

УДК 517.538

Д. А. Туниянц, В. В. Ведюшкина

Слоение Лиувилля ограниченного эллипсом бильярда с полиномиальным потенциалом чётного порядка

В работе проведено полное топологическое исследование динамической системы эллиптического бильярда с добавлением в него потенциала $Q(x, y)$ полиномиального вида четного порядка. Были изучены возникающие лагранжевы слоения на всех невырожденных поверхностях постоянной энергии. В статье представлен алгоритм, позволяющий вычислить инвариант лиувиллевой эквивалентности такого слоения (меченую молекулу Фоменко-Цишанга) по параметрам данного потенциала, а также значению энергии системы. В отличие от более ранних алгоритмов, разработанных С.Е.Пустовойтовым, новый позволяет вычислять данные инварианты лиувиллевой эквивалентности не анализируя явным образом преобразования областей возможного движения частицы.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: Бильярд, потенциал, инвариант Фоменко-Цишанга, лиувиллева эквивалентность

§ 1. Введение

Математический бильярд — это класс динамических систем, описывающих движение материальной точки в некоторой области (как правило на плоскости), ограниченной кусочно-гладкой кривой (все углы нерегулярности при этом делят угол 2π нацело). Движение происходит без потери энергии, а все отражения являются абсолютно-упругими. Первую интегрируемую систему такого класса описал Дж.Д.Биркгоф [19], рассмотрев предел интегрируемого геодезического потока на эллипсоиде (задача Якоби). В настоящее время бильярды в квадратах являются активной областью исследований, в частности, в контексте так называемой гипотезы Биркгофа [11, 18, 10] (см. работы В.Ю. Калошина, А. Соррентино, А.А. Глюцука, М. Бялого, А.Е. Миронова).

В.В.Ведюшкиной в противовес доказательству полиномиальной версии гипотезы Биркгофа был построен крайне богатый класс интегрируемых бильярдов — бильярдные книжки [6, 7]. Такие бильярдно-подобные системы описывают движение материальной точки на клеточном комплексе. Клетки этого комплекса — это плоские области, ограниченные дугами одного и того же семейства квадратов. Если занумеровать все двумерные клетки, то, снабдив одномерные клетки — корешки книжки — перестановками, можно определить движение материальной точки по такому клеточному комплексу — “бильярдной книжке”.

Работа выполнена в МГУ им. М.В.Ломоносова при поддержке гранта РФФИ № 25-71-10087

Так как границы всех билиардов — дуги одного и того же семейства софокусных квадрик, то полученная динамическая система будет интегрируемой.

Метод инвариантов лиувиллевой эквивалентности — метод меченных молекул Фоменко-Цишанга — позволяет описывать качественное поведение интегрируемой системы. Дело в том, что в компактном случае совместные поверхности уровня двух интегралов интегрируемой гамильтоновой системы на четырехмерном симплектическом многообразии являются несвязным объединением двумерных торов. Решения системы являются обмотками этих торов и в случае общего положения такие обмотки нерезонансны, т.е. замыкание такого решения есть двумерный тор. Инвариант Фоменко-Цишанга позволяет описывать поведение таких двумерных торов в изоэнергетической поверхности — поверхности уровня интеграла энергии. Поясним последнее. Все компоненты связности слоев дополнительного интеграла в изоэнергетической поверхности либо являются неособыми (т.е. гомеоморфны двумерным торам) либо являются особыми. В последнем случае при добавлении некоторых естественных условий на систему (невыврожденности, нерезонансности и боттовости дополнительного интеграла) следует, то окрестность особого слоя имеет структуру многообразия Зейферта, согласованную со слоением Лиувилля — каждый слой расслоения Зейферта лежит на соответствующем слое Лиувилля (торе или особом слое). Из условия боттовости следует что все особые слои расслоения Зейферта (если они есть) имеют тип $(2,1)$. Такие слои соответствуют неориентируемым сепаратрисным диаграммам. В результате база такого особого слоя описывается так называемым 2-атомом — окрестностью особого слоя функции Морса. Так как слоения Зейферта полностью задаются базой и особыми слоями, то 3-атом — перестройка торов Лиувилля — задается 2-атомом, на особом графе которого задано некоторое количество точек-звездочек (они проектируются на ребра этого графа).

Рассмотрим граф Роба дополнительного интеграла, описывающего слоение Лиувилля на изоэнергетической поверхности. В вершины этого графа помещаются буквы, кодирующие перестройки торов. Для того чтобы закончить построение инварианта необходимо указать склейку граничных торов окрестностей особых слоев (3-атомов) друг с другом. Эта склейка кодируется парами чисел r, ε , которые ставятся на ребрах оснащенного бифуркациями графа Роба и числами n которые приписываются каждой “семье” — объединению 3-атомов, имеющих глобальное слоение Зейферта (т.е. таких что слои расслоений Зейферта, описанных выше, согласованы друг с другом). Полученный инвариант позволяет классифицировать системы с точностью до так называемой лиувиллевой эквивалентности. Системы называются лиувиллево эквивалентными на изоэнергетических поверхностях, если между этими поверхностями существует сохраняющий ориентацию послойный диффеоморфизм, которые дополнительно сохраняет направление обхода критических окружностей (критических решений).

В данной работе рассматривается плоский билиард в области, ограниченной эллипсом, в которой на частицу действует потенциал полиномиального вида. Движение частицы становится уже не прямолинейным и не равномерным, но отражение от границы стола остается абсолютно упругим. Естественным

образом возникает вопрос интегрируемости такого бильярда. В настоящее время самым известным критерием интегрируемости с дополнительным интегралом определенного вида является критерий, приведенный В. В. Козловым в работе [3]. Отметим также, что интегрируемые потенциалы в форме многочлена Лорана (их общий вид) были описаны В. И. Драговичем в [2]. Ограничимся теперь классом полиномиальных потенциалов и изучим структуру слоения Лиувилля фазового четырехмерного пространства M^4 . Ранее С. Е. Пустовойтовым и И. Ф. Кобцевым [4, 5, 8, 9] случаи полиномиальных потенциалов 2-го и 4-го порядков уже были изучены с топологической точки зрения, построены бифуркационные диаграммы, посчитаны инварианты Фоменко-Цишанга. С увеличением порядка потенциала количество возникающих меченых молекул быстро растет и их изучение через исследование областей возможного движения частицы становится неудобным.

Полученные в данной работе результаты позволяют построить инвариант Фоменко-Цишанга алгоритмическим способом для произвольного вида потенциала. В более ранних работах изучение топологии лиувиллева слоения сводилось к явному рассмотрению возможных случаев перестроения областей возможного движения частицы. С ростом степени потенциала количество рассматриваемых случаев очень быстро растет и исследование с помощью явного рассмотрения случаев становится очень трудоемким, а в общем случае, невозможным. По этой причине полученный в данной работе алгоритм существенно упрощает и ускоряет исследование топологии слоения Лиувилля бильярда с потенциалом полиномиального вида. В качестве примера приведен инвариант Фоменко-Цишанга бильярда, обладающего потенциалом шестого порядка.

Благодарность. Авторы благодарят Анатолия Тимофеевича Фоменко и Андрея Юрьевича Коняева за ряд ценных замечаний, способствовавших улучшению изложения.

§ 2. Необходимые определения

Пусть Ω есть область на плоскости \mathbb{R}^2 ограничена гладкой кривой $\gamma = \partial\Omega$. Назовем *бильярдом в области Ω* динамическую систему на следующем фазовом пространстве M^4 , описывающую прямолинейное равномерное движение материальной точки внутри области Ω со стандартным отражением на границе $\partial\Omega$: при отражении сохраняется длина вектора скорости, а угол падения материальной точки равен углу отражения.

Определение 1. Многообразие $M^4 := \{(x, v) | x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2\} / \sim$, где отношение эквивалентности задается следующим образом: $(x, v) \sim (\tilde{x}, \tilde{v}) \iff$ если 1) $x \in \text{Int } \Omega$ и $(x, v) = (\tilde{x}, \tilde{v})$, или 2) $x = \tilde{x} \in \gamma = \partial\Omega$, $|v| = |\tilde{v}|$ и $v - \tilde{v} \perp T_x\Omega$, называется *фазовым пространством* системы.

В случае математического бильярда кинетическая энергия $H = \frac{|v|^2}{2}$ является первым интегралом системы, поскольку сохраняется при движении частицы внутри области Ω и отражении от границы γ .

Определение 2. Гладкое многообразие M^4 называется *симплектическим*, если на нём задана невырожденная, замкнутая 2-форма ω (*симплектическая структура*).

Определение 3. Динамическую систему на симплектическом многообразии (M^4, ω) назовем *гамильтоновой*, если на M^4 существует функция H такая, что динамическая система запишется в виде $v = \text{sgrad}(H)$ ($\text{sgrad } H = \omega^{-1}(dH)$). Функция H называется *гамильтонианом*.

Определение 4. Гамильтонова система на M^4 с гамильтонианом H называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если на M^4 существует первый интеграл системы F такой, что

1. F и H функционально независимы, т.е. dF и dH линейно независимы почти всюду;
2. $\{F, H\} = 0$;
3. векторные поля $\text{sgrad } F$ и $\text{sgrad } H$ полны, т.е. продолжаются на любое значение времени $t \in \mathbb{R}$.

Определение 5. *Изоэнергетической поверхностью* бильярдной системы назовем множество

$$Q^3 = \{(x, v) \in M^4 : H(x, v) = \text{const} \neq 0\}.$$

Теорема 1 (Лиувилль) Пусть на M^4 задана вполне интегрируемая гамильтонова система с гамильтонианом H и дополнительным первым интегралом F и T_ξ , где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, — регулярная, компактная, связная компонента поверхности уровня интегралов H, F , т.е. $T_\xi = \{(x, v) \in M^4 \mid H(x, v) = \xi_1, F(x, v) = \xi_2\}$. Тогда:

1. T_ξ диффеоморфно тору T^2 . Этот тор называется *тором Лиувилля*;
2. Слоение Лиувилля в некоторой окрестности тора Лиувилля диффеоморфно прямому произведению тора на диск D^2 .

Определение 6. *3-атомом* называется прообраз критического значения отображения момента F вместе со своей окрестностью в Q^3 . Все 3-атомы были классифицированы А. Т. Фоменко, А. В. Болсиновым в [1].

Определение 7. *Грубой молекулой* называется граф, точки ребер которого представляют собой регулярные слои многообразия Q^3 , а вершинам сопоставляются атомы, через которые происходят перестройки торов.

Определение 8. *Меченой молекулой* называется грубая молекула, ребрам и вершинам которых сопоставляются числа, описывающие, как именно переходит тор Лиувилля из окрестности одного атома в тор Лиувилля окрестности другого атома по соединяющему их ребру. Более подробно см. [1].

§ 3. Полиномиальный потенциал порядка 21

Рассмотрим бильярд на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$, ограниченный эллипсом из семейства софокусных квадрик, задаваемого уравнением (3.1) (без ограничения общности считаем, что параметр граничного эллипса равен $\lambda = 0$). Значениям $\lambda < b$ и $b < \lambda < a$ соответствуют эллипсы и гиперболы, а значениям $\lambda = b, \lambda = a$ — оси Ox, Oy как пары совпадающих прямых.

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda). \quad (3.1)$$

Область биллиарда обозначим через Ω . Пусть на материальную точку действует потенциал $Q(x, y)$. Движение частицы описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -Q_x \\ \ddot{y} = -Q_y. \end{cases}$$

Фазовое пространство такой динамической системы содержит области гладкости, на границах которых траектории биллиарда могут быть продолжены по непрерывности. Поэтому введенные выше определения применимы к фазовому пространству биллиарда с потенциалом.

В классическом подходе при изучении топологии слоения Лиувилля динамической системы на гладких участках фазового пространства M^4 вводят стандартную симплектическую структуру ω .

Тогда пару (M^4, ω) рассматривают как гамильтонову динамическую систему с гамильтонианом $H(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Для биллиарда с потенциалом гамильтониан имеет вид $H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + Q(x, y)$.

Для того чтобы биллиард с потенциалом был вполне интегрируемой по Лиувиллю системой, необходимо наложить на потенциал некоторые условия:

Теорема 2 (*В. В. Козлов [3]*) Биллиард в эллипсе с полуосями \sqrt{a} и \sqrt{b} , снабженный потенциалом $Q \in C^\infty(\Omega)$, допускает первый интеграл вида $F = \frac{1}{2}(bp_x^2 + ap_y^2 - (xp_y - yp_x)^2) + f(x, y)$ тогда и только тогда, когда потенциал $Q(x, y)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$(a - b)Q_{xy} + 3(yQ_x - xQ_y) + Q_{xy}(y^2 - x^2) + xy(Q_{xx} - Q_{yy}) = 0. \quad (3.2)$$

В классе полиномов $P_{2l}(x, y) = \sum_{i=0, j=0}^{i+j \leq 2l} a_{i,j} x^i y^j$ решение уравнения 3.2 сводится к решению системы линейных уравнений на коэффициенты многочлена P_{2l} , в результате которого мы получаем следующие выражения для коэффициентов потенциала P_{2l} .

