гладкими подмногообразиями в \mathbb{R}^{n^2} .

Дополнительный материал к лекции 12

Добавление 12.1. Патологические примеры. Приводимые здесь примеры иллюстрируют важность всех требований из определения многообразия.

Пример. Приведем пример топологического пространства, для которого выполняются все условия из определения многообразия, кроме хаусдорфовости. Для этого возьмем два экземпляра прямой \mathbb{R} и отождествим все точки с одинаковыми координатами, за исключением точек 0. Полученное топологическое пространство, наделенное фактортопологией, называется *прямой Александрова*. Докажите, что это пространство не является хаусдорфовым (точки 0 не отделимы), хотя все остальные условия из определения многообразия выполняются.

Пример. Приведем пример топологического пространства, для которого выполняются все условия из определения многообразия, кроме существования счетной системы карт. Представим двумерную плоскость \mathbb{R}^2 как дизъюнктивное объединение параллельных прямых (с топологией дизъюнктивного объединения). Каждая прямая, очевидно, гомеоморфна \mathbb{R}^1 , однако, в построенном пространстве X нельзя выбрать никакого счетного атласа.

Добавление 12.2. Задание структуры гладкого многообразия на множестве. По определению, структура гладкого многообразия задается на некотором хаусдорфовом топологическом пространстве. Предположим теперь, что у нас есть произвольное множество X (без какой-бы то ни было топологии), и фиксирована не более чем счетная система его подмножеств $\{U_\alpha\}$, такая что

- подмножества U_α покрывают X ;
- для каждого множества U_α фиксировано взаимно однозначное отображение $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- если функции перехода, т.е. композиции вида $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ определена, то она является гладкой.

Тогда на множестве X можно ввести структуру хаусдорфова топологического пространства, и относительно этой структуры X будет гладким многообразием.

Действительно, достаточно объявить открытыми в X те и только те подмножества, образы пересечений которых с любым из U_α открыты в \mathbb{R}^n .

Упражнение 12.5. Проверить, что в результате действительно получится некоторая топология на X . Показать, что X — хаусдорфово. Показать, что семейство $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ задает на X структуру гладкого многообразия.

Замечание. Отметим, что если проделать описанную только что процедуру для гладкого многообразия M , то в результате мы получим на M топологию, эквивалентную исходной. В этом смысле, гладкая структура многообразия определяет его топологию (как, скажем, метрика определяет топологию метрического пространства).

Добавление 12.3. Гомеоморфизм $\mathbb{RP}(3)$ и $SO(3)$. Многие из рассмотренных нами многообразий “устроены одинаково” с точки зрения топологии, т.е. гомеоморфны друг другу. Приведем пример.

Теорема 12.3 *Трехмерное проективное пространство $\mathbb{RP}(3)$ гомеоморфно матричной группе $SO(3)$ специальных (с определителем 1) ортогональных преобразований трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 .*

Доказательство. Напомним, что каждое преобразование $A \in \text{SO}(3)$, $A \neq E$, представляет собой вращение вокруг некоторой оси ℓ на некоторый угол φ , $0 < \varphi \leq \pi$. Рассмотрим замкнутый шар D^3 с центром в нуле O радиуса π и определим отображение $\nu: D^3 \rightarrow \text{SO}(3)$ так. Поставим в соответствие точке $O \in D^3$ тождественное преобразование E ; отличной от O точке $P \in D^3$, не лежащей на границе шара D^3 , — вращение A вокруг прямой OP на угол $\varphi = |P|$, причем из двух возможных преобразований этого типа выберем то, которое удовлетворяет следующему условию: если Π — плоскость, ортогональная к ℓ , и $v \in \Pi$ — произвольный ненулевой вектор, то потребуем, чтобы репер (v, Av, OP) был положительно ориентирован; наконец, каждой граничной точке P шара D^3 поставим в соответствие вращение вокруг прямой OP на угол π (такое вращение определено однозначно). Ясно, что образ отображения ν совпадает с $\text{SO}(3)$; отображение ν взаимно-однозначно на внутренности шара D^3 ; каждой паре диаметрально противоположных точек из границы шара D^3 ставится одно и то же вращение, причем разным парам таких точек ставятся в соответствие разные вращения, отличные от тех, которые соответствуют точкам внутренности шара D^3 . Так как ось вращения и угол поворота непрерывно зависят от коэффициентов матрицы поворота, мы получаем, что $\text{SO}(3)$ гомеоморфно диску D^3 , у которого отождествлены диаметрально противоположные точки границы.

С другой стороны, каждая точка проективного пространства \mathbb{RP}^3 — это некоторая проходящая через начало координат прямая ℓ в \mathbb{R}^4 , где фиксированы координаты (x^1, \dots, x^4) . Рассмотрим стандартную сферу S^3 , и пусть $S^3_+ = S^3 \cap \{x^4 \geq 0\}$ — замкнутая полусфера. Ясно, что S^3_+ гомеоморфна замкнутому трехмерному диску (гомеоморфизм задается проекцией на трехмерное пространство $\{x^4 = 0\}$). Если ℓ не лежит в $\{x^4 = 0\}$, то она пересекает полусферу S^3_+ ровно в одной точке. Если же ℓ лежит в $\{x^4 = 0\}$, то ℓ пересекает полусферу в двух диаметрально противоположных точках. Таким образом, \mathbb{RP}^3 гомеоморфно диску S^3_+ , у которого отождествляются противоположные точки границы. Доказательство закончено.

Упражнение 12.6. Показать, что многообразие $SU(2, \mathbb{R})$ гомеоморфно сфере S^3 .

Показать, что многообразие $U(n, \mathbb{R})$ гомеоморфно прямому произведению $SU(n, \mathbb{R})$ на окружность S^1 .

13 Касательное пространство к многообразию, дифференциал.

Напомним, что касательными векторами к поверхности M в данной точке $P \in M$ называются вычисленные в точке P векторы скоростей гладких кривых, лежащих на поверхности M и проходящих через точку P . Это определение использовало то обстоятельство, что поверхность рассматривалась как подмножество евклидова пространства.

В случае абстрактных многообразий дело обстоит несколько сложнее (абстрактное гладкое многообразие нигде, вообще говоря, не лежит). Тем не менее, имеется естественное определение касательного вектора в точке к гладкому многообразию M , использующее возможность ввести в окрестности каждой точки многообразия локальные координаты. Мы приведем три определения касательного вектора и покажем их эквивалентность (в разных задачах оказывается удобным выбирать одно из трех этих определений).

13.1 Определение касательного вектора

Итак, пусть M — гладкое многообразие размерности n , и $P \in M$ — некоторая точка. Рассмотрим всевозможные локальные системы координат в окрестности точки P , и в каждой такой системе зададим набор $v = (v^1, \dots, v^n)$ из n чисел так, что если в координатах (x^1, \dots, x^n) задан набор (v^1, \dots, v^n) , в координатах (y^1, \dots, y^n) задан набор (w^1, \dots, w^n) , а $J = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$ — матрица Якоби перехода из x -координат в y -координаты, вычисленная в точке P , то $w^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} v^j$ (сравните с законом изменения касательного к поверхности вектора при замене криволинейных координат). Если такие наборы чисел заданы, то говорят, что задан *касательный вектор в точке P многообразия M* , а числа (v^1, \dots, v^n) называют *компонентами* этого касательного вектора по отношению в локальной системе координат (x^1, \dots, x^n) . Другими словами, касательный вектор в точке P — это соответствие, сопоставляющее каждой локальной системе координат в P набор чисел — компонент касательного вектора, причем компоненты одного и того же касательного вектора в разных системах координат связаны по указанному выше правилу. Данное только что определение касательного вектора будем называть *алгебраическим определением* или *координатным определением* касательного вектора.

Утверждение 13.1 *Множество $T_P M$ всех касательных векторов в произвольной точке P гладкого многообразия M образует n -мерное векторное пространство, называемое касательным к многообразию M пространством в точке P .*

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить, что любой набор чисел $v = (v^1, \dots, v^n)$, заданный в фиксированной системе координат (x^1, \dots, x^n) (в окрестности точки P), можно превратить единственным образом в касательный вектор, определив компоненты касательного вектора во всех остальных локальных системах координат в окрестности точки P . Действительно, если (y^1, \dots, y^n) — система координат, то сопоставим ей набор чисел $w = (w^1, \dots, w^n)$, положив закон преобразования набора v

$$w^i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^i}{\partial x^k} v^k.$$

Осталось проверить, что так полученные наборы связаны между собой нужным нам законом преобразования. Но последнее есть мгновенное следствие того, что матрица Якоби композиции отображений равна произведению матриц Якоби самих преобразований, входящих в эту композицию, а матрица Якоби обратного преобразования есть обратная матрица к самому преобразованию.

Задавая на касательных векторах покомпонентное сложение и умножение на числа, мы введем на множестве $T_P M$ всех касательных векторов структуру n -мерного векторного пространства, называемого *касательным пространством в точке P к многообразию M* и обозначаемого через $T_P M$.

Другое определение касательного вектора мы дадим в терминах гладких кривых, проходящих через точку P . Пусть γ_1 и γ_2 — две гладкие кривые на гладком многообразии M , такие что $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$. Рассмотрим произвольную систему координат в окрестности P и скажем, что кривые γ_i эквивалентны в этой системе координат, если их векторы скоростей в начальный момент $t = 0$ равны: $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$. С другой стороны, при замене координат векторы скоростей умножаются на матрицу Якоби, поэтому равенство $\dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$ одновременно или выполняется, или не выполняется во всех системах координат. Поэтому две кривые эквивалентны в одной системе координат если и только если они эквивалентны в любой другой системе координат. Таким образом, следующее определение корректно: кривые γ_1 и γ_2 эквивалентны, если они эквивалентны в некоторой (а, значит, любой) системе координат. Класс эквивалентности кривых, проходящих через точку P , называется *касательным вектором в точке P* .

Из данного только что определения вытекает, что каждый класс эквивалентности кривых однозначно задается вычисленным в некоторой системе координат вектором скорости в точке P любой кривой этого класса. Кроме того, если $P = (P^1, \dots, P^n)$ — координаты точки P в некоторых локальных координатах (x^1, \dots, x^n) , и $v = (v^1, \dots, v^n)$ — произвольный набор чисел, то кривая $(P_1 + v_1 t, \dots, P_n + v_n t)$ имеет в точке P скорость v . Поэтому любой набор v можно представить как вектор скорости в точке P

некоторой кривой, проходящей через P . Более того, так как при переходе от одной системы координат к другой векторы скоростей преобразуются по закону преобразования касательного вектора, эти векторы скоростей порождают касательный вектор в смысле первого (координатного) определения. Таким образом, мы построили взаимно-однозначное соответствие между касательными векторами как классами эквивалентности кривых и касательными векторами в координатном представлении. Это соответствие переносит структуру n -мерного векторного пространства $T_P M$ на множество классов эквивалентности кривых, проходящих через точку P .

Если (x^1, \dots, x^n) — локальные координаты в окрестности точки $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, то проходящая через P кривая γ^i вида

$$\gamma^i(t) = (x^1 = x_0^1, \dots, x^i = x_0^i + t, \dots, x^n = x_0^n)$$

называется *i -ой координатной линией*. Легко видеть, что векторы скоростей координатных линий γ^i в начальный момент $t = 0$, т.е. в точке P , образуют базис (e_1, \dots, e_n) касательного пространства $T_P M$, который называется *каноническим базисом* по отношению к локальным координатам x^i .

Упражнение 13.1. Докажите, что набор касательных векторов $\{e_i\}$ действительно образует базис в $T_P M$.

Дадим наконец третье определение касательного вектора. Если f — некоторая гладкая функция, определенная в окрестности точки P , и γ — произвольная гладкая кривая, такая что $\gamma(0) = P$ и $\dot{\gamma}(0) = v$, то можно определить производную функции f вдоль кривой γ (в точке P) так:

$$v(f) = \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Эта операция линейна и удовлетворяет правилу Лейбница:

$$v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g), \quad v(fg) = v(f)g(P) + f(P)v(g),$$

где f и g — две гладкие функции, определенные в окрестности точки P , а α и β — вещественные числа.

Операция ψ , сопоставляющая каждой функции, определенной в окрестности точки P , число $\psi(f)$, такая что

$$\psi(\alpha f + \beta g) = \alpha \psi(f) + \beta \psi(g), \quad \psi(fg) = \psi(f)g(P) + f(P)\psi(g),$$

называется *дифференцированием в точке P* . Если φ и ψ — два дифференцирования в точке P , то определена их линейная комбинация с вещественными коэффициентами α и β :

$$(\alpha\varphi + \beta\psi)(f) = \alpha\varphi(f) + \beta\psi(f),$$

где f — произвольная гладкая функция. Ясно, что эта линейная комбинация тоже является дифференцированием в точке P , поэтому множество всех дифференцирований в точке P образует векторное пространство.

Пусть (x^1, \dots, x^n) — локальные координаты в окрестности точки $P \in M$. Каждая частная производная $\partial/\partial x^i$ задает некоторое дифференцирование функций f , определенных в окрестности точки P , по формуле $f \mapsto \partial f/\partial x^i(P)$. Поэтому, для любых чисел v^i линейная комбинация $\sum_i v^i \partial/\partial x^i$ задает некоторое дифференцирование. Третье определение касательного вектора таково: *касательным вектором в точке P* называется произвольное дифференцирование в этой точке, имеющее в некоторых координатах x^i вид $\sum_i v^i \partial/\partial x^i$, где v^i — набор чисел.

Как выглядит дифференцирование $v^i \partial/\partial x^i$ в других локальных координатах? Имеем:

$$\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i'} \left[\sum_i v^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right] \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = \sum_{i'} v^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}, \quad \text{где } v^{i'} = \sum_i v^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}.$$

Таким образом, мы видим, что во всех локальных системах координат дифференцирование $\sum_i v^i \partial/\partial x^i$ является линейной комбинацией частных производных, причем коэффициенты этой линейной комбинации — это компоненты одного и того же касательного вектора (в смысле первого определения). А именно, компоненты этого вектора в координатах x^i суть v^i . Тем самым, ставя в соответствие каждому касательному вектору $\xi = (v^1, \dots, v^n)$ в смысле первого определения дифференцирование $\sum_i v^i \partial/\partial x^i$ (это соответствие не зависит от выбора локальной системы координат x^i), мы получаем корректно определенное взаимно однозначное соответствие между касательными векторами в смысле первого и третьего определений. Тем самым, мы показали эквивалентность первого и третьего определений касательного вектора.

Итак, доказана теорема.

Теорема 13.1 *Три приведенные выше определения касательного вектора эквивалентны.*

Замечание. Интерпретация касательных векторов в точке P как дифференцирований в этой точке позволяет ввести для базисных векторов e_i канонического базиса касательного пространства $T_P M$ (по отношению к локальным координатам x^i) обозначение $\frac{\partial}{\partial x^i}$ или кратко ∂_{x^i} .