Лемма 1 (*Д. А. Туниянц, 2025*). Пусть $P_{2l}(x, y) = \sum_{i=0, j=0}^{i+j \leq 2l} a_{i,j} x^i y^j$ является решением уравнения Козлова (3.2). Тогда коэффициенты полинома имеют следующий вид:

- $a_{i,j} = 0$, где i и j не являются одновременно четными,
- $a_{0,2l-2m} = \alpha_{l-m}$, где $m = 0, \dots, l-1$ и $\alpha_l \neq 0$,
- $a_{2k,2l-2k-2m} = \left(C_{k-1}^0 \alpha_{l-m} - C_k^1 (a-b) \alpha_{l-m+1} + \dots + (-1)^m C_{k+m-1}^m (a-b)^m \alpha_l \right) C_{l-m}^k$, где $k = 1, \dots, l-m$ и $m = 0, \dots, l-1$.

Доказательство. При подстановке многочлена $P_{2l}(x, y) = \sum_{i=0, j=0}^{i+j \leq 2l} a_{i,j} x^i y^j$ в

уравнение (3.2) получим:

$$\begin{aligned} 0 = & (a-b) \sum_{i=1, j=1}^{i+j \leq 2l} i j a_{i,j} x^{i-1} y^{j-1} + 3 \left(\sum_{i=1, j=0}^{i+j \leq 2l} i a_{i,j} x^{i-1} y^{j+1} - \sum_{i=0, j=1}^{i+j \leq 2l} j a_{i,j} x^{i+1} y^{j-1} \right) + \\ & + \sum_{i=1, j=1}^{i+j \leq 2l} i j a_{i,j} x^{i-1} y^{j+1} - \sum_{i=1, j=1}^{i+j \leq 2l} i j a_{i,j} x^{i+1} y^{j-1} + \sum_{i=2, j=0}^{i+j \leq 2l} i(i-1) a_{i,j} x^{i-1} y^{j+1} - \\ & - \sum_{i=0, j=2}^{i+j \leq 2l} j(j-1) a_{i,j} x^{i+1} y^{j-1}. \end{aligned}$$

Полученное выражение верно для любых (x, y) , поэтому приведем подобные и приравняем к 0 все коэффициенты. Получим следующую СЛУ:

1.

$$\begin{aligned} 0 = & (a-b)(i+1)(j+1)a_{i+1, j+1} + 3(i+1)a_{i+1, j-1} - 3(j+1)a_{i-1, j+1} + \\ & + i(i+1)a_{i+1, j-1} - j(j+1)a_{i-1, j+1}, \\ & \text{при } 1 \leq i \leq 2l-3, 1 \leq j \leq 2l-3, i+j \leq 2l-2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 0 = & 3 \left((i+1)a_{i+1, j-1} - (j+1)a_{i-1, j+1} \right) + (i+1)(j-1)a_{i+1, j-1} - \\ & - (i-1)(j+1)a_{i-1, j+1} + i(i+1)a_{i+1, j-1} - j(j+1)a_{i-1, j+1}, \\ & \text{при } 1 \leq i \leq 2l-1, 1 \leq j \leq 2l-1, i+j = 2l-1, 2l \end{aligned}$$

3.

$$0 = (a-b)(j+1)a_{1, j+1} + 3a_{1, j-1}, \text{ при } i=0, 1 \leq j \leq 2l-2$$

4.

$$0 = (a-b)(i+1)a_{i+1, 1} - 3a_{i-1, 1}, \text{ при } j=0, 1 \leq i \leq 2l-2$$

5.

$$0 = 3a_{1, j-1} + (j-1)a_{1, j-1}, \text{ при } i=0, j=2l-1, 2l$$

6.

$$0 = -3a_{i-1, 1} - (i-1)a_{i-1, 1}, \text{ при } j=0, i=2l-1, 2l$$

7.

$$0 = (a - b)a_{1,1}, \text{ при } i = j = 0$$

Из уравнений 1-7, полагая $a_{0,2l-2m} = \alpha_{l-m}$, где $m = 0, \dots, l - 1$ и $\alpha_l \neq 0$, получаем выражения для остальных коэффициентов многочлена $P_{2l}(x, y)$, указанные в формулировке леммы. Лемма доказана.

Пример 1. Для $l = 1, l = 2, l = 3$ получаем следующие потенциалы:

$$l = 1 \quad P_2(x, y) = \alpha(x^2 + y^2), \text{ где } \alpha \neq 0$$

$$l = 2 \quad P_4(x, y) = \alpha y^2 + \beta(y^4 + x^4) + 2\beta x^2 y^2 + (\alpha - (a - b)\beta)x^2, \text{ где } \beta \neq 0$$

$$l = 3$$

$$P_6(x, y) = \alpha y^2 + \beta y^4 + \gamma(x^6 + y^6) + 3\gamma(x^2 y^4 + x^4 y^2) + 2(\beta - (a - b)\gamma)x^2 y^2 + (\beta - 2(a - b)\gamma)x^4 + (\alpha - (a - b)\beta + (a - b)^2 \gamma)x^2,$$

где $\gamma \neq 0$.

Перейдем от декартовых координат к эллиптическим:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{a-b} \\ y^2 = \frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{b-a} \end{cases},$$

где $\lambda_1 \in (-a, -b)$, $\lambda_2 \in (-b, 0)$.

Применим данную замену координат для выражения полиномиального потенциала чётной степени:

$$P_{2l}(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{k=1}^{l-m} C_{l-m}^k \left(\sum_{i=0}^m C_{k-1+i}^i \alpha_{l-m+i} \right) \left(\frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{b-a} \right)^{l-k-m} \times \\ \times \left(\frac{(a+\lambda_1)(a+\lambda_2)}{a-b} \right)^k + \sum_{m=0}^{l-1} \alpha_{l-m} \left(\frac{(b+\lambda_1)(b+\lambda_2)}{b-a} \right)^{l-m} = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{l+1} c_i \lambda^i$, $c_j = c_j(a, b, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1})$.

Замечание 1. Для любого значения $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, l + 1$ найдутся такие значения $\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$, что $c_j = c_j(a, b, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1})$. В самом деле, заметим, что $P_{2l} = P_{2l-2} + \alpha_l \tilde{P}$, где $\tilde{P} = \tilde{P}(a, b, \lambda_1, \lambda_2)$ — многочлен, не содержащий значения $\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$. Доказательство того, что многочлен \tilde{P} можно представить в виде $\frac{\tilde{P}(a, b, \lambda_1) - \tilde{P}(a, b, \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}$, можно легко провести с помощью индукции, где

$\tilde{P}(a, b, \lambda) = \sum_{i=0}^{l+1} d_i(a, b) \lambda^i$, причем $d_{l+1} = 1$. Таким образом получаем, что c_j имеет следующий вид:

$$c_j = \sum_{i=j}^{l+1} d_{l+1-(i-j)} \alpha_i,$$

то есть линейно зависит от $\alpha_j, \dots, \alpha_{l+1}$, а, значит, для любого действительного значения c_j найдутся такие $\alpha_j, \dots, \alpha_{l+1}$, что $c_j = c_j(a, b, \alpha_j, \dots, \alpha_{l+1})$. В эллиптических координатах выражение гамильтониана H примет вид:

$$H(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 - \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2^2 + \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где (μ_1, μ_2) — вектор импульса в эллиптических координатах.

Согласно алгоритму, предложенному В. В. Козловым в [3] и С.Е. Пустовойтовым в [5], можно получить выражение дополнительного первого интеграла в эллиптических координатах $F(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$, функционально независимого с гамильтонианом:

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = -H\lambda_1 + 2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 + P(\lambda_1),$$

Введем следующие обозначения ([5]):

$$H_1(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 + P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (3.3)$$

$$H_2(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)\mu_2^2 + P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (3.4)$$

Тогда выражения первых интегралов можно записать в виде:

$$H(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = H_1 - H_2$$

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \lambda_1 H_2 - \lambda_2 H_1$$

Теорема 3. При фиксированных значениях интегралов $F = f$, $H = h$ справедлива следующая система дифференциальных уравнений, выражающая компоненты вектора скорости $(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)$ материальной точки в эллиптических координатах через ее координаты (λ_1, λ_2) :

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{V(\lambda_i)}, \quad i = 1, 2, \quad (3.5)$$

где $V(z) = (a + z)(b + z)(f + hz - P(z))$.

Доказательство. Из уравнений (3.3) и (3.4) выразим значения импульсов μ_1, μ_2 при фиксированных значениях первых интегралов $H = h$, $F = f$ и подставим эти выражения в систему уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial \mu_i} \\ \dot{\mu}_i = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \end{cases}$$

В качестве первого уравнения системы Гамильтона получим в точности уравнение (3.5). Теорема доказана.

§ 4. Вырождение Q^3

Для изучения топологии слоения Q^3 необходимо, чтобы $dH \neq 0$ в любой точке Q^3 . Рассмотрим сначала те точки, для которых определены эллиптические координаты, посчитаем dH и проверим, при каких условиях, дифференциал обращается в некоторых точках $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ в ноль. Обозначим через $W(z) = f + hz - P(z)$, возникающий в теореме 3. Отметим, что данная теорема исследует лишь те точки, у которых существуют эллиптические координаты.

Лемма 2 (*Д. А. Туняныц, 2025*). В эллиптических координатах точка $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ изоэнергетической поверхности Q^3 с условием $dH = 0$ является особой тогда и только тогда, когда $W(\hat{\lambda}_1) = W'(\hat{\lambda}_1) = W(\hat{\lambda}_2) = W'(\hat{\lambda}_2) = 0$. Здесь $\hat{\lambda}_1 \in (-a, -b)$, $\hat{\lambda}_2 \in (-b, 0)$.

Доказательство. Напомним, что в эллиптических координатах

$$H(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 - \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2^2 + P_{2l}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Дифференциал гамильтониана равен:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 + \frac{\partial H}{\partial \mu_1} d\mu_1 + \frac{\partial H}{\partial \mu_2} d\mu_2. \quad (4.1)$$

Из системы Гамильтона получаем

$$\frac{\partial H}{\partial \mu_1} d\mu_1 + \frac{\partial H}{\partial \mu_2} d\mu_2 = \dot{\lambda}_1 d\mu_1 + \dot{\lambda}_2 d\mu_2$$

Посчитаем $\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} d\lambda_2$. Обозначим $\frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 - \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2^2$ через \tilde{H} . Тогда

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 + \frac{\partial P_{2l}}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial P_{2l}}{\partial \lambda_2} d\lambda_2.$$

Будем вычислять каждое слагаемое отдельно:

1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda_1} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1^2 - \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2^2 \right) = \\ &= 2\mu_1^2 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) - 2\mu_2^2 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) = \\ &= 2\mu_1^2 \left(1 - \frac{(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right) - 2\mu_2^2 \left(\frac{-(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \right) = \\ &= 2\mu_1^2 - \frac{(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} (\mu_1^2 - \mu_2^2) \end{aligned}$$

2. Аналогично

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda_2} = 2\mu_2^2 - \frac{(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} (\mu_2^2 - \mu_1^2)$$

3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{2l}}{\partial \lambda_1} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left(\frac{\sum_{i=0}^{l+1} c_i \lambda_1^i - \sum_{i=0}^{l+1} c_i \lambda_2^i}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) = \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{i=1}^{l+1} i c_i \lambda_1^{i-1} - \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \sum_{i=0}^{l+1} c_i (\lambda_1^i - \lambda_2^i) \end{aligned}$$

4. Аналогично

$$\frac{\partial P_{2l}}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{i=1}^{l+1} i c_i \lambda_2^{i-1} - \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \sum_{i=0}^{l+1} c_i (\lambda_2^i - \lambda_1^i).$$

Дифференциал dH равен нулю в точке $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ тогда и только тогда, когда каждое из выражений $\frac{\partial P_{2l}}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial P_{2l}}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial H}{\partial \mu_1}, \frac{\partial H}{\partial \mu_2}$ равно нулю в точке $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$. То есть

$$dH|_{(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)} = 0 \iff \quad (4.2)$$

$$\text{в } (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) \quad \frac{1}{\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2} \sum_{i=1}^{l+1} i c_i \hat{\lambda}_1^{i-1} - \frac{1}{(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)^2} \sum_{i=0}^{l+1} c_i (\hat{\lambda}_1^i - \hat{\lambda}_2^i) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1} \sum_{i=1}^{l+1} i c_i \hat{\lambda}_2^{i-1} - \frac{1}{(\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1)^2} \sum_{i=0}^{l+1} c_i (\hat{\lambda}_2^i - \hat{\lambda}_1^i) = 0 \quad (4.4)$$

$$2\hat{\mu}_1^2 - \frac{(a + \hat{\lambda}_2)(b + \hat{\lambda}_2)}{(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)^2} (\hat{\mu}_1^2 - \hat{\mu}_2^2) = 0 \quad (4.5)$$

$$2\hat{\mu}_2^2 - \frac{(a + \hat{\lambda}_1)(b + \hat{\lambda}_1)}{(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)^2} (\hat{\mu}_2^2 - \hat{\mu}_1^2) = 0 \quad (4.6)$$

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad (4.7)$$

$$\dot{\lambda}_2 = 0 \quad (4.8)$$

Уравнения 4.7 и 4.8 в точке $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)$ равносильны следующему:

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = 0 \iff$$

$$\iff 0 = \frac{\partial H}{\partial \mu_1} = \frac{(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_1, \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial \mu_2} = -\frac{(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \mu_2 \iff$$

$$\iff \hat{\mu}_1 = 0, \quad \hat{\mu}_2 = 0.$$

Таким образом, уравнения 4.5 и 4.6 следуют из 4.7 и 4.8 (т.е. являются избыточными). Более того,

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = 0 \iff V(\hat{\lambda}_1) = 0, \quad V(\hat{\lambda}_2) = 0 \iff W(\hat{\lambda}_1) = 0, \quad W(\hat{\lambda}_2) = 0.$$

Остаются уравнения 4.3 и 4.4.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2} \sum_{i=1}^{l+1} i c_i \hat{\lambda}_1^{i-1} - \frac{1}{(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)^2} \sum_{i=0}^{l+1} c_i (\hat{\lambda}_1^i - \hat{\lambda}_2^i) = 0 \iff \\
& \iff \frac{1}{\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2} (h - W'(\hat{\lambda}_1)) - \frac{1}{(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)^2} (f + h\hat{\lambda}_1 - W(\hat{\lambda}_1) - (f + h\hat{\lambda}_2 - W(\hat{\lambda}_2))) = 0 \\
& \iff \frac{1}{\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2} (h - W'(\hat{\lambda}_1)) - \frac{h}{\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2} = 0 \iff \\
& \iff W'(\hat{\lambda}_1) = 0.
\end{aligned}$$

Аналогично, $W'(\hat{\lambda}_2) = 0$. Получаем

$$4.3 - 4.8 \iff W(\hat{\lambda}_1) = 0, W(\hat{\lambda}_2) = 0, W'(\hat{\lambda}_1) = 0, W'(\hat{\lambda}_2) = 0$$

Таким образом,

$$dH|_{(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)} = 0 \iff W(\hat{\lambda}_1) = 0, W(\hat{\lambda}_2) = 0, W'(\hat{\lambda}_1) = 0, W'(\hat{\lambda}_2) = 0.$$

Лемма доказана.

Замечание 2. Отметим, что лемма 2 дает представление об особом изоэнергетическом многообразии Q^3 с аналитической точки зрения. В классическом подходе изучения слоения Лиувилля с помощью инварианта Фоменко-Цишанга динамической системы при вырождении дифференциала гамильтониана топология изоэнергетической поверхности не изучается. Это связано с тем, что как правило, в этом случае не выполняются условия теоремы Фоменко о структуре окрестности особого слоя, т.е. вообще говоря он не является регулярным 3-атомом.

Однако, с топологической точки зрения, если значение λ_1 (или λ_2) является корнем многочлена $W(\lambda)$ кратности $2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, то изоэнергетическая поверхность расслоена на торы Лиувилля и особые слои точно так же (с точностью до гомеоморфизма), как, если бы кратность корней была бы равна 1 (с аналитической точки зрения, корень имеет кратность 1, то дифференциал гамильтониана не вырождается). Поэтому, вообще говоря, особое изоэнергетическое многообразие Q^3 обладает с точностью до гомеоморфизма неособым слоением Лиувилля.

§ 5. Основные результаты

Рассмотрим задачу о движении материальной точки внутри стола эллиптической формы с потенциалом четной степени P_{2l} , описанным в предыдущем разделе. Для изучения топологии слоения Лиувилля такой динамической системы вычислим инварианты Фоменко-Цишанга, а первым шагом к этому будет построение грубой молекулы.

Определение 9. Областью возможного (допустимого) движения (ОВД) называется замкнутая область на биллиарде, в которой материальная точка может находиться при фиксированных значениях интегралов $H = h$ и $F = f$.

Определение 10. *Камерой возможного (допустимого) движения (КМД) называется связная компонента области возможного движения.*

Имеет место следующая очевидная лемма [5] о допустимых значениях многочлена $V(z)$.

Лемма 3. Точка на бильярде с координатами (λ_1, λ_2) лежит в области возможного движения тогда и только тогда, когда для этой точки справедливы неравенства $V(\lambda_i) \geq 0$.

Замечание 3. Как мы выяснили ранее многочлен $P(\lambda)$ имеет вид $\sum_{i=0}^{l+1} c_i \lambda^i$.

Однако, $F = f$ и $H = h$ могут принимать любые действительные значения.

Поэтому можно считать, что $P(\lambda) = \sum_{i=2}^{l+1} c_i \lambda^i$ и $W(z) = f + hz - \sum_{i=2}^{l+1} c_i \lambda^i$.

Далее будем изучать многочлен $V(z)$. Условие $V(\lambda_i) \geq 0$, где $\lambda_1 \in (-a, -b)$, $\lambda_2 \in (-b, 0)$, равносильно

$$\begin{cases} W(\lambda_1) \leq 0 \\ W(\lambda_2) \geq 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

5.1. Вычисление инварианта грубой лиувиллевой эквивалентности.

Мы будем рассматривать многочлен $W(z)$, т.ч. ни при каком значении интеграла $F = f$ не существует двух различных корней $z = \lambda_1$, $z = \lambda_2$ на интервалах $(-a, -b)$ и $(-b, 0)$, т.ч. $W(z)$ не меняет знак в малой окрестности корней $z = \lambda_1$, $z = \lambda_2$ (согласно лемме 2, в противном случае поверхность Q^3 становится особой), а также не существует следующих пар корней:

- корня $z = -b$ нечетной кратности, т.ч. $W(z)$ нестрого возрастает в малой окрестности значения $z = -b$, и корня $z = \lambda_1 \in [-a, -b)$ (или $z = \lambda_2 \in (-b, 0)$) четной кратности;
- корня $z = -b$ нечетной кратности, т.ч. $W(z)$ нестрого убывает в малой окрестности значения $z = -b$, и корня $z = \lambda_1 \in [-a, -b)$ четной кратности, т.ч. $W(z) \leq 0$ в малой окрестности значения $z = \lambda_1$ ($W(z) \geq 0$ в малой окрестности корня $z = \lambda_2 \in (-b, 0)$ четной кратности);
- любых пар вида “корень $z = -b$ четной кратности и корень $z = \lambda_1 \in [-a, -b)$ (или $z = \lambda_2 \in (-b, 0)$) четной кратности”, кроме двух случаев: пара “корень $z = -b$ четной кратности, т.ч. $W(z) \leq 0$ в малой окрестности значения $z = -b$, и корень $z = \lambda_1 \in [-a, -b)$ четной кратности, т.ч. $W(z) \geq 0$ в малой окрестности значения $z = \lambda_1$ ” и пара “корень $z = -b$ четной кратности, т.ч. $W(z) \geq 0$ в малой окрестности значения $z = -b$, и корень $z = \lambda_2 \in (-b, 0)$ четной кратности, т.ч. $W(z) \leq 0$ в малой окрестности значения $z = \lambda_2$ ”.

Поясним, что в перечисленных случаях существуют две точки, принадлежащие ОВД и являющиеся пересечением фокальной прямой и гиперболы с параметром λ_1 (эллипса с параметром λ_2), в которых критические движения не являются сонаправленными, а, значит, они являются неподвижными точками. По теореме о том, что на невырожденной изоэнергетической поверхности нет неподвижных точек [1], в этих случаях многообразие Q^3 также будет особым.

Опишем алгоритм, позволяющий по свойствам графика указанного многочлена $W(\lambda)$, построить грубую молекулу при фиксированном значении $H = h$.

Напомним обозначения элементарных областей, ограниченных дугами софокусных квадрик и, возможно, отрезками фокальной прямой на бильярдном столе [7]. Все элементарные области, используемые в данной работе, приведены на рис. 1.

Определение 11. Односвязные элементарные области, содержащие отрезок фокальной прямой между фокусами внутри области, будем обозначать через A_f , где f — количество фокусов, принадлежащих области.

Определение 12. Односвязные элементарные области, не содержащие отрезка фокальной прямой между фокусами и ограниченные дугами двух эллипсов и двух гипербол (быть может совпадающих), будем обозначать через B_n , где n — это количество компонент связности пересечения фокальной прямой и данной области.

Определение 13. Неодносвязные элементарные области на плоскости, ограниченные двумя эллипсами, будем обозначать через C_2 .

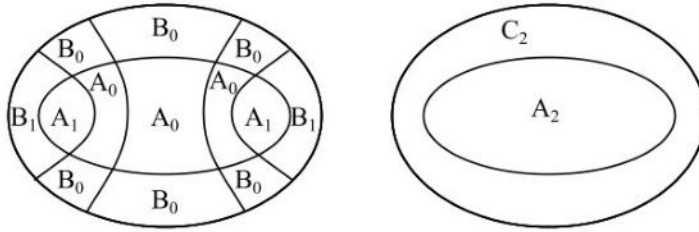


Рис. 1. Обозначения камер, используемых в данной работе

Теорема 4. Инвариант Фоменко-Цишанга для бильярда в эллипсе с потенциалом вида $P_{2l}(x, y) = \sum_{i+j \leq 2l} a_{i,j} x^i y^j$, удовлетворяющим (3.2), алгоритмически вычисляется по виду многочлена $W(z)$ и значению h интеграла энергии.

Замечание 4. ОВД является объединением камер возможного движения, каждая из которых является областью, ограниченной дугами эллипсов и гипербол из семейства софокусных квадрик (3.1). Оказывается, из перестроек таких областей и критических движений можно полностью восстановить инвариант Фоменко-Цишанга. Наша цель описать все возможные перестройки таких областей вместе с особыми траекториями и связать любую такую перестройку с видом графика $W(z)$.

Определение 14. Атом назовём “разрывающим”/“сливающим” в данном направлении изменения значения интеграла $F = f$ (увеличении или уменьшении), если в результате бифуркации, описываемой данным атомом, происходящей при данном направлении изменения значения интеграла $F = f$, образуется большее/меньшее число торов Лиувилля, чем было до бифуркации.

Пример 2. Приведем три примера перестроек ОВД (рис. 2) и проследим, как меняется график $W(z)$ при изменении значения интеграла $F = f$, и опишем бифуркации, возникающие в таких перестройках, а также для каждого из графиков построим прямоугольник P из первого шага алгоритма вычисления инвариантов Фоменко-Цишанга ниже.

а) Рассмотрим два достаточно близких значения интеграла $F = f_1$ и $F = f_2$, где $f_1 < f_2$, и такой многочлен $W(z)$, что при значении $F = f_1$ $W(z)|_{[-a,0]}$ имеет ровно два корня: $\xi_1 \in (-a, -b)$, $\xi_2 \in (-b, 0)$, и знаки многочлена $W(z)|_{[-a,0]}$ равны $+, -, +$ на множествах $[-a, \xi_1)$, (ξ_1, ξ_2) , $(\xi_2, 0]$, соответственно, а при значении $F = f_2$ — 4 корня: $\xi_3, \xi_4, \xi_5 \in (-a, -b)$, $\xi_3 < \xi_4 < \xi_5$, $\xi_6 \in (-b, 0)$, и знаки многочлена $W(z)|_{[-a,0]}$ равны $+, -, +, -, +$ на множествах $[-a, \xi_3)$, (ξ_3, ξ_4) , (ξ_4, ξ_5) , (ξ_5, ξ_6) , $(\xi_6, 0]$, соответственно. Найдем решение системы (5.1) при значении $F = f_1$: $\lambda_1 \in [\xi_1, -b]$, $\lambda_2 \in [\xi_2, 0]$. На бильярдном столе множество точек с эллиптическими координатами (λ_1, λ_2) из указанных промежутков образуют 2 камеры типа B_1 . Действительно, точки с такими эллиптическими координатами лежат между граничным эллипсом и эллипсом с параметром ξ_2 , а также между ветвями гиперболы. Более того они лежат в камерах, не содержащих отрезков фокальной прямой между фокусами, но пересекающих фокальную прямую. Для построения прямоугольника P найдем декартово произведение $M|_{[-b,0]} \times M|_{[-a,-b]}$, где $M = [\xi_1, -b] \cup [\xi_2, 0]$, и для наглядности построим прямые, являющиеся границами образовавшихся клеток. Тогда в прямоугольнике P будет четыре клетки, одна из которых, ограниченная прямыми $\lambda_1 = \xi_1$, $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = \xi_2$, $\lambda_2 = 0$, будет содержать точки декартового произведения. Любая точка (λ_1, λ_2) принадлежащая данной клетке будет являться решением системы (5.1).