13.2 Касательное расслоение

В заключение данного раздела мы приведем еще один важный пример многообразия — *касательное расслоение*. Пусть M — произвольное гладкое

многообразию. Как мы уже знаем, касательное пространство $T_P M$ к многообразию M в произвольной точке $P \in M$ представляет собой линейное пространство. Рассмотрим множество $T(M)$ всех касательных пространств к многообразию M :

$$T(M) = \cup_{P \in M} T_P M,$$

и превратим это множество в гладкое многообразие. Отметим, что элементы множества $T(M)$ — это все касательные векторы во всех точках многообразия M .

Определим отображение $\pi: T(M) \rightarrow M$, сопоставив каждому вектору V из $T(M)$ ту единственную точку $P \in M$, для которой выполнено $V \in T_P M$. Пусть теперь (x^1, \dots, x^n) — локальные координаты, определенные на области U многообразия M . Рассмотрим множество $TU = \pi^{-1}(U)$, и определим отображение $\Phi: TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ так:

$$\Phi: V \mapsto (x_0^1, \dots, x_0^n, v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^{2n},$$

где V — элемент из $T_P M$, а (x_0^1, \dots, x_0^n) и (v^1, \dots, v^n) — координаты точки P и компоненты касательного вектора V в координатах (x^1, \dots, x^n) соответственно. Поскольку касательный вектор однозначно определяется своими компонентами, отображение Φ взаимно однозначно с образом. Введем на $T(M)$ топологию так, чтобы для каждой карты U на M соответствующее отображение Φ было бы гомеоморфизмом. Для этого, очевидно, достаточно потребовать, чтобы прообраз любого открытого подмножества W из \mathbb{R}^{2n} при отображении был бы открыт в $T(M)$. Другими словами, подмножество X открыто в $T(M)$, если и только если Φ -образ пересечения X с произвольным множеством вида TU открыт в \mathbb{R}^{2n} . Итак, мы ввели на $T(M)$ топологию. Более того, по определению топологии на $T(M)$, если $\{U_\alpha\}$ — атлас в M , то $\{TU_\alpha, \Phi_\alpha\}$ — атлас на $T(M)$, т.е. $T(M)$ — топологическое многообразие размерности $2n$.

Осталось проверить, что на самом деле $T(M)$ — гладкое многообразие. Для этого возьмем любые две карты $\mathcal{U} = \{TU, \Phi\}$ и $\tilde{\mathcal{U}} = \{T\tilde{U}, \tilde{\Phi}\}$ на $T(M)$, такие что $U \cap U'$ не пусто (только такие карты из построенного атласа пересекаются). Обозначим соответствующие локальные координаты через $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$ и $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^n)$. Тогда функция перехода между этими двумя картами устроена так:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^k &= \tilde{x}^k(x^1, \dots, x^n), \quad k = 1, \dots, n; \\ \tilde{v}^k &= \sum_{p=1}^n \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^p}(x^1, \dots, x^n) v^p, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Эти функции гладкие, так как первые — функции перехода между картами атласа многообразия M , а вторые — многочлены от компонент матрицы Якоби замены координат на многообразии M (которые, конечно,

гладко зависят от точки) и координат v^p на $T(M)$. Таким образом, многообразию $T(M)$ является гладким.

Отметим, что термин “расслоение” не является случайным. Многообразию $T(M)$ расслоено на одинаковые подмножества — *слои*. В данном случае, это прообразы точек $x \in M$ при проекции π , построенной выше. Каждый такой прообраз $\pi^{-1}(x)$ совпадает с касательным пространством $T_x M$, т.е. изоморфен линейному пространству \mathbb{R}^n .

Касательные расслоения естественно возникают при описании механических систем. Напомним, что множество всевозможных положений элементов механической системы в механике называют *конфигурационным пространством*. Мы уже отмечали выше, что в реальных задачах конфигурационное пространство обычно представляет собой гладкое многообразие. В механике часто бывает необходимо учитывать не только расположение элементов системы, но и их скорости, т.е. рассматривать большее пространство — *фазовое пространство*, элементами которого являются пары “(положение, скорость)”. Ясно, что фазовое пространство механической системы естественно отождествляется с касательным расслоением к ее конфигурационному пространству.

Замечание. Аналогично определяется *кокасательное расслоение* T^*M к многообразию M . Слоями этого расслоения являются *кокасательные пространства* T_P^*M к точкам многообразия, т.е. пространства линейных функций на соответствующих касательных пространствах $T_P M$. Кокасательные расслоения естественно возникают в гамильтоновой модели классической механики (при инвариантной интерпретации, импульсы — суть линейные функции на векторах).

Перейдем к построению основ дифференциального исчисления гладких отображений многообразий. Это даст нам возможность изучать локальные свойства таких отображений пользуясь техническими средствами математического анализа. Фактически, мы просто “пересадим” соответствующие понятия с областей в \mathbb{R}^n на гладкие многообразия, воспользовавшись имеющейся на них гладкой структурой.

13.3 Определение дифференциала

Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение m -мерного гладкого многообразия M в n -мерное гладкое многообразие N , и $v \in T_P M$ — произвольный касательный вектор. Пусть γ — кривая, такая что $\gamma(0) = P$ и $\dot{\gamma}(0) = v$. Рассмотрим образ кривой γ при отображении F . Иными словами, если кривая γ задается гладким отображением $\gamma: (-1, 1) \rightarrow M$, то ее образ — это гладкая кривая в N , заданная отображением $F \circ \gamma$. Кривая $F \circ \gamma$ проходит через образ $F(P)$ точки P . Обозначим через w вектор скорости

кривой $F \circ \gamma$ в точке $F(P)$. По определению, $w \in T_{F(P)}N$. Определим дифференциал dF_P отображения F в точке P как отображение касательных пространств $dF_P: T_P M \rightarrow T_{F(P)}N$, заданное так: $dF_P: v \mapsto w$.

Запишем дифференциал dF_P в координатах. Пусть (x^1, \dots, x^m) — локальные координаты на M в окрестности точки P , и (y^1, \dots, y^n) — локальные координаты на N в окрестности точки $F(P)$, а $y^i = y^i(x^1, \dots, x^m)$ — координатное представление отображения F . Если $x^i = x^i(t)$ — координатное представление кривой γ , то координатное представление кривой $F \circ \gamma$ выглядят так: $y^i = y^i(x^1(t), \dots, x^m(t))$. Имеем:

$$w = \frac{d(F \circ \gamma)}{dt}(0) = \left(\sum_j \frac{\partial y^1}{\partial x^j}(P)v^j, \dots, \sum_j \frac{\partial y^n}{\partial x^j}(P)v^j \right) = Jv,$$

где J — матрица Якоби координатной записи отображения F в точке P . Таким образом, мы видим, что дифференциал dF отображения F — это линейное отображение касательных пространств, задаваемое в канонических базисах выбранных систем координат матрицей Якоби отображения F в этих координатах.

Упражнение 13.2. Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Проверить, что для произвольной гладкой функции h на N и произвольного вектора $v \in T_P M$ имеет место равенство

$$dF_P(v)(h) = v(h \circ F).$$

Пример. В частном случае гладкой функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ на многообразии, мы в каждой точке $P \in M$ имеем линейный функционал $df_P: T_P M \approx \mathbb{R}^m \rightarrow T_{f(P)}\mathbb{R}^1 \approx \mathbb{R}^1$. Матрица этого функционала в локальных координатах (x^1, \dots, x^m) на M — это строка, состоящая из частных производных $\partial f / \partial x^i$. Этот функционал называют *дифференциалом функции f в точке P* и обозначают через $d(f)|_P$. Отметим еще раз, что вектор-строка, состоящая из частных производных функции, задает линейный функционал, а не вектор как иногда учат в математическом анализе.

Упражнение 13.3. Пусть $f: M_1 \rightarrow M_2$ и $g: M_2 \rightarrow M_3$ — гладкие отображения гладких многообразий, и $g \circ f$ — их композиция. Показать, что $d(g \circ f) = dg \circ df$.

13.4 Локальные свойства отображений

В данном подразделе мы изучим локальные свойства гладких отображений, дифференциалы которых в некотором смысле невырождены, или так называемые свойства “общего положения”. Мы начнем с аналога теоремы о неявной функции.

Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Точка $P \in M$ называется *регулярной точкой отображения F* , если дифференциал dF_P отображения F в точке P является эпиморфизмом, т.е. образ дифференциала dF_P совпадает со всем пространством $T_{F(P)}N$. Далее, точка

$Q \in N$ называется *регулярной точкой отображения F* или *регулярным значением отображения F* , если всякая точка из прообраза $F^{-1}(Q)$ этой точки является регулярной для отображения F .

Замечание. Отметим, что регулярность отображения в точке влечет неравенство $m = \dim M \geq \dim N = n$.

Далее, точка P многообразия M называется *критической точкой отображения M* , если дифференциал dF_P не является эпиморфизмом, т.е. если P не является регулярной точкой отображения F . Точка Q называется *критическим значением отображения F* , если существует критическая точка $P \in M$ отображения F , такая что $F(P) = Q$.

Замечание. Если $\dim M < \dim N$, то любая точка многообразия M является критической точкой отображения F . Поэтому множество критических значений отображения F в этом случае совпадает с $F(M)$.

Если все точки многообразия M являются регулярными для отображения F , то отображение F называется *субмерсией*.

Регулярные значения отображений обладают следующим важным свойством.

Теорема 13.2 Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий, и $Q \in N$ — регулярное значение отображения F . Тогда прообраз $W = F^{-1}(Q)$ точки Q является гладким многообразием размерности $\dim M - \dim N$. При этом в качестве локальных координат в окрестности каждой точки из W можно взять некоторые координаты объемлющего многообразия.

Доказательство. Переформулируем условие регулярности точки Q в локальных координатах. Обозначим через P какую-нибудь точку из $F^{-1}(Q)$. Пусть (x^1, \dots, x^m) и (y^1, \dots, y^n) — локальные координаты в окрестности точек P и Q соответственно, и пусть $y^i = f^i(x^1, \dots, x^m)$, $i = 1, \dots, n$, — координатное представление отображения F . Рассмотрим множество $W = F^{-1}(Q)$, и с помощью координатного гомеоморфизма отождествим некоторую окрестность точки P в W с подмножеством \tilde{W} пространства \mathbb{R}^m . Тогда \tilde{W} задается в \mathbb{R}^m набором уравнений

$$f^i(x^1, \dots, x^m) = y^i(Q), \quad i = 1, \dots, n.$$

Как мы уже знаем, дифференциал dF_P отображения F в точке P в локальных координатах задается матрицей Якоби отображения F в точке P , поэтому условие эпиморфности дифференциала — это условие равенства ранга этой матрицы Якоби размерности многообразия N , т.е. $\text{rang } dF_P = n$. Но тогда, мы находимся в условиях теоремы 12.2, и множество \tilde{W} является гладким многообразием размерности $m - n$, причем в качестве локальных координат в нем могут быть выбраны некоторые координаты из

(x^1, \dots, x^m) . Но тогда и W является гладким многообразием, так как для получения атласа на W достаточно рассмотреть композицию координатных гомеоморфизмов, построенных нами для \tilde{W} , и гомеоморфизма, отождествляющего W и \tilde{W} . Доказательство закончено.

Упражнение 13.4. Показать, что в предположениях теоремы 13.2 многообразию $W = F^{-1}(Q)$ является подмногообразием в M .

Таким образом, эпиморфность дифференциала отвечает за то, что прообраз соответствующей точки устроен хорошо. Оказывается, мономорфность дифференциала отвечает за хорошие свойства образа.

Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение гладких многообразий. Отображение F назовем *погружением* или *иммерсией*, если в каждой точке P из M дифференциал dF_P отображения F в точке P является мономорфизмом, т.е. отображение dF_P взаимно однозначно с образом.

Замечание. Условие мономорфности дифференциала отображения $F: M \rightarrow N$ необходимо влечет следующее соотношение на размерности многообразий: $m = \dim M \leq \dim N = n$.

Погружение F называется *вложением*, если оно задает гомеоморфизм многообразия M с образом $F(M)$ (на $F(M)$ рассматривается топология, индуцированная из N). Из определения вытекает (проверьте!), что образ $F(M)$ вложения F является подмногообразием в N . Образ погружения называется иногда *погруженным подмногообразием*.

Приведем теперь некоторые примеры.

Пример. Рассмотрим семейство F_a отображений прямой $\mathbb{R}^1(x)$ в плоскость $\mathbb{R}^2(y^1, y^2)$, заданное так: $F_a: x \mapsto (x^2, x^3 + ax)$. Матрица Якоби этого отображения имеет вид $(2x, 3x^2 + a)$. Поэтому, если $a \neq 0$, отображение F_a является погружением. Если же $a = 0$, то в точке $x = 0$ ранг матрицы Якоби равен нулю, и наше отображение не погружение. Далее, как легко проверить, отображение F_a является вложением если и только если $a > 0$. Если же $a < 0$, кривая $F_a(x)$ имеет самопересечение. Вид кривой $F_a(x)$ при разных значениях a приведен на рис. 25.

Отметим, образ многообразия при погружении не обязан быть многообразием: скажем, кривая $F_a(x)$ при $a < 0$ не является многообразием (в топологии индуцированной из \mathbb{R}^2).

Пример. Пусть $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — взаимно однозначное погружение, заданное так, как показано на рис. 26. Каждая окрестность точки $f(a)$ в индуцированной из \mathbb{R}^2 топологии содержит, кроме интервала вида $(f(b), f(c))$, еще и некоторый интервал, прообраз которого является лучом. Поэтому отображение f^{-1} не является непрерывным, так как, например, прообраз интервала (b, c) , равный интервалу $(f(b), f(c))$ не есть открытое множество. Поэтому отображение f не является вложением. Отметим, что подмножество $f(\mathbb{R}^1)$ плоскости \mathbb{R}^2 не является подмногообразием.

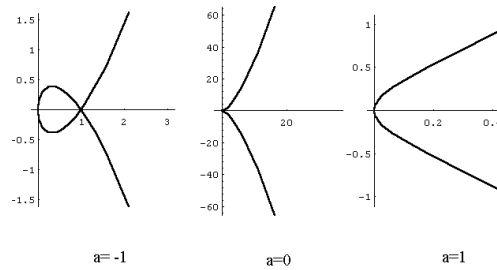
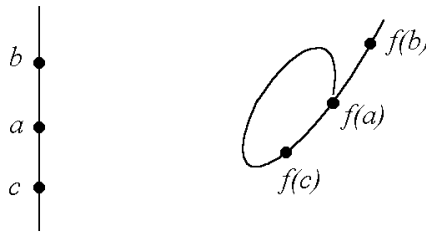
Рис. 25: Семейство кривых $F_a(x)$.

Рис. 26: Погружение прямой в плоскость.

Упражнение 13.5. Показать, что каждое подмногообразие многообразия N является образом некоторого вложения некоторого многообразия M в N . В частности, каждое подмногообразие является многообразием.