При значении $F = f_2$ решением системы (5.1) является $\lambda_1 \in [\xi_3, \xi_4] \cup [\xi_5, -b]$, $\lambda_2 \in [\xi_6, 0]$, а точки с такими эллиптическими координатами образуют 2 камеры типа B_1 и 4 камеры типа B_0 (образуются точками с эллиптическими координатами $\lambda_1 \in [\xi_3, \xi_4]$, $\lambda_2 \in [\xi_6, 0]$, т.е. точки принадлежат множеству, ограниченному двумя гиперболами и двумя эллипсами так, что множество не содержит отрезков фокальной прямой между фокусами и не пересекает фокальную прямую). Для построения прямоугольника P посчитаем декартово произведение $M|_{[-b,0]} \times M|_{[-a,-b]}$, где $M = [\xi_3, \xi_4] \cup [\xi_5, -b] \cup [\xi_6, 0]$, и построим прямые, являющиеся границами клеток. В прямоугольнике P получим восемь клеток, две из которых, ограниченные прямыми $\lambda_1 = \xi_3$, $\lambda_1 = \xi_4$, $\lambda_2 = \xi_6$, $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 = \xi_5$, $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = \xi_6$, $\lambda_2 = 0$, будут содержать точки декартового произведения, т.е. любая точка (λ_1, λ_2) , принадлежащая одной из этих двух клеток, будет являться решением системы (5.1).

Рассмотрим промежуточное значение f_0 дополнительного интеграла $F = f$, т.ч. $f_1 < f_0 < f_2$, при котором одним из корней многочлена $W(z)$ становится кратный корень (обозначим его через ξ_0). Анализируя поведение границ КВД в малой окрестности $(f_0 - \varepsilon, f_0 + \varepsilon)$ данного значения дополнительного интеграла, мы видим, что каждая из двух областей типа B_1 “разрываются” по гиперболе с параметром $\lambda = \xi_0$ на три области. В прямоугольнике P при $F = f_0$ появляется горизонтальная прямая $\lambda_1 = \xi_0$, по которой при увеличении значения f с f_0 до $f_0 + \varepsilon$ закрашенная клетка прямоугольника “разрывается” на две. Бифуркация, заключающаяся в разрыве области B_1 на две области B_0 и область B_1 по гиперболе, описывается одним “разрывающим” атомом B_2 [5]. Соответственно, бифуркация, возникающая при значении $F = f_0$ описывается двумя “разрывающими” атомами B_2 .

б) Рассмотрим теперь такой многочлен $W(z)$, что при двух достаточно близких значениях интеграла $F = f$ он обладает следующими свойствами: при значении $F = f_1$ $W(z)|_{[-a,0]}$ имеет ровно четыре корня: $\xi_1 \in (-a, -b)$, $\xi_2, \xi_3, \xi_4 \in (-b, 0)$, $\xi_2 < \xi_3 < \xi_4$, и знаки многочлена $W(z)|_{[-a,0]}$ равны $-, +, -, +, -$ на множествах $[-a, \xi_1)$, (ξ_1, ξ_2) , (ξ_2, ξ_3) , (ξ_3, ξ_4) , $(\xi_4, 0]$, соответственно, а при значении $F = f_2 - 2$ корня: $\xi_5 \in (-a, -b)$, $\xi_6 \in (-b, 0)$, и знаки многочлена $W(z)|_{[-a,0]}$ равны $-, +, -$ на множествах $[-a, \xi_5)$, (ξ_5, ξ_6) , $(\xi_6, 0]$, соответственно. Решением системы (5.1) при значении $F = f_1$ являются множества $\lambda_1 \in [0, \xi_1]$, $\lambda_2 \in [-b, \xi_2] \cup [\xi_3, \xi_4]$. На бильярдном столе множество точек с эллиптическими координатами (λ_1, λ_2) из указанных промежутков образуют 2 камеры типа B_0 и одну камеру типа A_0 . Действительно, множество точек с эллиптическими координатами $\lambda_1 \in [0, \xi_1]$, $\lambda_2 \in [\xi_3, \xi_4]$ ограничено двумя ветвями одной гиперболы и двумя эллипсами, причем фокальная прямая не пересекает данное множество, т.е. множество является двумя камерами типа B_0 . Точки с координатами $\lambda_1 \in [0, \xi_1]$, $\lambda_2 \in [-b, \xi_2]$ образуют множество, ограниченное двумя ветвями одной гиперболы и эллипсом, причем множество лежит внутри эллипса и содержит отрезок фокальной прямой между фокусами, т.е. является областью типа A_0 . Для построения прямоугольника P найдем декартово произведение $M|_{[-b,0]} \times M|_{[-a,-b]}$, где $M = [-a, \xi_1] \cup [-b, \xi_2] \cup [\xi_3, \xi_4]$, и для наглядности построим прямые, являющиеся границами образовавшихся клеток. Тогда в прямоугольнике P будет восемь клеток, две из которых, ограниченные прямыми $\lambda_1 = -a$, $\lambda_1 = \xi_1$, $\lambda_2 = -b$, $\lambda_2 = \xi_2$ и $\lambda_1 = -a$, $\lambda_1 = \xi_1$, $\lambda_2 = \xi_3$, $\lambda_2 = \xi_4$, будут содержать точки декартового произведения. Любая точка (λ_1, λ_2) принадлежащая одной из этих двух клеток будет являться решением системы (5.1).

При значении $F = f_2$ решением системы (5.1) является $\lambda_1 \in [\xi_5, -b]$, $\lambda_2 \in [\xi_6, 0]$, а точки с такими эллиптическими координатами образуют одну камеру типа A_0 . Для построения прямоугольника P найдем декартово произведение $M|_{[-b,0]} \times M|_{[-a,-b]}$, где $M = [\xi_5, -b] \cup [\xi_6, 0]$, и для наглядности построим прямые, являющиеся границами образовавшихся клеток. Тогда в прямоугольнике P будет четыре клетки, одна из которых, ограниченная прямыми $\lambda_1 = -a$, $\lambda_1 = \xi_1$, $\lambda_2 = -b$, $\lambda_2 = \xi_2$, будет содержать точки декартового произведения. Любая точка (λ_1, λ_2) принадлежащая данной клетке будет являться решением системы (5.1).

Рассмотрим промежуточное значение f_0 дополнительного интеграла $F = f$, т.ч. $f_1 < f_0 < f_2$, при котором одним из корней многочлена $W(z)$ становится кратный корень (обозначим его через ξ_0). Анализируя поведение границ КВД в малой окрестности $(f_0 - \varepsilon, f_0 + \varepsilon)$ данного значения дополнительного интеграла, мы видим, что область A_0 и две области B_0 “сливаются” по эллипсу с параметром $\lambda = \xi_0$ в одну область A_0 . В прямоугольнике P при $F = f_0$ появляется вертикальная прямая $\lambda_2 = \xi_0$, являющаяся результатом слияния прямых $\lambda_2 = \xi_2$, $\lambda_2 = \xi_3$ при изменении f с $f_0 - \varepsilon$ до f_0 и две закрашенные клетки прямоугольника “сливаются” в одну.

Бифуркация, заключающаяся в слиянии области A_0 и двух областей B_0 в одну область A_0 по эллипсу, описывается одним “сливающимся” атомом B_2 [5].

в) Возьмем два достаточно близких значения интеграла $F = f_1$ и $F = f_2$, $f_1 < f_2$ и многочлен $W(z)$, такой что при значении $F = f_1$ $W(z)|_{[-a,0]}$ имеет

ровно три корня: $\xi_1 \in (-a, -b)$, $\xi_2, \xi_3 \in (-b, 0)$, $\xi_2 < \xi_3$, и знаки многочлена $W(z)|_{[-a, 0]}$ равны $+, -, +, -$ на множествах $[-a, \xi_1)$, (ξ_1, ξ_2) , (ξ_3, ξ_3) , $(\xi_3, 0]$, соответственно; при значении $F = f_2$ $W(z)|_{[-a, 0]}$ имеет три корня: $\xi_4, \xi_5 \in (-a, -b)$, $\xi_4 < \xi_5$, $\xi_6 \in (-b, 0)$, и знаки многочлена $W(z)|_{[-a, 0]}$ равны $+, -, +, -$ на множествах $[-a, \xi_5)$, (ξ_5, ξ_6) , $(\xi_6, 0]$, соответственно. Решением системы (5.1) при значении $F = f_1$ являются множества $\lambda_1 \in [\xi_1, -b]$, $\lambda_2 \in [\xi_2, \xi_3]$. На бильярдном столе множество точек с эллиптическими координатами (λ_1, λ_2) из указанных промежутков образуют 2 камеры типа B_1 (см. пункт а)). Для построения прямоугольника P найдем декартово произведение $M|_{[-b, 0]} \times M|_{[-a, -b]}$, где $M = [\xi_1, -b] \cup [\xi_2, \xi_3]$, и для наглядности построим прямые, являющиеся границами образовавшихся клеток. Тогда в прямоугольнике P будет 6 клеток, одна из которых, ограниченная прямыми $\lambda_1 = \xi_1$, $\lambda_1 = -b$, $\lambda_2 = \xi_2$, $\lambda_2 = \xi_3$, будет содержать точки декартового произведения. Любая точка (λ_1, λ_2) принадлежащая одной из этих двух клеток будет являться решением системы (5.1).

При значении $F = f_2$ решением системы (5.1) является $\lambda_1 \in [\xi_4, \xi_5]$, $\lambda_2 \in [-b, \xi_6]$, а точки с такими эллиптическими координатами образуют две камеры типа A_0 . Для построения прямоугольника P найдем декартово произведение $M|_{[-b, 0]} \times M|_{[-a, -b]}$, где $M = [\xi_4, \xi_5] \cup [-b, \xi_6]$, и для наглядности построим прямые, являющиеся границами образовавшихся клеток. Тогда в прямоугольнике P будет 6 клеток, одна из которых, ограниченная прямыми $\lambda_1 = \xi_4$, $\lambda_1 = \xi_5$, $\lambda_2 = -b$, $\lambda_2 = \xi_6$, будет содержать точки декартового произведения. Любая точка (λ_1, λ_2) принадлежащая одной из этих двух клеток будет являться решением системы (5.1).

Рассмотрим промежуточное значение f_0 дополнительного интеграла $F = f$, $f_1 < f_0 < f_2$, при котором одним из корней многочлена $W(z)$ становится $z = -b$. Анализируя поведение границ КВД в малой окрестности $(f_0 - \varepsilon, f_0 + \varepsilon)$ данного значения дополнительного интеграла, мы видим, что две области B_1 перестраиваются через фокусы в две области A_0 . При $F = f_0$ эллипс с параметром $\lambda = \xi_2$ вырождается в фокальную прямую. В прямоугольнике P при $F = f_0$ вертикальная прямая $\lambda_2 = \xi_2$ сливается с левой границей прямоугольника, соответствующей прямой $\lambda_2 = -b$. При изменении f с f_0 до $f_0 + \varepsilon$ в прямоугольнике появляется новая горизонтальная прямая в малой окрестности верхней границы прямоугольника и, соответственно, появляется новая строка с границами $\lambda_1 = \xi_5$, $\lambda_2 = -b$.

Бифуркация, заключающаяся в перестройке области B_1 в одну область A_0 через фокусы, описывается одним атомом A^* [5]. Соответственно, бифуркация, возникающая при значении $F = f_0$, описывается двумя атомами A^* .

5.2. Алгоритм вычисления инварианта Фоменко-Цишанга. Прежде, чем проводить доказательство теоремы 4, опишем алгоритм построения грубого инварианта лиувиллевой эквивалентности.

Шаг 1. Рассмотрим такое значение интеграла $F = f$, при котором среди нулей многочлена $W(\lambda)$ не будет точек экстремумов. Проведём дополнительные построения, которые позволят одновременно следить за решениями $\lambda_1 \in (-a, -b)$, $\lambda_2 \in (-b, 0)$, удовлетворяющими (5.1).

1) Пусть $M = \{\lambda \in [-a, 0] : \lambda \text{ удовлетворяет (5.1)}\}$. Заштрихуем множество M (рис. 3а).

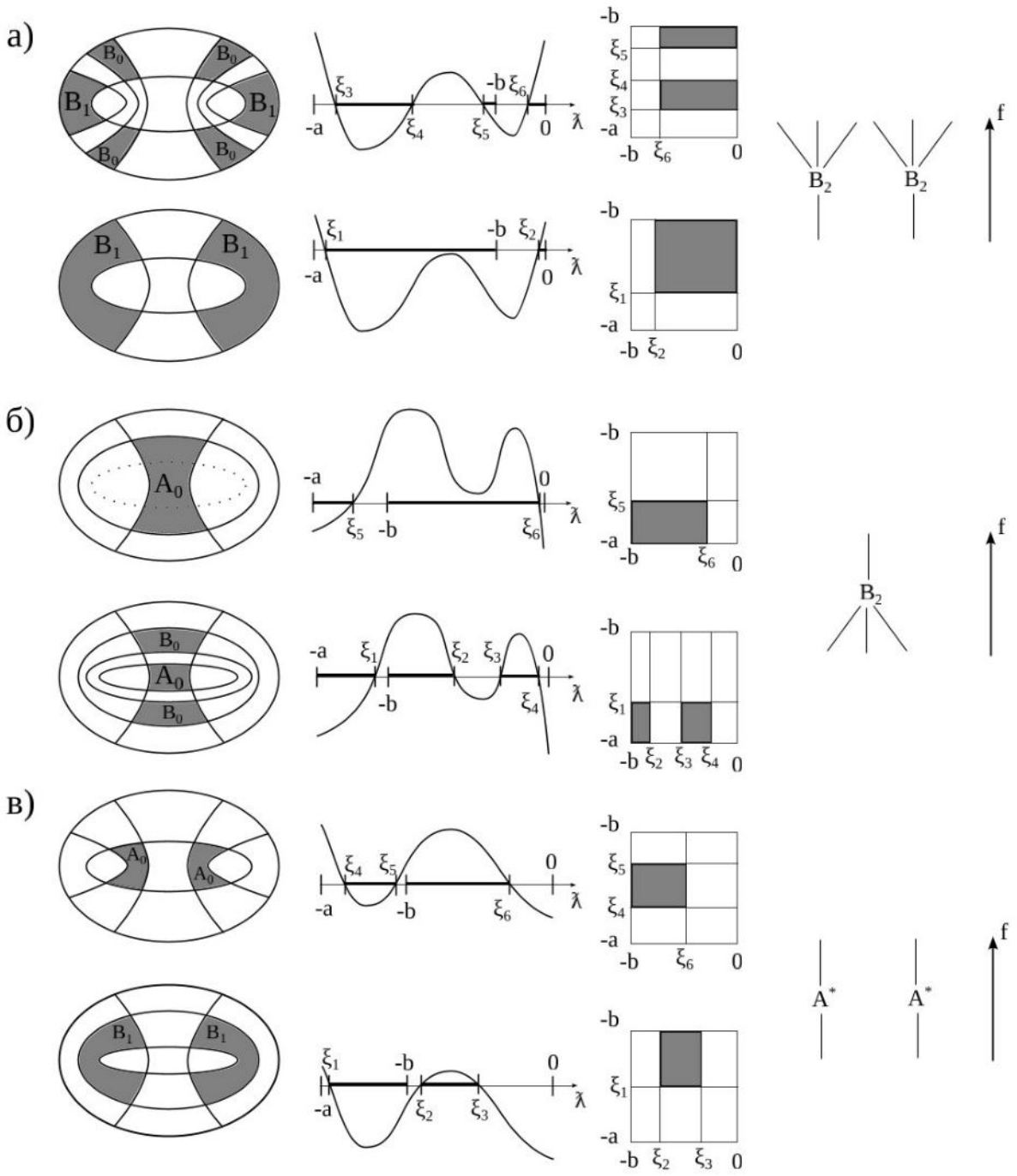


Рис. 2. Иллюстрация изменения расположения корней и конфигурации прямоугольника P при изменении значения дополнительного интеграла $F = f$, а также соответствующие бифуркации

2) Будем рассматривать множество $M|_{[-b,0]} \times M|_{[-a,-b]}$ (рис. 3б). Для удобства продолжим границы всех клеток (пунктирные) $M|_{[-b,0]} \times M|_{[-a,-b]}$ и получим прямоугольник $P = [-b, 0] \times [-a, -b]$ с закрасненными клетками (рис. 3в). Закрасненные клетки соответствуют решению системы неравенств (5.1).

Шаг 2. Закрасненные клетки в прямоугольнике P , полученном в п. 2 шага 1, соответствуют определённому типу и количеству камер возможного движения внутри области возможного движения на столе Ω . Оказывается, с помощью

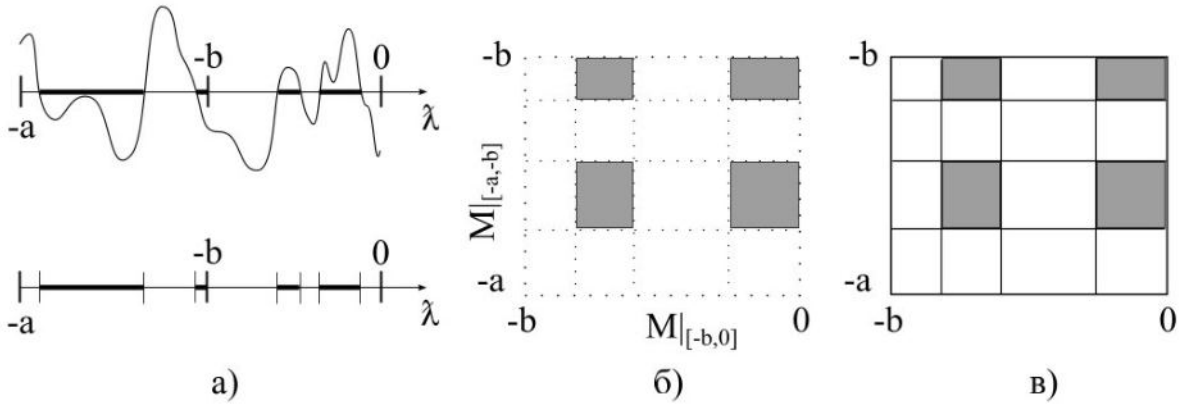


Рис. 3. К шагу 1: а) Множество M ; б) Декартово произведение $M|_{[-b,0]} \times M|_{[-a,-b]}$; в) Переход к прямоугольнику $P = [-b, 0] \times [-a, -b]$.

прямоугольника P можно определить, какому типу камер будет соответствовать определенная закрашенная клетка прямоугольника P и сколько торов Лиувилля будет в прообразе π^{-1} камер в Q^3 , если проекция имеет вид $\pi : Q^3 \rightarrow \Omega$. Ответ проиллюстрирован на рис. 4а. Действительно рассмотрим два случая:

Случай I. Прямоугольник $P = [-b, 0] \times [-a, -b]$ состоит из более, чем одной, строки. Тогда он делится на 6 зон:

1. Клетка, содержащая точку $(-b, -a)$: эллиптические координаты точек, лежащих в указанной клетке, удовлетворяют условиям $\lambda_1 \in [-a, \xi_1]$, $\lambda_2 \in [-b, \xi_2]$, где $\xi_1 \in (-a, -b)$, $\xi_2 \in (-b, 0]$ — наименьшие корни многочленов $W(z)|_{(-a,-b)}$, $W(z)|_{(-b,0]}$, соответственно. Следовательно, данной клетке соответствует одна камера типа A_0 , в прообразе которой в Q^3 лежит 1 тор Лиувилля;

2. Клетка, содержащая точку $(-b, -b)$: эллиптические координаты точек, лежащих в указанной клетке, удовлетворяют условиям $\lambda_1 \in [\xi_1, -b]$, $\lambda_2 \in [-b, \xi_2]$, где $\xi_1 \in (-a, -b)$, $\xi_2 \in (-b, 0]$ — наибольший и наименьший корни многочленов $W(z)|_{(-a,-b)}$, $W(z)|_{(-b,0]}$, соответственно. Следовательно, данной клетке соответствует две камеры типа A_1 , возникающие лишь при особом значении интеграла $F = f$;

3. Клетки, лежащие в верхней строке прямоугольника P , кроме клетки, содержащей точку $(-b, -b)$: эллиптические координаты точек, лежащих в указанных клетках, удовлетворяют условиям $\lambda_1 \in [\xi_1, -b]$, $\lambda_2 \in [\xi_2, \xi_3]$, где $\xi_1 \in (-a, -b)$ — наибольший корень многочлена $W(z)|_{(-a,-b)}$, а $\xi_2, \xi_3 \in (-b, 0]$ — два последовательных корня многочлена $W(z)|_{(-b,0]}$. Следовательно, каждой клетке с такими свойствами соответствуют по 2 камеры типа B_1 , в прообразе которых в Q^3 лежат 2 тора Лиувилля;

4. Клетки, лежащие в нижней строке прямоугольника P , кроме клетки, содержащей точку $(-b, -a)$: эллиптические координаты точек, лежащих в указанных клетках, удовлетворяют условиям $\lambda_1 \in [-a, \xi_1]$, $\lambda_2 \in [\xi_2, \xi_3]$, где $\xi_1 \in (-a, -b)$ — наименьший корень многочлена $W(z)|_{(-a,-b)}$, а $\xi_2, \xi_3 \in (-b, 0]$ — два последовательных корня многочлена $W(z)|_{(-b,0]}$. Следовательно, каждой клетке с такими свойствами соответствуют по 2 камеры типа B_0 , в прообразе которых в Q^3 лежат 2 тора Лиувилля;

5. Клетки, лежащие в левом столбце прямоугольника P , кроме клеток из пунктов 1 и 2: эллиптические координаты точек, лежащих в указанных клетках, удовлетворяют условиям $\lambda_1 \in [\xi_1, \xi_2]$, $\lambda_2 \in [-b, \xi_3]$, где $\xi_1, \xi_2 \in (-a, -b)$ — два последовательных корня многочлена $W(z)|_{(-a, -b)}$, а $\xi_3 \in (-b, 0]$ — наименьший корень многочлена $W(z)|_{(-b, 0]}$. Следовательно, каждой клетке с такими свойствами соответствуют по 2 камеры типа A_0 , в прообразе которых в Q^3 лежат 2 тора Лиувилля;

6. Остальные клетки прямоугольника P : эллиптические координаты точек, лежащих в указанных клетках, удовлетворяют условиям $\lambda_1 \in [\xi_1, \xi_2]$, $\lambda_2 \in [\xi_3, \xi_4]$, где $\xi_1, \xi_2 \in (-a, -b)$ — два последовательных корня многочлена $W(z)|_{(-a, -b)}$, а $\xi_3, \xi_4 \in (-b, 0]$ — два последовательных корня многочлена $W(z)|_{(-b, 0]}$. Следовательно, каждой клетке с такими свойствами соответствуют по 4 камеры типа B_0 , в прообразе которых в Q^3 лежат 4 тора Лиувилля.

Зоны 1-6 могут не присутствовать одновременно в P . Возможные случаи вырождения зон выглядят следующим образом: P состоит из зон 1, 2, 3, 4 (две строки) или из зон 1, 2, 5 (один столбец).

Случай II. Прямоугольник $P = [-b, 0] \times [-a, -b]$ состоит только из одной строки. Тогда он делится на 2 зоны:

1. Клетка, являющаяся левым столбцом: эллиптические координаты точек, лежащих в указанной клетке, удовлетворяют условиям $\lambda_1 \in [-a, -b]$, $\lambda_2 \in [-b, \xi_1]$, где $\xi_1 \in (-b, 0]$ — наименьший корень многочлена $W(z)|_{(-b, 0]}$. Следовательно, данной клетке соответствует одна камера типа A_2 , возникающая только при особом значении интеграла $F = f$;

2. Остальные клетки: эллиптические координаты точек, лежащих в указанных клетках, удовлетворяют условиям $\lambda_1 \in [-a, -b]$, $\lambda_2 \in [\xi_1, \xi_2]$, где $\xi_1, \xi_2 \in (-b, 0]$ — два последовательных корня многочлена $W(z)|_{(-b, 0]}$. Следовательно, каждой клетке с такими свойствами соответствует одна камера типа C_2 , в прообразе которой в Q^3 лежат 2 тора Лиувилля.

У такого прямоугольника при вырождении зон будет лишь зона 1.

Из-за чередования знака многочлена $W(\lambda)$ на интервалах между нулями $W(\lambda)$, закрашенные клетки прямоугольника P расположены через строку и через столбец.

Шаг 3. Опишем в терминах столбцов и строк прямоугольника P точки графа Роба нашей динамической системы, иными словами, опишем, какие значения интеграла $F = f$ будут особыми, а какие нет. Далее рассматриваются только столбцы и строки с закрашенными клетками, поэтому будем говорить столбцы, строки, подразумевая их с закрашенными клетками. Без ограничения общности будем считать, что значение $F = f$ уменьшается. Тогда при движении границ столбцов и строк относительно друг друга возможны следующие преобразования: сужение столбцов, расширение строк. Это может приводить к слиянию границ столбца, появлению новой строки, разрыву столбца, слиянию строк. Данные преобразования строк и столбцов можно разделить на 8 типов в терминах ребер и вершин графа Роба. Рассмотрим изменение значения интеграла $F = f$ от $f_0 - \varepsilon$ до $f_0 + \varepsilon$ (в момент $f = f_0$ происходит одно из ниже указанных изменений в строках и столбцах прямоугольника). Через k_{xi} обозначим число закрашенных клеток по горизонтали в зоне с номером i при $f > f_0$

2. Появляются новые строки. Тогда бифуркация, возникающая при значении $f = f_0$, описывается $\sum_i m_i k_{xi}$ рождающимися атомами A (i — номера зон, в которых вследствие появления новой строки появились закрашенные клетки, m_i — число торов Лиувилля, записанное в клетке зоны с номером i), и у графа Роба при данном значении интеграла $F = f$ есть висячие вершины;

3. Исчезают в результате слияния границ несколько столбцов. Тогда бифуркация, возникающая при значении $f = f_0$, описывается $\sum_i m_i k_{xi}$ умирающими атомами A (i — номера зон, в которых вследствие исчезновения столбца исчезли закрашенные клетки, m_i — число торов Лиувилля, записанное в клетке зоны с номером i), и у графа Роба при данном значении интеграла $F = f$ есть висячие вершины.