Если $F: M \rightarrow N$ — произвольное погружение, то по теореме о неявной функции у каждой точки P существует такая окрестность U , что ограничение отображения F на U — гомеоморфизм с образом. Поэтому каждое погружение *локально* является вложением.

Мы видим, что большинство известных нам примеров многообразий — это на самом деле подмногообразия некоторого евклидова пространства \mathbb{R}^N достаточно большой размерности. Оказывается, это не случайно. А именно, в следующем разделе мы покажем, что произвольное многообразие может быть вложено в евклидово пространство, причем размерность этого пространства можно оценить.

Задачи к лекции 13

Задача 13.1. Какому многообразию гомеоморфно касательное расслоение к окружности?

Задача 13.2. Гомеоморфно ли касательное расслоение к двумерной сфере прямому произведению сферы на плоскость?

Задача 13.3. Перенести на случай гладкой функции на гладком многообразии понятие локального экстремума. Доказать, что в точках локального экстремума дифференциал гладкой функции равен нулю.

Задача 13.4. Построить пример функции на плоскости, у которой дифференциал нигде не равен нулю.

Задача 13.5. Показать, что дифференциал произвольной гладкой функции на сфере S^2 обращается в нуль по крайней мере два раза. Что будет в случае тора $T^2 = S^1 \times S^1$? В случае проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$?

Задача 13.6. Построить вложение проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ в \mathbb{R}^5 и погружение в \mathbb{R}^3 (написать формулы).

Задача 13.7. Построить вложение тора T^n , т.е. прямого произведения n экземпляров окружности, в пространство \mathbb{R}^{n+1} .

Задача 13.8. Построить вложение $S^2 \times S^2$ в \mathbb{R}^5 .

Задача 13.9. Построить вложение проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ в подходящее евклидово пространство.

Дополнительный материал к лекции 13

Добавление 13.1. Пространство всех дифференцирований. Начнем с несколько простейших свойств операции дифференцирования.

Утверждение 13.2 Пусть \mathcal{D} — некоторая операция дифференцирования в точке P многообразия M . Тогда

- 1) результат применения операции \mathcal{D} к постоянной функции равен нулю;
- 2) если f и g — гладкие функции на многообразии, обращающиеся в нуль в точке P , то $\mathcal{D}(fg) = 0$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения, заметим, что в силу правила Лейбница можно записать:

$$\mathcal{D}(1) = \mathcal{D}(1 \cdot 1) = 1 \mathcal{D}(1) + 1 \mathcal{D}(1) = 2 \mathcal{D}(1),$$

откуда $\mathcal{D}(1) = 0$. Поскольку любая постоянная c представляется в виде $c \cdot 1$, первое утверждение вытекает теперь из линейности дифференцирования.

Второе утверждение также немедленно вытекает из формулы Лейбница:

$$\mathcal{D}(fg) = g(P) \mathcal{D}(f) + f(P) \mathcal{D}(g) = 0.$$

Утверждение доказано.

Ясно, что операция взятия производной по направлению касательного вектора является операцией дифференцирования в смысле только что данного определения. Оказывается, что верно и обратное, а именно, имеет место следующий результат.

Предложение 13.1 Пусть M — гладкое многообразие, $P \in M$ — некоторая точка из M , и \mathcal{D} — операция дифференцирования в точке P . Тогда существует единственный касательный вектор V к многообразию M в точке P , такой что $\mathcal{D}(f) = V(f)(P)$ для любой гладкой функции f на M .

Доказательство. Доказательство предложения проведем в локальных координатах. Нам понадобится следующее удобное представление произвольной гладкой функции f .

Лемма 13.1 Пусть (x^1, \dots, x^n) — локальная система координат на многообразии M в окрестности точки $P = (x_0^1, \dots, x_0^n)$. Всякая гладкая функция f на M может быть представлена в карте (x^1, \dots, x^n) виде

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) &= f(P) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(P)(x^k - x_0^k) \\ &\quad + \sum_{k,p=1}^n h_{kp}(x^1, \dots, x^n)(x^k - x_0^k)(x^p - x_0^p), \end{aligned}$$

где h_{kp} — некоторые гладкие функции на многообразии M , определенные в карте (x^1, \dots, x^n) .

Доказательство. Воспользуемся следующим стандартным тождеством:

$$f(x^1, \dots, x^n) = f(P) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \dots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)) dt,$$

и выполним дифференцирование под знаком интеграла. Получим:

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) &= f(P) + \\ &+ \int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} (x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \dots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)) (x^k - x_0^k) dt = \\ &= f(P) + \sum_{k=1}^n h_k(x^1, \dots, x^n) (x^k - x_0^k), \end{aligned}$$

где $h_k(x^1, \dots, x^n)$ — это гладкие функции вида

$$h_k(x^1, \dots, x^n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^k} (x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \dots, x_0^n + t(x^n - x_0^n)) dt.$$

Отметим, что

$$h_k(P) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^k} (P) dt = \frac{\partial f}{\partial x^k} (P).$$

Применим теперь полученное только что разложение к функциям h_k . Получим:

$$h_k(x^1, \dots, x^n) = h_k(P) + \sum_{p=1}^n (x^p - x_0^p) h_{kp}(x^1, \dots, x^n),$$

где $h_{kp}(x^1, \dots, x^n)$ — снова некоторые гладкие функции. Окончательно, для функции f можно записать:

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) &= f(P) + \sum_{k=1}^n (x^k - x_0^k) h_k(x^1, \dots, x^n) = \\ &= f(P) + \sum_{k=1}^n (x^k - x_0^k) h_k(P) + \\ &+ \sum_{k,p=1}^n (x^k - x_0^k) (x^p - x_0^p) h_{kp}(x^1, \dots, x^n) = \\ &= f(P) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} (P) (x^k - x_0^k) \\ &+ \sum_{k,p=1}^n (x^k - x_0^k) (x^p - x_0^p) h_{kp}(x^1, \dots, x^n), \end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству предложения. Воспользуемся леммой 13.1 для вычисления $\mathcal{D}(f)$. В силу свойств операции дифференцирования получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(f) &= \mathcal{D}(f(P)) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} (P) \mathcal{D}((x^k - x_0^k)) + \\ &+ \sum_{k,p=1}^n \mathcal{D}((x^k - x_0^k) (x^p - x_0^p) h_{kp}(x^1, \dots, x^n)). \end{aligned}$$

Однако, первое и последнее слагаемые в этой сумме равны нулю в силу утверждения 13.2. Поэтому

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(P) \mathcal{D}((x^k - x_0^k)).$$

Определим касательный вектор V , положив его компоненты (v^1, \dots, v^n) в координатах (x^1, \dots, x^n) равными $v^k = \mathcal{D}((x^k - x_0^k))$. Тогда, очевидно,

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(P) v^k = V(f).$$

Таким образом, мы установили существование искомого касательного вектора V .

Для доказательства единственности вектора V , достаточно заметить, что если таких векторов два, то их разность Δ — тоже касательный вектор, причем $\Delta(f) = 0$ для любой функции f . Но отсюда вытекает, что $\Delta = 0$, т.е. наши векторы одинаковы. Предложение доказано.

Добавление 13.2. Локальное устройство субмерсий и иммерсий. Оказывается локально все субмерсии и все иммерсии устроены одинаково.

Предложение 13.2 Пусть $P \in M$ — регулярная точка гладкого отображения $F: M \rightarrow N$. Тогда существуют локальные координаты (x^1, \dots, x^m) в окрестности $U \subset M$ точки P и (y^1, \dots, y^n) в окрестности $V \subset N$ точки $F(P)$, такие что $F(U) \subset V$ и отображение F записывается в этих координатах так:

$$y^i(x^1, \dots, x^m) = x^i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Доказательство. Действительно, пусть $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$ и $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n)$ — произвольные координаты в U и V соответственно, и $\tilde{y}^i = f^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$ — координатные функции отображения F . По определению, ранг матрицы Якоби отображения F в точке P равен n , поэтому, после перенумерации координат, можно считать, что первые n столбцов матрицы Якоби линейно независимы. Тогда отображение

$$x^i = \begin{cases} f^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m), & i = 1, \dots, n, \\ \tilde{x}^i, & i = n+1, \dots, m. \end{cases}$$

задает замену координат в окрестности точки P . В этих координатах координатные функции отображения F имеют вид

$$\tilde{y}^i = x^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

что и требовалось.

Из предложения 13.2 вытекает, что локально все субмерсии устроены одинаково, а именно, — это проекция \mathbb{R}^m на \mathbb{R}^n , переводящая точку (x^1, \dots, x^m) из \mathbb{R}^m в точку (x^1, \dots, x^n) из \mathbb{R}^n .

Все иммерсии локально устроены одинаково в следующем смысле.

Предложение 13.3 Пусть $F: M \rightarrow N$ — произвольное погружение, и P — точка из M . Тогда существуют локальные координаты (x^1, \dots, x^m) в окрестности $U \subset M$ точки P и (y^1, \dots, y^n) в окрестности $V \subset N$ точки $F(P)$, такие что $F(U) \subset V$ и отображение F записывается в этих координатах так:

$$y^i(x^1, \dots, x^m) = x^i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad y^i(x^1, \dots, x^m) = 0, \quad m+1 \leq i \leq n.$$

Доказательство. Действительно, пусть $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$ и $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n)$ — произвольные координаты в окрестностях $U \ni P$ и $V \ni F(P)$, и пусть $\tilde{y}^i = f^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$, $i = 1, \dots, n$, — координатное представление погружения F . По определению, ранг матрицы Якоби отображения F в точке P равен m , поэтому, после перенумерации координат на V , можно предположить, что первые m строк этой матрицы линейно независимы. По теореме о неявной функции, существуют гладкие функции $\tilde{x}^j = \tilde{x}^j(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m)$, $j = 1, \dots, m$, такие что множество $F(U)$ задается в координатах $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n)$ уравнениями

$$\tilde{y}^i = f^i(\tilde{x}^1(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m), \dots, \tilde{x}^m(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m)), \quad m+1 \leq i \leq n.$$

Для завершения доказательства осталось сделать замены координат:

$$y^j = \begin{cases} \tilde{y}^j, & j = 1, \dots, m, \\ \tilde{y}^j - f^j(\tilde{x}^1(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m), \dots, \tilde{x}^m(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^m)), & j = m+1, \dots, n, \end{cases}$$

и

$$x^j = \tilde{x}^j(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m), \quad j = 1, \dots, m.$$

Предложение доказано.

Предложение 13.3 означает, что локально каждое погружение устроено как стандартное вложение \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n , переводящее точку (x^1, \dots, x^m) из \mathbb{R}^m в точку $(x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$ из \mathbb{R}^n .

Добавление 13.3. Примеры подмногообразий. В дальнейшем нам понадобятся следующие полезные примеры подмногообразий.

Пример. Пусть M — произвольное гладкое многообразие, и $T(M)$ — касательное расслоение к M . Тогда определено подмножество M_0 касательного расслоения, состоящее из всех нулевых касательных векторов к многообразию M . Легко проверить, что M_0 — гладкое подмногообразие в $T(M)$, причем M_0 диффеоморфно M . Для этого достаточно рассмотреть отображение $i: M \rightarrow T_{\mathcal{P}}M$, ставящее в соответствие точке $P \in M$ нулевой касательный вектор из $T_{\mathcal{P}}M$, и убедиться, что это отображение — вложение. Многообразие M_0 обычно называют *нулевым сечением касательного расслоения*. Ясно, что M_0 — замкнутое подмножество в $T(M)$, поэтому, очевидно непустое, дополнение $T(M) \setminus M_0$ является открытым $2n$ -мерным гладким многообразием.

Пример. Пусть M — гладкое многообразие, и $M \times M$ — прямое произведение M на себя. Рассмотрим в этом $2n$ -мерном многообразии подмножество $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M\}$, называемое *диагональю*. Легко проверить, что Δ — гладкое подмногообразие в $M \times M$ размерности n , причем Δ диффеоморфно M . Для этого достаточно рассмотреть отображение $i: M \rightarrow M \times M$, переводящее точку $P \in M$ в точку (P, P) , и убедиться, что i — вложение. Дополнение $M \times M \setminus \Delta$ является открытым $2n$ -мерным гладким многообразием.

14 Вложения многообразий в евклидово пространство

В данном разделе мы покажем, что произвольное компактное многообразие может быть вложено в евклидово пространство подходящей размерности. При этом сначала мы построим вложение в пространство очень большой размерности, а затем, используя теорему Сарда, докажем теорему Уитни, позволяющую понизить размерность объемлющего пространства до удвоенной размерности многообразия плюс один.

Замечание. Теорема остается верной и для некомпактных многообразий, но доказательство для некомпактного случая более громоздко.

Замечание. Результаты данного раздела означают, что любое многообразие можно рассматривать как подмногообразие в подходящем пространстве \mathbb{R}^N . Однако, во многих задачах, например, при описании конфигурационных пространств физических систем, понятие многообразия возникает более естественно, чем соответствующая этому многообразию реализация в евклидовом пространстве. Кроме того, если нас, скажем, интересует топологическое устройство конфигурационного пространства, то для его описания часто достаточно знание внутренних свойств многообразия, т.е. свойств, не зависящих от вложения в объемлющее пространство. Тем не менее, возможность реализации многообразий в \mathbb{R}^N позволяет достаточно легко доказать многие важные факты о самих многообразиях.

14.1 Существование вложения

Обозначим через D_r^n открытый шар в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n с центром в начале координат и радиусом r . Напомним, что *носителем* $\text{supp } f$ функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется замыкание множества всех точек x из M , в которых функция f отлична от нуля. Нам понадобится следующая техническая лемма, известная из математического анализа.

Лемма 14.1 Пусть D_r^n — открытый шар в \mathbb{R}^n с центром в нуле и радиуса r . Для каждого $\varepsilon > 0$ существует гладкая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, такая что носитель $\text{supp } f$ функции f лежит в D_r^n , функция f тождественно равна единице на шаре $D_{r-\varepsilon}^n$, и $0 \leq f \leq 1$.

Замечание. Чтобы построить такую функцию достаточно, например, воспользоваться хорошо известной гладкой функцией f , равной 0 на полуинтервале $(-\infty, 0]$, строго монотонной на отрезке $[0, 1]$, и равной 1 на полу-

интервале $[1, +\infty)$. Эта функция задается, например, так:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \exp\left[-\frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{(1-x)^2}\right)\right], & 0 < x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

График функции f приведен на рис. 27.

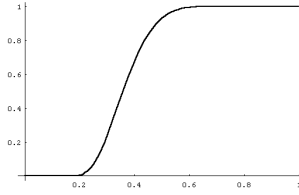


Рис. 27: Гладкая “ступенька”.

Теорема 14.1 Пусть M — произвольное компактное гладкое многообразие. Тогда существует вложение $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^N$ многообразия M в евклидово пространство подходящей размерности.