В дальнейших случаях значению $f = f_0$ будут соответствовать невисячие вершины графа Роба.

4. Слияние нескольких строк в одну строку по горизонтальным прямым (в том числе слияние границ строк с нижней границей прямоугольника и передвижение строки из одной зоны в другую в вертикальном направлении), причем в результате слияния у прямоугольника хотя бы 2 строки. Зафиксируем любой столбец, содержащий закрашенные клетки. Тогда в этом столбце клетки зон i_1, \dots, i_t сливаются в клетку из зоны $i_j, j \in \{1, \dots, t\}$. Бифуркация, возникающая при значении $f = f_0$, описывается $\sum_i m_i k_{xi}$ (i — номера зон после бифуркации, которые получились в результате слияния строк) “сливающимися”

атомами B_q , где $q = \frac{\sum_{p=1}^t m_{i_p} k_{y i_p}}{m}$, m — число торов Лиувилля, записанное после бифуркации в клетке зоны с номером i_j .

Если во время бифуркации несколько групп строк сливаются в более, чем одну строку, то для каждой из получившихся новых строк необходимо посчитать число q и число атомов B_q .

5. Разрыв столбца по вертикальным прямым на несколько столбцов (в т.ч. передвижение столбца из одной зоны в другую в горизонтальном направлении). Зафиксируем любую строку, содержащую закрашенные клетки. Тогда в этой строке клетка из зоны i_0 “разорвется” на клетки из зон i_1, \dots, i_t . Бифуркация, возникающая при значении $f = f_0$, описывается $\sum_i m_i k_{yi}$ (i — номера зон до бифуркации, присутствовавшие в рассматриваемом столбце) “разрывающимися”

атомами B_q , где $q = \frac{\sum_{p=1}^t m_{i_p} k_{x i_p}}{m}$, m — число торов Лиувилля, записанное до бифуркации в клетке зоны с номером i_0 .

Если во время бифуркации несколько столбцов разрываются по вертикальным прямым, то для каждого из претерпевающих разрыв столбцов необходимо посчитать число q и число атомов B_q .

6. В прямоугольнике в результате слияния строк осталась лишь одна строка (в том числе слияние границ строк с нижней границей прямоугольника).

Зафиксируем любой столбец, содержащий закрашенные клетки. Тогда в этом столбце клетки зон i_1, \dots, i_t сливаются в клетку из зоны 1. Бифуркация, возникающая при значении $f = f_0$, описывается k_{x2} (2 — номер зоны после бифуркации) “сливающимися” атомами C_q , где $q = \sum_{p=1}^t m_{i_p} k_{y i_p}$.

Еще 2 типа преобразований строк и столбцов относятся к перестройкам через фокус. Преобразования 7, 8 строк и столбцов могут комбинироваться с преобразованиями типа 1-6 в соответствии с ограничениями, которые наложены на многочлен $W(z)$ во избежание вырождения изоэнергетического многообразия Q^3 .

7. Слияние нижней границы пустых зон 2 и 3 с верхней границей прямоугольника с последующим за этим появлением нового пустого левого столбца (до преобразования имеем пустые зоны 2 и 3, а после пустыми являются зоны 1, 2 и 5), если в прямоугольнике хотя бы 3 строки. Бифуркация, возникающая при значении $f = f_0$, описывается двумя атомами A^* , $2k_{x6}$ “сливающимися” атомами B и $k_{y1} + 2k_{y5} - 2$ “разрывающими атомами” B . Заметим, что в этом случае перестройки КВД через фокусы описываются только атомами A^* , другие атомы не характеризуют перестройки КВД через фокусы.

8. Слияние нижней границы пустых зон 2 и 3 с верхней границей прямоугольника с последующим за этим появлением нового пустого левого столбца (до преобразования имеем пустые зоны 2 и 3, а после пустыми являются зоны 1, 2 и 5), если в прямоугольнике ровно 2 строки. Бифуркация, возникающая при значении $f = f_0$, описывается одним “разрывающим” атомом B и k_{x4} атомами C_2 . В данном случае перестройка КВД через фокусы описывается атомом B , в то время как перестройки КВД, описываемые атомами C_2 , не затрагивают фокусы граничного эллипса.

Замечание 7. В силу ограничений на многочлен $W(z)$ в прямоугольнике не могут одновременно происходить преобразования строк и столбцов.

Шаг 4. Построим граф Рыба, проследив за динамикой изменения закрашенных клеток с уменьшением значения интеграла $F = f$.

При фиксированном неособом значении интеграла $F = f_0$ каждой клетке прямоугольника P соответствует некоторое число торов Лиувилля и некоторое число КВД, и данное значение интеграла $F = f_0$ соответствует точкам на ребрах графа Рыба (не включая вершины графа). При малом изменении значения интеграла $F = f_0$ в прямоугольнике не происходит слияния строк, разрыва столбцов, появления новых строк и исчезновением столбцов. Торы Лиувилля при этом не вырождаются и с ними не происходит бифуркации. Камеры возможного движения меняются гомеоморфным образом. Поэтому значения интеграла F в малой окрестности $(f_0 - \varepsilon, f_0 + \varepsilon)$ соответствуют точкам на ребрах графа Рыба. При достаточно большом изменении значения интеграла $F = f_0 - \delta$ происходит одно из преобразований 2-8, описанных в шаге 3. С торами Лиувилля, соответствующими клеткам, претерпевающим такие преобразования, происходят бифуркации, КВД склеиваются, разделяются, появляются или исчезают. В таком случае значение $F = f_0 - \delta$ соответствует одной или нескольким вершинам графа Рыба.

Итог. Итак, в шаге 4 мы построили граф Роба, а в шаге 3 определили, каким атомам соответствуют вершины графа. Таким образом, мы получили инвариант грубой лиувиллевой эквивалентности для данной динамической системы.

Для вычисления меток инварианта Фоменко-Цишанга воспользуемся приведенной ниже таблицей [5], предварительно разделив бифуркации из шага 3 на 6 типов. Молекула строится вертикально, причем значений интеграла $F = f$ увеличивается при движении вверх.

1. максимальные атомы A из типа 3;
2. минимальные атомы A из типа 2;
3. седловые “разрывающие” 3-атомы из типа 5, 7;
4. седловые “сливающие” 3-атомы из типов 4, 6 и 7 и 3-атомы C_2 из типа 8;
5. 3-атомы A^* из типа 7;
6. “разрывающий” 3-атом B из типа 8.

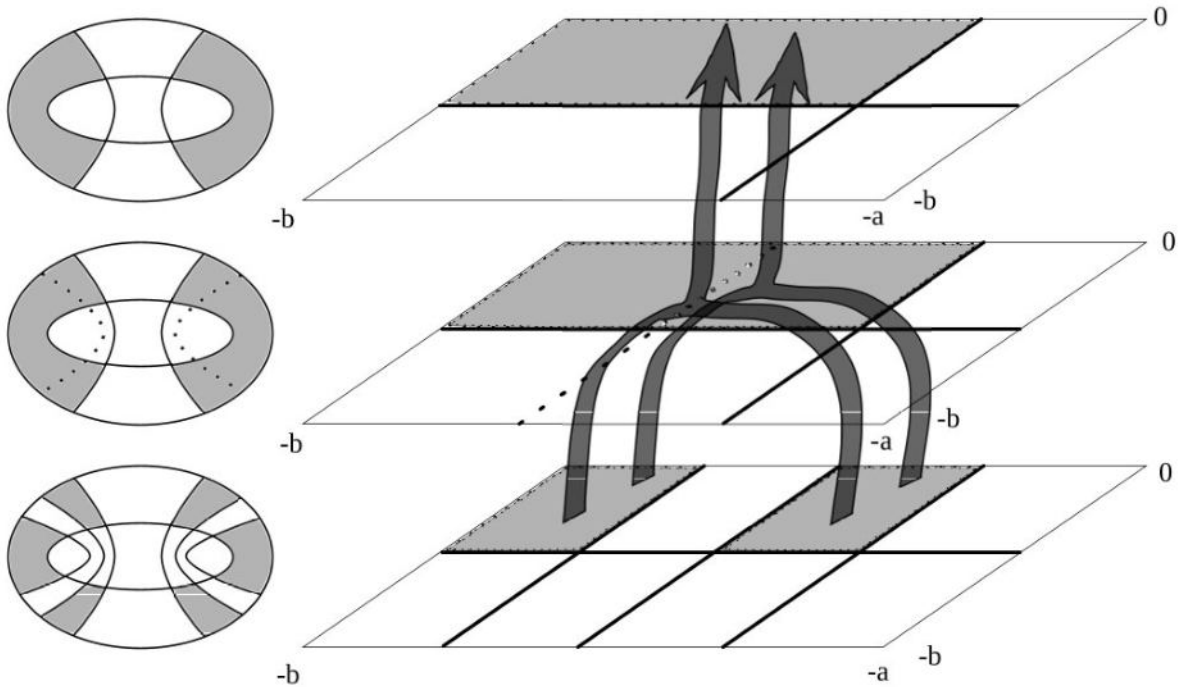


Рис. 5. Преобразование рёбер в графе Роба

5.3. Доказательство теоремы 4. Докажем справедливость выше приведенного алгоритма и проведем вычисление меток для инварианта Фоменко-Цишанга данной динамической системы.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать шаги 2, 3 и посчитать метки инварианта Фоменко-Цишанга.

Докажем шаг 2 алгоритма, а именно обоснуем число торов Лиувилля для каждого пункта шага 2.

- Рассмотрим КВД Ω_0 типа A_0 . У любой точки находящейся внутри камеры $(Int\Omega_0)$ существует 4 вектора скорости. Это следует из уравнения (3.5).

Верхний атом Нижний атом	2	3	4	5	6
1	$r=0 \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$
3	$r=\infty \quad \varepsilon=1$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$
4	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=\infty \quad \varepsilon=1$ $\Theta=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	—————
5	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=0$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=2 \quad \Theta'=0$	$r=0.5 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=-1$	—————	—————
6	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=1$ $\Theta=1 \quad \Theta'=1$	$r=0 \quad \varepsilon=-1$ $\Theta=-1 \quad \Theta'=0$	—————	—————

Рис. 6. Таблица меток. Ячейка таблицы соответствует ребру, соединяющего атомы из обозначенных групп, причем атом из первого столбца всегда стоит на уровень ниже атома из первой строки в грубой молекуле. Здесь θ обозначает вклад ребра в метку n семьи, не содержащей атомов 5 и 6, а θ' обозначает вклад в метку n семьи атома 5 или 6.

Необходимо склеить 4 экземпляра области Ω_0 (рис. 6), согласно билиардному закону об отражении частицы от границы области. Таким образом, получаем в результате склейки один тор Лиувилля для каждой камеры данного типа.

- Для камер типа B_0 и B_1 аналогично получаем один тор Лиувилля для каждой камеры данного типа.

Таким образом, для клеток прямоугольника P (из случая 1) в зонах 1, 3, 4, 5 и 6 число торов Лиувилля в прообразе ОВД в Q^3 равно числу камер возможного движения соответствующего типа.

- Для камер типа C_2 необходимо также провести склейку 4-х экземпляров камеры для каждого из 4-х векторов скорости частицы, находящейся внутри камеры, и расставить стрелки склейки, согласно билиардному закону об отражении частицы от границы области. Как видно из рис. 7, получаем два тора Лиувилля в прообразе одной камеры типа C_2 в Q^3 .

Таким образом, для клеток прямоугольника P (из случая 2) в зоне 2 число торов Лиувилля в прообразе ОВД в Q^3 равно удвоенному числу камер возможного движения соответствующего типа.

- Прообраз областей, соответствующих зоне 2 прямоугольника из случая 1 или зоне 1 прямоугольника из случая 2, в Q^3 не является тором Лиувилля, так как является особым слоем. Малая окрестность прообраза является 3-атомом некоторого типа.

Рассмотрим шаг 3. С.Е. Пустовойтов установил справедливость типов атомов, возникающих в шаге 3 [5]. Докажем, что число атомов для каждого из типов преобразований строк и столбцов прямоугольника будет ровно таким, как указано в шаге 3.

Тип 1. Не происходят бифуркации;

Тип 2. При появлении новой строки закрашенные клетки, которые были до появления новых строк, остаются в тех же зонах, в которых ни были до

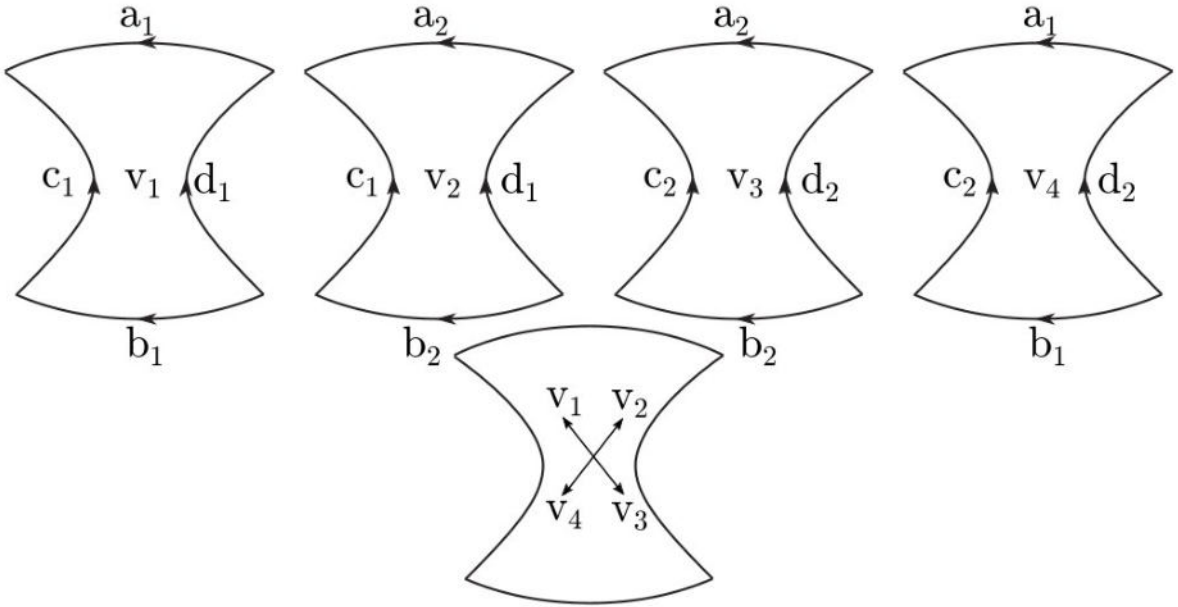


Рис. 7. Склейка двумерного тора, соответствующего неособому слою Q^3

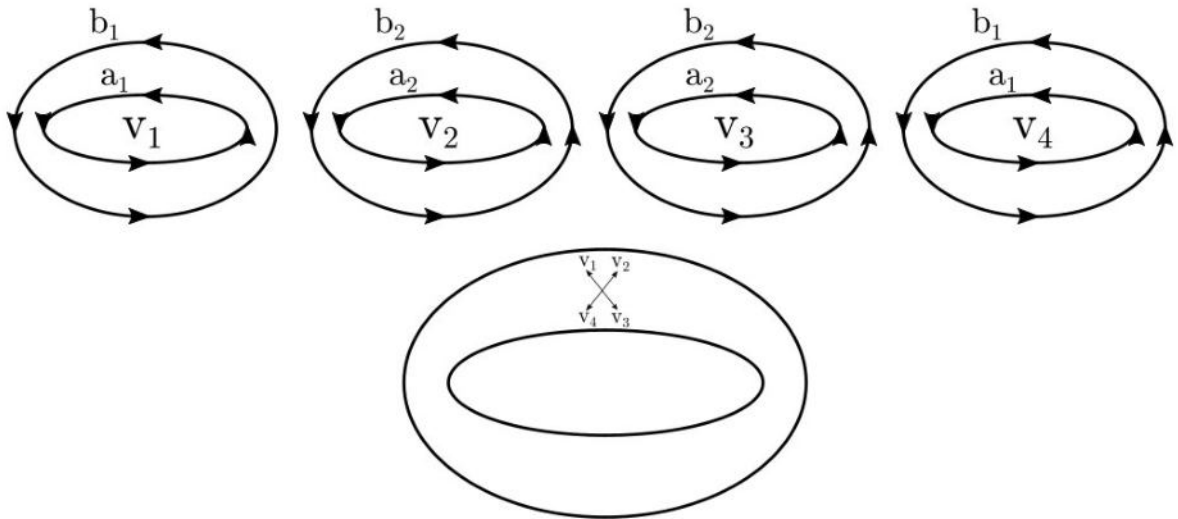


Рис. 8. Склейка двух двумерных торов, соответствующего неособому слою Q^3

бифуркации. Поэтому число рождающихся атомов A равно числу торов Лиувилля, соответствующих появляющимся в результате бифуркации клеткам, т.е. $\sum_i m_i k_{xi}$, где i — номера зон, в которых вследствие появления новой строки появились закрашенные клетки, m_i — число торов Лиувилля, записанное в клетке зоны с номером i ;

Тип 3. Аналогично типу 2;

Тип 4. В результате бифуркации торы Лиувилля, соответствующие закрашенным клеткам в одном столбце, перестраиваются в m торов Лиувилля, где m — число торов, соответствующее одной клетке, в которую сливаются все клетки фиксированного столбца. Суммарное число торов в этих клетках рав-

но $\sum_{p=1}^t m_{i_p} k_{x_{i_p}}$, где суммирование идет по всем зонам, чьи заполненные клетки содержат фиксированный столбец с закрашенными клетками. Тогда атомом, который описывает бифуркацию для фиксированного столбца, является

$q = \frac{\sum_{p=1}^t m_{i_p} k_{x_{i_p}}}{m}$. Заметим, что q не зависит от конкретно взятого столбца, поэтому тип атомов при описании всех бифуркаций торов, соответствующих взятому столбцу, будет один и тот же. Поэтому бифуркация описывается $\sum_{p=1}^t m_{i_p} k_{x_{i_p}}$ “сливающими” атомами B_q ;

Тип 5. Аналогично типу 4;

Тип 6. В результате бифуркации торы Лиувилля, соответствующие закрашенным клеткам в одном столбце, перестраиваются в два тора Лиувилля. Так происходит в каждом столбце с закрашенными клетками, потому число перестраивающихся торов в каждом столбце одинаково. Число атомов равно числу получившихся клеток, соответствующих КВД типа C_2 , т.е. k_{x_2} . Для определения числа q необходимо посчитать число торов, соответствующее каждому столбцу до бифуркации, т.е. $q = \sum_{p=1}^t m_{i_p} k_{y_{i_p}}$, где суммирование идет по всем зонам, чьи заполненные клетки содержат фиксированный столбец с закрашенными клетками.

Тип 7. Опишем клетки, которые меняют по мере уменьшения значения дополнительного интеграла $F = f$ номера зон, в которых они находятся: клетка зоны 5, граничащая с пустой клеткой зоны 2, остальные клетки зоны 5, клетка зоны 1 при наличии и k_{x_6} клеток зоны 6. В момент бифуркации (вырождение гиперболы с наибольшим параметром в фокальную прямую) верхняя клетка зоны 5 превратится в клетку зоны 2, остальные клетки зоны 5 и клетка зоны 1 не поменяют номер своей зоны, а клетки зоны 6 превратятся в клетки зоны 3. После бифуркации все верхние из рассматриваемых клеток станут клетками зоны 3, клетка из зоны 1 сместится в зону 4, клетки из бывшей зоны 5 сместятся в зону 6. На языке типов областей имеем: две области типа A_0 через фокусы (в момент бифуркации становясь двумя областями типа A_1) перестроятся в две области типа B_1 (эта перестройка соответствует преобразованиям с верхней клеткой зоны 5) — бифуркация описывается двумя атомами A^* [5], $2(k_{y_5} - 1)$ областей типа A_0 в результате “разрыва” по эллипсу перестроятся в $4(k_{y_5} - 1)$ области типа B_0 (эта перестройка соответствует преобразованиям с остальными клетками зоны 5) — бифуркация описывается $2(k_{y_5} - 1)$ “разрывающими” атомами B [5], k_{y_1} областей типа A_0 в результате “разрыва” по эллипсу перестроятся в $2k_{y_1}$ областей типа B_0 (эта перестройка соответствует преобразованиям с клеткой зоны 1) — бифуркация описывается k_{y_1} “разрывающими” атомами B [5], $4k_{x_6}$ областей типа B_0 в результате вырождения гиперболы в фокальную прямую перестроятся в $2k_{x_6}$ областей типа B_1 (эта перестройка соответствует преобразованиям с верхними клетками зоны 6) — бифуркация описывается $2k_{x_6}$ “сливающими” атомами B [5]. Таким образом, бифуркация

описывается двумя атомами A^* , $2k_{x6}$ “сливающими” атомами B , $k_{y1} + 2k_{y5} - 2$ “разрывающими” атомами B .

Тип 8. Аналогично типу 7 рассмотрим клетки, меняющие номер своей зоны при бифуркации. Такими являются клетка зоны 1, которая, в силу отсутствия зоны 5, точно заполнена, и k_{x4} клеток зоны 4. В момент бифуркации клетка из зоны 1 превращается в клетку зоны 1 прямоугольника из случая II шага 2, а клетки зоны 4 превращаются в клетки зоны 2 прямоугольника из случая II шага 2. После бифуркации клетка зоны 1 прямоугольника из случая II шага 2 смещается в зону 2. На языке КВД имеем следующее: одна область типа A_0 в результате вырождения граничной гиперболы в фокальную прямую перестраивается (в момент бифуркации становясь областью типа A_2) через фокус в одну область типа C_2 — данная бифуркация описывается одним “разрывающим” атомом B [5], $2k_{x4}$ областей типа B_0 в результате вырождения граничной гиперболы в фокальную прямую перестраиваются в k_{x4} областей типа C_2 — данная бифуркация описывается k_{x4} “сливающими” атомами C_2 [5]. Таким образом, бифуркация описывается одним “разрывающим” атомом B , k_{x4} “сливающими” атомами C_2 .

Справедливость значений для меток на ребрах грубой молекулы установлена в статье С.Е. Пустовойтова [5].

Теорема доказана.

§ 6. Примеры

Разберем пример построения инварианта Фоменко-Цишанга у биллиарда в эллипсе с потенциалом 6-й степени. Напомним выражение для потенциала 6-й степени:

$$P_6(x, y) = \alpha y^2 + \beta y^4 + \gamma(x^6 + y^6) + 3\gamma(x^2 y^4 + x^4 y^2) + 2(\beta - (a - b)\gamma)x^2 y^2 + (\beta - 2(a - b)\gamma)x^4 + (\alpha - (a - b)\beta + (a - b)^2 \gamma)x^2,$$

где $\gamma \neq 0$.

Перейдем от декартовых координат к эллиптическим и проведем разделение переменных:

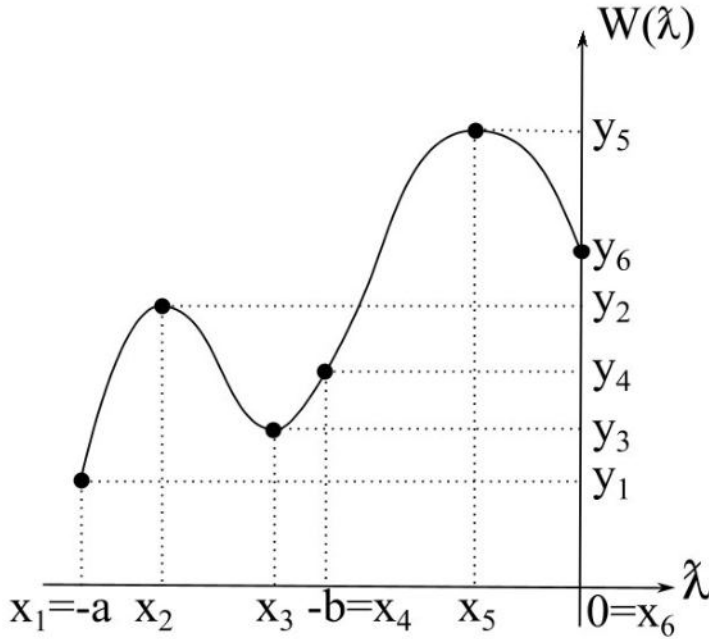
$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{V(\lambda_i)}, \quad i = 1, 2, \quad (6.1)$$

где $V(z) = (a + z)(b + z)W(z)$, где $W(z) = f + hz - c_2 \lambda^2 - c_3 \lambda^3 - c_4 \lambda^4$. Подберем числа $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ так, чтобы выполнялись следующие условия (рис. 8):

1. $-a = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = -b < x_5 < x_6 = 0$, причем $W'(x_2) = W'(x_3) = W'(x_5) = 0$ и $W'(-b) > 0$;
2. $y_1 < y_3 < y_4 < y_2 < y_6 < y_5$, где $y_i = W(x_i)$, $i = 1, \dots, 6$.