Доказательство. В силу компактности многообразия M на нем можно выбрать конечный атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha=1}^K$, причем можно считать, что каждый координатный гомеоморфизм φ_α переводит U_α в открытый шар D_α . Рассмотрим теперь систему меньших открытых шаров $D'_\alpha \subset D_\alpha$ с теми же центрами, и таких, что система открытых множеств $U'_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(D'_\alpha)$ по-прежнему покрывает M . Обозначим через h_α гладкую функцию на \mathbb{R}^n с носителем внутри D_α тождественно равную 1 на D'_α (такая функция существует в силу леммы 14.1). Построим новое гладкое отображение $\psi_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, положив

$$\psi_\alpha(P) = \begin{cases} h_\alpha(\varphi_\alpha(P))\varphi_\alpha(P), & P \in U_\alpha, \\ 0, & P \in M \setminus U_\alpha. \end{cases}$$

Очевидно, $\psi_\alpha(P) = \varphi_\alpha(P)$, если $P \in U'_\alpha$. Мы построили K гладких отображений $\{\psi_\alpha\}_{\alpha=1}^K$ из M в \mathbb{R}^n . Зададим теперь гладкое отображение $\bar{\Phi}: M \rightarrow \mathbb{R}^{nK}$, положив

$$\bar{\Phi}(P) = (\psi_1(P), \dots, \psi_K(P)) \in \mathbb{R}^{nK}.$$

Покажем, что отображение $\bar{\Phi}$ является погружением. Пусть P — произвольная точка из M . Тогда P содержится в некотором множестве $U'_\alpha \subset U_\alpha$.

Обозначим через $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ локальные координаты в карте U_α , порожденные φ_α , а координаты в \mathbb{R}^{nK} обозначим через

$$(y_1^1, \dots, y_1^n, \dots, y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n, \dots, y_K^1, \dots, y_K^n).$$

Матрица Якоби отображения $\bar{\Phi}$ в точке P в координатах (x_α^j) и (y_β^i) — это матрица вида $\left(\frac{\partial y_\beta^i}{\partial x_\alpha^j}\right)$. В частности, матрица Якоби отображения $\bar{\Phi}$ содержит блок $\left(\frac{\partial y_\alpha^i}{\partial x_\alpha^j}\right)$. Но, так как на множестве U'_α отображение ψ_α совпадает с φ_α , координатное представление отображения ψ_α в координатах $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ и $(y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^n)$ имеет вид

$$y_\alpha^i(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) = x_\alpha^i, \quad i = 1, \dots, n,$$

поэтому $\left(\frac{\partial y_\alpha^i}{\partial x_\alpha^j}\right)$ — единичная матрица размера $n \times n$. Поэтому ранг матрицы Якоби отображения $\bar{\Phi}$ равен n во всех точках многообразия M , что и означает, что $\bar{\Phi}$ — погружение.

Теперь подправим отображение $\bar{\Phi}$ так, чтобы получить вложение. А именно, необходимо сделать так, чтобы разные точки многообразия M переходили в разные. Для этого мы определим функции $\hat{h}_\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}^1$, положив

$$\hat{h}_\alpha(P) = \begin{cases} h_\alpha(\varphi_\alpha(P)), & P \in U_\alpha, \\ 0, & P \in M \setminus U_\alpha. \end{cases}$$

Построим теперь новое отображение $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^N$, где $N = Kn + K$, положив

$$\Phi(P) = (\bar{\Phi}(P), h_1(P), \dots, h_K(P)),$$

т.е. мы просто приписали к $\bar{\Phi}(P)$ вектор длины K , составленный из чисел $\hat{h}_\alpha(P)$. Очевидно, Φ — снова погружение, так как ранг матрицы Якоби отображения $\bar{\Phi}$ не меньше чем у матрицы Якоби для $\bar{\Phi}$. Покажем, что Φ взаимно однозначно. Пусть P и Q — произвольные различные точки из M . Так как система открытых множеств $\{U'_\alpha\}$ покрывает многообразие M , найдется такое U'_α , которое содержит P , поэтому $\hat{h}_\alpha(P) = 1$. Если $\hat{h}_\alpha(Q)$ равно единице, то это означает, что Q также лежит в U'_α , и поэтому $\psi_\alpha(P) \neq \psi_\alpha(Q)$ (отображение ψ_α на U'_α совпадает с гомеоморфизмом φ_α и не может склеивать различные точки). Поэтому в рассмотренном случае $\Phi(P) \neq \Phi(Q)$. Если же $\hat{h}_\alpha(Q) \neq 1$, то и подавно $\Phi(P) \neq \Phi(Q)$, так как они различаются координатой, соответствующей \hat{h}_α . Таким образом, мы установили, что Φ взаимно однозначно с образом. Наконец, многообразие M компактно, отображение Φ — гладко, следовательно, как мы знаем из общей топологии, множество $\Phi(M)$ компактно в \mathbb{R}^N , поэтому, в частности, $\Phi(M)$ замкнуто. Итак, Φ — взаимно однозначное с образом погружение компактного многообразия, образ которого замкнутое подмножество

в \mathbb{R}^N . Легко видеть, что такое погружение является вложением. Теорема доказана.

На самом деле, размерность объемлющего многообразия может быть существенно понижена. Однако, чтобы сделать это, нам понадобится теорема Сарда.

14.2 Теорема Сарда

Если $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение многообразия M на многообразии N , то отсюда, вообще говоря, не вытекает, что дифференциал отображения F также является отображением на. Пример построить очень легко: достаточно рассмотреть $F: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, заданное функцией $F(x) = x^3$. Это, очевидно, отображение на, однако дифференциал dF равен нулю в точке $x = 0$. Тем не менее, во всех остальных точках дифференциал все-таки не вырожден. Этот простой пример иллюстрирует общую ситуацию, которую описывает теорема Сарда. Чтобы сформулировать эту теорему, нам понадобится напомнить несколько определений.

Подмножество A евклидова пространства \mathbb{R}^n называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное или счетное семейство открытых шаров в \mathbb{R}^n , покрывающих множество A , что сумма их n -мерных объемов меньше ε . Отметим, что шары в этом определении можно заменить на кубы или параллелепипеды со сторонами, параллельными осями координат.

Сформулируем простейшие свойства множеств меры нуль.

Утверждение 14.1 *Множества меры нуль обладают следующими свойствами.*

- Объединение конечного или счетного семейства множеств $\{A_i\}$ меры нуль является множеством меры нуль.
- Для любого гладкого отображения $F: U \rightarrow V$, где U и V — открытые подмножества в \mathbb{R}^n , и любого множества $A \subset U$ меры нуль, множество $F(A)$ тоже является множеством меры нуль.
- Множество меры нуль не имеет внутренних точек.

Доказательство. Первое свойство очевидно: покрыв каждое из множеств A_i набором шаров, сумма объемов которых равна $\varepsilon/2^i$, мы получим покрытие множества $\cup_i A_i$ набором шаров, суммарный объем которых равен ε .

В силу первого свойства, второе свойство достаточно доказать в предположении, что множество A содержится в некотором замкнутом кубе $Q \subset U$. Тогда, по теореме Лагранжа, существует некоторая постоянная M , такая что

$$\|F(x) - F(y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Поэтому образ шара радиуса r , содержащегося в кубе Q отображается во множество, содержащееся в шаре радиуса Mr . Следовательно, если мы покроем множество A шарами, суммарный объем которых меньше ε/M^n , то множество $F(A)$ может быть покрыто шарами суммарного объема меньше ε .

Для доказательства свойства три достаточно установить, что если конечное семейство кубов $\{Q_i\}$ в \mathbb{R}^n со сторонами, параллельными осям координат, покрывают куб Q , то сумма объемов кубов Q_i не меньше объема куба Q (и значит ограничена снизу положительной константой, не зависящей от покрытия). Доказательство этого утверждения мы оставляем в качестве упражнения.

Для гладких многообразий множества меры нуль определяются естественным образом. Подмножество A гладкого многообразия M называется *множеством меры нуль*, если существует такое конечное или счетное семейство карт $\{(U_i, \varphi_i)\}$ на M , покрывающих множество A , что каждое из множеств $\varphi_i(A \cap U_i)$ имеет меру нуль в пространстве \mathbb{R}^n .

Упражнение 14.1. Покажите, что свойства из утверждения 14.1 сохраняются для случая многообразий.

Далее, подмножество A топологического пространства называется *нигде не плотным*, если его замыкание \bar{A} не имеет внутренних точек. Подмножество, являющееся объединением конечного или счетного числа нигде не плотных множеств называется *тощим*.

Упражнение 14.2. Приведите пример топологического пространства, которое само является тощим множеством.

Отметим, что так как множества меры нуль не имеют внутренних точек, то любое замкнутое множество меры нуль является нигде не плотным множеством. Поэтому, если множество меры нуль представимо в виде конечного или счетного объединения замкнутых множеств (каждое из которых, очевидно, само имеет меру нуль), то оно является тощим множеством. Такие множества иногда называют⁴ *нуль-тощими*.

Теперь все готово, чтобы сформулировать теорему Сарда.⁵

Теорема 14.2 (Сард) Пусть $F: M \rightarrow N$ — гладкое отображение многообразий. Тогда множество $C(F)$ его критических значений является нуль-тощим множеством, т.е. представимо в виде не более чем счетного объединения замкнутых множеств меры нуль. Если многообразие M — компактно, то множество $C(F)$ замкнуто и нигде не плотно.

⁴Эта терминология предложена М. М. Постниковым в его замечательной книге “Гладкие многообразия”.

⁵Заметим, что до Сарда эта теорема была доказана Брауном. Кроме того, независимо от Сарда эту теорему доказал Дубовицкий

Теорема Сарда, это, фактически, результат математического анализа, поэтому мы не будем доказывать ее здесь в полном объеме. В дополнении к этой лекции мы выполним лишь всю “геометрическую” работу, а здесь разберем единственный по сути важный для нас случай, когда $\dim M < \dim N$. В сущности, для доказательства теоремы Уитни нам нужно лишь простое следствие из теоремы Сарда.

Следствие 14.1 *Если $\dim M < \dim N$, то для любого гладкого отображения $F: M \rightarrow N$ множество $N \setminus F(M)$ не пусто.*

Доказательство следствия. Это очевидно, так как в условиях следствия множество $F(M)$ является множеством критических значений отображения F , и поэтому является нуль-тощим. В частности, $F(M)$ даже не имеет внутренних точек. Доказательство закончено.

14.3 Теорема Уитни

Выше мы уже доказали, что каждое компактное многообразие M может быть вложено в евклидово пространство подходящей размерности. Однако, размерность пространства \mathbb{R}^N , в которое мы вкладывали многообразие M , была очень велика (она равнялась количеству карт, умноженному на $\dim M + 1$). Теорема Уитни, которую мы докажем в настоящем разделе, позволит нам существенно понизить размерность объемлющего пространства \mathbb{R}^N .

Теорема 14.3 (Уитни) *Пусть M — гладкое компактное многообразие размерности n . Тогда существует вложение $F: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 14.1 и построим вложение Φ многообразия M в евклидово пространство \mathbb{R}^N . Рассмотрим произвольную проходящую через начало координат прямую ℓ в пространстве \mathbb{R}^N и обозначим через π_ℓ ортогональную проекцию пространства \mathbb{R}^N вдоль прямой ℓ на ортогональное подпространство размерности на единицу меньше: $\pi_\ell: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$. Попробуем понизить размерность так: рассмотрим композицию $\pi_\ell \circ \Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ (этот способ носит название *метод проекций*). Нам необходимо понять: при каких условиях композиция $\pi_\ell \circ \Phi$ по-прежнему является вложением. Для этого достаточно проверить выполнение двух условий:

- 1) мономорфность дифференциала;
- 2) взаимная однозначность с образом.

Рассмотрим первое условие. Пусть P — произвольная точка из M , и обозначим через Π_P образ $d\Phi(T_P M)$ касательного пространства $T_P M$ в

точке P к многообразию M под действием дифференциала $d\Phi$ отображения Φ в точке P . Так как Φ вложение, Π_P — это n -мерное подпространство в $\mathbb{R}^N \approx T_{\Phi(P)}\mathbb{R}^N$. Для того, чтобы дифференциал отображения $\pi_\ell \circ \Phi$ был мономорфизмом, необходимо и достаточно, чтобы прямая ℓ не принадлежала бы подпространству Π_P (напомним что и прямая и подпространство проходят через нуль). Когда заведомо можно выбрать прямую ℓ так, чтобы указанное условие было выполнено? Обозначим через W многообразие размерности $2n$, полученное из касательного расслоения $T(M)$ к многообразию M выбрасыванием нулевого сечения M_0 . Построим гладкое отображение h многообразия W в проективное пространство $\mathbb{R}P^{N-1}$, ставя в соответствие ненулевому касательному вектору $V \in T_P M$ проходящую через нуль прямую в \mathbb{R}^N с направляющим вектором $d\Phi|_P(V) \in \mathbb{R}^N$.

Чтобы убедиться, что отображение h гладкое, запишем его в локальных координатах. Пусть (x^1, \dots, x^n) — локальные координаты на M в окрестности P , $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$ — соответствующие координаты на $W \subset T(M)$ в окрестности V , и (y^1, \dots, y^N) — стандартные координаты в \mathbb{R}^N , а $(y^1 : \dots : y^N)$ — соответствующие однородные координаты в $\mathbb{R}P^{N-1}$. Если $y^i = \Phi^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, n$, — координатное представление вложения Φ , то отображение h устроено так:

$$h: (x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) \mapsto \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial y^1}{\partial x^k} v^k : \dots : \sum_{k=1}^n \frac{\partial y^N}{\partial x^k} v^k \right) \in \mathbb{R}P^{N-1},$$

где все производные вычисляются в точке P . Это отображение, очевидно, является гладким. Ясно, что если образ $h(W)$ не покрывает всего пространства $\mathbb{R}P^{N-1}$, то можно выбрать прямую $\ell \in \mathbb{R}P^{N-1}$ так, чтобы она не принадлежала никакой плоскости Π_P , и, следовательно, как мы видели выше, дифференциал отображения $\pi_\ell \circ \Phi$ был мономорфизмом.

Рассмотрим теперь второе условие. Отсутствие взаимной однозначности композиции $\pi_\ell \circ \Phi$ эквивалентно существованию в пространстве \mathbb{R}^N прямой, параллельной ℓ и проходящей через две различные точки $\Phi(P)$ и $\Phi(Q)$. Отметим, что так как Φ — вложение, условие $\Phi(P) \neq \Phi(Q)$ равносильно $P \neq Q$. Построим гладкое отображение \tilde{h} из $2n$ -мерного многообразия $\tilde{W} = (M \times M) \setminus \Delta$, где через Δ , как обычно, обозначена диагональ, в проективное пространство $\mathbb{R}P^{N-1}$, сопоставив каждой паре различных точек (P, Q) многообразия M прямую в $\mathbb{R}P^{N-1}$, параллельную прямой $\Phi(P)\Phi(Q)$ в \mathbb{R}^N .

Чтобы убедиться, что отображение \tilde{h} гладко, запишем его в локальных координатах. Обозначим через (x^1, \dots, x^n) , $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ — локальные координаты в окрестности точек P и Q на многообразии M , порождающие локальные координаты в окрестности точки $(P, Q) \in \tilde{W}$, и пусть (y^1, \dots, y^N) — стандартные координаты в \mathbb{R}^N , а $(y^1 : \dots : y^N)$ — соответствующие однородные координаты в $\mathbb{R}P^{N-1}$. Тогда, если $y^i = \Phi^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, N$, — координатное представление отображения

Φ , то отображение \tilde{h} выглядит так:

$$\tilde{h}: (P, Q) = (x^1(P), \dots, x^n(P), \bar{x}^1(Q), \dots, \bar{x}^n(Q)) \mapsto (y^1(x(P)) - y^1(\bar{x}(Q)) : \dots : y^N(x(P)) - y^N(\bar{x}(Q))).$$

Поэтому отображение \tilde{h} — гладкое. Ясно, что если образ $\tilde{h}(\tilde{W})$ отображения \tilde{h} не покрывает всего проективного пространства $\mathbb{R}P^{N-1}$, то можно выбрать прямую $\ell \in \mathbb{R}P^{N-1}$ так, чтобы композиция $\pi_\ell \circ \Phi$ была бы взаимно однозначной.

Наконец, рассмотрим многообразие $X = W \sqcup \tilde{W}$, являющееся дизъюнктивным объединением многообразий W и \tilde{W} . Ясно, что X — гладкое многообразие размерности $2n$. Определим отображение H из X в $\mathbb{R}P^{N-1}$, положив

$$H(x) = \begin{cases} h(x), & x \in W, \\ \tilde{h}(x), & x \in \tilde{W}. \end{cases}$$

Очевидно, H — гладкое отображение. Очевидно, образ $H(X)$ совпадает с объединением образов $h(W)$ и $\tilde{h}(\tilde{W})$. Поэтому из сказанного выше вытекает, что если $H(X)$ не покрывает всего пространства $\mathbb{R}P^{N-1}$, то можно так выбрать прямую ℓ в $\mathbb{R}P^{N-1}$, что композиция $\pi_\ell \circ \Phi$ будет вложением. Однако, в силу следствия 14.1, это заведомо можно сделать если $2n = \dim X < \dim \mathbb{R}P^{N-1} = N - 1$. Таким образом, нами доказано следующее ключевое утверждение.

Лемма 14.2 *Если $\Phi: M^n \rightarrow \mathbb{R}P^N$ — вложение, и $N > 2n + 1$, то методом проекций можно построить вложение многообразия M в евклидово пространство \mathbb{R}^{N-1} на единицу меньшей размерности.*

Таким образом, с помощью метода проекций можно понижать размерность N объемлющего пространства до тех пор, пока она не станет равной $2n + 1$, что и завершает доказательство теоремы Уитни.

Упражнение 14.3. Показать, что с помощью метода проекций нельзя, вообще говоря, получить вложение в пространство меньшей размерности.

Замечание. Вообще говоря, можно построить вложение n -мерного многообразия в пространство размерности $2n$ (так называемая сильная теорема Уитни). Эта оценка уже, очевидно, в общем случае не улучшаема (пример: $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$).

Задачи к лекции 14

Задача 14.1. Прodelать предложенную в доказательстве теоремы о существовании вложения конструкцию для случая стандартной окружности (атлас из двух карт). Применить к полученному вложению метод проекций.

Задача 14.2. Показать с помощью метода проекций, что каждое компактное многообразие размерности n можно погрузить в евклидово пространство размерности $2n$.

Задача 14.3. Доказать теорему Уитни для некомпактных многообразий.

Дополнительный материал к лекции 14

Добавление 14.1. К доказательству теоремы Сарда. Теорема Сарда может быть выведена из следующего предложения, которое в математическом анализе тоже часто называют теоремой Сарда.

Предложение 14.1 Пусть $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение открытого множества $U \subset \mathbb{R}^m$ в пространство \mathbb{R}^n , и пусть $K \subset U$ — произвольное компактное подмножество множества критических точек отображения F . Тогда множество $F(K)$ имеет меру нуль.

Покажем, как теорема Сарда получается из предложения 14.1.

Доказательство. Пусть O — произвольное открытое подмножество многообразия M . Тогда пересечение множества критических точек отображения F с множеством O совпадает, очевидно, с множеством критических точек ограничения $F|_O$ отображения F на множество O . Поэтому если $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — произвольный атлас многообразия M , то множество $C(F)$ критических значений отображения F может быть представлено в виде

$$C(F) = \cup_\alpha C(F|_{U_\alpha}).$$

Пусть (V_α, ψ_α) — такая карта на многообразии N , что $F(U_\alpha) \subset V_\alpha$. Тогда множество $C(F|_{U_\alpha})$ — это образ при гомеоморфизме ψ_α^{-1} множества $C(g_\alpha)$ критических значений сквозного отображения

$$g_\alpha = \psi_\alpha \circ F|_{U_\alpha} \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

С другой стороны, множество критических точек отображения g_α задается в $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ набором уравнений (равенство нулю соответствующих миноров), поэтому, очевидно, является замкнутым. Как и всякое замкнутое подмножество в \mathbb{R}^m , множество критических точек отображения g_α представимо в виде не более чем счетного объединения компактных множеств. Поэтому каждое множество

$$C(F|_{U_\alpha}) = \psi_\alpha^{-1}(C(g_\alpha))$$

является, в силу предложения 14.1, утверждения 14.1 и хаусдорфовости многообразия N , объединением не более чем счетного семейства замкнутых множеств меры нуль. Поэтому таким будет и все множество $C(F)$. Итак, мы показали, что $C(F)$ — нультощее множество.

Если же многообразии M компактно, то на нем можно выбрать конечный атлас, что позволяет представить множество всех критических точек отображения F в виде конечного объединения компактных множеств K_i (по числу карт). Все множества $F(K_i)$ замкнуты и нультощие, поэтому они нигде не плотны. Поэтому конечное объединение $C(F)$ этих множеств тоже нигде не плотно. Доказательство закончено.

Итак для доказательства теоремы Сарда осталось доказать предложение 14.1. Мы этого делать не будем, сославшись на любой стандартный курс математического анализа. Однако, для целостности изложения мы разберем тут тривиальный случай $m < n$.

Доказательство предложения 14.1 при $m < n$. Представим пространство \mathbb{R}^n в виде прямого произведения $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, построим открытое множество $U \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$ и новое отображение $\Phi = F \circ \pi_1: U \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где π_1 — проекция на первый сомножитель. Тогда, очевидно, для каждого компакта $K \subset U$ его образ $F(K)$ при отображении F совпадает с образом $\Phi(K \times 0)$ множества $K \times 0 \subset U \times \mathbb{R}^{n-m}$ при отображении Φ . Но множество $K \times 0$ имеет меру нуль в пространстве \mathbb{R}^n (его можно покрыть конечным множеством кубиков сколь угодно малой высоты). Поэтому в силу утверждения 14.1 множество $F(K) = \Phi(K \times 0)$ тоже имеет меру нуль, что и требовалось доказать.

Отметим, что следствие 14.1 нами полностью доказано. Именно им мы воспользовались при доказательстве теоремы Уитни.

15 Дополнительные структуры: риманова метрика, ориентируемость

В данном разделе мы изучим дополнительные структуры, естественно возникающие на многообразиях. Мы начнем с римановой метрики, отчасти уже знакомой нам из теории поверхностей.

15.1 Риманова метрика, римановы многообразия

Вообще говоря, на абстрактном топологическом пространстве понятие расстояния между его точками не определено. Чтобы говорить о расстоянии, напомним, вводятся дополнительные структуры, такие как, например, метрика или норма. В случае гладких многообразий, оказывается, в качестве такой дополнительной структуры можно ввести прямой аналог первой квадратичной формы поверхности — так называемую риманову метрику.

Пусть M — произвольное гладкое многообразие размерности m .

Определение. Говорят, что на многообразии M задана *риманова метрика*, если для каждой точки $P \in M$ в касательном пространстве $T_P M$ фиксирована невырожденная положительно определенная симметричная билинейная форма, гладко зависящая от точки. Это означает, что каждой системе (x^1, \dots, x^m) локальных координат в окрестности U точки P ставится в соответствие набор гладких функций $g_{pq}(x^1, \dots, x^m)$, $1 \leq p, q \leq m$, заданных на U , такой что

- матрица (g_{pq}) — симметрична, невырождена и положительно определена;
- если $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$ — другие локальные координаты в окрестности точки P , и (\tilde{g}_{pq}) — соответствующая матрица, то

$$\tilde{g}_{pq} = \sum_{\alpha, \beta=1}^m \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^p} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^q} g_{\alpha\beta}.$$

Функции g_{pq} называются *компонентами* римановой метрики в координатах (x^1, \dots, x^m) . Многообразие, на котором фиксирована некоторая риманова метрика, называется *римановым многообразием*.

Пример. Рассмотрим многообразие \mathbb{R}^n , на котором фиксированы стандартные декартовы координаты (x^1, \dots, x^n) . Зададим в каждой точке $P \in \mathbb{R}^n$ риманову метрику, положив в координатах (x^1, \dots, x^n) компоненты g_{pq} равными символам Кронекера δ_{pq} . Эта метрика называется *евклидовой метрикой*.

Замечание. Риманову метрику в локальных координатах (x^1, \dots, x^n) записывают в дифференциальном виде, т.е. в виде

$$ds^2 = \sum_{p,q=1}^n g_{pq} dx^p dx^q.$$

Смысл этой записи мы обсуждали в теории поверхностей (см. также следующую главу). Напомним, что одним из преимуществ дифференциальной записи является возможность делать формально замену координат в ней по правилам математического анализа.

Пример. Пусть M — подмногообразие размерности m в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , и $i: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ — соответствующее вложение. Рассмотрим произвольную точку P из M , тогда, напомним, определен мономорфизм di касательного пространства $T_P M$ в пространство $T_{i(P)} \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$. Определим *скалярное произведение* $\langle V, W \rangle_M$ двух произвольных касательных векторов V и W из $T_P M$, положив

$$\langle V, W \rangle_M = \langle di(V), di(W) \rangle,$$

где справа стоит стандартное евклидово скалярное произведение векторов в \mathbb{R}^n . Из свойств евклидова скалярного произведения немедленно вытекает, что операция $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ действительно является скалярным произведением на $T_P M$, т.е. она билинейна, симметрична, положительно определена и невырождена.

Пусть (x^1, \dots, x^m) — локальные координаты на M в окрестности точки P , и (y^1, \dots, y^n) — декартовы координаты в \mathbb{R}^n . Обозначим через (v^1, \dots, v^m) и (w^1, \dots, w^m) компоненты касательных векторов V и W соответственно, и пусть $y^i(x^1, \dots, x^m)$, $i = 1, \dots, n$, — координатное представление вложения i . Тогда координаты векторов $di(V)$ и $di(W)$ имеют вид

$$(di(V))^j = \sum_{p=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^p}(P) v^p, \quad \text{и} \quad (di(W))^j = \sum_{q=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^q}(P) w^q,$$

поэтому

$$\langle V, W \rangle_M = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{p=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^p} v^p \sum_{q=1}^m \frac{\partial y^j}{\partial x^q} w^q \right) = \sum_{p,q=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^p} \frac{\partial y^j}{\partial x^q} \right) v^p w^q.$$

Как и в теории поверхностей, обозначим через g_{pq} выражение $\sum_{j=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^p} \frac{\partial y^j}{\partial x^q}$, и получим окончательно

$$\langle V, W \rangle_M = \sum_{p,q=1}^m g_{pq} v^p w^q.$$

Коэффициенты g_{pq} являются, очевидно, гладкими функциями на многообразии M . Таким образом, построенная нами положительно определенная невырожденная симметричная билинейная форма задается в локальных координатах матрицей (g_{pq}) , гладко зависящей от точки, и, по определению, является римановой метрикой на многообразии M . Эта метрика называется *индуцированной из \mathbb{R}^n вложением i* .

Пример. Первая квадратичная форма регулярной поверхности в евклидовом пространстве — это, очевидно, частный случай индуцированной римановой метрики.

Имеет место следующее важное утверждение, немедленно вытекающее из теоремы Уитни.

Следствие 15.1 *На произвольном (компактном) гладком многообразии существует по крайней мере одна риманова метрика.*

Доказательство. Действительно, в силу теоремы Уитни, каждое такое многообразие можно вложить в \mathbb{R}^N . Тогда это вложение индуцирует на многообразии некоторую риманову метрику. Доказательство закончено.

Как и первая квадратичная форма поверхности, риманова метрика используется для вычисления длин, углов и т.п. Пусть M — риманово многообразие. Тогда, очевидно, в каждом касательном пространстве $T_P M$ задается естественное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$, которое называется иногда *внутренним скалярным произведением*. Действительно, если V и W — произвольные векторы из $T_P M$, и (v^1, \dots, v^m) и (w^1, \dots, w^m) — их компоненты в локальных координатах (x^1, \dots, x^m) в окрестности точки P , то положим

$$\langle V, W \rangle_M = \sum_{p,q=1}^m g_{pq} v^p w^q.$$

Из определения римановой метрики немедленно вытекает, что полученное число не зависит от выбора локальных координат (проверьте), т.е. наше определение корректно. Далее, *длиной касательного вектора V* назовем число $\|V\| = \sqrt{\langle V, V \rangle_M}$.

Определенное только что внутреннее скалярное произведение позволяет определить длину произвольной гладкой кривой на римановом многообразии. Пусть $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ — произвольная гладкая кривая на римановом многообразии M . Тогда, как мы уже знаем, в каждой точке $\gamma(t)$ кривой γ определен ее вектор скорости $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} M$. С помощью римановой метрики можно определить гладкую функцию на отрезке $[a, b]$, сопоставив каждому числу t длину $\|\gamma'(t)\|$ вектора скорости кривой γ в точке $\gamma(t)$, вычисленную в имеющейся римановой метрике. Наконец, *длиной гладкой*

кривой γ на римановом многообразии M назовем число

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Если (x^1, \dots, x^m) — локальные координаты на многообразии, $\gamma^i(t) = x^i(t)$ — координатное представление кривой γ , и g_{pq} — компоненты римановой метрики в этих координатах, то подынтегральное выражение из определения длины переписывается в виде

$$\sqrt{\sum_{p,q=1}^m g_{pq} \frac{d\gamma^p}{dt} \frac{d\gamma^q}{dt}}.$$

Следующая лемма доказывается точно так же как в теории поверхностей.

Лемма 15.1 *Длина кривой γ не зависит от замены параметризации.*

Кроме того, на римановом многообразии M естественно определяется угол между произвольными гладкими регулярными кривыми, проходящими через некоторую точку P из M . А именно, если $\gamma_1: [-1, 1] \rightarrow M$ и $\gamma_2: [-1, 1] \rightarrow M$ — гладкие кривые, причем $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P$, то угол α между кривыми γ_1 и γ_2 определяется из соотношения

$$\cos \alpha = \frac{\langle \gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \rangle_M}{\|\gamma_1'(0)\| \|\gamma_2'(0)\|}.$$

Пример. Понятие индуцированной метрики естественно обобщается на случай подмногообразий произвольного риманова многообразия (а не обязательно \mathbb{R}^n). Пусть W — произвольное риманово многообразие, M — подмногообразие в нем, и $i: M \rightarrow W$ — соответствующее вложение. Тогда, точно так же как и в случае подмногообразий в \mathbb{R}^n , определим на каждом касательном пространстве $T_P M$ к многообразию M скалярное произведение, положив для произвольных касательных векторов V_1 и V_2 из $T_P M$

$$\langle V_1, V_2 \rangle_M = \langle di|_P(V_1), di|_P(V_2) \rangle_W.$$

Очевидно, что $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ — действительно скалярное произведение, гладко зависящее от точки многообразия M . Соответствующая риманова метрика на M называется *индуцированной вложением i римановой метрикой*.

Легко найти как выглядят компоненты индуцированной метрики. Пусть P — произвольная точка из M , и (x^1, \dots, x^m) — локальные координаты на M в окрестности точки P , а (y^1, \dots, y^n) — координаты на W в окрестности точки $i(P)$. Обозначим через h_{pq} компоненты римановой метрики многообразия W в координатах (y^1, \dots, y^n) . Тогда, если $y^i = y^i(x^1, \dots, x^m)$ —

координатное представление вложения i , то компоненты g_{pq} индуцированной метрики имеют вид:

$$g_{pq} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n h_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^p} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^q}$$

(проверьте).

15.2 Изометрии

На классе римановых многообразий естественно определяется более сильное отношение эквивалентности, чем просто диффеоморфность. Это отношение эквивалентности “уважает” риманову метрику.

Пусть M и N — диффеоморфные римановы многообразия. Диффеоморфизм $F: M \rightarrow N$ называется *изометрией*, если F сохраняет длины всех гладких кривых, т.е. для произвольной гладкой кривой $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ имеем: $\ell(\gamma) = \ell(F \circ \gamma)$. Оказывается, как и в случае регулярных поверхностей, изометрии можно охарактеризовать в локальных терминах. А именно, имеет место следующее предложение.

Предложение 15.1 *Диффеоморфизм $F: M \rightarrow N$ является изометрией, если и только если отображение F “сохраняет риманову метрику” в следующем смысле. Пусть P — произвольная точка из M и $F(P) = Q$. Обозначим через (x^1, \dots, x^n) и (y^1, \dots, y^n) локальные координаты в окрестности P и Q соответственно, и пусть g_{ij} компоненты римановой метрики многообразия M в координатах (x^1, \dots, x^n) , а h_{pq} — компоненты римановой метрики многообразия N в координатах (y^1, \dots, y^n) . Наконец, пусть $y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$ — координатное представление отображения F . Тогда*

$$g_{ij} = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta}$$

Доказательство. Доказательство получается дословным повторением доказательства соответствующего предложения 3.4 из теории поверхностей.

15.3 Ориентируемость многообразия

В данном разделе мы обсудим еще одну важную характеристику многообразий, аналога которой нам не встречалось при изучении поверхностей. Сначала мы приведем два эквивалентных определения ориентируемости. Каждое из этих определений по своему удобно (см. примеры ниже).

Определение. Многообразие M называется *ориентируемым*, если на нем существует атлас карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, такой что якобианы всех функций перехода положительны. Если на ориентируемом многообразии M фиксирован

атлас карт \mathcal{A} с указанным свойством, то будем говорить, что на многообразии M задана *ориентация*, сам такой атлас \mathcal{A} будем называть *ориентированным атласом*, а само многообразие — *ориентированным*. Наконец, будем говорить, что два атласа \mathcal{A} и \mathcal{A}' задают *одинаковую ориентацию* на M , если их объединение $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ само является ориентированным атласом.

Изучим простейшие свойства ориентируемых многообразий.

Лемма 15.2 Пусть M — ориентируемое многообразие, и $\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}$ — произвольный атлас на M . Тогда атлас \mathcal{A} можно превратить в ориентированный атлас путем замены локальных координат в некоторых картах.

Доказательство. Действительно, пусть $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ — ориентированный атлас, существующий на M по определению. Рассмотрим произвольную точку $P \in V_\alpha$, и пусть эта точка принадлежит также карте U_β из ориентированного атласа. Обозначим через (x^1, \dots, x^n) и (y^1, \dots, y^n) локальные координаты, порожденные в окрестности точки P картой (V_α, ψ_α) и (U_β, φ_β) соответственно. Тогда, если определитель $\det(\partial x^i / \partial y^j)$ матрицы Якоби функции перехода положителен в точке P , то сохраним локальные координаты (x^1, \dots, x^n) в карте V_α , а если этот определитель отрицателен, то тогда сделаем замену, взяв в качестве новых координат $(-x^1, x^2, \dots, x^n)$. Очевидно, для этих новых координат якобиан матрицы перехода к координатам (y^1, \dots, y^n) будет положительным в точке P . Таким образом, мы построили в карте V_α локальные координаты, такие что якобиан функции перехода к локальным координатам одной из карт U_β ориентированного атласа положителен в точке P . Но тогда в P положителен якобиан функции перехода к любой карте ориентированного атласа. Наконец, в силу связности карты V_α , эти якобианы положительны во всех точках карты V_α (иначе найдется точка где якобиан равен нулю, что невозможно). Лемма доказана.

Пусть (U, φ) — произвольная карта на многообразии M . В дальнейшем мы будем говорить, что карта (U, φ) задает на M *локальную ориентацию*. Если якобиан матрицы перехода от одной карты к другой положителен, то мы скажем что локальные ориентации, задаваемые этими картами на M , *согласованы*. Если на многообразии M уже задана ориентация, то локальная ориентация, заданная картой (U, φ) может быть или согласована, или не согласована с ориентацией M . В первом случае мы будем говорить что локальная ориентация, заданная (U, φ) , *совпадает* с ориентацией M , а во втором — что локальная ориентация *противоположна* ориентации M .

Предложение 15.2 На связном ориентируемом многообразии существует ровно две различные ориентации. Любая карта на ориентируемом многообразии задает локальную ориентацию, совпадающую с одной из двух возможных ориентаций этого многообразия.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\mathcal{A}' = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ — два ориентированных атласа. Покажем, что если локальная ориентация, задаваемая какой-нибудь одной картой (V_β, ψ_β) атласа \mathcal{A}' , совпадает с ориентацией, заданной атласом \mathcal{A} , то атласы \mathcal{A} и \mathcal{A}' задают на M одинаковую ориентацию. Действительно, обозначим через P_0 — произвольную точку из карты V_β . Тогда для любой карты U_α , содержащей P_0 , якобиан функции перехода от координат в V_β к координатам в U_α положителен.

Пусть V_δ — произвольная карта из \mathcal{A}' , пересекающаяся с V_β . Тогда локальная ориентация, заданная картой V_δ тоже совпадает с ориентацией, заданной атласом \mathcal{A} . В самом деле, пусть Q — точка из пересечения $V_\beta \cap V_\delta$. Тогда существует карта U из атласа \mathcal{A} , содержащая Q . Представим функцию перехода $\Phi_{V_\delta U}$ от V_δ к U как композицию функций перехода $\Phi_{V_\delta V_\beta}$ от V_δ к V_β и $\Phi_{V_\beta U}$ от V_β к U . Якобиан $\Phi_{V_\beta U}$ в точке Q положителен по предположению, а якобиан $\Phi_{V_\delta V_\beta}$ в точке Q положителен в силу ориентированности атласа \mathcal{A}' . Поэтому якобиан $\Phi_{V_\delta U}$ в точке Q тоже положителен, так как равен произведению этих двух якобианов. Итак, мы доказали следующую полезную лемму.

Лемма 15.3 Пусть на многообразии M задана ориентация атласом \mathcal{A} , и, кроме того, заданы две пересекающиеся карты, задающие согласованную локальную ориентацию. Если ориентация первой карты совпадает с ориентацией \mathcal{A} , то ориентация второй карты тоже совпадает с ориентацией \mathcal{A} .

Рассмотрим теперь произвольную точку P из M , и пусть $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ — непрерывная кривая в M , соединяющая точки P_0 и P , существующая в силу связности многообразия M . Эта кривая покрывается конечным набором карт $V_1 = V_\beta, \dots, V_k$ атласа \mathcal{A}' . Карта V_1 necessarily пересекается с какой-нибудь из карт $V_i, i = 2, \dots, k$, поэтому, по лемме 15.3, якобианы функций перехода от карты V_i к картам атласа \mathcal{A} положительны. Далее, объединение V_β и V_i не покрывает кривой γ , поэтому пересекается с какой-нибудь другой картой V_j . Повторяя этот процесс и переходя от карты к карте, мы покажем, что якобианы всех функций перехода от карт $V_j, j = 1, \dots, k$ к картам из \mathcal{A} положительны. Поскольку P — произвольная точка из M , тем самым показано, атлас $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ — ориентируемый, что и требовалось.

Точно также можно доказать, что если одна из карт атласа \mathcal{A}' задает на M ориентацию, противоположную ориентации атласа \mathcal{A} , то и все карты из атласа \mathcal{A}' задают противоположную ориентацию. Предложение доказано.

Ориентированность многообразия M можно определить и по другому. Пусть \mathbb{R}^n — евклидово пространство. Если в \mathbb{R}^n фиксирован произвольный базис (e_1, \dots, e_n) , то будем говорить, что в \mathbb{R}^n задана ориентация. Два базиса назовем *одинаково ориентированными*, если определитель матрицы

перехода положителен. Очевидно, таким образом, что в \mathbb{R}^n можно задать ровно две различных ориентации.

Замечание. Отметим, что если \mathbb{R}^n рассматривать как гладкое многообразие с одной картой, то только что данное определение ориентации в \mathbb{R}^n в точности совпадает с данным выше определением для \mathbb{R}^n как для многообразия.

Пусть P — некоторая точка многообразия M . Рассмотрим касательное пространство $T_P M$, которое, напомним, представляет собой линейное пространство \mathbb{R}^n , и фиксируем в нем ориентацию, т.е. некоторый базис $E = (e_1, \dots, e_n)$. Рассмотрим произвольную кривую $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$, такую что $\gamma(0) = P$, и построим непрерывное семейство $E(t) = (e_1(t), \dots, e_n(t)) \in T_{\gamma(t)} M$ базисов в касательных пространствах в точках кривой γ . Другими словами, для каждого i задано непрерывное отображение $e_i: [0, 1] \rightarrow T(M)$, такое что $\pi \circ e_i = \gamma$, где π — стандартная проекция касательного расслоения $T(M)$ на M , причем векторы $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ линейно независимы в $T_{\gamma(t)} M$. Очевидно, если имеется два таких непрерывных семейства $E(t)$ и $\tilde{E}(t)$, таких что $E = E(0) = \tilde{E}(0)$, то, в силу непрерывности $E(t)$ и $\tilde{E}(t)$, базисы $E(t)$ и $\tilde{E}(t)$ задают в линейном пространстве $T_{\gamma(t)} M$ одинаковую ориентацию. Ориентация, полученная таким образом в пространстве $T_Q M$, где $Q = \gamma(1)$, называется *перенесенной из точки P по кривой γ* .

Определение. Связное многообразие M называется *ориентируемым*, если ориентация, перенесенная из точки P в произвольную точку Q по кривой γ , не зависит от выбора кривой γ . *Задать ориентацию на M* означает в этой терминологии задать ориентации всех касательных пространств $T_P M$ к многообразию M так, чтобы эти ориентации были согласованы с операцией перенесения ориентации вдоль кривых на M .

Имеет место следующее предложение.

Предложение 15.3 *Два определения ориентируемости многообразия эквивалентны.*

Доказательство. Пусть сначала на связном многообразии M задан ориентированный атлас $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Рассмотрим две произвольных точки P и Q многообразия M , и пусть γ — произвольная кривая, соединяющая P и Q . Пусть U — карта из \mathcal{A} , содержащая точку P . Зададим в касательном пространстве $T_P M$ базис E , определяющий в $T_P M$ как в линейном пространстве \mathbb{R}^n ту же ориентацию, что и канонический базис, соответствующий локальным координатам карты U . Это означает, что определитель матрицы J , составленной из векторов-столбцов координат векторов e_i базиса E относительно канонического базиса $\{\partial_i\}$, больше нуля. Если $E(t)$ — любое непрерывное семейство базисов вдоль кривой γ , и $E(0) = E$, то,

очевидно, внутри карты U определитель матрицы J всегда больше нуля (иначе он где-нибудь обращается в нуль, что невозможно).

Далее, кривая γ — компактное подмножество в многообразии M , поэтому ее можно покрыть конечным числом карт. Пусть U' — некоторая карта из этого покрытия, пересекающаяся с картой U , и пусть $\gamma(t_0)$ — точка из пересечения карт. Тогда, так как карты U и U' согласованы (они входят в ориентированный атлас), определитель матрицы перехода от репера $E(t_0)$ к каноническому реперу $\{\partial'_i\}$ координат карты U' в точке $\gamma(t_0)$ положителен. Переходя от карты к карте, мы за конечное число шагов попадем в точку Q , и убедимся, что перенесенная в точку Q вдоль кривой γ ориентация совпадает с ориентацией, задаваемой в точке Q каноническим базисом локальных координат любой карты из \mathcal{A} . Поэтому эта ориентация не зависит от кривой.

Обратно, пусть перенесение ориентации из точки в точку на связном многообразии M не зависит от пути. Возьмем на M произвольный атлас, и перестроим его в ориентированный так. Начнем с произвольной карты U , и фиксируем в касательном пространстве $T_P M$, где P — любая точка из U , базис E , согласованный с каноническим базисом локальных координат на U в точке P . Пусть теперь U' — произвольная другая карта на M . Фиксируем в U' произвольную точку, и рассмотрим какую-нибудь непрерывную кривую γ , соединяющую P и Q . Перенесем в точку Q ориентацию вдоль кривой γ . По условию, полученная в точке Q ориентация не зависит от кривой γ . Если эта ориентация противоположна ориентации канонического репера локальных координат карты U' в точке Q , то сделаем в U' замену координат, заменив знак у первой координаты. В результате, мы получим новую карту U' , для которой ориентация перенесенная в Q из P будет согласована с ориентацией канонического репера. Поменяв таким образом локальные координаты во всех картах атласа, мы получим новый атлас, который, как легко проверить, является ориентированным. Предложение доказано.

Замечание. Отметим, что для доказательства ориентируемости конкретного многообразия удобнее пользоваться определением в терминах атласов: достаточно построить один ориентированный атлас. Для доказательства неориентируемости, напротив, удобнее пользоваться определением в терминах непрерывных кривых: достаточно предъявить пару точек и две соединяющие их кривые, такие что ориентации, перенесенные вдоль этих кривых окажутся противоположными. Часто удается, например, построить замкнутую кривую, перенесение ориентации вдоль которой порождает в начальной точке ориентацию, противоположную исходной.

Приведем несколько примеров.

Упражнение 15.1. Показать, что атлас стереографической проекции на сфере является ориентированным. Другими словами, стандартная сфера является ориентируемым многообразием.

Упражнение 15.2. Показать, что если атлас многообразия состоит из одной или двух карт, то многообразие ориентируемо.

Упражнение 15.3. Показать, что если регулярная гиперповерхность M в \mathbb{R}^n разделяет пространство на две части, т.е. $\mathbb{R}^n \setminus M$ состоит из двух компонент связности, то M — ориентируемое многообразие. В частности, вложенное компактное $(n-1)$ -мерное подмногообразие в \mathbb{R}^n ориентируемо.

Пример. Простейший пример неориентируемого многообразия — это лист Мебиуса. Напомним, что лист Мебиуса получается склейкой двух противоположных сторон $0 \times (0, 1)$ и $1 \times (0, 1)$ квадрата $[0, 1] \times (0, 1)$ по эквивалентности $(0, x) \sim (1, 1 - x)$, $x \in (0, 1)$. На рис. 28 эта склейка условно изображена стрелками. Стороны, помеченные стрелками, следует склеивать так, чтобы направления стрелок совмещались при склеивании.

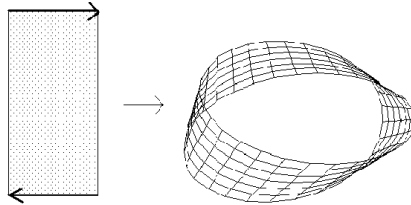


Рис. 28: Склейка листа Мебиуса из квадрата.

Легко видеть, что лист Мебиуса неориентируем. Действительно, рассмотрим центральную окружность $[0, 1] \times 1/2$, зададим в ее точке $(x, 1/2)$ репер (e_1, e_2) , где e_1 направлен по касательной к окружности, а e_2 — по ортогональному отрезку, см. рис. 29. Ясно, что при переносе ориентации из точки $(x, 1/2)$ по окружности в нее же саму, мы получим репер $(e_1, -e_2)$, что и требовалось, см. рис. 29.

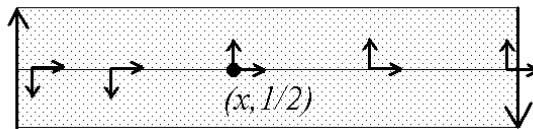


Рис. 29: Перенос репера по центральной окружности листа Мебиуса.

Задачи к лекции 15

Задача 15.1. Напомним, что непрерывная кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ называется кусочно-гладкой, если существует конечное разбиение $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ отрезка $[a, b]$, такое что ограничение γ_p кривой γ на каждый отрезок $[a_{p-1}, a_p]$, $p = 1, \dots, k$, является гладкой кривой.

Пусть M — связное риманово многообразие. Зададим на нем функцию расстояния ρ , положив

$$\rho(P, Q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ — кусочно-гладкая кривая, соединяющая } P \text{ и } Q\}.$$

Показать, что пара (M, ρ) — метрическое пространство. Проверить, что метрическая топология, порожденная M , эквивалентна топологии многообразия.

Задача 15.2. Пусть $i: M \rightarrow W$ — вложение многообразия M в риманово многообразие W , и $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ — гладкая кривая на M . Показать, что длина кривой γ , вычисленная в индуцированной вложением i метрике на M , совпадает с длиной кривой $i \circ \gamma$ на W (в римановой метрике на W).

Задача 15.3. Ориентируемы ли многообразия $\mathbb{R}P^n$?

Задача 15.4. Показать, что матричные группы ориентируемы.

Дополнительный материал к лекции 15

Добавление 15.1. Примеры: бутылка Клейна. Бутылкой Клейна, напомним, называется многообразие, полученное склейкой противоположных сторон квадрата, изображенной схематически на рис. 30. Две противоположных стороны, помеченные буквой a , склеиваются без переворачивания, а две другие, помеченные буквой b , — с переворачиванием.

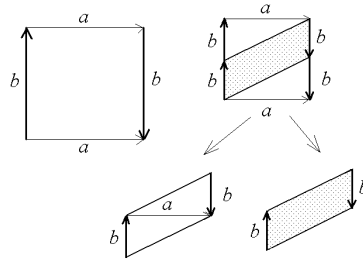


Рис. 30: Склейка бутылки Клейна из квадрата и из двух листов Мебиуса.

Заметим, что бутылка Клейна может быть получена склейкой двух листов Мебиуса. Действительно, разрезав квадрат по двум параллельным отрезкам, соединяющим середины сторон b с соответствующими вершинами квадрата (см. рис. 30) и склеив затем по стороне a , мы получим два листа Мебиуса. В частности, отсюда вытекает, что бутылка Клейна — это неориентируемое многообразие.

Добавление 15.2. Примеры: поверхность в \mathbb{R}^n , заданная уравнениями. Покажем, что каждая k -мерная регулярная поверхность M в \mathbb{R}^n , заданная глобально системой уравнений $F_p(x) = 0$, $p = 1, \dots, n - k$, ориентируема. Действительно, рассмотрим в каждой точке P поверхности M набор векторов

$$N_p(P) = \left(\frac{\partial F_p}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial F_p}{\partial x^n} \right).$$

Легко проверить, что векторы N_p ортогональны поверхности M в точке P . Действительно, если γ — произвольная гладкая кривая на M , проходящая через P , $\gamma(0) = P$, то

$$\frac{dF_p}{dt} \Big|_{\gamma(t)} = \sum_i \frac{\partial F_p}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = 0,$$

т.е. вектор $N_p(P)$ ортогонален произвольному касательному вектору $\dot{\gamma}$ из $T_P M$. Таким образом, в каждой точке P задан набор нормалей $\{N_1, \dots, N_{n-k}\}$ к M , гладко зависящий от P . Фиксируем в $T_P M$ базис $E(P) = (e_1(P), \dots, e_k(P))$ так, чтобы базис $e_1, \dots, e_k, N_1, \dots, N_{n-k}$ имел в \mathbb{R}^n положительную ориентацию. Полученное непрерывное семейство базисов $E(P)$ превращает M в ориентированное многообразие.

Добавление 15.3. Примеры: проективное пространство $\mathbb{R}P^3$. Проверим ориентируемость проективного пространства $\mathbb{R}P^3$. Напомним, что на этом многообразии имеется стандартный атлас из четырех карт, который в терминах однородных координат

нат $(x^1 : x^2 : x^3 : x^4)$ задается так:

$$\begin{aligned} U_1(x^1 \neq 0), \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) &\mapsto \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}, \frac{x^4}{x^1} \right), \\ U_2(x^2 \neq 0), \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) &\mapsto \left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2}, \frac{x^4}{x^2} \right), \\ U_3(x^3 \neq 0), \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) &\mapsto \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}, \frac{x^4}{x^3} \right), \\ U_4(x^4 \neq 0), \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) &\mapsto \left(\frac{x^1}{x^4}, \frac{x^2}{x^4}, \frac{x^3}{x^4} \right). \end{aligned}$$

Однако, как легко проверить, этот атлас не является ориентированным (скажем, определитель матрицы перехода от U_1 к U_4 всюду отрицателен). Поэтому, чтобы превратить атлас в ориентированный, следует переменить порядок координат в некоторых картах. Например, это можно сделать так:

$$\begin{aligned} U_1(x^1 \neq 0), \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) &\mapsto \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}, \frac{x^4}{x^1} \right), \\ U_2(x^2 \neq 0), \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) &\mapsto \left(\frac{x^4}{x^2}, \frac{x^3}{x^2}, \frac{x^1}{x^2} \right), \\ U_3(x^3 \neq 0), \quad (x^1 : x^2 : x^3 : x^4) &\mapsto \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}, \frac{x^4}{x^3} \right), \\ U_4(x^4 \neq 0), \quad (x^2 : x^1 : x^3 : x^4) &\mapsto \left(\frac{x^1}{x^4}, \frac{x^2}{x^4}, \frac{x^3}{x^4} \right) \end{aligned}$$

(мы переставили пару координат во второй и четвертой картах). Теперь несложно проверить, что все матрицы перехода имеют положительный якобиан. Например, обозначив координаты в карте U_1 через (a^1, a^2, a^3) , запишем функции перехода к карте U_4 в виде

$$(a^1, a^2, a^3) \mapsto \left(\frac{a^1}{a^3}, \frac{1}{a^3}, \frac{a^2}{a^3} \right).$$

Тогда определитель матрицы Якоби равен $1/(a^3)^2 > 0$.

16 Классификация связных двумерных компактных многообразий

В заключение мы приведем классификационную (с точностью до гомеоморфизма) теорему для двумерных компактных многообразий⁶. Полное доказательство этой теоремы мы приводить не будем, ограничившись демонстрацией основных идей. Напомним, что одномерных компактных многообразий мало: все они гомеоморфны окружности. В двумерном случае ситуация существенно богаче. В более высоких размерностях полного эффективного описания не известно.

16.1 Склейки многоугольников

Примеры двумерных компактных многообразий нам уже встречались выше: двумерная сфера, бутылка Клейна, двумерный тор, проективная плоскость. Попробуем сначала взглянуть на эти четыре примера с единой точки зрения. Мы получили бутылку Клейна из квадрата, отождествив ее стороны по определенному правилу. Легко понять, что аналогично можно получить и остальные три многообразия, см. рис. 31 (напомним, что проективная плоскость \mathbb{RP}^2 может быть получена из двумерного диска склейкой противоположных точек его граничной окружности). В дальнейшем, чтобы рисовать поменьше рисунков, мы введем следующие определения.

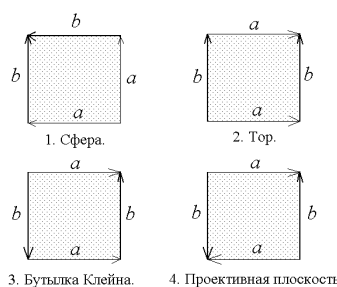


Рис. 31: Склейки квадрата.

Пусть P — произвольный плоский многоугольник с $2k$ сторонами. Разобьем множество его сторон на k непересекающихся пар, и пометим стороны, попавшие в одну и ту же пару одинаковыми буквами. Итого, у нас имеется k различных букв a_1, \dots, a_k расставленных на $2k$ сторонах. Теперь превратим многоугольник P в двумерное (топологическое) многообразие, отождествив стороны, помеченные одинаковыми буквами. Напо-

⁶Обычно в формулировку этой теоремы включают условие замкнутости, т.е. отсутствия края. Однако мы пока не рассматривали многообразий с краем, поэтому у нас, пока, все компактные многообразия замкнуты автоматически.

ним, однако, что существует два различных гомеоморфизма отрезка на себя. Чтобы различать эти два разных способа отождествления сторон, мы поступим так. Фиксируем направление обхода многоугольника по периметру, например, по часовой стрелке. Начиная с произвольной стороны, будем последовательно перебирать стороны многоугольника, расставляя на них стрелки (или, если угодно, ± 1) по следующему правилу. Если сторона, помеченная буквой a_i встречается первый раз, то поставим на ней стрелку, сонаправленную с выбранным направлением обхода многоугольника (припишем $+1$). Если же сторона встречается второй раз, то имеется две возможности:

- стороны склеиваются “без переворота”, т.е. концевая, в смысле направления обхода, точка первой встретившейся стороны склеивается с первой точкой второй встретившейся стороны (как противоположные стороны квадрата при склейке его в тор).
- стороны склеиваются “с переворотом”, т.е. концевая точка первой встретившейся стороны склеивается с концевой точкой второй встретившейся стороны (как противоположные стороны квадрата при склейке проективной плоскости).

В первом случае пометим сторону стрелкой, направленной против движения вокруг многоугольника (припишем -1), а во втором — стрелкой, сонаправленной с движением вокруг многоугольника (припишем $+1$). Отметим, что после такой разметки, при склеивании стрелок их направления совмещаются. В результате мы получим разметку сторон нашего многоугольника буквами и стрелками (или ± 1). Ясно, что эта разметка однозначно задает склейку двумерного многообразия.

Каждой такой разметке мы сопоставим некоторое слово, выписав последовательно буквы, стоящие на сторонах нашего многоугольника, и приписав каждой букве степень -1 , если соответствующая сторона помечена -1 . Построенное слово W будем называть *словом склейки*, а про полученное в результате склейки многоугольника P в соответствие со словом W компактное двумерное многообразие M будем говорить, что оно *склеено из P по слову W* . Мы будем обозначать это многообразие через $P(W)$.

Упражнение 16.1. Проверьте, что полученное в результате описанной склейки топологическое пространство действительно является топологическим многообразием. Для этого укажите гомеоморфные кругу окрестности всех его точек.

Обратно, если задано произвольное слово W , составленное из k пар различных букв, каждая из которых может встречаться в степени ± 1 , то по слову W можно восстановить двумерное компактное многообразие, склеенное из некоторого $2k$ -угольника P . А именно, начав с произвольной стороны многоугольника P , припишем его последовательным сторонам последовательные буквы слова W в соответствующих степенях ± 1 . Склеим

стороны, помеченные одинаковыми буквами. При этом, если обе стороны помечены буквой в одинаковой степени, то осуществим склейку “с переворотом”, а если степени разные — то без переворота. Итак, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 16.1 Пусть фиксировано произвольное разбиение множества сторон $2k$ -угольника P на непересекающиеся пары, и задано некоторое отождествление этих пар сторон. Тогда эта склейка многоугольника однозначно определяется некоторым словом W .

Обратно, каждое слово W состоящее из k пар различных букв, каждая из которых может встречаться в степени ± 1 , задает некоторую склейку многоугольника P в двумерное компактное многообразие.

Пример. Пусть Q — это уже знакомый нам квадрат. Тогда, как видно из рис. 31, $Q(abb^{-1}a^{-1})$ — это сфера, $Q(bab^{-1}a^{-1})$ — тор, $Q(baba^{-1})$ — бутылка Клейна, и $Q(ab^{-1}ab^{-1})$ — проективная плоскость.

Замечание. Заметим, что разным словам могут отвечать одни и те же многообразия. Например $Q(abab)$ — тоже, очевидно, проективная плоскость, а $P(aa^{-1})$ — сфера.

16.2 Заклеивание сферы

Рассмотрим еще один способ получения двумерных компактных многообразий. Начнем со следующего простого примера. Рассмотрим стандартную двумерную сферу, и вырежем из нее два открытых непересекающихся диска. Полученное топологическое пространство — сфера с двумя дырками, — гомеоморфно, очевидно, цилиндру $S^1 \times [0, 1]$, а его граница — объединению двух окружностей. Рассмотрим еще один экземпляр цилиндра $[0, 1] \times S^1$. Склеим цилиндр и сферу с двумя дырками отождествив их граничные окружности. Заметим, что имеется, вообще говоря, четыре способа приклеить цилиндр к сфере с дырками, см. 32. При этом, если цилиндр целиком лежит снаружи или целиком внутри исходной сферы, то получается компактное двумерное многообразие гомеоморфное тору (фактически, мы склеили два цилиндра), а в двух других случаях — гомеоморфное бутылке Клейна. Полученный тор, очевидно, разбивает объемлющее пространство на две части, поэтому ориентируем, а бутылка Клейна, как мы уже видели, — неориентируема. Операцию приклейки цилиндра по двум граничным окружностям мы назовем *приклейкой ручки*. Если цилиндр-ручка при этом целиком лежит по одну сторону от поверхности, то будем называть такую ручку *ориентированной*. В противном случае будем говорить о *неориентируемой ручке*. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 16.1 Двумерный тор гомеоморфен сфере с одной приклеенной ориентированной ручкой. Бутылка Клейна гомеоморфна сфере с одной неориентированной ручкой.

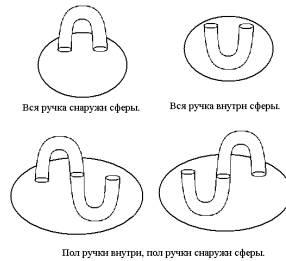


Рис. 32: Приклейки цилиндра-ручки к сфере с дырками.

Рассмотрим теперь проективную плоскость, склеенную из квадрата: $\mathbb{RP}^2 = Q(abab)$, и вырежем из нее диск, центр которого, для удобства, поместим на сторону квадрата, см. рис. 33. То что осталось, очевидно, гомеоморфно листу Мебиуса. Таким образом, проективная плоскость может быть получена из сферы так: нужно вырезать из сферы диск, и заклеить образовавшуюся дырку листом Мебиуса, отождествив граничные окружности. Операция приклейки листа Мебиуса по граничной окружности называется *приклейкой пленки Мебиуса*. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 16.2 *Проективная плоскость гомеоморфна сфере с одной приклеенной пленкой Мебиуса.*

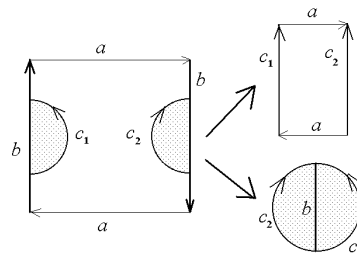


Рис. 33: Проективная плоскость — склейка диска и листа Мебиуса.

Упражнение 16.2. С помощью рис. 30 показать, что бутылка Клейна гомеоморфна сфере, заклеенной двумя пленками Мебиуса. Сравнить с доказательством леммы 16.1, нарисовать приклеиваемую в этой лемме ручку на квадрате. Таким образом, приклеивание неориентируемой ручки эквивалентно приклеиванию двух пленок Мебиуса.

Итак, мы определили две операции: приклейка ориентированной ручки и приклейка пленки Мебиуса, и у нас естественно возникает две серии двумерных компактных многообразий.

- Многообразие M_g^2 , $g \geq 0$, получающееся из сферы с $2g$ дырками приклеиванием g штук ориентированных ручек, называется *сферой с g ручками*.
- Многообразие M_μ^2 , $\mu \geq 1$, получающееся из сферы с μ дырками приклеиванием μ пленок Мебиуса.

Замечание. Очевидно, что любое двумерное многообразие, в которое вклеена пленка Мебиуса, неориентируемо, так как перенеся репер вдоль центральной окружности листа Мебиуса мы получим репер противоположной ориентации. Напротив, многообразие, полученное приклеиванием к сфере любого числа ориентированных ручек разбивает объемлющее пространство на две части и, поэтому, ориентируемо.

Упражнение 16.3. Показать, что сфера, к которой приклеено k ручек и t пленок Мебиуса, гомеоморфна сфере с $2k + t$ пленками Мебиуса.

Упражнение 16.4. Докажите, что для любых g и μ многообразие M_g^2 может быть вложено в \mathbb{R}^3 , а многообразие M_μ^2 — погружено в \mathbb{R}^3 .

16.3 Теорема классификации

Оказывается две построенных нами бесконечных серии исчерпывают все компактные связные двумерные многообразия.

Теорема 16.1 *Любое гладкое компактное связное (замкнутое) двумерное многообразие гомеоморфно или сфере с g ручками, $g \geq 0$, или сфере с μ пленками Мебиуса, $\mu \geq 1$.*

Мы не будем приводить полное доказательство этой теоремы, а лишь поясним основные идеи.

16.3.1 Триангуляции.

Пусть M — связное компактное двумерное многообразие. Будем говорить, что на многообразии M задана некоторая *триангуляция*, если на M задан конечный набор отрезков гладких вложенных кривых $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow M$ — *ребер триангуляции*, пересекающихся между собой только по конечным точкам $\gamma_i(0)$, $\gamma_i(1)$ — *вершинам триангуляции*, причем выполнены следующие свойства:

- концевые точки каждого ребра триангуляции различны, т.е. $\gamma_i(0) \neq \gamma_i(1)$ (отсутствие петель);
- множество $M \setminus (\cup \gamma_i)$, полученное в результате выбрасывания из многообразия M всех ребер триангуляции, представляет собой несвязное объединение открытых дисков, замыкания которых называются *треугольниками триангуляции*, причем граница каждого такого диска состоит ровно из трех ребер триангуляции;

- любые два треугольника триангуляции или не пересекаются, или их пересечение совпадает с некоторой их общей вершиной или с некоторой общей стороной триангуляции.

Упражнение 16.5. Постройте триангуляции сферы, тора, бутылки Клейна и проективной плоскости. Из какого минимального числа треугольников могут состоять триангуляции этих поверхностей?

Имеет место следующий результат, который мы приводим без доказательства.

Предложение 16.1 *Любое двумерное гладкое компактное связное замкнутое многообразие допускает триангуляцию.*

Воспользуемся этим предложением для осуществления первого шага доказательства теоремы 16.1. А именно, пусть M — гладкое компактное связное замкнутое двумерное многообразие, и пусть задана некоторая его триангуляция, существующая в силу предложения 16.1. Ориентируем все ребра триангуляции, т.е. расставим на них стрелки, и пометим ребра триангуляции буквами, приписывая разным ребрам разные буквы. Разрежем многообразие M по всем ребрам триангуляции. В результате мы получим конечный набор треугольников — топологических дисков, все стороны которых помечены буквами и стрелками, причем каждая буква встречается ровно два раза (при разрезании вдоль стороны триангуляции мы сохраняем стрелку и букву на обоих берегах разреза). Будем теперь склеивать треугольники триангуляции, на каждом следующем шаге приклеивая ровно один треугольник ровно по одной стороне. Из построения, определения триангуляции и связности многообразия M вытекает, что мы последовательно приклеим все треугольники, и у нас в результате получится множество P , гомеоморфное двумерному диску. Граница этого множества разбита на четное количество $2k$ ребер триангуляции. Эти ребра некоторым образом разбиты на пары ребер, помеченных одинаковыми буквами, и, кроме того, каждое ребро снабжено стрелкой. Очевидно, множество P гомеоморфно плоскому $2k$ -угольнику, на границе которого определена некоторая склейка. При этом, склеивая многоугольник P по этой склейке мы, очевидно, получим исходное многообразие. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 16.3 *Каждое гладкое компактное замкнутое двумерное многообразие может быть получено из некоторого $2k$ -угольника склейкой пар его сторон.*

16.3.2 Канонические склейки многоугольников.

Итак, мы показали, что каждое двумерное гладкое компактное замкнутое многообразие получается из подходящего $2k$ -угольника некоторой склейкой его сторон. Напомним, что каждая такая склейка задается некоторым

словом, хотя разные слова могут приводить к одному и тому же многообразию.

Упражнение 16.6. Показать, что многообразие, полученное из 2-угольника P склейкой $P(aa^{-1})$, гомеоморфно сфере. Показать, что многообразие, полученное из $4n$ -угольника P склейкой $P(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1})$, гомеоморфно сфере с n ручками. Показать, что многообразие, полученное из $2n$ -угольника P склейкой $P(a_1a_1 \cdots a_na_n)$, гомеоморфно сфере с n пленками Мебиуса.

В качестве следующего шага доказательства теоремы классификации, следует показать, что произвольное многообразие вида $P(a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_{2k}^{\varepsilon_{2k}})$, гомеоморфно или сфере с g ручками, или сфере с μ пленками Мебиуса. Это удастся сделать с помощью набора нескольких гомеоморфизмов, которые перестраивают многоугольник P и слово склейки. Фактически, можно показать, что с помощью стандартных операций, каждой из которых соответствует некий гомеоморфизм, произвольное слово склейки можно преобразовать к одному из трех канонических видов, приведенных в предыдущем упражнении. Каждое из таких преобразований представляет собой набор последовательных разрезов многоугольника P по некоторой его диагонали и последующей склейки сторон полученных компонент по сторонам, помеченным одинаковыми буквами. Мы не будем здесь приводить доказательства, отсылая заинтересованных к книге А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко “Курс дифференциальной геометрии и топологии”, где соответствующий алгоритм подробно изложен и снабжен замечательными рисунками.

16.3.3 Последний шаг, эйлерова характеристика.

Чтобы завершить доказательство классификационной теоремы следует установить, что многообразия M_g^2 , $g \geq 0$, и M_μ^2 попарно не гомеоморфны. Это можно сделать, например, с помощью групп когомологий де Рама, см. следующий семестр. Здесь же мы приведем более простой способ, связанный с понятием Эйлеровой характеристики.

Определение. Пусть τ — произвольная триангуляция двумерного многообразия M . Назовем *эйлеровой характеристикой* $\chi(\tau)$ *триангуляции* τ следующее целое число:

$$\chi(\tau) = F - E + V,$$

где F , E и V — количества треугольников (граней), ребер и вершин триангуляции соответственно.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 16.2 *Эйлерова характеристика триангуляции многообразия M не зависит от триангуляции и определяется только многообразием M .*

Мы не будем приводить аккуратного доказательства этого утверждения. Отметим только, что любые две триангуляции одного и того же многообразия можно перевести друг в друга с помощью гомеоморфизма и нескольких операций *измельчения*. Каждая такая операция состоит в проведении диагонали в четырехугольнике, образованном двумя смежными по ребру треугольниками триангуляции. В результате одного такого измельчения количество треугольников увеличивается на 2, количество вершин — на 1, и количество ребер — на 3. Поэтому Эйлера характеристика не меняется.

Назовем *эйлеровой характеристикой двумерного многообразия* M эйлерову характеристику любой его триангуляции. Имеет место следующее очевидное утверждение.

Утверждение 16.3 *Эйлера характеристика многообразия является его топологическим инвариантом, т.е. если два многообразия гомеоморфны, то их эйлеровы характеристики совпадают.*

Можно теперь вычислить эйлеровы характеристики всех двумерных компактных связных многообразий, построив подходящие триангуляции. Тогда, если мы получим разные числа, то, тем самым, будет доказана негомеоморфность соответствующих многообразий. Однако построение триангуляций — дело сложное. Вместо этого, мы сначала определим одну топологическую операцию на многообразиях, а затем вычислим эйлеровы характеристики без триангуляций.

Пусть M_1 и M_2 — два многообразия, и P_i — точка на многообразии M_i . Пусть U_i — малая круговая окрестность точки P_i . Выбросим из многообразия M_i диск U_i . В результате получится топологическое пространство с границей окружность. Склеим два пространства с границей окружность по этой окружности. Полученное компактное многообразие назовем *связной суммой* и обозначим через $M_1 \# M_2$.

Утверждение 16.4 *Пусть M_1 и M_2 — двумерные компактные связные многообразия. Тогда*

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Доказательство. Рассмотрим достаточно мелкие триангуляции многообразий M_i . Тогда при построении их связной суммы в качестве дисков можно взять треугольники триангуляций. Отождествляя эти треугольники, мы склеим их по сторонам. В итоге мы сразу получим некоторую триангуляцию τ связной суммы. Пусть V_i , E_i и F_i — количества вершин, ребер и треугольников триангуляций многообразий M_i , а V , E и F — соответствующие числа для триангуляции τ . Тогда, очевидно,

$$V = V_1 + V_2 - 3, \quad E = E_1 + E_2 - 3, \quad F = F_1 + F_2 - 2,$$

откуда и получаем требуемое соотношение.

Вычислим теперь Эйлерову характеристику сферы S^2 . Очевидно, что $S^2 \# S^2 = S^2$, поэтому, $\chi(S^2) = 2\chi(S^2) - 2$, откуда $\chi(S^2) = 2$.

Перейдем к тору T^2 . Ясно, что тор можно получить из сферы так: выбросить два диска из сферы, и склеить друг с другом две окружности, из которых состоит граница. Если сфера уже была триангулирована, то мы получим некоторую триангуляцию τ тора. Рассуждая так же как при доказательстве утверждения 16.4, получим

$$V = V_1 - 3, \quad E = E_1 - 3, \quad F = F_1 - 2,$$

где V , E и F количества вершин, ребер и треугольников триангуляции τ , а V_1 , E_1 и F_1 — соответствующие числа для исходной триангуляции сферы. Поэтому

$$\chi(T^2) = F - E + V = (F_1 - 2) - (E_1 - 3) + (V_1 - 3) = \chi(S^2) - 2 = 0.$$

Далее, если M_g^2 — это сфера с g ручками, то, очевидно,

$$M_g^2 = \underbrace{T^2 \# \cdots \# T^2}_g,$$

поэтому

$$\chi(M_g^2) = \underbrace{\chi(T^2) + \cdots + \chi(T^2)}_g - 2(g - 1) = 2 - 2g.$$

Перейдем, наконец, к неориентируемому случаю. Для этого заметим, сначала, что если M_μ^2 — сфера с μ пленками Мебиуса, то

$$M_\mu^2 = \underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \cdots \# \mathbb{R}P^2}_\mu.$$

С другой стороны, $\mathbb{R}P^2 \# T^2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$, откуда

$$\chi(\mathbb{R}P^2) + \chi(T^2) - 2 = 3\chi(\mathbb{R}P^2) - 4,$$

т.е. $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$. Поэтому

$$\chi(M_\mu^2) = \underbrace{\chi(\mathbb{R}P^2) + \cdots + \chi(\mathbb{R}P^2)}_\mu - 2(\mu - 1) = 2 - \mu.$$

Таким образом имеет место следующий результат.

Утверждение 16.5 *Эйлерова характеристика сферы с g ручками равна $2 - 2g$. Эйлерова характеристика сферы с μ пленками Мебиуса равна $2 - \mu$.*

Следствие 16.1 *Сферы с g ручками и сферы с μ пленками Мебиуса попарно не диффеоморфны.*

Доказательство. Осталось заметить, что диффеоморфизм сохраняет свойство ориентируемости, поэтому никакая сфера с $g \geq 0$ ручками не диффеоморфна сфере с $\mu \geq 1$ пленками Мебиуса.

Следствие 16.1 завершает доказательство теоремы.