На данном примере многочлена $W(z)$ продемонстрируем работу выше описанного алгоритма (рис. 9).

Для шагов 1 и 2 необходимо зафиксировать некоторое значение интеграла $F = f$. Поскольку мы строим полный инвариант Фоменко-Цишанга, то зафиксируем сначала достаточно большое значение дополнительного интеграла $F = f_1$, т.ч. многочлен $W(z)|_{[-a, 0]} > 0$.

Рис. 9. График многочлена $W(z)$ с точностью до свободного члена f

Заштрихуем множество $M = \{\lambda \in [-a, 0] : \lambda \text{ удовлетворяет (5.1)}\}$ и построим прямоугольник $P = [-b, 0] \times [-a, -b]$ с закрашенными клетками. Поскольку $M|_{[-a, -b]} = \emptyset$, прямоугольник P будет пустым. Будем уменьшать значение интеграла $F = f$, пока прямоугольник P не будет содержать хотя бы одну закрашенную клетку. Очевидно, это произойдет при значении $F = f_2$, т.ч. $W(-a) = 0$. Рассмотрим малую окрестность $(f_2 - \varepsilon, f_2 + \varepsilon)$. В прямоугольнике при уменьшении интеграла $F = f$ в пределах данной окрестности появится строка, т.е. произойдет преобразование типа 2. Вычислив явно число атомов A , описывающих данную бифуркацию, получим один максимальный атом A (максимальный по той причине, что мы уменьшаем значение интеграла $F = f$). Обозначим через ξ_1 корень многочлена $W(z)$ при $F = f_2 - \varepsilon$. При дальнейшем уменьшении значения доп. интеграла $F = f$ корень ξ_1 увеличивается, а при значении $F = f_3 < f_2$ имеем $W(x_3) = 0$. Рассмотрим малое изменение значения доп. интеграла $F = f_3 - \varepsilon$. При таком значении f у многочлена $W(z)$ появляются еще два корня ξ_2, ξ_3 на интервале $(-a, -b)$, причем $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ (значение корня ξ_1 хоть и изменилось, но во избежание введения большого количества обозначений оставим у первого корня многочлена $W(z)$ то же обозначение). В прямоугольнике появится строка, ограниченная прямыми, соответствующими значениям $\lambda_1 = \xi_2, \lambda_1 = \xi_3$. Согласно шагу 3, произошедшая бифуркация описывается двумя максимальными атомами A .

Следующая бифуркация происходит при значении доп. интеграла $F = f_4$, т.ч. $W(-b) = 0$. Данная бифуркация будет сопровождаться перестройками через фокус. При изменении значения доп. интеграла f от $f_4 + \varepsilon$ до f_4 корень ξ_3 стремится к $-b$, и соответственно в прямоугольнике прямая $\lambda_1 = \xi_3$ поднимается и сливается с верхней границей прямоугольника. При изменении значения f от f_4 до $f_4 - \varepsilon$ корень ξ_3 также продолжает увеличиваться и находится на интервале $(-b, 0)$, и в прямоугольнике появляется пустой столбец,

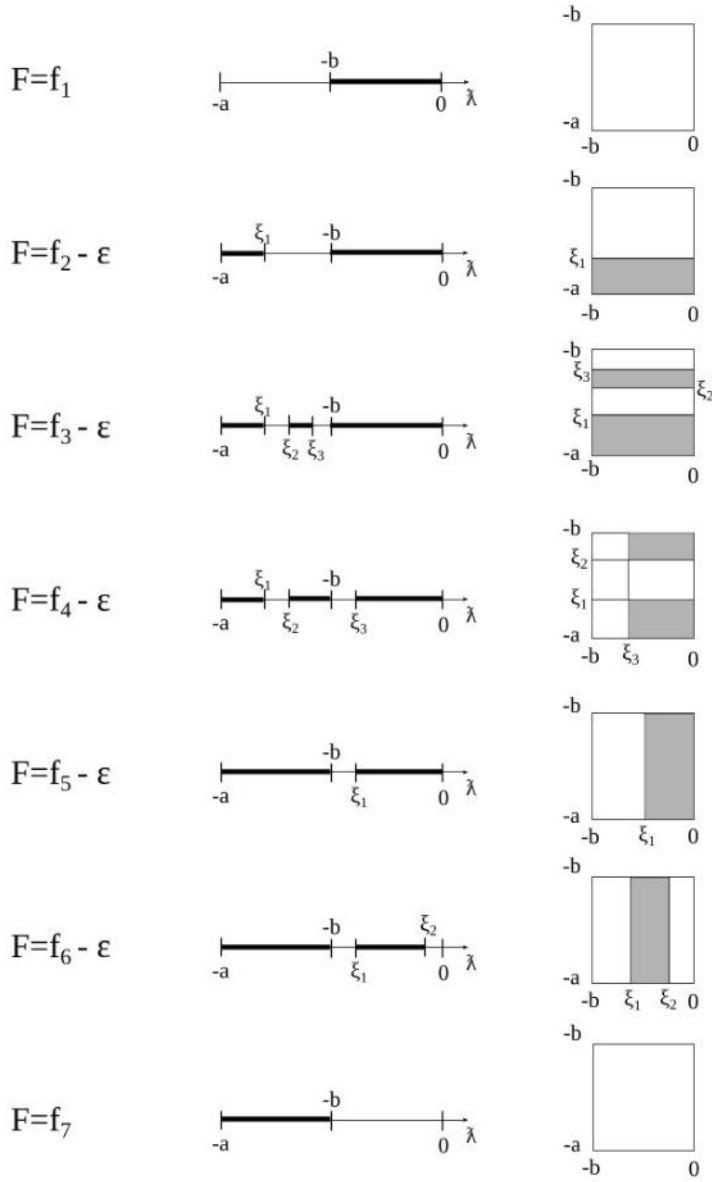


Рис. 10. Изменение вида прямоугольника P при уменьшении значения интеграла $F = f$

ограниченный прямыми $\lambda_2 = -b$, $\lambda_2 = \xi_3$. Согласно шагу 3, данная бифуркация является преобразованием типа 7 и описывается двумя атомами A^* и одним “разрывающим” атомом B .

Дальнейшее уменьшение значения f приводит к тому, что при значении $F = f_5 < f_4$ имеем $W(x_2) = 0$. При уменьшении значения f от $f_5 + \varepsilon$ до f_5 корни ξ_1 и ξ_2 стремятся друг к другу и при $F = f_5$ становятся равны друг другу. В этот момент в прямоугольнике сливаются две строки с закрашенными клетками, причем в результате слияния в прямоугольнике остается лишь одна строка, т.е. происходит преобразование строк типа 6 из шага 3. Посчитав число q , получаем, что данная бифуркация описывается одним “сливающим” атомом C_4 . Переобозначим через ξ_1 единственный оставшийся корень многочлена $W(z)|_{[-a, 0]}$.

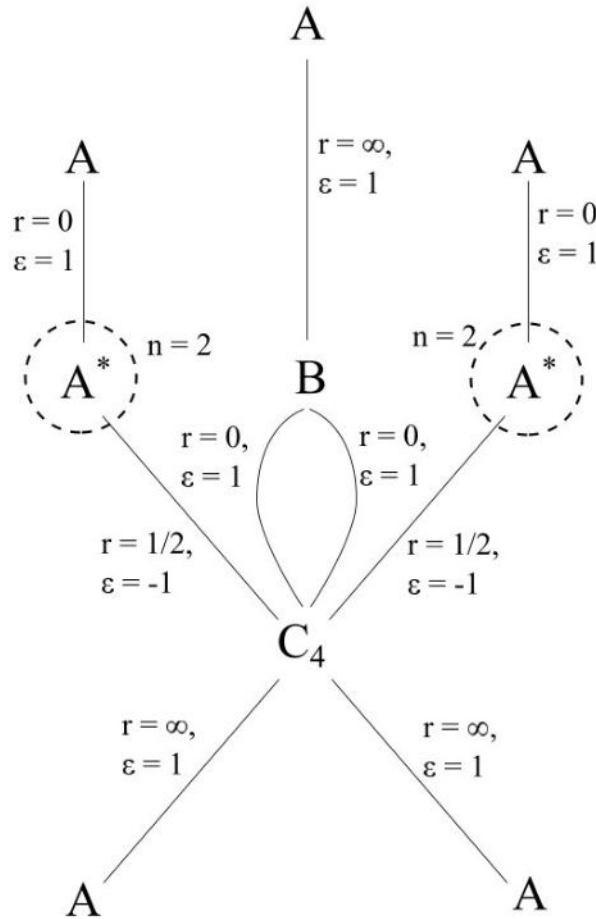


Рис. 11. Инвариант Фоменко-Цишанга для рассматриваемого примера

Заметим, что в малой ε -окрестности $F = f_6 < f_5$, где f_5 такое, что $W(0) = 0$, в прямоугольнике появляется пустой столбец с границами $\lambda_2 = \xi_2$, $\lambda_2 = 0$ ($W|_{(-b,0)}(\xi_2) = 0$). Данное преобразование столбцов является преобразованием типа 1, поэтому не влечет за собой бифуркацию. Рассмотрим последнее значение доп. интеграла $F = f$, при котором происходит бифуркация, а именно, $F = f_7 < f_6$, т.ч. $W(x_5) = 0$. При уменьшении значения f от $f_7 + \varepsilon$ до f_7 корни ξ_1 и ξ_2 стремятся друг к другу и при $F = f_7$ становятся равны друг другу. В прямоугольнике при этом исчезает столбец с закрашенными клетками вследствие слияния его границ. Данное преобразование является преобразованием типа 3 из шага 3 и описывается двумя минимальными атомами A .

Граф Рыба строится параллельно с подсчетом типов и количества атомов в моменты бифуркаций, согласно шагу 4. Таким образом, грубая молекула построена. Для вычисления полного инварианта Фоменко-Цишанга воспользуемся таблицей 1 (рис. 10).

Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. I том.*, Геометрия, топология, классификация., Ижевск: РХД, 1999.
- [2] V. I. Dragovic, "Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse", *J. Appl. Maths Mechs*, **62**:1 (1998), 159–162.

- [3] В. В. Козлов, “Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде”, *Прикладная математика и механика.*, **59**:1 (1995).
- [4] С. Е. Пустовойтов, “Топологический анализ эллиптического бильярда в потенциальном поле четвертого порядка”, *Вест. Моск. ун. Матем. Мех.*, **1**:5 (2021), 8–19.
- [5] С. Е. Пустовойтов, “Исследование структуры слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом”, *Чеш. сб.*, **25**:1 (2024), 62–102.
- [6] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **209**:12 (2018), 17–56.
- [7] В. В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, *Матем. сб.*, **206**:10 (2015), 127–176.
- [8] В. В. Ведюшкина, С. Е. Пустовойтов, “Классификация слоений Лиувилля интегрируемых топологических бильярдов в магнитном поле”, *Матем. сб.*, **214**:2 (2016), 23–57.
- [9] И. Ф. Кобцев, “Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ”, *Матем. сб.*, **211**:7 (2020), 93–120.
- [10] A. A. Glutsyuk, “On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature”, *Journal of the European Mathematical Society*, **23**:3 (2021), 993–1049.
- [11] V. Kaloshin, A. Sorrentino, “On the local Birkhoff conjecture for convex billiards”, *Ann. of Math.*, **188**:1 (2018), 315–380.
- [12] М. П. Харламов, “Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам”, *Нелинейная динамика*, **6**:4 (2010), 769–805.
- [13] В. А. Кибкало, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева, “Реализация интегрируемых гамильтоновых систем бильярдными книжками”, *Тр. ММО*, **82**:1 (2021), 45–78.
- [14] Фоменко А.Т., “Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Известия АН СССР. Серия матем.*, **50**:6 (1986), 1276–1307.
- [15] Фоменко А.Т., “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *Успехи математических наук*, **44**:1(265) (1989), 145–173.
- [16] Фоменко А.Т., Цишанг Х., “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Известия АН СССР.*, **54**:3 (1990), 546–575.
- [17] Фоменко А.Т., “Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем”, *Известия АН СССР. Серия матем.*, **55**:4 (1991), 747–779.
- [18] M. Bialy, A. E. Mironov, “Algebraic non-integrability of magnetic billiards”, *J. Phys. A*, **49**:45 (2016), 455101, 18.
- [19] Биркгоф Дж., *Динамические системы*, Гостехиздат, Москва, Ленинград, 1941.
- [20] Якоби К., *Лекции по динамике*, Гостехиздат, Москва, 1936.
- [21] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, *Генетическое введение в динамику систем с ударами*, Изд-во МГУ, Москва, 1991.

Д. А. Туниянц (D. A. Tuniyants)

МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: 2001dat@inbox.ru

Поступила в редакцию

31.12.2025

В. В. Ведюшкина (V. V. Vedushkina)

МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: