

# НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ НУЛЕВОГО РАНГА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО БИЛЛИАРДА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ<sup>1</sup>

ПУСТОВОЙТОВ С.Е.

## АННОТАЦИЯ

Работа посвящена изучению невырожденных особенностей плоского интегрируемого бильярда, ограниченного эллипсом и снабженного полиномиальным потенциалом. Ранее в работах автора был найден класс полиномиальных потенциалов, сохраняющих интегрируемость классического бильярда Биркгофа. Кроме того, для бильярдов с потенциалом малой степени все невырожденные полулокальные особенности ранга ноль были классифицированы с точностью до Лиувиллевой эквивалентности. Настоящая работа обобщает этот результат на случай полиномиальных потенциалов произвольной степени. Так, для таких бильярдов найдены все невырожденные особые точки ранга ноль и описана структура слоения Лиувилля нерасщепляемых особенностей, содержащих эти точки. Кроме того, найдены алгебраические условия на коэффициенты потенциала, допускающего расщепляемую особенность, и показано, что это “нетипичный” случай: любой “расщепляемый” потенциал можно приблизить “нерасщепляемым”, и множество всех “расщепляемых” потенциалов имеет меру ноль.

## КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Интегрируемая гамильтонова система, бильярд, потенциал, слоение Лиувилля, полулокальные особенности ранга ноль, условие нерасщепляемости, почти прямое произведение

## 1 Введение

Математическим бильярдом называется динамическая система, описывающая движение материальной точки (бильярдного шара) в замкнутой области  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^n$  с некоторым законом отражения на границе. Классические бильярдные системы, как правило, заданы в плоских компактных областях  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^2$  с абсолютно упругим отражением (т.е. угол падения равен углу отражения), при этом между отражениями бильярдный шар движется равномерно прямолинейно. Известно, что в этом случае на протяжении всего движения сохраняется значение кинетической энергии  $K = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ , и бильярд является гамильтоновой системой на своем фазовом пространстве  $M^4$  с гамильтонианом  $K$ . Примером классического бильярда выступает эллиптический бильярд, полученный Дж. Биркгофом в [1] как предельный случай задачи геодезического потока на эллипсоиде. В этой же работе Биркгоф показал интегрируемость этого бильярда: помимо кинетической энергии существует еще один закон сохранения  $F$  (первый интеграл), независимый от  $K$ .

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект 25-71-10087) в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Эллиптический бильярд Биркгофа был изучен с разных точек зрения: интегрируемость его обобщений, устойчивость критических траекторий, свойства бильярдного отображения на границе. Нас будет интересовать структура *слоения Лиувилля* бильярда, то есть разбиения фазового пространства  $M^4$  на совместные поверхности уровня первых интегралов  $\{K = \text{const}, F = \text{const}\}$ . Согласно классической теореме Лиувилля, в компактном случае почти все слои этого слоения диффеоморфны конечному объединению двумерных торов (т.н. торов Лиувилля), окрестность которых в фазовом пространстве  $M^4$  расслоена тривиально. Таким образом, основной интерес представляют особенности слоения Лиувилля. Так, ограничим систему на неособую поверхность уровня энергии  $Q^3 = \{K = \text{const}, dK \neq 0\}$ . Тогда трехмерные особенности слоения с точностью до лиувиллевой эквивалентности, т.е. послыоного диффеоморфизма, сохраняющего ориентацию критических орбит, называются *3-атомами*, введенными А.Т. Фоменко в [2], [3]. При этом слоение Лиувилля всего многообразия  $Q^3$  с точностью до лиувиллевой эквивалентности определяется комбинаторным инвариантом Фоменко-Цишанга, представляющим собой граф – базу слоения – с дополнительными числовыми метками в вершинах и на ребрах. Более подробно про 3-атомы и инварианты Фоменко-Цишанга см. в [4]. Стоит отметить работу В.И. Драговича и М. Раднович [5], где был вычислен инвариант Фоменко-Цишанга бильярда Биркгофа, а также работу В.В. Ведюшкиной(Фокичевой) [6] по изучению слоений Лиувилля бильярдных, ограниченных софокусными эллипсами и гиперболами.

Рассмотрим обобщение бильярда Биркгофа. А именно, потребуем, что на бильярдный шар действует некоторая внешняя потенциальная сила  $\vec{F}_W$ , заданная потенциалом  $W$ . В этом случае бильярд также является гамильтоновой системой с гамильтонианом  $H = K + W$ . Однако теперь, вообще говоря, такой бильярд перестает быть интегрируемым: это было показано, например, для линейного потенциала в работе де Коста, Деттманна и Леонеля [7]. С другой стороны, интегрируемость сохраняется для упругого точечного потенциала Гука, помещенного в центр эллиптической области  $B$ . Слоение Лиувилля такого бильярда в ограничении на неособые изоэнергетические поверхности  $Q^3$  было изучено в работе И.Ф. Кобцева [8]. Для общего случая В.В. Козловым в работе [9] был предложен критерий, согласно которому эллиптический бильярд с потенциалом интегрируем, если сам потенциал удовлетворяет некоторому однородному уравнению в частных производных (более подробно см. в разделе 2). Стоит отметить работы В.И. Драговича [10], [11], где были найдены решения этого уравнения в классе многочленов Лорана и гипергеометрических функций Апшеля. Автором в работе [12] был получен явный вид решений уравнения Козлова в классе полиномов от декартовых переменных. Так, было показано, что каждый интегрируемый полиномиальный потенциал полностью определяется некоторым многочленом  $P(z)$  с вещественными коэффициентами. Кроме того, в этой работе была описана структура слоения Лиувилля в ограничении на неособые изоэнергетические многообразия  $Q^3$  в терминах инвариантов Фоменко-Цишанга.

Настоящая работа посвящена изучению структуры слоения Лиувилля четырехмерных особенностей ранга ноль, т.е. особенностей слоения, содержащих точки фазового пространства  $X \in M^4$ , для которых  $dH(X) = dF(x) = 0$ . Частично такой

анализ был проведен в работе автора [14] по изучению особенностей слоения Лиувилля эллиптического бильярда с потенциалом четвертой степени. Теперь же перейдем от частного случая к общему, рассмотрим бильярд с произвольным полиномиальным потенциалом, сохраняющим интегрируемость. Введем дополнительные условия на интересующие нас особенности. Во-первых, потребуем, что каждая точка ранга ноль невырождена. Иными словами, в каждой особой точке  $X$  алгебра Ли, порожденная линейризацией потоков первых интегралов  $H$  и  $F$ , является подалгеброй Картана в касательной алгебре  $sp(4, \mathbb{R})$ . Согласно теореме Вильямсона, существует четыре типа невырожденных особенностей с точностью до сопряжения подалгебр Картана: центр-центр, центр-седло, седло-седло и фокус-фокус. Стоит отметить работу В.А. Кибкало и А.Т. Фоменко [15] по реализации особенностей типа седло-седло бильярдными книжками с потенциалом Гука, а также работу В.В. Ведюшкиной, В.А. Кибкало и автора [16] по реализации фокальных особенностей. Во-вторых, потребуем, что особенность удовлетворяет условию нерасщепляемости. Другими словами, потребуем, что множество критических значений первых интегралов  $\Sigma(X) = \{H(Y), F(Y) : Y \in U(X)\}$  из окрестности  $U$  любой особой точки ранга ноль  $X$  совпадает с множеством критических значений  $\Sigma = \{H(Y), F(Y) : Y \in S\}$  всей особенности  $S$ . В этом случае работает теорема Н.Т. Зунга (см. [17]), гласящая, что любая невырожденная особенность типа центр-центр, центр-седло или седло-седло, удовлетворяющая условию нерасщепляемости, может быть представлена как почти прямое произведение  $(P_1 \times P_2)/G$ , где  $P_1$  и  $P_2$  – некоторые 2-атомы, т.е. особенности плоских функций Морса, а  $G$  – группа, действующая свободно на  $P_1, P_2$  и сохраняющая их слоения.

Работа посвящена изучению структуры слоения Лиувилля невырожденных особенностей эллиптических бильярдных систем с потенциалом, удовлетворяющих условию нерасщепляемости. Так, в разделе 2 приведены необходимые результаты предыдущей работы автора [12] и изложен общий метод анализа. В разделе 3 вычислены все невырожденные особые точки ранга ноль и установлены алгебраические условия на их тип. Раздел 4 посвящен основному результату работы, т.е. классификации всех невырожденных нерасщепляемых особенностей с точностью до лиувиллевой эквивалентности. В разделе 5 установлены алгебраические условия, при которых бильярд с потенциалом  $W$  допускает расщепляемую особенность, и показано, что условие нерасщепляемости типично для бильярдных систем с потенциалом. Приведем основные результаты работы.

**Теорема.** *Невырожденные точки ранга ноль эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом имеют тип центр-центр, центр-седло или седло-седло. Нерасщепляемые особенности типа центр-седло лиувиллево эквивалентны прямым произведениям  $A \times B, A \times B_2, A \times C_2, A \times C_4$ . Нерасщепляемые особенности типа седло-седло лиувиллево эквивалентны почти прямым произведениям  $B \times B, B \times B_2, B \times C_2, B \times C_4, B_2 \times B_2, (B \times B_2)/\mathbb{Z}_2, (B \times C_2)/\mathbb{Z}_2, (B_2 \times C_2)/\mathbb{Z}_2$  или  $(B \times C_4)/\mathbb{Z}_2$ .*

**Теорема.** *1) Пусть эллиптический бильярд с полиномиальным потенциалом  $W$ , заданным многочленом  $P \in \mathbb{R}_n[[z]]$  степени  $n$ , допускает расщепляемую невырожден-*

денную особенность ранга ноль. Тогда, для любого  $\varepsilon > 0$  существует потенциал  $\bar{W}$ , заданный многочленом  $\bar{P} \in \mathbb{R}_n[[z]]$ , такой, что

1. расстояние между векторами коэффициентов многочленов  $P$  и  $\bar{P}$  в  $L_2$ -норме меньше  $\varepsilon$ ,
2. все невырожденные особенности эллиптического бильярда с потенциалом  $\bar{W}$  удовлетворяют условию нерасщепляемости.

2) Пусть  $U \in \mathbb{R}_n[[z]]$  — множество многочленов  $P$  степени  $n$ , задающих интегрируемый эллиптический бильярд с потенциалом, который допускает расщепляемую особенность. Тогда  $U$  имеет меру ноль в  $\mathbb{R}_n[[z]]$ .

## 2 Интегрируемый бильярд с потенциалом

Мы рассматриваем бильярд в плоской области  $\mathcal{B}$ , ограниченной эллипсом вида

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

в некоторой декартовой системе координат  $(x, y)$ . Здесь  $a > b > 0$ . Зададим движение материальной точки в этой области со стандартным законом отражения на границе, т.е. точка отражается от границы абсолютно упруго. Положим, что на точку действует некоторый потенциал  $W(x, y) \in C^2(\mathcal{B})$ . Иными словами, динамика между отражениями задается классической системой уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\partial W}{\partial x} \\ \ddot{y} = -\frac{\partial W}{\partial y}. \end{cases} \quad (1)$$

Это гамильтонова система, заданная на кусочно-гладком фазовом многообразии

$$M^4 = \{(p, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{B}, p \in T_{\mathbf{x}}^*\mathbb{R}^2\} / \sim,$$

снабженном канонической симплектической структурой  $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$  во внутренности бильярда (отношение эквивалентности  $\sim$  задано на границе бильярдной области и отождествляет пары точка-импульс  $(p, \mathbf{x})$  и  $(p', \mathbf{x})$  до и после отражения). Гамильтонианом этой системы выступает полная энергия

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + W(x, y). \quad (2)$$

В классическом случае при  $W = 0$  интегрируемость эллиптического бильярда была показана Дж. Биркгофом в [1]. В этом случае дополнительный первый интеграл, независимый от гамильтониана, имеет вид

$$F_0 = \frac{1}{2}(bp_x^2 + ap_y^2 - (xp_y - yp_x)^2).$$

В общем случае произвольного потенциала интегрируемость бильярда нарушается. Критерий естественной интегрируемости, т.е. наличия первого интеграла вида  $F_0 + \hat{F}(x, y)$ , был предложен В.В. Козловым в [9].

**Теорема 1** (В.В. Козлов). *Бильярд в эллиптической области  $\mathcal{B}$ , снабженный потенциалом  $W \in C^2(\mathcal{B})$ , допускает первый интеграл вида*

$$F = \frac{1}{2}(bp_x^2 + ap_y^2 - (xp_y - yp_x)^2) + \hat{F}(x, y),$$

*если и только если потенциал  $W$  удовлетворяет следующему уравнению:*

$$(a - b)W_{xy} + 3(yW_x - xW_y) + W_{xy}(y^2 - x^2) + xy(W_{xx} - W_{yy}) = 0 \quad (3)$$

Поиском решений уравнения (3) и описанием их свойств занимались многие математики. В частности, отметим работы В.И. Драговича [10], [11] по описанию свойств решений в классе функций Аппеля. В работе автора [12] получено полное решение уравнения (3) в классе многочленов от декартовых координат  $(x, y)$ . Для этого рассмотрим эллиптическую систему координат  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , связанную с исходными координатами формулами

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a + \lambda_1)(a + \lambda_2)}{a - b}, \\ y^2 = -\frac{(b + \lambda_1)(b + \lambda_2)}{a - b}. \end{cases} \quad (4)$$

Областью значений этих координат служит область  $\lambda_1 \in (-a, -b)$ ,  $\lambda_2 \in (-b, \infty)$ , а координатными линиями выступают софокусные квадррики, лежащие в общем с граничным эллипсом однопараметрическом семействе

$$x^2(b + \lambda) + y^2(a + \lambda) = (a + \lambda)(b + \lambda) \quad (5)$$

(координате  $\lambda_1$  соответствуют гиперболы, а координате  $\lambda_2$  – эллипсы). Преимущества этой системы координат заключаются в том, что

- 1) это тоже канонические координаты для симплектической структуры  $\Omega$ ,
- 2) бильiardная область задана неравенством  $\lambda_2 < 0$ ,
- 3) в этих координатах система допускает формулы разделения переменных вида

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dt} = \pm \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{S_1(\lambda_1, h, f)}, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = \pm \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{S_2(\lambda_2, h, f)}, \end{cases}$$

для которых применимы методы областей возможного движения, разработанные М.П. Харламовым [13]. Главным недостатком эллиптической системы координат выступает их нерегулярность в точках прямых  $\{x = 0\}$  и  $\{y = 0\}$ . Иными словами, при изучении свойств биллиарда, связанных с гладкостью и невырожденностью, эти точки нужно рассматривать отдельно. Приведем также формулы, обратные к (4):

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b - R(x, y)), \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - a - b + R(x, y)), \end{cases} \quad (6)$$

где  $R(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - a + b)^2 + 4(a - b)y^2}$ . Отметим, что это непрерывные функции, корректно определенные на всей плоскости.

С помощью эллиптических координат была доказана следующая теорема о полиномиальных решениях уравнения (3) (см. [12]).

**Теорема 2** (С.Е.Пустовойтов). *Уравнение (3) в эллиптических координатах (4) имеет следующий вид:*

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = (\lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2}. \quad (7)$$

*Общее решение уравнения (3) в классе полиномов от декартовых координат  $(x, y)$  имеет следующий вид:*

$$W = \frac{P(\lambda_1(x, y)) - P(\lambda_2(x, y))}{\lambda_1(x, y) - \lambda_2(x, y)}, \quad (8)$$

где  $P$  – произвольный многочлен с нулевой линейной частью.

Стоит отметить, что потенциал  $W$ , определенный формулой (8), зависит полиномиально как от эллиптических координат, так и от декартовых, и, следовательно, корректно задан на всей плоскости вне зависимости от области регулярности эллиптических координат.

**Замечание.** Также отметим, что уравнение (7) можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} ((\lambda_1 - \lambda_2)W) = 0.$$

Общим решением этого уравнения служит рациональная функция

$$W = \frac{f_1(\lambda_1) - f_2(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

где  $f_1$  и  $f_2$  – достаточно гладкие функции одной переменной. Такой потенциал не определен в фокусах биллиарда, т.к.  $\lambda_1(\pm\sqrt{a-b}, 0) = \lambda_2(\pm\sqrt{a-b}, 0) = -b$ . Если  $f_1 = f_2$ , его можно корректно доопределить значением  $f'(-b)$  в фокусах, иначе доопределить нельзя.

Как было отмечено ранее, эллиптические координаты выступают в качестве переменных разделения билиардной системы. Для потенциала вида (8) формулы разделения переменных принимают вид

$$\begin{cases} \frac{d\lambda_1}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)V(\lambda_1, h, f)}, \\ \frac{d\lambda_2}{dt} = \pm \frac{\sqrt{8}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)V(\lambda_2, h, f)}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $V(z, h, f) = -P(z) + hz + f$ . В декартовых координатах они принимают следующий вид:

$$\begin{cases} p_x = \frac{d}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( (-1)^I \sqrt{V(\lambda_1, h, f)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} + (-1)^J \sqrt{V(\lambda_2, h, f)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} \right), \\ p_y = \frac{d}{\lambda_1 - \lambda_2} \left( (-1)^I \sqrt{-V(\lambda_1, h, f)(a + \lambda_1)(b + \lambda_2)} + (-1)^J \sqrt{-V(\lambda_2, h, f)(a + \lambda_2)(b + \lambda_1)} \right), \end{cases}$$

где  $I, J \in \{0, 1\}$ ,  $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}}$ . Здесь в качестве переменных  $h$  и  $f$  выступают значения первых интегралов  $H$  и  $F$  соответственно, а формулы разделения (9) связывают точку некоторой траектории  $(p_x, p_y, x, y)$  и значения первых интегралов  $H = h = const$ ,  $F = f = const$ , соответствующих данной траектории. В частности, формулы разделения можно использовать как для получения образа слоя слоения Лиувилля  $\{H = h, F = f\}$  при проекции

$$Pr : M^4 \rightarrow \mathcal{B}; Pr(x, y, p_x, p_y) = (x, y)$$

из фазового пространства  $M^4$  на билиард  $\mathcal{B}$  (т.н. области возможного движения), так и для восстановления прообраза точки  $(x, y)$  билиардной области при этой проекции. Это идея метода областей возможного движения, разработанного М.П. Харламовым в [13].

С помощью метода областей возможного движения автор в работе [12] описал структуру слоений Лиувилля рассматриваемой системы в ограничении на изоэнергетические многообразия  $Q_h^3$ , заданные неособыми уровнями энергии  $\{H = h\}$ . Иными словами, для эллиптических билиардов с полиномиальным потенциалом были вычислены инварианты Фоменко-Цишанга лиувиллевой эквивалентности (подробнее см. в [4]), а также определены критические значения интегралов  $H$  и  $F$ , соответствующие перестройкам торov Лиувилля. Одним из результатов стало описание бифуркационной диаграммы.

**Определение 1.** *Отображением момента* называется отображение  $\mathcal{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , где  $\mathcal{F}(X) = (H(X), F(X))$ . Точка  $X \in M^4$  называется критической, если в ней падает ранг дифференциала отображения момента. *Бифуркационной диаграммой*  $\Sigma(\mathcal{F})$  называется образ всех критических точек отображения момента в  $\mathbb{R}^2$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\{e_i(h)\}$  – наборы неявно заданных непрерывных функций, каждая из которых определена на некотором подмножестве прямой и принимает значения на отрезке  $[-a, 0]$ , таких, что они обращают уравнение  $P'(e_i(h)) = h$  в тождество (каждая на своей области определения). Тогда бифуркационная диаграмма эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом состоит из дуг следующих кривых:

- $d1_i) f = P(e_i(h)) - he_i(h)$  при  $e_i(h) \in [-a, -b]$ ;
- $d2_i) f = P(e_i(h)) - he_i(h)$  при  $e_i(h) \in [-b, 0]$ ;
- $d3) f = 0$  при  $h \geq 0$ ;
- $d4) f = P(-a) + ah$ ;
- $d5) f = P(-b) + bh$ .

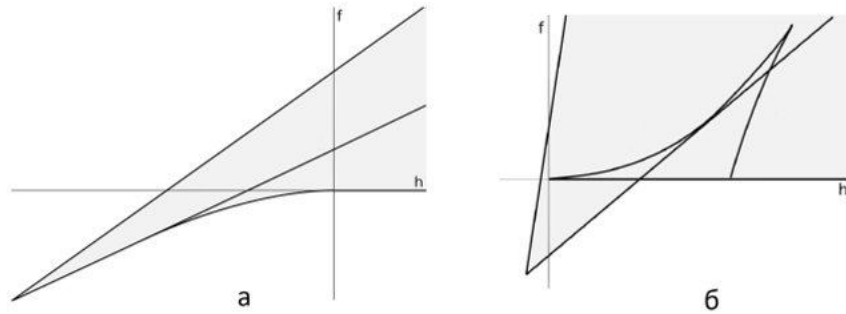


Рис. 1: Примеры бифуркационных диаграмм. Серым закрашены камеры образа отображения момента.

### 3 Невырожденные особые точки ранга ноль

Бифуркационные значения интегралов, описанные в предыдущей теореме, достигаются в точках фазового пространства, в которых ранг отображения момента падает, т.е. дифференциалы  $dH$  и  $dF$  линейно зависимы. Подробнее изучим точки ранга ноль, в которых дифференциалы обращаются в нуль. А именно, найдем эти особые точки и изучим их невырожденность. Частично такой анализ был проведен в работе автора [14] для эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом не более четвертой степени.

**Определение 2.** Пусть  $X = (p, x) \in M^4$  является точкой ранга ноль (т.е.  $dH(X) = dF(X) = 0$ ). Тогда эта точка называется *невырожденной*, если алгебра Ли, порожденная операторами  $A_H = \Omega^{-1}d^2H$  и  $A_F = \Omega^{-1}d^2F$ , является подалгеброй Картана в касательной алгебре  $sp(4, \mathbb{R})$  в точке  $X$ .

**Теорема 4 (Williamson).** Для любой подалгебры Картана в  $\mathfrak{h} \subset sp(2n, \mathbb{R})$  существуют линейные координаты  $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$  линейного симплектического пространства  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  такие, что  $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$  и следующие  $n$  квадратичных многочленов образуют базис  $\mathfrak{h}$ :

- $f_i = p_i^2 + q_i^2$  для  $i = 1, \dots, k$ ;
- $f_i = p_i^2 - q_i^2$  для  $i = k + 1, \dots, n - 2m$ ;
- $\begin{cases} f_i = p_i q_i + p_{i+1} q_{i+1} \\ f_{i+1} = p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i \end{cases}$  для  $i = n - 2m + 2j - 1, j = 1, \dots, m$ .

Подалгебры, соответствующие разным парам чисел  $(k, m)$ , не сопряжены.

**Следствие 1.** В  $sp(4, \mathbb{R})$  существуют четыре подалгебры Картана, заданные следующими матрицами  $4 \times 4$  с точностью до сопряженности:

$$\mathfrak{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h}_2 = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{h}_3 = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h}_4 = \begin{pmatrix} -A & -B & 0 & 0 \\ B & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & -B \\ 0 & 0 & B & A \end{pmatrix}.$$

**Определение 3.** Пусть  $X \in M^4$  есть невырожденная точка ранга ноль. Если операторы  $A_H$  и  $A_F$  задают поалгебру Картана типа  $\mathfrak{h}_1$ , будем говорить, что точка  $X$  имеет тип центр-центр. Если  $A_H$  и  $A_F$  задают поалгебру типа  $\mathfrak{h}_2$ , будем говорить, что точка  $X$  имеет тип центр-седло. Если операторы задают поалгебру типа  $\mathfrak{h}_3$ , точка  $X$  имеет тип седло-седло. Если операторы задают поалгебру типа  $\mathfrak{h}_4$ , точка  $X$  имеет тип фокус-фокус.

В эллиптических координатах формулы первых интегралов имеют вид

$$H = H_1 - H_2, \quad F = \lambda_1 H_2 - \lambda_2 H_1, \quad (10)$$

где

$$H_1 = \frac{2(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1^2 + P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad H_2 = \frac{2(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)\mu_2^2 + P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

В декартовых координатах они приобретают вид

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (11)$$

$$F = \frac{1}{2}(bp_x^2 + ap_y^2 - (xp_y - yp_x)^2) + \frac{\lambda_1 P(\lambda_2) - \lambda_2 P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (12)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  выступают в качестве функций от  $(x, y)$ , определенных системой (6). Стоит отметить, что потенциальная добавка в дополнительный первый интеграл  $\hat{F} = \frac{\lambda_1 P(\lambda_2) - \lambda_2 P(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2}$ , как и сам потенциал  $W$ , является полиномом как от эллиптических координат  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , так и от декартовых  $(x, y)$ . Следовательно, функция  $F$  корректно задана на всем фазовом пространстве.

Отметим, что

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial p_x}, \frac{\partial H}{\partial p_y}, \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \left( p_x, p_y, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y} \right).$$

Таким образом, условие  $dH = 0$  означает, что соответствующая точка  $(x, y)$  билиарда является неподвижной: в ней импульс  $p = (p_x, p_y)$  и потенциальная сила  $\vec{F}_W = -\left( \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y} \right)$  равны нулю. Таким образом, задача поиска точек ранга ноль сводится к задаче поиска неподвижных точек билиарда, в которых все силы скомпенсированы.

В этом разделе мы докажем следующую теорему.

**Теорема 5.** Пусть  $(p_x, p_y, x, y)$  есть невырожденная особая точка ранга ноль эллиптического билиарда с полиномиальным потенциалом. Тогда она неподвижна, т.е.  $p_x = p_y = 0$ , и имеет тип центр-центр, центр-седло или седло-седло.

Более точно, пусть  $\lambda_1 = \lambda_1(x, y)$  и  $\lambda_2 = \lambda_2(x, y)$ . Тогда

- неподвижная точка  $(0, 0, x, y)$  является невырожденной особой точкой ранга ноль с типом центр-центр, если выполнено условие  $CC(\lambda_1, \lambda_2)$ ;
- неподвижная точка является невырожденной особой точкой с типом центр-седло, если выполнено условие  $SC(\lambda_1, \lambda_2)$  или  $CS(\lambda_1, \lambda_2)$ ;
- неподвижная точка является невырожденной особой точкой с типом седло-седло, если выполнено условие  $SS(\lambda_1, \lambda_2)$ .

Условия  $CC$ ,  $CS$ ,  $SC$ ,  $SS$  из теоремы 5 определены следующим образом. Положим  $h = H(0, 0, x, y)$  и зададим следующие вспомогательные условия.

$$C(\lambda) = \begin{cases} P'(\lambda) = h \text{ и } P''(\lambda) < 0 & \text{при } \lambda \in (-a, -b), \\ P'(\lambda) = h \text{ и } P''(\lambda) > 0 & \text{при } \lambda \in (-b, 0), \\ P'(\lambda) < h & \text{при } \lambda = -a, \\ P'(\lambda) > h & \text{при } \lambda = -b, \\ h > 0 & \text{при } \lambda = 0, \end{cases}$$

$$S(\lambda) = \begin{cases} P'(\lambda) = h & \text{и } P''(\lambda) > 0 & \text{при } \lambda \in (-a, -b), \\ P'(\lambda) = h & \text{и } P''(\lambda) < 0 & \text{при } \lambda \in (-b, 0), \\ P'(\lambda) > h & & \text{при } \lambda = -a, \\ P'(\lambda) < h & & \text{при } \lambda = -b. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} CC(\lambda_1, \lambda_2) &= C(\lambda_1) \cap C(\lambda_2), & CS(\lambda_1, \lambda_2) &= C(\lambda_1) \cap S(\lambda_2), \\ SC(\lambda_1, \lambda_2) &= S(\lambda_1) \cap C(\lambda_2), & SS(\lambda_1, \lambda_2) &= S(\lambda_1) \cap S(\lambda_2). \end{aligned}$$

### 3.1 Особые точки при $x \neq 0$ и $y \neq 0$

Найдем точки ранга ноль, не лежащие на осях  $\{x = 0\}$ ,  $\{y = 0\}$  и на границе биллиарда  $\lambda_2 = 0$ . Вне осей эллиптические координаты регулярны, будем работать в них. Из условия  $dH = 0$  получим

$$\partial H / \partial \mu_1 = \frac{4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = 0.$$

Из того, что  $\lambda_1 \neq -a$  и  $\lambda_1 \neq -b$ , следует  $\mu_1 = 0$ . Аналогично  $\mu_2 = 0$ . Таким образом,

$$\partial H / \partial \lambda_1 = \partial W / \partial \lambda_1 = \frac{P'(\lambda_1) - W}{\lambda_1 - \lambda_2} = 0 \implies -P'(\lambda_1) + W = 0.$$

Аналогично  $-P'(\lambda_2) + W = 0$ . Следовательно, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_2 = 0 \\ P'(\lambda_1) = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ P'(\lambda_2) = \frac{P(\lambda_1) - P(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases} \quad (13)$$

Условие  $dF = 0$ , в силу системы (13), выполняется автоматически. Действительно

$$\partial F / \partial \mu_1 = -\frac{4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\lambda_2\mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = 0,$$

$$\partial F / \partial \lambda_1 = \partial \hat{F} / \partial \lambda_1 = \frac{P(\lambda_2) - \lambda_2 P'(\lambda_1) - \hat{F}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{P(\lambda_2) - \lambda_2 W - \hat{F}}{\lambda_1 - \lambda_2} = 0.$$

Аналогично доказывается, что  $\partial F / \partial \mu_2 = 0$  и  $\partial F / \partial \lambda_2 = 0$ .

Таким образом, система уравнения (13) является необходимым и достаточным условием того, что точка  $(\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2)$  есть точка ранга ноль. Без учета условий на область значений координат  $\lambda_1 \in (-a, -b)$ ,  $\lambda_2 \in (-b, 0)$  эта система всегда имеет решения вида  $\lambda_1 = \lambda_2$ . С учетом этих условий решений может вовсе не существовать. Так, несложно показать, что при  $P(z) = c_3 z^3 + c_2 z^2$ , т.е. для потенциала не более

чем четвертой степени, не существует решений системы (13) в указанной области определения.

Вернемся еще раз к дифференциалу  $dF$  и добавим уравнения  $\partial F/\partial\lambda_1 = 0$ ,  $\partial F/\partial\lambda_2 = 0$  к системе (13), учитывая, что  $H(0, 0, \lambda_1, \lambda_2) = W(\lambda_1, \lambda_2)$  и  $F(0, 0, \lambda_1, \lambda_2) = \hat{F}(\lambda_1, \lambda_2)$ . Получим переопределенную систему

$$\begin{cases} dH = 0 \\ dF = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_1 = \mu_2 = 0 \\ -P'(\lambda_1) + H = 0 \\ -P'(\lambda_2) + H = 0 \\ -P(\lambda_1) + H\lambda_1 + F = 0 \\ -P(\lambda_2) + H\lambda_2 + F = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Зафиксируем значения первых интегралов в искомой точке  $H = h$  и  $F = f$ . Второе и третье равенства системы (14) означают, что координаты  $(\lambda_1, \lambda_2)$  искомой точки являются корнями многочлена  $-P'(z) + h$  на отрезке  $[-a, 0]$ . Следовательно,  $\lambda_1 = e_i(h)$  и  $\lambda_2 = e_j(h)$  для некоторых функций  $e_i$  и  $e_j$  из теоремы 3. Четвертое и пятое равенства означают, что значения первых интегралов  $(h, f)$  в искомой точке лежат на пересечении дуг  $d1_i$  и  $d2_j$  бифуркационной диаграммы. Следовательно, поиск особых точек ранга ноль (т.е. решений системы (13)) в этом случае можно произвести в два этапа:

- 1) в образе отображения момента найдем точки  $(h, f)$  пересечения бифуркационных кривых типов  $d1$  и  $d2$ ;
- 2) для полученных значений параметра  $h$  найдем корни уравнения  $P'(z) = h$  на интервалах  $(-a, -b)$  и  $(-b, 0)$ . Это и будут координаты  $(\lambda_1, \lambda_2)$  точек ранга ноль. В силу того, что  $P$  является многочленом, множество полученных решений конечно.

Найдем теперь условия невырожденности полученных точек. Вторые дифференциалы  $d^2H$  и  $d^2F$  в силу системы (13) примут диагональный вид.

$$d^2H = \begin{pmatrix} \frac{4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P''(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{P''(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix},$$

$$d^2F = \begin{pmatrix} -\frac{4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P''(\lambda_1)\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{P''(\lambda_2)\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Из того, что  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , следует, что операторы  $A_H = \Omega^{-1}d^2H$  и  $A_F = \Omega^{-1}d^2F$  линейно независимы и задают двумерную подалгебру касательной алгебры  $sp(4, \mathbb{R})$  в точке  $(0, 0, \lambda_1, \lambda_2) \in M^4$ . Вычислим собственные числа произвольной линейной комбинации  $\alpha A_H + \beta A_F$ . Получим

$$\begin{cases} t_{1,2} = \pm \sqrt{-P''(\lambda_1) \frac{4(a + \lambda_1)(b + \lambda_1)(\alpha - \beta\lambda_2)^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}}, \\ t_{3,4} = \pm \sqrt{-P''(\lambda_2) \frac{4(a + \lambda_2)(b + \lambda_2)(\alpha - \beta\lambda_1)^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}}. \end{cases}$$

Заметим, что если  $P''(\lambda_1) = 0$  или  $P''(\lambda_2) = 0$ , пара собственных чисел принимает нулевое значение вне зависимости от коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , и рассматриваемая точка ранга ноль является вырожденной. В противном случае, рассмотрим четыре возможности.

**Случай  $CC(\lambda_1, \lambda_2)$ :**  $P''(\lambda_1) < 0$  и  $P''(\lambda_2) > 0$ . Тогда, в силу условий на область значений эллиптических координат, все собственные числа  $t_1, t_2, t_3, t_4$  являются чисто мнимыми. Следовательно, особая точка  $(0, 0, \lambda_1, \lambda_2)$  имеет тип центр-центр.

**Случай  $SC(\lambda_1, \lambda_2)$ :**  $P''(\lambda_1) > 0$  и  $P''(\lambda_2) > 0$ . В этом случае собственные числа  $t_1, t_2$  становятся вещественными, в то время как  $t_3, t_4$  остаются мнимыми. Следовательно, особая точка имеет тип центр-седло.

**Случай  $CS(\lambda_1, \lambda_2)$ :**  $P''(\lambda_1) < 0$  и  $P''(\lambda_2) < 0$ . Этот случай симметричен предыдущему. Особая точка также имеет тип центр-седло. Разделение двух этих случаев будет обусловлено при изучении структуры слоения Лиувилля в окрестности слоев, содержащих особые точки.

**Случай  $SS(\lambda_1, \lambda_2)$ :**  $P''(\lambda_1) > 0$  и  $P''(\lambda_2) < 0$ . В этом случае все собственные числа вещественны, и особая точка имеет тип седло-седло.

Таким образом, теорема 5 была доказана в случае  $\lambda_1 \in (-a, -b)$  и  $\lambda_2 \in (-b, 0)$ .

### 3.2 Особые точки при $x = 0, y \neq 0$

Рассмотрим теперь внутренние точки билиярда, лежащие на оси  $\{x = 0\}$ . Положим  $y \neq 0$  (случай  $y = 0$  будет рассмотрен отдельно). На осях эллиптические координаты вырождаются, поэтому все вычисления будем производить в декартовых координатах  $(x, y)$ . Как было отмечено ранее, мы ищем неподвижные точки билиярда. При этом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} = x \frac{P'(\lambda_1(x, y)) - P'(\lambda_2(x, y))}{\lambda_1(x, y) - \lambda_2(x, y)} + \\ + x(x^2 + y^2 - a + b) \frac{P'(\lambda_1(x, y)) + P'(\lambda_2(x, y)) - 2W}{(\lambda_1(x, y) - \lambda_2(x, y))^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial y} = y \frac{P'(\lambda_1(x, y)) - P'(\lambda_2(x, y))}{\lambda_1(x, y) - \lambda_2(x, y)} + \\ + y(x^2 + y^2 + a - b) \frac{P'(\lambda_1(x, y)) + P'(\lambda_2(x, y)) - 2W}{(\lambda_1(x, y) - \lambda_2(x, y))^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  принимаются как функции, определенные формулами (6). При  $x = 0$  производная  $\partial W/\partial x$  равна нулю автоматически. Кроме того, имеем

$$\lambda_1(0, y) \equiv -a, \quad \lambda_2(0, y) = y^2 - b.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{x=0} &= y \frac{P'(-a) - P'(y^2 - b)}{-y^2 - a + b} + y(y^2 + a - b) \frac{P'(-a) + P'(y^2 - b) - 2W}{(-y^2 - a + b)^2} = \\ &= 2y \frac{P'(y^2 - b) - W}{y^2 + a - b}. \end{aligned}$$

Таким образом, если точка  $(0, 0, 0, y)$  является особой точкой ранга ноль, координата  $y$  удовлетворяет уравнению

$$P'(y^2 - b) = \frac{P(-a) - P(y^2 - b)}{-y^2 - a + b} = H(0, 0, 0, y). \quad (17)$$

Это полиномиальное уравнение, которое на отрезке  $y \in [-\sqrt{b}, \sqrt{b}]$  имеет конечное число корней.

Вычислим теперь дифференциал  $dF$ . Имеем,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial p_x} = bp_x + y(xp_y - yp_x), \quad \frac{\partial F}{\partial p_y} = ap_y - x(xp_y - yp_x) \\ \frac{\partial F}{\partial x} = -p_y(xp_y - yp_x) + x \left( \frac{\lambda_1 P'(\lambda_2) - \lambda_2 P'(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} - W \right) + \\ \quad + x(x^2 + y^2 - a + b) \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)W - \lambda_1 P'(\lambda_2) - \lambda_2 P'(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = p_x(xp_y - yp_x) + y \left( \frac{\lambda_1 P'(\lambda_2) - \lambda_2 P'(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} - W \right) + \\ \quad + y(x^2 + y^2 + a - b) \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)W - \lambda_1 P'(\lambda_2) - \lambda_2 P'(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} \end{array} \right. \quad (18)$$

Подстановка  $x = p_x = p_y = 0$  и  $P'(y^2 - b) = W$  дает

$$\frac{\partial F}{\partial p_x} = \frac{\partial F}{\partial p_y} = \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2ay \frac{P'(y^2 - b) - W}{y^2 + a - b} = 0.$$

Таким образом,  $dH = dF = 0$ , и искомая особая точка ранга ноль полностью определяется уравнением (17).

Заметим, что в искомой особой точке  $(0, 0, 0, y)$  в силу формул (11) и (12) имеет место система уравнений

$$\begin{cases} P(-a) - P(\lambda_2) = (-a - \lambda_2)h, \\ -aP(\lambda_2) - \lambda_2 P(-a) = (-a - \lambda_2)f, \end{cases}$$

где  $\lambda_2 = y^2 - b$ ,  $h$  и  $f$  – значения первых интегралов. Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} -P(-a) - ha + f = 0, \\ -P(\lambda_2) + \lambda_2 h + f = 0. \end{cases}$$

Первое равенство этой системы означает, что точка  $(h, f)$  образа отображения момента лежит на дуге  $d4$  бифуркационной диаграммы. Второе равенство вместе с уравнением (17) означают, что эта же точка лежит на некоторой дуге  $d2_i$ .

Исследуем невырожденность найденной особой точки. В силу уравнения (17) вторые дифференциалы  $d^2H$ ,  $d^2F$  примут вид

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(a-b)\frac{h - P'(-a)}{(y^2 + a - b)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\frac{P''(y^2 - b)y^2}{y^2 + a - b} \end{pmatrix},$$

$$d^2F = \begin{pmatrix} b - y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(a-b)(b - y^2)\frac{h - P'(-a)}{(y^2 + a - b)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a\frac{P''(y^2 - b)y^2}{y^2 + a - b} \end{pmatrix},$$

где  $h = H(0, 0, 0, y)$ . Заметим, что  $y^2 + a - b > 0$ . Следовательно, операторы  $A_H = \Omega^{-1}d^2H$  и  $A_F = \Omega^{-1}d^2F$  линейно независимы и задают двумерную подалгебру алгебры  $sp(4, \mathbb{R})$ . Вычислим собственные числа линейной комбинации  $\alpha A_H + \beta A_F$ . Получим

$$\begin{cases} t_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2(a-b)(\alpha + \beta(b - y^2))^2}{(y^2 + a - b)^2}} (P'(-a) - h), \\ t_{3,4} = \pm \sqrt{-\frac{4y^2(\alpha + \beta a)^2}{y^2 + a - b}} P''(y^2 - b). \end{cases}$$

Если  $P'(-a) = h$  или  $P''(y^2 - b) = 0$ , пара собственных чисел обращается в ноль вне зависимости от коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , и особая точка является вырожденной. Иначе существует четыре возможности (как и в прошлом случае).

**Случай  $CC(-a, \lambda_2)$ :**  $P'(-a) < h$  и  $P''(\lambda_2) > 0$ . Тогда все собственные числа являются чисто мнимыми. Следовательно, точка  $(0, 0, 0, y)$  является невырожденной точкой типа центр-центр.

**Случай  $SC(-a, \lambda_2)$ :**  $P'(-a) > h$  и  $P''(\lambda_2) > 0$ . В этом случае собственные числа  $t_1$  и  $t_2$  становятся вещественными, в то время как  $t_3$  и  $t_4$  остаются мнимыми. Тогда особая точка имеет тип центр-седло.

**Случай  $CS(-a, \lambda_2)$ :**  $P'(-a) < h$  и  $P''(\lambda_2) < 0$ . Тогда  $t_1$  и  $t_2$  являются мнимыми, в то

время как  $t_3$  и  $t_4$  становятся вещественными. Это также случай центр-седло.

**Случай**  $SS(-a, \lambda_2)$ :  $P'(-a) > h$  и  $P''(\lambda_2) < 0$ . В этом случае все собственные числа становятся вещественными, а особая точка имеет тип седло-седло.

Таким образом, теорема 5 была доказана в случае  $\lambda_1 = -a$  и  $\lambda_2 \in (-b, 0)$ .

### 3.3 Особые точки при $y = 0$ , $a - b < x^2 < a$

Рассмотрим теперь внутренние точки бильярда, лежащие на фокальной оси  $\{y = 0\}$ . Сначала положим  $x^2 > a - b$ , т.е. рассмотрим точки вне фокального отрезка. В этих точках имеем

$$\lambda_1(x, 0) \equiv -b, \quad \lambda_2(x, 0) = x^2 - a.$$

Из формул дифференциалов  $dH$  и  $dF$ , приведенных ранее в декартовых координатах, следует, что точка  $(0, 0, x, 0)$  является особой точкой ранга ноль, если и только если она удовлетворяет уравнению

$$P'(x^2 - a) = \frac{P(-b) - P(x^2 - a)}{-x^2 + a - b} = H(0, 0, x, 0). \quad (19)$$

Это полиномиальное уравнение, которое имеет конечное число решений.

Положим  $h = H(0, 0, x, 0)$ ,  $f = F(0, 0, x, 0)$  значения первых интегралов в искомой особой точке. Заметим, что тогда, в силу формул первых интегралов (11) и (12), имеет место система уравнений

$$\begin{cases} P(-b) - P(\lambda_2) = (-b - \lambda_2)h, \\ -bP(\lambda_2) - \lambda_2P(\lambda_1) = (-b - \lambda_2)f, \end{cases}$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} -P(-b) - hb + f = 0, \\ -P(\lambda_2) + \lambda_2h + f = 0. \end{cases}$$

Вместе с уравнением (19) это означает, что точка  $(h, f)$  образа отображения момента лежит в пересечении дуг  $d5$  и  $d2_i$  бифуркационной диаграммы.

Изучим невырожденность искомой особой точки  $(0, 0, x, 0)$ . В силу уравнения (19) вторые дифференциалы  $d^2H$ ,  $d^2F$  примут вид

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \frac{P''(x^2 - a)x^2}{x^2 - a + b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(a - b) \frac{P'(-b) - h}{(x^2 - a + b)^2} \end{pmatrix},$$

$$d^2F = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a - x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4b \frac{P''(x^2 - a)x^2}{x^2 - a + b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(a - b)(a - x^2) \frac{P'(-b) - h}{(x^2 - a + b)^2} \end{pmatrix}.$$

где  $h = H(0, 0, x, 0)$ . Из  $x^2 \neq a - b$  следует, что операторы  $A_H = \Omega^{-1}d^2H$  и  $A_F = \Omega^{-1}d^2F$  линейно независимы и задают двумерную подалгебру в  $sp(4, \mathbb{R})$ . Собственные числа произвольного элемента  $\alpha A_H + \beta A_F$  этой подалгебры имеют вид

$$\begin{cases} t_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2(a - b)(\alpha + \beta(a - x^2))^2}{(x^2 - a + b)^2}} (h - P'(-b)), \\ t_{3,4} = \pm \sqrt{-\frac{4x^2(\alpha + \beta b)^2}{x^2 - a + b} P''(x^2 - a)}. \end{cases}$$

Искомая точка  $(0, 0, x, 0)$  является невырожденной только в случае, если  $P'(-b) \neq h$  и  $P''(x^2 - a) \neq 0$ . Тогда, существуют четыре возможности.

**Случай  $CC(-b, \lambda_2)$ :**  $P'(-b) > h$  и  $P''(\lambda_2) > 0$ . Тогда все собственные числа являются мнимыми, и особая точка имеет тип центр-центр.

**Случай  $SC(-b, \lambda_2)$ :**  $P'(-b) < h$  и  $P''(\lambda_2) > 0$ . В этом случае собственные числа  $t_1$  и  $t_2$  становятся вещественными, в то время как  $t_3$  и  $t_4$  остаются мнимыми. Тогда особая точка имеет тип центр-седло.

**Случай  $CS(-b, \lambda_2)$ :**  $P'(-b) > h$  и  $P''(\lambda_2) < 0$ . Здесь вещественными становятся собственные числа  $t_3, t_4$ , а собственные числа  $t_1, t_2$  остаются мнимыми. Особая точка снова имеет тип центр-седло.

**Случай  $SS(-b, \lambda_2)$ :**  $P'(-b) < h$  и  $P''(\lambda_2) < 0$ . В этом случае все собственные числа становятся вещественными, и особая точка имеет тип седло-седло.

Таким образом, теорема 5 была доказана в случае  $\lambda_1 = -b$  и  $\lambda_2 \in (-b, 0)$ .

### 3.4 Особые точки при $y = 0$ , $0 < x^2 < a - b$

Рассмотрим теперь симметричный случай  $y = 0$  и  $0 < x^2 < a - b$ , т.е. теперь искомая особая точка лежит между фокусами граничного эллипса, но  $x \neq 0$ . В этом случае имеем

$$\lambda_1(x, 0) = x^2 - a, \quad \lambda_2(x, 0) \equiv -b.$$

Условием того, что точка  $(0, 0, x, 0)$  является точкой ранга ноль, также служит уравнение (19). Однако теперь соответствующие значения первых интегралов  $h = H(0, 0, x, 0)$  и  $f = F(0, 0, x, 0)$  задают точку  $(h, f)$  в образе отображения момента на пересечении бифуркационных кривых  $d5$  и  $d1_i$  для некоторого  $i$ . Вторые дифференциалы  $d^2H$  и

$d^2F$  в силу уравнения (19) примут вид

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4\frac{P''(x^2-a)x^2}{x^2-a+b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(a-b)\frac{P'(-b)-h}{(x^2-a+b)^2} \end{pmatrix},$$

$$d^2F = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4b\frac{P''(x^2-a)x^2}{x^2-a+b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(a-b)(a-x^2)\frac{P'(-b)-h}{(x^2-a+b)^2} \end{pmatrix}.$$

Соответствующие операторы  $A_H = \Omega^{-1}d^2H$  и  $A_F = \Omega^{-1}d^2F$  снова задают двумерную подалгебру в  $sp(4, \mathbb{R})$ , и собственные числа элемента  $\alpha A_H + \beta A_F$  примут вид

$$\begin{cases} t_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{4x^2(\alpha + \beta b)^2}{x^2 - a + b} P''(x^2 - a)}, \\ t_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{2(a-b)(\alpha + \beta(a-x^2))^2}{(x^2 - a + b)^2} (h - P'(-b))}. \end{cases}$$

Имеют место четыре случая невырожденности.

**Случай**  $CC(\lambda_1, -b)$ :  $P'(-b) > h$  и  $P''(\lambda_1) < 0$ . Тогда все собственные числа являются мнимыми, и особая точка имеет вид центр-центр.

**Случай**  $SC(\lambda_1, -b)$ :  $P'(-b) > h$  и  $P''(\lambda_1) > 0$ . В этом случае собственные числа  $t_1$  и  $t_2$  становятся вещественными, в то время как  $t_3$  и  $t_4$  остаются мнимыми. Тогда особая точка имеет тип центр-седло.

**Случай**  $CS(\lambda_1, -b)$ :  $P'(-b) < h$  и  $P''(\lambda_1) < 0$ . Здесь вещественными становятся собственные числа  $t_3, t_4$ , а собственные числа  $t_1, t_2$  остаются мнимыми. Особая точка снова имеет тип центр-седло.

**Случай**  $SS(\lambda_1, -b)$ :  $P'(-b) < h$  и  $P''(\lambda_1) > 0$ . В этом случае все собственные числа становятся вещественными, и особая точка имеет тип седло-седло.

Таким образом, теорема 5 была доказана в случае  $\lambda_1 \in (-a, -b)$  и  $\lambda_2 = -b$ .

### 3.5 Центр и фокусы бильярда

Вне рассмотрения остались лишь три точки оси  $\{y = 0\}$ :  $x = 0$  – центр бильярда, и  $x = \pm\sqrt{a-b}$  – фокусы. Рассмотрим сначала точку  $(0, 0)$ . Из формул (15), (16) и (18) следует, что это неподвижная точка бильярда и, более того, точка ранга ноль. Функции  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в этой точке принимают значения

$$\lambda_1(0, 0) = -a, \quad \lambda_2 = -b.$$

Нетрудно заметить, что значения первых интегралов  $H(0, 0, 0, 0) = h$ ,  $F(0, 0, 0, 0) = f$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -P(-a) - ah + f = 0, \\ -P(-b) - bh + f = 0. \end{cases}$$

Следовательно, точка  $(h, f)$  образа отображения момента лежит на пересечении бифуркационных кривых  $d4$  и  $d5$ .

Вторые дифференциалы первых интегралов в точке  $(0, 0, 0, 0)$  принимают вид

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{h - P'(-a)}{a - b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{P'(-b) - h}{a - b} \end{pmatrix}, \quad d^2F = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b\frac{h - P'(-a)}{a - b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a\frac{P'(-b) - h}{a - b} \end{pmatrix}.$$

Операторы  $A_H$  и  $A_F$  являются линейно независимыми. Вычислим собственные числа их линейной комбинации  $\alpha A_H + \beta A_F$ .

$$\begin{cases} t_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2(\alpha + \beta b)^2}{a - b} (P'(-a) - h)}, \\ t_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{2(\alpha a + \beta)^2}{a - b} (h - P'(-b))}. \end{cases}$$

Как и во всех прошлых случаях, существуют четыре варианта невырожденности этой особой точки.

**Случай  $CC(-a, -b)$ :**  $P'(-b) > h$  и  $P'(-a) < h$ . Тогда все собственные числа являются мнимыми, и особая точка имеет вид центр-центр.

**Случай  $SC(-a, -b)$ :**  $P'(-b) > h$  и  $P'(-a) > h$ . В этом случае собственные числа  $t_1$  и  $t_2$  становятся вещественными, в то время как  $t_3$  и  $t_4$  остаются мнимыми. Тогда особая точка имеет тип центр-седло.

**Случай  $CS(-a, -b)$ :**  $P'(-b) < h$  и  $P'(-a) < h$ . Здесь вещественными становятся собственные числа  $t_3, t_4$ , а собственные числа  $t_1, t_2$  остаются мнимыми. Особая точка снова имеет тип центр-седло.

**Случай  $SS(-a, -b)$ :**  $P'(-b) < h$  и  $P'(-a) > h$ . В этом случае все собственные числа становятся вещественными, и особая точка имеет тип седло-седло.

Таким образом, теорема 5 была доказана в случае  $\lambda_1 = -a$  и  $\lambda_2 = -b$ . Остались лишь фокусы биллиарда. Покажем, что если они соответствуют особенности ранга ноль, то эта особенность вырожденная. Имеем

$$\lambda_1(\pm\sqrt{a-b}, 0) = \lambda_2(\pm\sqrt{a-b}, 0) = -b.$$

Из формул (15), (16) на частные производные потенциала следует, что  $\frac{\partial W}{\partial y}|_{y=0} \equiv 0$  и

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x}|_{y=0} &= x \frac{P'(x^2 - a) - P'(-b)}{x^2 - a + b} + x(x^2 - a + b) \frac{P'(x^2 - a) + P'(-b) - 2W}{(x^2 - a + b)^2} = \\ &= 2x \frac{P'(x^2 - a) - W|_{y=0}}{x^2 - a + b}. \end{aligned}$$

При этом, по разложению Тейлора в окрестности  $x^2 = a - b$ , получим

$$\begin{aligned} W|_{y=0} &= \frac{P(x^2 - a) - P(-b)}{x^2 - a + b} = \\ &= \frac{P'(-b)(x^2 - a + b) + \frac{1}{2}P''(-b)(x^2 - a + b)^2 + R(x)(x^2 - a + b)^3}{x^2 - a + b} = \\ &= P'(-b) + \frac{1}{2}P''(-b)(x^2 - a + b) + R(x)(x^2 - a + b)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем следующее условие того, что искомая точка является точкой ранга ноль:

$$\frac{\partial W}{\partial x}(\pm\sqrt{a-b}, 0) = \mp\sqrt{a-b}P''(-b) = 0$$

Более того, аналогичные вычисления дифференциала  $dF$  из формул (18) дают

$$\frac{\partial F}{\partial p_x} = \frac{\partial F}{\partial p_y} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(\pm\sqrt{a-b}, 0) = \mp b\sqrt{a-b}P''(-b) = 0.$$

Таким образом, условие  $P''(-b) = 0$  является необходимым и достаточным для того, что искомая точка есть особая точка ранга ноль.

Вторые дифференциалы  $d^2H$  и  $d^2F$  в точке  $(0, 0, \pm\sqrt{a-b}, 0)$  с учетом полученного условия имеют вид

$$d^2H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4(a-b)P'''(-b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d^2F = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4b(a-b)P'''(-b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как можно видеть, дифференциалы, а значит и операторы  $A_H = \Omega^{-1}d^2H$  и  $A_F = \Omega^{-1}d^2F$ , линейно зависимы. Следовательно, они не образуют двумерную подалгебру, и особая точка в фокусе бильярда вырождена.

### 3.6 Особые точки на границе бильярда

Таким образом, мы нашли все невырожденные особые точки ранга ноль во внутренности рассматриваемого бильярда и определили их тип. Однако мы не рассмотрели

точки на граничном эллипсе  $\lambda_2 = 0$ . Отметим, что в этих точках нарушается гладкость системы. Иными словами, мы не можем корректно вычислить дифференциалы  $dH$  и  $dF$ . Тем не менее, для поиска точек ранга ноль используем их механический смысл. А именно, найдем неподвижные точки бильярда на границе.

Положим сначала  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  и найдем неподвижную точку с эллиптическими координатами  $(0, 0, \lambda_1, 0)$ . В силу того, что линейная часть многочлена  $P$  равна нулю, получим

$$P(0) = P'(0) = 0.$$

Потенциальная сила в этой точке примет вид

$$\vec{F}_W = \left( \frac{W - P'(\lambda_1)}{\lambda_1}, \frac{P'(0) - W}{\lambda_1} \right) = \left( \frac{h - P'(\lambda_1)}{\lambda_1}, -\frac{h}{\lambda_1} \right),$$

где  $h = H(0, 0, \lambda_1, 0)$  – значение энергии в искомой точке. Однако теперь на материальную точку оказывает действие сила реакции опоры  $\vec{N}$ . При  $h > 0$  она компенсирует  $\lambda_2$ -компоненту потенциальной силы, и композиция сил примет вид

$$\vec{F}_W + \vec{N} = \left( \frac{h - P'(\lambda_1)}{\lambda_1}, 0 \right).$$

При  $h \leq 0$  сила реакции опоры перестает действовать. Таким образом, условия на неподвижность точки  $(\lambda_1, 0)$  примут вид

$$\begin{cases} h \geq 0, \\ P'(\lambda_1) = h. \end{cases} \quad (20)$$

Решения полученной системы и будем принимать в качестве точек ранга ноль. Отметим, что это полиномиальная система, которая имеет конечное число корней.

Заметим, что в искомой точке  $f = F(0, 0, \lambda_1, 0) = 0$ . Следовательно, точка  $(h, 0)$  в образе отображения момента лежит на бифуркационной дуге  $d3$ . В то же время, имеем

$$P(\lambda_2) = W(0, \lambda_2)\lambda_2 = h\lambda_2 + f.$$

Вместе с условием  $P'(\lambda_1) = h$  это означает, что точка  $(h, 0)$  лежит на бифуркационной дуге  $d1_i$  для некоторого  $i$ .

Невырожденность полученной особой точки  $(0, 0, \lambda_1, 0)$  определим, исходя из структуры бифуркационной диаграммы в окрестности соответствующей точки  $(h, 0)$  в образе отображения момента.

Рассмотрим точку  $(0, \mu_2, \lambda_1 + \varepsilon, 0)$  для некоторого малого  $\varepsilon$ . Тогда значения первых интегралов в этой точке примут вид

$$f_+ = F(0, \mu_2, \lambda_1 + \varepsilon, 0) = 2ab\mu_2^2, \quad h_+ = H(0, \mu_2, \lambda_1 + \varepsilon, 0) = \frac{P(\lambda_1 + \varepsilon) - 2ab\mu_2^2}{\lambda_1 + \varepsilon}.$$

Несложно заметить, что значения первых интегралов удовлетворяют условию

$$-P(\lambda_1 + \varepsilon) + h_+(\lambda_1 + \varepsilon) + f_+ = 0.$$

Найдем такое значение импульса  $\mu_2$ , что  $P'(\lambda_1 + \varepsilon) = h_+$ . В этом случае дифференциалы  $dH$  и  $dF$  в рассматриваемой точке линейно зависимы, и значения первых интегралов  $(h_+, f_+)$  лежат на бифуркационной дуге в образе отображения момента. Имеем

$$2ab\mu_2^2 = P(\lambda_1 + \varepsilon) - (\lambda_1 + \varepsilon)P'(\lambda_1 + \varepsilon).$$

Отметим, что из условия (20) на неподвижность точки  $(0, 0, \lambda_1, 0)$  вытекает

$$P(\lambda_1) - \lambda_1 P'(\lambda_1) = 0.$$

Таким образом, знак функции  $g(z) = P(z) - zP'(z)$  в точке  $z = \lambda_1 + \varepsilon$  зависит от знака функции  $g'(z) = -zP''(z)$  в этой точке. Если  $P''(\lambda_1 + \varepsilon) > 0$ , то компонента импульса  $\mu_2$  корректно определена и  $f_+ > 0$ . В этом случае точка  $(h_+, f_+)$  лежит на некоторой бифуркационной кривой  $d1_i$ , для которой

$$e_i(h_+) = \lambda_1 + \varepsilon \quad \text{и} \quad e_i(h) = \lambda_1.$$

Если же  $P''(\lambda_1 + \varepsilon) < 0$ , компонента импульса  $\mu_2$  чисто мнимая, и  $f_+ < 0$ . В этом случае движение не определено, и точка  $(h_+, f_+)$  не лежит в образе отображения момента.

Аналогично рассмотрим точки  $(0, \mu_2, \lambda_1 - \varepsilon, 0)$ . При  $P''(\lambda_1 - \varepsilon) > 0$  функция  $g(z)$  возрастает на отрезке  $[\lambda_1 - \varepsilon, \lambda_1]$ . Следовательно,  $g(\lambda_1 - \varepsilon) < 0$ . В этом случае компонента импульса  $\mu_2$  чисто мнимая, и  $f_- < 0$ . Таким образом, движение не определено, а точка  $(h_-, f_-)$  лежит вне образа отображения момента. Если же  $P''(\lambda_1 - \varepsilon) < 0$ , то  $f_- > 0$ , и движение корректно определено. В этом случае точка  $(h_-, f_-)$  лежит на бифуркационной дуге  $d1_j$ , для которой

$$e_j(h_-) = \lambda_1 - \varepsilon \quad \text{и} \quad e_j(h) = \lambda_1.$$

Итак, существуют четыре возможности. При  $P''(\lambda_1 - \varepsilon) < 0$  и  $P''(\lambda_1 + \varepsilon) > 0$  в окрестности точки  $(h, 0)$  образа отображения момента лежат две бифуркационные дуги  $d1_i$  и  $d1_j$ , проходящие через эту точку. Заметим, что построенные бифуркационные дуги различны, т.к. отвечают за точки экстремумов многочлена  $P'$  на разных подмножествах интервала  $(-a, -b)$ . В то же время, эти дуги имеют общую точку касания  $(h, 0)$ , лежащую на третьей бифуркационной дуге  $d3$  (см. рис. 2,а). Подобное поведение бифуркационной диаграммы не характерно для невырожденных особенностей. Отметим, что этот случай возникает, если многочлен  $P''(z)$  в точке  $z = \lambda_1$  имеет нечетный порядок нуля (что достигается в общем случае  $P'''(\lambda_1) \neq 0$ ), и многочлен  $P'(\lambda_1)$  имеет точку минимума в  $z = \lambda_1$ .

В случае  $P''(\lambda_1 - \varepsilon) > 0$  и  $P''(\lambda_1 + \varepsilon) < 0$  точка  $(h, 0)$  образа отображения момента лежит лишь на дуге  $d3$  бифуркационной диаграммы (см. рис. 2,б). Это также не соответствует невырожденным особенностям. Этот случай возникает, если многочлен  $P''(z)$  в точке  $z = \lambda_1$  имеет нечетный порядок нуля, и  $P'(\lambda_1)$  имеет точку максимума в  $z = \lambda_1$ .

В оставшихся двух случаях  $P''(\lambda_1 \pm \varepsilon) > 0$  и  $P''(\lambda_1 \pm \varepsilon) < 0$  точка  $(h, 0)$  лежит на трансверсальном пересечении двух бифуркационных дуг:  $d1_k$  для некоторого  $k$  и  $d3$ .

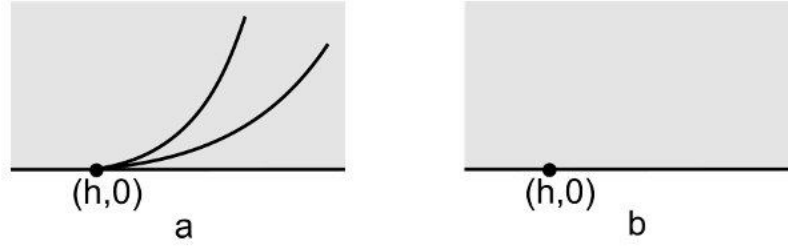


Рис. 2: Два случая, при которых точка  $(h, 0)$  не отвечает невырожденной особенности

Это типичная структура бифуркационной диаграммы невырожденной особенности. Она достигается, если многочлен  $P''(z)$  в точке  $z = \lambda_1$  имеет четный порядок нуля. Ограничимся самым простым случаем – нулевым порядком нуля, т.е.  $P''(\lambda_1) \neq 0$ .

Теперь определим, существуют ли дуги бифуркационной диаграммы, касающиеся дуги  $d3$  в точке  $(h, 0)$ . Отметим, что для дуг типов  $d1$  и  $d2$  имеем

$$\frac{df}{dh} = -e_i(h).$$

Следовательно, для того, чтобы дуга  $d1_i$  или  $d2_i$  касалась дуги  $d3$ , необходимо и достаточно  $e_i(h) = 0$ . Но тогда

$$h = P'(e_i(h)) = P'(0) = 0.$$

Следовательно, касание двух бифуркационных дуг может быть только в точке  $(0, 0)$ . Исключим этот случай, положив  $P(\lambda_1) \neq 0$ .

Результирующие условия невырожденности найденных особых точек ранга ноль с эллиптическими координатами  $(0, 0, \lambda_1, 0)$  имеют вид  $P''(\lambda_1) \neq 0$  и  $P(\lambda_1) < 0$ . Как и ранее для внутренних точек биллиарда, определим типы особенностей. Однако теперь используем не алгебраические методы, а структуру слоения Лиувилля в окрестности найденных особых точек. Подробнее про слоение Лиувилля будет сказано в следующем разделе.

**Случай**  $CC(\lambda_1, 0)$ :  $P''(\lambda_1) < 0$ . В этом случае особая точка имеет тип центр-центр.

**Случай**  $SC(\lambda_1, 0)$ :  $P''(\lambda_1) > 0$ . В этом случае особая точка имеет тип центр-седло.

Найдем теперь условия неподвижности граничных точек при  $x = 0$ , т.е. точек с декартовыми координатами  $(0, 0, 0, \pm\sqrt{b})$ . Функция  $\lambda_1$  в этих точках равна  $-a$ . Потенциальная сила имеет вид

$$\vec{F}_W = \left(0, \mp \frac{2\sqrt{b}P(-a)}{a^2}\right).$$

При  $P(-a) < 0$  на материальную точку оказывает действие сила реакции опоры  $\vec{N}$ , полностью компенсируя потенциальную силу. При  $P(-a) \geq 0$  сила реакции опоры нулевая, и точка неподвижна только при  $P(-a) = 0$ . Таким образом, единственным условием на неподвижность точек  $(0, 0, 0, \pm\sqrt{b})$  выступает неравенство

$$P(-a) \leq 0.$$

Отметим, что значения первых интегралов в данных точках примут вид

$$h = H(0, 0, 0, \pm\sqrt{b}) = -\frac{P(-a)}{a}, \quad f = F(0, 0, 0, \pm\sqrt{b}) = 0.$$

Следовательно, условие неподвижности примет вид

$$h \geq 0,$$

и точка  $(h, 0)$  в образе отображения момента лежит на пересечении бифуркационных кривых  $d3$  и  $d4$ .

Невырожденность особой точки также определим с помощью структуры бифуркационной диаграммы в окрестности точки  $(h, 0)$ . Исключим случай  $P(-a) = 0$  из тех же соображений, что и выше для точки  $(0, 0, \lambda_1, 0)$ . Также заметим, что если  $P'(-a) = h$ , точка  $(h, 0)$  лежит на бифуркационной дуге  $d1_i$ , для которой  $e_i(h)$ . Более того, эта дуга касается дуги  $d4$  в точке  $(h, 0)$  (см. рис. 2,а). Такое устройство бифуркационной диаграммы не характерно в окрестности невырожденных точек. Следовательно, также исключим этот случай.

Таким образом, результирующие условия невырожденности точек  $(0, 0, 0, \pm\sqrt{b})$  имеют вид

$$P(-a) < 0, \quad P'(-a) \neq h.$$

Из структуры слоения Лиувилля в окрестности этих особых точек получим следующие случаи.

**Случай**  $CC(-a, 0)$ :  $P'(-a) < h$ . В этом случае особые точки имеют тип центр-центр.

**Случай**  $SC(-a, 0)$ :  $P'(-a) > h$ . В этом случае особые точки имеют тип центр-седло.

Аналогично рассмотрим точки с декартовыми координатами  $(0, 0, \pm\sqrt{a}, 0)$ , лежащие в пересечении фокальной прямой и границы бильярда. Функция  $\lambda_1$  в этих точках равна  $-b$ . Единственное условие неподвижности рассматриваемых точек также имеет вид

$$P(-b) \leq 0.$$

Соответствующие значения первых интегралов  $(h, 0)$  лежат в пересечении бифуркационных дуг  $d3$  и  $d5$ . При этом рассматриваемые особенности невырождены, если  $P'(-b) \neq 0$  и  $h > 0$ . Имеют место два типа особенностей.

**Случай**  $CC(-b, 0)$ :  $P'(-b) > h$ . В этом случае особые точки имеют тип центр-центр.

**Случай**  $SC(-b, 0)$ :  $P'(-b) < h$ . В этом случае особые точки имеют тип центр-седло.

Таким образом, были рассмотрены все особые точки бильярда и определены условия на их невырожденность. Теорема 5 полностью доказана.

## 4 Структура слоения Лиувилля нерасщепляемых особенностей

В предыдущем разделе мы нашли все невырожденные точки ранга ноль эллиптического бильярда с потенциалом и определили их тип. Теперь пойдем дальше и изучим

структуру слоения Лиувилля фазового пространства  $M^4$  в четырехмерной окрестности слоев, содержащих найденные особые точки. Иными словами, изучим полулокальную структуру слоения Лиувилля невырожденных особенностей ранга ноль. Дополнительно к условию невырожденности наложим условие нерасщепляемости, введенное Н.Т. Зунгом в [17].

**Определение 4.** Будем говорить, что для невырожденной особенности ранга ноль выполнено условие *нерасщепляемости*, если для каждой особой точки ранга ноль  $X \in M^4$  на ее особом слое локальная бифуркационная диаграмма совпадает с бифуркационной диаграммой в окрестности соответствующего критического значения первых интегралов  $(h, f)$ .

Иными словами, множество критических значений локального отображения момента  $\mathcal{F}_{loc} : U^4(X) \rightarrow \mathbb{R}^2$  совпадает с множеством критических значений “глобального” отображения момента  $\mathcal{F} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  в окрестности точки  $(H(X), F(X))$ .

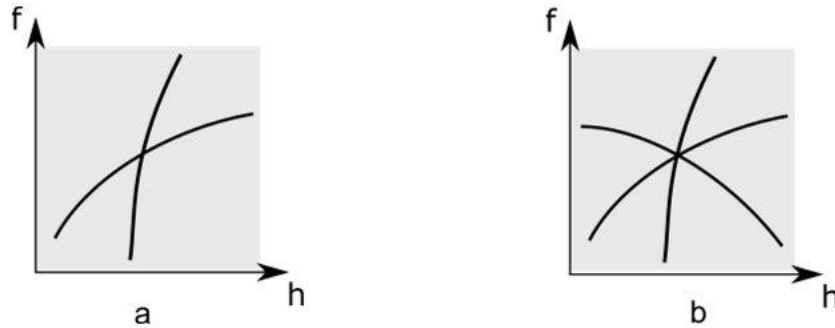


Рис. 3: Структура бифуркационной диаграммы в окрестности особого значения первых интегралов. Рис. а отвечает нерасщепляемой особенности. Рис. б отвечает расщепляемой особенности

В частности, это условие означает, что в случае центр-центр, центр-седло или седло-седло критические значения первых интегралов  $(h, f)$  нерасщепляемой особенности задают точку трансверсального пересечения ровно двух бифуркационных кривых (см. рис. 3,а). Для нашей системы биллиарда с потенциалом условие нерасщепляемости эквивалентно следующему.

**Лемма 1.** Пусть  $(0, 0, x_1, y_1)$  и  $(0, 0, x_2, y_2)$  – две невырожденные особые точки ранга ноль, лежащие на одном особом слое. Соответствующая полулокальная особенность нерасщепляема, если  $\lambda_1(x_1, y_1) = \lambda_1(x_2, y_2)$  и  $\lambda_2(x_1, y_1) = \lambda_2(x_2, y_2)$ .

*Доказательство.* Пусть  $(0, 0, x, y)$  – невырожденная особая точка ранга ноль,  $(h, f)$  – значения первых интегралов в этой точке. Как было отмечено в предыдущем разделе, существуют несколько возможностей.

1. Пусть  $\lambda_1(x, y) \in (-a, -b)$ . Тогда точка  $(h, f)$  лежит на бифуркационной кривой  $d1_i$ . Более того, в этой точке  $df/dh = -e_i(h) = -\lambda_1$ .

2. Пусть  $\lambda_1(x, y) = -a$ . Тогда точка  $(h, f)$  лежит на бифуркационной кривой  $d4$ . Это прямая вида  $f = ah + C$ . Следовательно,  $df/dh = -\lambda_1$ .
3. При  $\lambda_1(x, y) = -b$  точка  $(h, f)$  лежит на бифуркационной кривой  $d5$ . Это тоже прямая вида  $f = bh + C$ . Следовательно,  $df/dh = -\lambda_1$ .

Аналогичные рассуждения верны для функции  $\lambda_2(x, y)$ . Таким образом, точка  $(h, f)$  лежит в трансверсальном пересечении двух бифуркационных дуг  $f = f_1(h)$  и  $f = f_2(h)$ , причем в этой точке имеем

$$df_1/dh = -\lambda_1(x, y), \quad df_2/dh = -\lambda_2(x, y).$$

Докажет лемму от противного. Пусть на особом слое лежат две особые точки ранга ноль, такие, что  $\lambda_1(x_1, y_1) \neq \lambda_1(x_2, y_2)$  или  $\lambda_2(x_1, y_1) \neq \lambda_2(x_2, y_2)$ . Тогда точка  $(h, f)$  принадлежит по крайней мере трем дугам бифуркационной диаграммы. Это противоречит нерасщепляемости особенности. Лемма доказана.  $\square$

**Следствие 2.** *Любая нерасщепляемая невырожденная особенность ранга ноль эллиптического бильярда с потенциалом имеет сложность не выше четырех.*

Мы остановимся на изучении нерасщепляемых особенностей, поскольку Н.Т Зунгом в [17] был разработан удобный аппарат для описания их слоений Лиувилля. Более точно, верна следующая теорема.

**Определение 5.** Пусть  $P_1$  и  $P_2$  – два двумерных компактных замкнутых ориентируемых многообразия с краем. Пусть  $f_1, f_2$  – функции Морса на  $P_1$  и  $P_2$ , такие, что они имеют только один критический слой, а края многообразий отвечают регулярным слоям  $\partial P_i = \{f_i = const\}$ . Иными словами, рассмотрим *2-атомы*  $(P_1, f_1)$  и  $(P_2, f_2)$  (подробнее про 2-атомы см. [4]). Пусть существует конечная группа  $G$ , действующая на многообразиях  $P_1, P_2$ , сохраняющая их функции Морса, и действующая свободно вне особых точек. Тогда, на прямом произведении  $P_1 \times P_2$  задана симплектическая структура, а также действие группы  $G$ , сохраняющее естественное слоение прямого произведения. Следовательно, фактор-многообразие  $P = (P_1 \times P_2)/G$  имеет структуру слоения Лиувилля. Полученную конструкцию будем называть *почти прямым произведением 2-атомов*.

**Теорема 6** (Н.Т. Зунг). *Симплектические многообразия типа почти прямого произведения отвечают нерасщепляемым невырожденным особенностям ранга ноль. Любая нерасщепляемая невырожденная особенность типа центр-центр, центр-седло или седло-седло лиувиллево эквивалентна почти прямому произведению  $(P_1 \times P_2)/G$  для некоторых 2-атомов  $P_1, P_2$  и группы  $G$ .*

Отметим, что конструкция почти прямого произведения имеет смысл только в случае, когда особенность имеет тип седло-седло. В случаях центр-центр и центр-седло любое почти прямое произведение лиувиллево эквивалентно прямому произведению типа  $A \times P_2$ , где  $A$  – эллиптическая особенность функции Морса.

**Замечание.** Прежде, чем мы приступим к изучению нерасщепляемых особенностей бильярда, введем следующее обозначение. Выберем на прямой отрезок  $[p_1, p_2]$  и возьмем его копию  $[p'_1, p'_2]$ . Склеим два выбранных отрезка в их концевых точках, положив  $p_1 \sim p'_1$  и  $p_2 \sim p'_2$  (см. рис. 4). Полученную таким образом окружность обозначим  $S^1(p_1, p_2)$ .

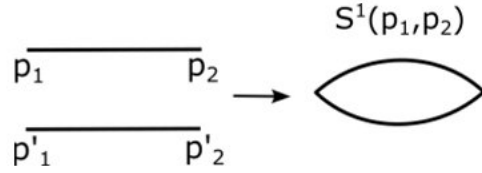


Рис. 4: Склейка окружности из двух отрезков

Это обозначение будет встречаться повсеместно в доказательствах теорем 7 10 при изучении прообразов областей возможного движения. Например, возьмем регулярное значение первых интегралов  $(h, f)$  и положим, что область возможного движения ограничена дугами софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = hyp_1$ ,  $\lambda = hyp_2$  и софокусными эллипсами с параметрами  $\lambda = ell_1$ ,  $\lambda = ell_2$ . Здесь все эллипсы и гиперболы принадлежат одному софокусному семейству, определенному уравнением (5)

$$x^2(b + \lambda) + y^2(a + \lambda) = (a + \lambda)(b + \lambda).$$

Тогда эта область представляет собой объединение четырех криволинейных прямоугольников. Заметим, что граничные эллипсы пересекают ось  $\{x = 0\}$  в точках  $\pm(b + ell_1)$  и  $\pm(b + ell_2)$ . Граничные гиперболы, в свою очередь, пересекают ось  $\{y = 0\}$  в точках  $\pm(a + hyp_1)$  и  $\pm(a + hyp_2)$ . Таким образом, каждую компоненту связности области возможного движения можно представить как прямоугольник

$$[a + hyp_1, a + hyp_2] \times [b + ell_1, b + ell_2].$$

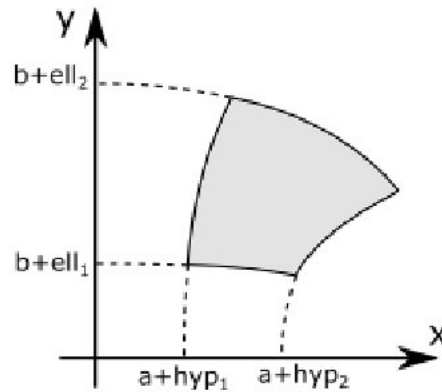


Рис. 5: Прямоугольная компонента связности области возможного движения

Прообраз любой внутренней точки области, в силу формул разделения переменных (9), состоит из четырех точек в фазовом многообразии  $M^4$ . При этом точкам ребер соответствуют две точки в прообразе, а угловым точкам – всего одна. Следовательно, прообраз всей компоненты  $[a + hyp_1, a + hyp_2] \times [b + ell_1, b + ell_2]$  гомеоморфен объединению четырех прямоугольников, склеенных вдоль ребер в двумерный тор, как изображено на рис. 6. Несложно заметить, что этот тор представим в виде

$$T^2 = S_1^1(a + hyp_1, a + hyp_2) \times S_2^1(b + ell_1, b + ell_2).$$

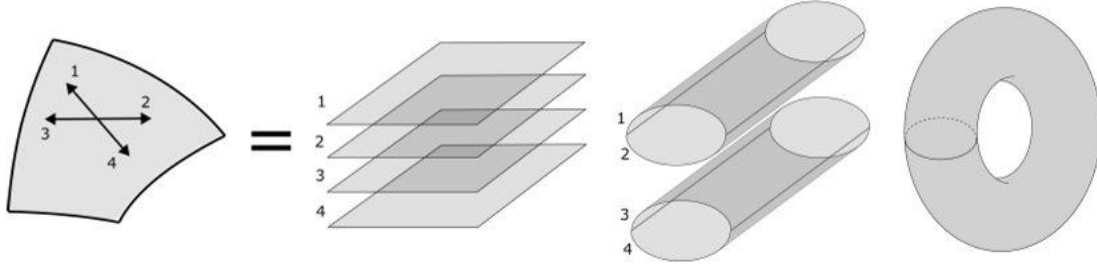


Рис. 6: Построение прообраза области возможного движения. Каждой внутренней точке соответствуют четыре вектора скорости 1-4, которые склеиваются на границе области

Итак, начнем с особенностей типа центр-центр рассматриваемого билиярда.

**Теорема 7.** Пусть точка билиярда  $(x_0, y_0)$  удовлетворяет условиям  $CC(\lambda_1, \lambda_2)$ , т.е. точка  $(0, 0, x_0, y_0) \in M^4$  является невырожденной особой точкой типа центр-центр. Тогда четырехмерная инвариантная окрестность этой точки Лиувиллево эквивалентна прямому произведению  $A \times A$ .

*Доказательство.* Отметим, что в случае центр-центр особый слой слоения Лиувилля, содержащий особую точку ранга ноль, является нульмерным и состоит только из этой точки. Для гладких гамильтоновых интегрируемых систем верно, что все  $2n$ -мерные центральные особенности ранга ноль симплектоморфны друг другу, и в случае систем с двумя степенями свободы они эквивалентны прямому произведению  $A \times A$ . Этот факт является следствием более общей теоремы Элиассона, изложенной в [18], о локальной структуре слоения Лиувилля в окрестности особых точек.

Рассмотрим точку  $(x_0, y_0)$  билиярда. Если она не лежит на границе, то существует малая инвариантная окрестность  $U(0, 0, x_0, y_0) \in M^4$ , такая, что ее образ  $Pr(U) \in \mathcal{B}$  при проекции на билиард не пересекается с границей. Таким образом, локализуем систему на эту окрестность и рассмотрим ее как гладкую интегрируемую систему с двумя степенями свободы. Следовательно, в силу теоремы Элиассона, теорема 7 доказана.

Однако, если точка  $(x_0, y_0)$  принадлежит границе билиярда, мы не в праве применять теорему Элиассона в ее исходном виде, т.к. в окрестности точки  $(0, 0, x_0, y_0)$

нет глобальной гладкой структуры. В этом случае, а также далее для доказательств теорем 8, 9 и 10, используем метод областей возможного движения. А именно, проведем анализ в 3 шага.

**Шаг 1.** Зафиксируем значения первых интегралов  $(h_0, f_0)$  в точке  $(0, 0, x_0, y_0)$ . Рассмотрим некоторую окрестность  $O(h_0, f_0)$  в образе отображения момента.

**Шаг 2.** Для точек из окрестности  $O(h_0, f_0)$  определим зависимость слоя слоения Ливилля от значений интегралов  $(h, f) \in O(h_0, f_0)$  на нем.

**Шаг 3.** В явном виде предьявим послойный гомеоморфизм между рассматриваемой особенностью и прямым произведением  $A \times A$ .

Без ограничения общности, положим  $(x_0, y_0) = (0, \sqrt{b})$ . Остальные точки типа центр-центр на границе рассматриваются аналогично. Образ отображения момента в окрестности точки  $(h_0, f_0)$  заключен в угле между дугами  $d3$  и  $d4$  бифуркационной диаграммы. Это прямые

$$d4 : f = ah + P(-a), \quad d3 : f = 0.$$

В силу теоремы 5 условия невырожденности точки  $(0, 0, 0, \sqrt{b})$  примут вид  $h_0 > 0$ ,  $P'(-a) < h_0$ .

Введем в окрестности  $O(h_0, f_0)$  координатную сетку, заданную прямыми

$$d4(\varepsilon) : f = (a - \varepsilon)h + P(-a + \varepsilon), \quad d3(\delta) : f = -\delta h + P(\delta)$$

для достаточно малых параметром  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$  (рис. 7,а). Отметим, что  $d3 = d3(0)$ ,  $d4 = d4(0)$ . Пусть точка  $(h, f)$  лежит на пересечении прямых  $d3(\delta)$  и  $d4(\varepsilon)$ . Тогда, в силу формул разделения переменных (9), область возможного движения, соответствующая значениям первых интегралов  $(h, f)$ , ограничена дугами софокусной гиперболы с параметром  $\lambda = -a + \varepsilon$ , дугой софокусного эллипса с параметром  $\lambda = -\delta$  и граничным эллипсом  $\lambda = 0$ . Напомним, что здесь все эллипсы и гиперболы принадлежат одному софокусному семейству, определенному уравнением (5).

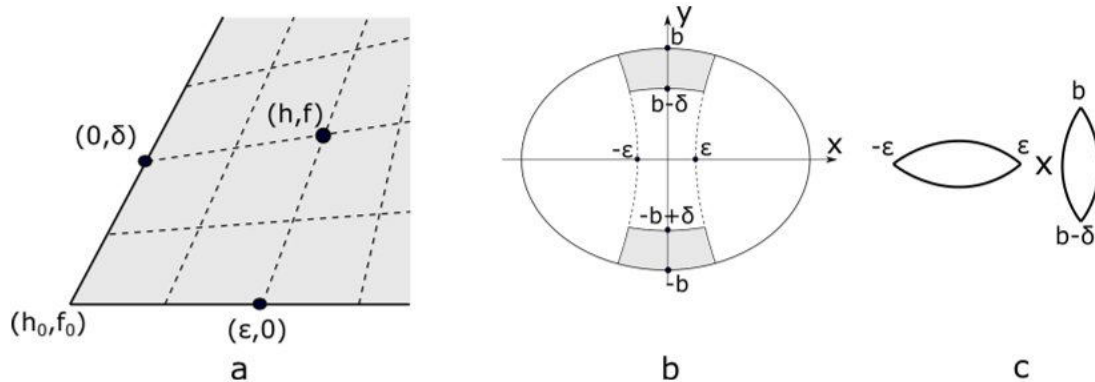


Рис. 7: На рис. а изображена окрестность образа возможного движения в точке  $(h_0, f_0)$  и координатная сетка. На рис. б изображена регулярная область возможного движения. На рис. с изображен ее прообраз

Таким образом, найденная область возможного движения состоит из двух компонент, гомеоморфных прямоугольнику  $[-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\delta, 0]$  (см. рис. 7,b). Регулярный слой в прообразе этой области, в силу все тех же формул разделения (9), гомеоморфен тору

$$T^2 = S_1^1(-\varepsilon, \varepsilon) \times S_2^1(b - \delta, b),$$

где окружность  $S_1^1(-\varepsilon, \varepsilon)$ , согласно обозначению выше, склеена из двух отрезков  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , а окружность  $S_2^1(b - \delta, b)$  склеена из двух отрезков  $[-\varepsilon_2, 0]$ . Таким образом, прообраз отрезка  $d\mathcal{Z}(\delta) \cap O(h_0, f_0)$  гомеоморфен объединению торов  $T^2$  при фиксированном  $\delta$  и  $\varepsilon \in (0, \max(\varepsilon))$ , а также одной окружности при  $\varepsilon = 0$ , которая соответствует критическому движению по вертикальной оси бильярда. Иными словами, получили расслоенное полноторие  $A \times S_2^1(b - \delta, b)$  (рис. 8,a). Следовательно, прообраз всей окрестности  $O(h_0, f_0)$  является объединением таких полноторий для всех  $\delta \in (0, \max(\delta))$ , а также диска при  $\delta = 0$ . Таким образом, прообраз всей окрестности особого значения первых интегралов  $(h_0, f_0)$  послойно гомеоморфен прямому произведению  $A \times A$ . Теорема доказана.  $\square$

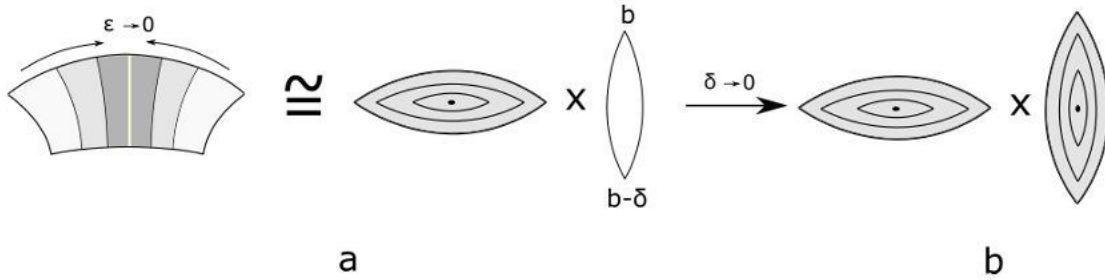


Рис. 8: На рис. а изображен прообраз дуги кривой  $d\mathcal{Z}(\delta)$ . На рис. б изображен прообраз всей окрестности  $O(h_0, f_0)$

Рассмотрим теперь нерасщепляемые особенности типа центр-седло. Согласно лемме 1, во всех особых точках ранга ноль  $(0, 0, x_0, y_0)$  значения функций  $\lambda_1(x_0, y_0)$  и  $\lambda_2(x_0, y_0)$  должны совпадать. В частности, это означает, что все точки удовлетворяют либо условию  $SC$ , либо  $CS$ . Изучим сначала первый вариант.

**Теорема 8.** *Рассмотрим нерасщепляемую невырожденную особенность типа центр-седло эллиптического бильярда с потенциалом. Пусть все особые точки ранга ноль, лежащие на особом слое этой особенности, удовлетворяют условию  $SC$ . Тогда эта особенность ливиллево эквивалентна прямому произведению 2-атома  $A$  на один из следующих седловых 2-атомов:  $B, B_2, C_2, C_4$  (см. рис. 9).*

*Доказательство.* Пусть  $(0, 0, x_0, y_0)$  — точка типа центр-седло, принадлежащая нерасщепляемой особенности. Сперва рассмотрим случай  $\lambda_1(x_0, y_0) \in (-a, -b)$  и  $\lambda_2(x_0, y_0) \in (-b, 0)$ . Положим  $h_0 = H(0, 0, x_0, y_0)$  и  $f_0 = F(0, 0, x_0, y_0)$ . Тогда в окрестности точки  $(h_0, f_0)$

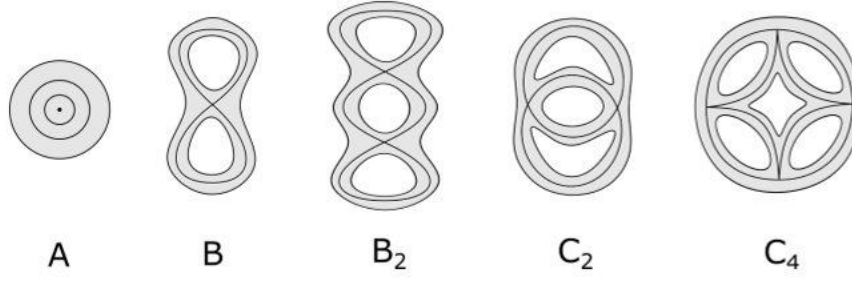


Рис. 9: 2-атомы  $A, B, B_2, C_2, C_4$

образ отображения момента ограничен бифуркационной дугой типа  $d2$ , а также содержит бифуркационную дугу типа  $d1$ . Пусть эти дуги заданы уравнениями

$$d2 : f = P(e_2(h)) - he_2(h), \quad \text{где} \quad P'(e_2(h)) \equiv h,$$

$$d1 : f = P(e_1(h)) - he_1(h), \quad \text{где} \quad P'(e_1(h)) \equiv h.$$

Введем в окрестности  $O(h_0, f_0)$  координатную сетку, заданную кривыми с уравнениями

$$d2_2(\delta) : f = P(e_2(h) + \delta_1(h, \delta)) - he_2(h) - h\delta_1(h, \delta),$$

$$d1_1(\varepsilon) : f = \begin{cases} P(e_1(h) + \varepsilon_1(h, \varepsilon)) - he_1(h) - h\varepsilon_1(h, \varepsilon) & \text{в области } f > P(e_1(h)) - he_1(h), \\ P(e_1(h)) - he_1(h) - \varepsilon & \text{иначе,} \end{cases}$$

с параметрами  $\delta \in [0, \max(\delta)]$  и  $\varepsilon \in [0, \max(\varepsilon)]$  (см. рис. 10). Функции  $\delta_1(h, \delta)$  и  $\varepsilon_1(h, \varepsilon)$  определим неявно, так, что они обращают в тождество систему уравнений

$$\begin{cases} h\delta = P(e_2(h) + \delta_1(h, \delta)) - P(e_2(h) + \delta_1(h, \delta) - \delta), \\ h\varepsilon = P(e_1(h) + \varepsilon_1(h, \varepsilon)) - P(e_1(h) + \varepsilon_1(h, \varepsilon) - \varepsilon), \\ \varepsilon_1(h, 0) = \delta_1(h, 0) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

причем  $\delta_1(h, \delta) \in [0, \delta]$ ,  $\varepsilon_1(h, \varepsilon) \in [0, \varepsilon]$ , и при фиксированных  $h, \delta, \varepsilon$  они имеют наименьший модуль среди всех корней соответствующего уравнения.

Отметим, что заданные таким образом функции определены корректно. Докажем это для  $\delta_1(h, \delta)$ . Действительно, при достаточно малом  $\delta \neq 0$  получим

$$\frac{P(e_2(h) + \delta) - P(e_2(h))}{\delta} > h \quad \text{и} \quad \frac{P(e_2(h)) - P(e_2(h) - \delta)}{\delta} < h$$

в силу условий невырожденности  $P'(e_2(h)) = h$  и  $P''(e_2(h)) > 0$ . Тогда, в силу непрерывности, первое уравнение в системе (21) имеет решение  $\delta_1(h, \delta) \in [0, \delta]$ . Корректность определения функции  $\varepsilon_1(h, \varepsilon)$  можно показать аналогично.

Отметим точку  $(h, f)$  на кривой  $d2_2(\delta)$ . Тогда, согласно формулам разделения переменных (9), область возможного движения, соответствующая данным значениям первых интегралов, лежит в области биллиарда, ограниченной дугами софокусных эллипсов с параметрами  $\lambda = e_2(h) + \delta_1(h, \delta)$  и  $\lambda = e_2(h) + \delta_1(h, \delta) - \delta$ . Кроме того, существуют четыре возможности:

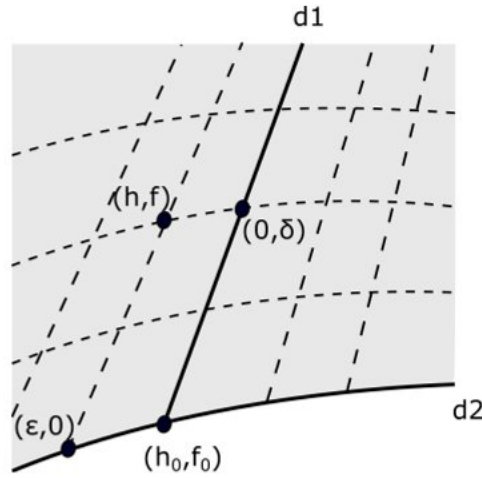


Рис. 10: Образ отображения момента в окрестности точки  $(h_0, f_0)$  и координатная сетка в ней

1. область возможного движения не пересекается с осями  $\{x = 0\}$  и  $\{y = 0\}$ ;
2. область пересекается только с осью  $\{x = 0\}$ ;
3. область пересекается только с осью  $\{y = 0\}$ ;
4. область возможного движения пересекается с обеими осями.

Рассмотрим первый случай. Тогда область состоит из нескольких компонент связности, симметричных друг другу при отражении от осей бильярда (рис. 11). Если выбранная точка  $(h, f)$  лежит слева от бифуркационной дуги  $d1$  на кривой  $d1_1(\varepsilon)$ , то область возможного движения состоит из восьми компонент и, вместе с дугами двух эллипсов, ограничена дугами софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = \hat{\lambda}_1(h, f)$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_1(h, f)$  и  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1$ ,  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1 - \varepsilon$ . Все эти параметры являются корнями многочлена  $-P(z) + hz + f$ , причем  $\varepsilon > 0$  — достаточно малый параметр, а  $\hat{\lambda}_1$  и  $\check{\lambda}_1$  — ближайшие корни к  $\lambda_1(x_0, y_0)$  слева и справа соответственно. Если же точка  $(h, f)$  лежит справа от кривой  $d1$ , область возможного движения состоит из четырех компонент связности и ограничена дугами софокусных гипербол с параметрами  $\hat{\lambda}_1(h, f)$ ,  $\check{\lambda}_1(h, f)$ .

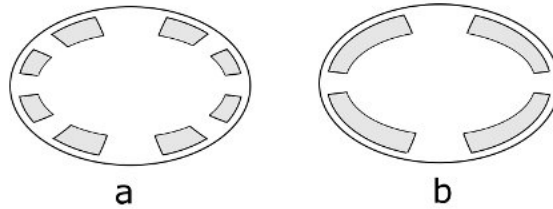


Рис. 11: На рис. а изображена область возможного движения для значений  $(h, f)$  слева от кривой  $d1$ . На рис. б изображена область для значений  $(h, f)$  справа от  $d1$ .

Следовательно, если точка  $(h, f)$  лежит слева от кривой  $d1$ , прообраз области возможного движения гомеоморфен объединению четырех пар торов

$$2T^2 = S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times (S_2^1(\hat{\lambda}_1 + a, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_3^1(\Lambda_1, \check{\lambda}_1 + a)),$$

где  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ ,  $\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ , окружность  $S_1^1$ , в силу обозначения выше, склеена из двух отрезков вида  $[\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2]$ ,  $S_2^1$  склеена из двух отрезков вида  $[\hat{\lambda}_1 + a, \Lambda_1 - \varepsilon]$ , а  $S_3^1$  склеена из двух отрезков вида  $[\Lambda_1, \check{\lambda}_1 + a]$ . Если же точка  $(h, f)$  лежит справа от кривой  $d1$ , прообраз области возможного движения гомеоморфен объединению четырех торов вида

$$T^2 = S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times S_{2+3}^1(\hat{\lambda}_1 + a, \check{\lambda}_1 + a),$$

где окружность  $S_{2+3}^1$  склеена из двух отрезков вида  $[\hat{\lambda}_1 + a, \check{\lambda}_1 + a]$ . Если точка  $(h, f)$  лежит на кривой  $d1$ , получим промежуточный случай, при котором  $\varepsilon = 0$ , и окружности  $S_2^1$  и  $S_3^1$  сливаются вместе в одной точке  $p = \Lambda_1$ , образуя т.н. фигуру “восьмерку”, т.е. особый слой 2-атома  $B$ . Из этого следует, что компонента связности прообраза дуги кривой  $d2_2(\delta)$  из квадранта  $x > 0$  и  $y > 0$  послойно гомеоморфна прямому произведению  $S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times B$  (см. рис. 12). Наконец, заметим, что окружность  $S_1^1(0, \delta)$  стягивается в точку при  $\delta \rightarrow 0$ , образуя, тем самым, 2-атом  $A$ . Таким образом, прообраз всей окрестности  $O(h_0, f_0)$  гомеоморфен непересекающемуся объединению четырех особенностей типа прямого произведения  $A \times B$ .

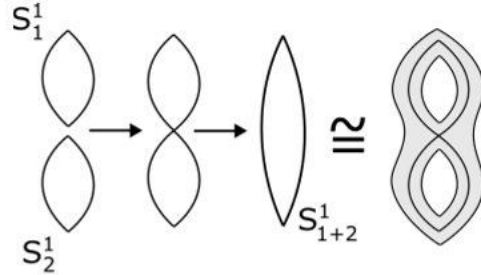


Рис. 12: Прообраз дуги  $d2_2(\delta)$  гомеоморфен произведению  $S^1 \times B$ .

Вернемся немного назад и теперь предположим, что область возможного движения пересекается только с осью  $\{x = 0\}$  или  $\{y = 0\}$  (рис. 13). Если выбранная точка  $(h, f)$  лежит слева от бифуркационной дуги на кривой  $d1_1(\varepsilon)$ , то область возможного движения состоит из шести компонент связности. Прообраз этой области гомеоморфен непересекающемуся объединению двух троек торов вида

$$3T^2 = S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times (S_2^1(-\hat{\lambda}_1 - a, -\Lambda_1) + S_3^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_4^1(\Lambda_1, \hat{\lambda}_1 + a)),$$

где  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ ,  $\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ . Если точка  $(h, f)$  лежит справа от кривой  $d1$ , область возможного движения состоит из двух компонент связности. Прообраз каждой из них гомеоморфен тору

$$T^2 = S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times S_{2+3+4}^1(-\hat{\lambda}_1 - a, \hat{\lambda}_1 + a).$$

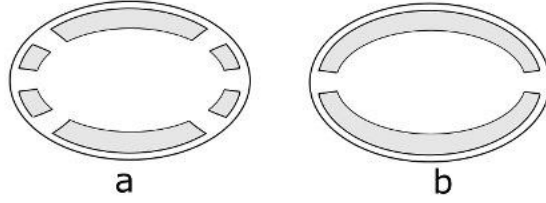


Рис. 13: На рис. а изображена область возможного движения для значений  $(h, f)$  слева от кривой  $d1$ . На рис. б изображена область для значений  $(h, f)$  справа от  $d1$ .

В промежуточном случае, когда точка  $(h, f)$  лежит на кривой  $d1$ , три окружности  $S_2^1$ ,  $S_3^1$  и  $S_4^1$  последовательно сливаются вместе в двух точках  $p_1 = -\Lambda_1$  и  $p_2 = \Lambda_1$ , образуя фигуру типа “тройной восьмерки”, т.е. особый слой 2-атома  $B_2$ . Следовательно, компонента связности прообраза дуги кривой  $d2_2(\delta)$  послойно гомеоморфна прямому произведению  $S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times B_2$ . Прообраз же всей окрестности  $O(h_0, f_0)$  послойно гомеоморфен объединению двух особенностей  $A \times B_2$ .

Осталось рассмотреть подслучай, при котором область возможного движения пересекается с двумя осями  $\{x = 0\}$  и  $\{y = 0\}$  (см. рис. 14). Аналогично можно показать, что если  $(h, f)$  лежит слева от кривой  $d1$ , область возможного движения состоит из четырех компонент связности, прообраз которых гомеоморфен объединению четырех торов

$$4T^2 = S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times (S_2^1(-\Lambda_1 - \varepsilon, \Lambda_1 + \varepsilon) + S_3^1(-\Lambda_1, \Lambda_1) + S_4^1(-\Lambda_1 - \varepsilon, \Lambda_1 + \varepsilon) + S_5^1(-\Lambda_1, \Lambda_1)),$$

где  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ ,  $\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ . Если  $(h, f)$  лежит справа от кривой  $d1$ , область возможного движения неодносвязна и представляет собой эллиптическое кольцо. Ее прообраз гомеоморфен объединению двух торов

$$2T^2 = S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times (S_{cw}^1 + S_{ccw}^1).$$

Здесь окружности  $S_{cw}^1$  и  $S_{ccw}^1$  гомологичны нестягиваемому циклу в области возможного движения, проходящему один раз вокруг центра биллиарда по часовой стрелке и против нее соответственно.

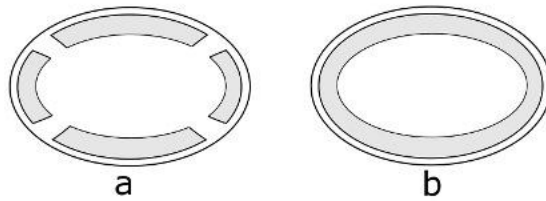


Рис. 14: На рис. а изображена область возможного движения для значений  $(h, f)$  слева от кривой  $d1$ . На рис. б изображена область для значений  $(h, f)$  справа от  $d1$ .

Если точка  $(h, f)$  лежит на дуге  $d1$ , то  $\varepsilon = 0$ , и окружности  $S_2^1$ ,  $S_3^1$ ,  $S_4^1$ ,  $S_5^1$  сливаются вместе в четырех точках, образуя особый слой 2-атома  $C_4$ . Следовательно, прообраз

отрезка кривой  $d2_2(\delta)$  послойно гомеоморфен прямому произведению  $S^1_1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times C_4$ . Результирующая особенность имеет тип прямого произведения  $A \times C_4$ .

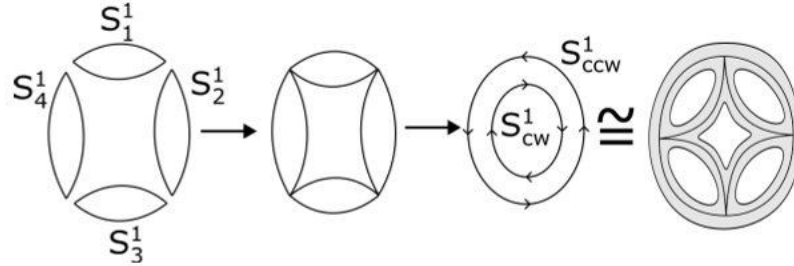


Рис. 15: Прообраз дуги  $d2_2(\delta)$  гомеоморфен произведению  $S^1 \times C_4$ .

Таким образом, были рассмотрены всевозможные нерасщепляемые особенности типа центр-седло, содержащие особые точки  $(0, 0, x_0, y_0)$  при  $\lambda_1(x_0, y_0) \in (-a, -b)$  и  $\lambda_2(x_0, y_0) \in (-b, 0)$ . Положим теперь  $\lambda_1 = -a$  при том же условии на  $\lambda_2$ . В этом случае образ отображения момента в окрестности соответствующей точки  $(h_0, f_0)$  также ограничен бифуркационной дугой типа  $d2$ , но уже содержит дугу  $d4$ , представляющую собой прямую  $f = ah + P(-a)$ . Как и до этого, зададим в окрестности  $O(h_0, f_0)$  координатную сетку кривыми с уравнениями  $d2_2(\delta)$  и

$$d4(\varepsilon) : f = \begin{cases} (a - \varepsilon)h + P(-a + \varepsilon) & \text{в области } f > ah + P(-a), \\ ah + P(-a) - \varepsilon & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отметим точку  $(h, f)$  на кривой  $d2_2(\delta)$ . Тогда, в силу формул разделения переменных (9), область возможного движения лежит между софокусными эллипсами с параметрами  $\lambda = e_2(h) + \delta_1(h, \delta)$  и  $\lambda = e_2(h) + \delta_1(h, \delta) - \delta$ . Кроме того, имеют место два подслучая:

1. область возможного движения не пересекается с прямой  $\{y = 0\}$ ;
2. область возможного движения пересекает прямую.

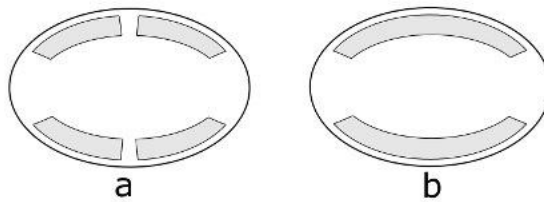


Рис. 16: На рис. а изображена область возможного движения для значений  $(h, f)$  слева от кривой  $d4$ . На рис. б изображена область для значений  $(h, f)$  справа от  $d4$ .

В первом подслучае область состоит из четырех компонент связности, если точка  $(h, f)$  лежит слева от прямой  $d4$ , и из двух компонент связности, если точка  $(h, f)$

лежит справа (см. рис. 16). При этом прообраз области возможного движения гомеоморфен объединению двух пар торов вида

$$2T^2 = S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times (S_2^1 + S_3^1)$$

при  $f > ah - P(-a)$  и объединению двух торов вида

$$T^2 = S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times S_{2+3}^1$$

при  $f < ah - P(-a)$ . Несложно заметить, что подобную конструкцию мы уже получали ранее (первый подслучай при  $\lambda_1 \neq -a$ ). Проведем аналогичные рассуждения и получим, что искомая особенность послойно гомеоморфна объединению двух особенностей  $A \times B$ .

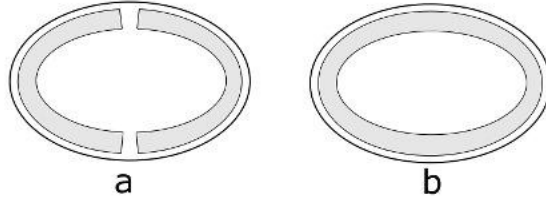


Рис. 17: На рис. а изображена область возможного движения для значений  $(h, f)$  слева от кривой  $d4$ . На рис. б изображена область для значений  $(h, f)$  справа от  $d4$ .

Рассмотрим второй подслучай, при котором область возможного движения пересекает прямую  $\{y = 0\}$  (рис. 17). Если точка  $(h, f)$  лежит слева от прямой  $d4$ , область возможного движения состоит из двух компонент связности, каждая из которых соответствует тору вида

$$T^2 = S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times S_2^1(-a + \varepsilon, a - \varepsilon).$$

Если же точка  $(h, f)$  лежит справа от прямой  $d4$ , область возможного движения неодносвязна, и, как в случае особенности  $A \times C_4$ , рассмотренной ранее, прообраз этой области гомеоморфен объединению торов

$$2T^2 = S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times (S_{cw}^1 + S_{ccw}^1),$$

где окружности  $S_{cw}^1$  и  $S_{ccw}^1$  отвечают движению по часовой стрелке и против нее. При  $f = ah - P(-a)$  окружности  $S_2^1$  и  $S_3^1$  сливаются в двух точках, образуя особый слой 2-атома  $C_2$  (см. рис. 18). Из этого следует, что прообраз дуги кривой  $d2_2(\delta)$  послойно гомеоморфен прямому произведению  $S_1^1(\Lambda_2 - \delta, \Lambda_2) \times C_2$ . Прообраз же всей окрестности  $O(h_0, f_0)$  послойно гомеоморфен особенности  $A \times C_2$ .

Таким образом, были рассмотрены все особенности типа центр-седло, содержащие особые точки  $(0, 0, x_0, y_0)$  при  $\lambda_1 \in [-a, -b)$  и  $\lambda_2 \in (-b, 0)$ . Отметим, что случай  $\lambda_1 = -b$  полностью симметричен случаю  $\lambda_1 = -a$  при замене  $-a$  на  $-b$  и координаты  $y$  на координату  $x$ . Для него также характерны особенности типа прямого произведения

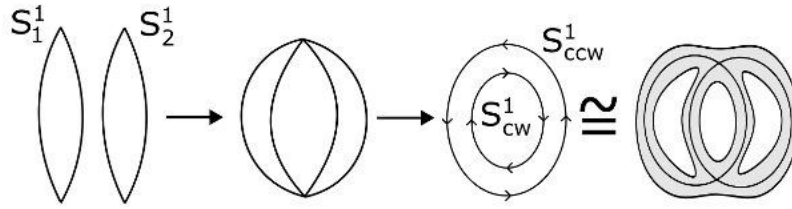


Рис. 18: Преобраз дуги  $d4(\delta)$  гомеоморфен произведению  $S^1 \times C_2$ .

$A \times B$  и  $A \times C_2$ . Кроме того, случай  $\lambda_2 = 0$  полностью аналогичен случаю  $\lambda_2 \in (-b, 0)$ . Действительно, в этом случае образ отображения момента ограничен прямой  $f = 0$  (вместо кривой  $d2$ ). Тогда, вместо кривых  $d2_2(\delta)$ , задающих сетку в окрестности точки  $(h_0, f_0)$ , положим

$$d3(\delta) = -\delta h - P(-\delta).$$

Зафиксируем точку  $(h, f)$  на  $d3(\delta)$ . В этом случае соответствующая область возможного движения лежит между двумя софокусными эллипсами с параметрами  $\lambda = 0$  и  $\lambda = -\delta$ . Дальнейший анализ дословно повторяет случай  $\lambda_2 \in (-b, 0)$ .

Осталось рассмотреть случай  $\lambda_2 = -b$ . Отметим, что  $\lambda_1 \neq -b$  в силу невырожденности. Положим сначала  $\lambda_1 \neq -a$ . В этом случае образ отображения момента в окрестности соответствующей точки  $(h_0, f_0)$  ограничен бифуркационной дугой  $d5$ , представляющей собой прямую  $f = bh + P(-b)$ . Кроме того, в этой окрестности лежит бифуркационная дуга типа  $d1$ , также проходящая через точку  $(h_0, f_0)$ . Рассмотрим в окрестности  $O(h_0, f_0)$  координатную сетку, заданную прямыми вида  $d1_1(\varepsilon)$  и

$$d5(\delta) : f = (b - \delta)h + P(-b + \delta).$$

Отметим точку  $(h, f)$  на кривой  $d5(\delta)$ . Область возможного движения, соответствующая выбранным значениям первых интегралов, ограничена софокусным эллипсом с параметром  $\lambda = -b + \delta$ . Если точка  $(h, f)$  лежит слева от дуги  $d1$ , область состоит из трех компонент связности, ограниченных дугами софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = \hat{\lambda}_1$ ,  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1(h, \varepsilon)$  и  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1(h, \varepsilon) - \varepsilon$ . Если точка  $(h, f)$  лежит справа от дуги  $d1$ , область возможного движения связна и ограничена софокусной гиперболой с параметром  $\lambda = \hat{\lambda}_1$ .

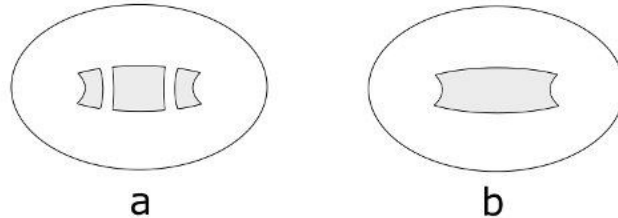


Рис. 19: На рис. а изображена область возможного движения для значений  $(h, f)$  слева от кривой  $d1$ . На рис. б изображена область для значений  $(h, f)$  справа от  $d1$ .

Следовательно, если точка  $(h, f)$  лежит слева от дуги  $d1$ , прообраз области возможного движения гомеоморфен объединению трех торов

$$3T^2 = S_1^1(-\delta, \delta) \times (S_2^1(-\hat{\lambda}_1 - a, -\Lambda_1) + S_3^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_4^1(\Lambda_1, \hat{\lambda}_1 + a)),$$

$\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ . Если же точка  $(h, f)$  лежит справа от дуги  $d1$ , прообраз области возможного движения гомеоморфен тору

$$T^2 = S_1^1(-\delta, \delta) \times S_{2+3+4}^1(-\hat{\lambda}_1 - a, \hat{\lambda}_1 + a).$$

Из этого следует, что прообраз дуги кривой  $d5(\delta)$  из окрестности  $O(h_0, f_0)$  послойно гомеоморфен прямому произведению  $S_1^1(-\delta, \delta) \times B_2$ . Прообраз же всей окрестности послойно гомеоморфен особенности  $A \times B_2$ .

Наконец, рассмотрим случай  $\lambda_2 = -b$  и  $\lambda_1 = -a$ , соответствующий началу координат  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Тогда образ отображения момента в окрестности точки  $(h_0, f_0)$  лежит выше бифуркационной дуги  $d5$  и содержит дугу  $d4$ . Рассмотрим координатную сетку в окрестности  $O(h_0, f_0)$ , заданную прямыми  $d4(\varepsilon)$  и  $d5(\delta)$ . Выберем точку  $(h, f)$  на прямой  $d5(\delta)$ . Если она лежит слева от прямой  $d4$ , область возможного движения ограничена дугами софокусного эллипса с параметром  $\lambda = -b + \delta$  и дугами софокусных гипербол  $\lambda = \hat{\lambda}_1$  и  $\lambda = -a + \varepsilon$ . Если же точка  $(h, f)$  лежит справа от прямой  $d4$ , область ограничена дугами софокусного эллипса с параметром  $\lambda = -b + \delta$  и дугами софокусной гиперболы  $\lambda = \hat{\lambda}_1$ .

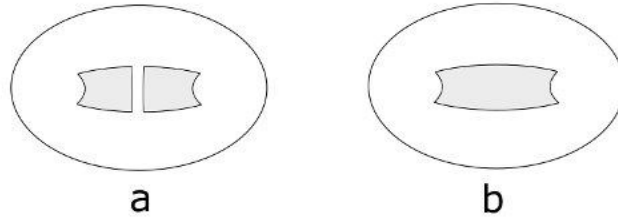


Рис. 20: На рис. а изображена область возможного движения для значений  $(h, f)$  слева от кривой  $d4$ . На рис. б изображена область для значений  $(h, f)$  справа от  $d4$ .

Следовательно, если точка  $(h, f)$  лежит слева от дуги  $d4$ , прообраз области возможного движения гомеоморфен объединению двух торов

$$2T^2 = S_1^1(-\delta, \delta) \times (S_2^1(-\hat{\lambda}_1 - a, -\varepsilon) + S_3^1(\varepsilon, \hat{\lambda}_1 + a)).$$

Если же точка  $(h, f)$  лежит справа от дуги  $d4$ , прообраз области возможного движения гомеоморфен тору

$$T^2 = S_1^1(-\delta, \delta) \times S_{2+3}^1(-\hat{\lambda}_1 - a, \hat{\lambda}_1 + a).$$

Из этого следует, что прообраз дуги кривой  $d5(\delta)$  из окрестности  $O(h_0, f_0)$  послойно гомеоморфен прямому произведению  $S_1^1(-\delta, \delta) \times B$ . Прообраз же всей окрестности послойно гомеоморфен особенности  $A \times B$ .

Таким образом, были рассмотрены все нерасщепляемые особенности типа центр-седло, содержащие особые точки типа  $SC$ . Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 9.** *Рассмотрим нерасцепляемую невырожденную особенность типа центр-седло эллиптического бильярда с потенциалом. Пусть все особые точки ранга ноль, лежащие на особом слое этой особенности, удовлетворяют условию  $CS$ . Тогда она ливиллево эквивалентна прямому произведению 2-атома  $A$  на один из седловых 2-атомов  $B$  или  $B_2$ .*

*Доказательство.* Пусть  $(0, 0, x_0, y_0)$  — точка типа центр-седло, принадлежащая нерасцепляемой особенности. Рассмотрим сначала случай  $\lambda_1(x_0, y_0) \in (-a, -b)$  и  $\lambda_2(x_0, y_0) \in (-b, 0)$ . Положим  $h_0 = H(0, 0, x_0, y_0)$  и  $f_0 = F(0, 0, x_0, y_0)$ . Образ отображения момента в окрестности точки  $(h_0, f_0)$  лежит справа от бифуркационной кривой типа  $d1$  и, кроме того, содержит дугу бифуркационной кривой  $d2$ , проходящей через эту же точку. Как и ранее для случая особенностей, удовлетворяющих условию  $SC$ , введем в окрестности  $O(h_0, f_0)$  координатную сетку с помощью кривых

$$d1_1(\varepsilon) : f = P(e_1(h) + \varepsilon_1(h, \varepsilon)) - he_1(h) - h\varepsilon_1(h, \varepsilon),$$

$$d2_2(\delta) : f = \begin{cases} P(e_2(h) + \delta_1(h, \delta)) - he_2(h) - h\delta_1(h, \delta) & \text{в области } f < P(e_2(h)) - he_2(h), \\ P(e_2(h)) - he_2(h) - \delta & \text{иначе,} \end{cases}$$

с параметрами  $\delta \in [0, \max(\delta)]$  и  $\varepsilon \in [0, \max(\varepsilon)]$ . Как и ранее, функции  $\delta_1(h, \delta)$  и  $\varepsilon_1(h, \varepsilon)$  определим так, что они обращают в тождество систему уравнений (21), причем  $\delta_1(h, \delta) \in [0, \delta]$ ,  $\varepsilon_1(h, \varepsilon) \in [0, \varepsilon]$ , и при фиксированных  $h, \delta, \varepsilon$  они имеют наименьший модуль среди всех корней соответствующего уравнения. В частности,  $\varepsilon_1(h, 0) = \delta_1(h, 0) = 0$ .

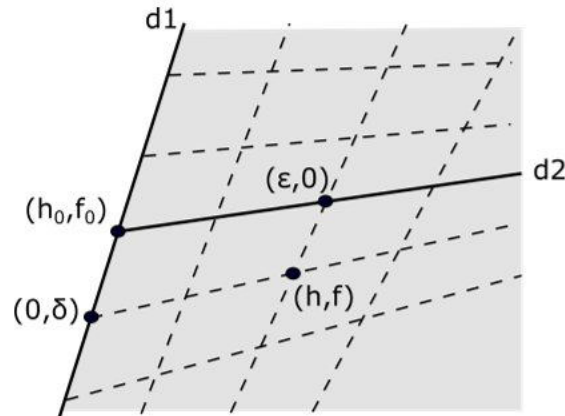


Рис. 21: Образ отображения момента в окрестности точки  $(h_0, f_0)$  и координатная сетка в ней

Отметим точку  $(h, f)$  на кривой  $d1_1(\varepsilon)$ . Заметим, что, в силу формул разделения переменных (9), соответствующая область возможного движения ограничена дугами софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1$  и  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1 - \varepsilon$ . Кроме того, существуют две возможности:

1. область возможного движения не пересекает прямую  $\{y = 0\}$ ;

2. область пересекает эту прямую.

Рассмотрим первый подслучай (см. рис. 22). Если точка  $(h, f)$  лежит ниже бифуркационной дуги  $d2$  на кривой  $d2_2(\delta)$ , область возможного движения ограничена дугами софокусных эллипсов с параметрами  $\lambda = e_2(h) + \delta_1$ ,  $\lambda = e_2(h) + \delta_1 - \delta$  и  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$ . Все параметры являются корнями многочлена  $-P(z) + hz + f$ , причем  $\delta > 0$  – малый параметр, а  $\hat{\lambda}_2$  и  $\check{\lambda}_2$  – ближайшие корни к значению  $\lambda_2(x_0, y_0)$  слева и справа соответственно. В этом случае область возможного движения состоит из восьми компонент связности. Прообраз каждой пары компонент, лежащих в одном квадранте плоскости, гомеоморфен объединению двух торов вида

$$2T^2 = S_1^1(\Lambda_1 - \varepsilon, \Lambda_1) \times (S_2^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_3^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b)),$$

где  $\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ ,  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ . Если же точка  $(h, f)$  лежит выше бифуркационной дуги  $d2$ , область возможного движения ограничена дугами софокусных гипербол  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$  и состоит из четырех компонент связности. Прообраз каждой компоненты гомеоморфен тору

$$T^2 = S_1^1(\Lambda_1 - \varepsilon, \Lambda_1) \times S_{2+3}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b).$$

Заметим, что этот случай полностью аналогичен одному случаю из предыдущей теоремы 8. Таким образом, рассматриваемая особенность лиувиллево эквивалентна объединению четырех особенностей типа прямого произведения  $A \times B$ .

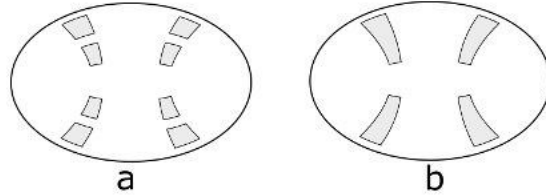


Рис. 22: На рис. а изображена область возможного движения для значений  $(h, f)$  снизу от кривой  $d2$ . На рис. б изображена область для значений  $(h, f)$  сверху от  $d2$ .

Предположим теперь, что область возможного движения пересекает фокальную ось биллиарда (см. рис. 23). Если точка  $(h, f)$  лежит ниже бифуркационной дуги  $d2$  на кривой  $d2_2(\delta)$ , область возможного движения состоит из шести компонент связности. Прообраз трех компонент, лежащих в полуплоскости  $x > 0$ , гомеоморфен объединению трех торов вида

$$3T^2 = S_1^1(\Lambda_1 - \varepsilon, \Lambda_1) \times (S_2^1(-\hat{\lambda}_2 - b, -\Lambda_2) + S_3^1(-\Lambda_2 + \delta, \Lambda_2 - \delta) + S_4^1(\Lambda_2, \hat{\lambda}_2 + b)),$$

где  $\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ ,  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ . Если точка  $(h, f)$  лежит выше бифуркационной дуги  $d2$ , область возможного движения состоит из двух компонент связности, прообразы которых гомеоморфны тору

$$3T^2 = S_1^1(\Lambda_1 - \varepsilon, \Lambda_1) \times S_{2+3+4}^1(-\hat{\lambda}_2 - b, \hat{\lambda}_2 + b).$$

Заметим, что этот случай также аналогичен одному из случаев теоремы 8. Рассматриваемая особенность лиувиллево эквивалентна объединению двух особенностей  $A \times B_2$ .

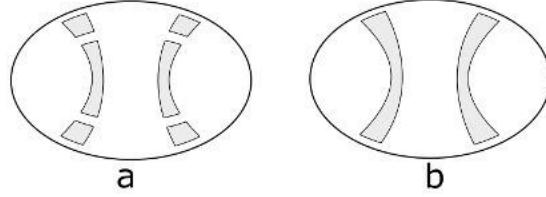


Рис. 23: На рис. а изображена область возможного движения для значений  $(h, f)$  снизу от кривой  $d2$ . На рис. б изображена область для значений  $(h, f)$  сверху от  $d2$ .

Таким образом, были рассмотрены все нерасщепляемые особенности типа  $CS$  при  $\lambda_1(x_0, y_0) \in (-a, -b)$  и  $\lambda_2(x_0, y_0) \in (-b, 0)$ . Положим теперь  $\lambda_2 = -b$ ,  $\lambda_1 \in (-a, -b)$ . Тогда образ отображения момента в окрестности точки  $(h_0, f_0)$  также ограничен бифуркационной дугой  $d1$ , но при этом содержит дугу  $d5$ . Как и ранее, введем в окрестности  $O(h_0, f_0)$  координатную сетку, но уже заданную кривыми  $d1_1(\varepsilon)$  и

$$d5(\delta) : f = \begin{cases} (b - \delta)h + P(-b + \delta) & \text{в области } f < bh + P(-b) + \delta, \\ bh + P(-b) + \delta & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если точка  $(h, f)$  лежит ниже прямой  $d5$ , то, в силу формул разделения переменных (9), область возможного движения состоит из четырех компонент связности, каждая из которых ограничена дугами софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1$ ,  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1 - \varepsilon$  и дугами софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = -b + \delta$  и  $\lambda = \hat{\lambda}_2$  (см. рис. 24,а). Следовательно, прообраз двух компонент связности, лежащих в полуплоскости  $x > 0$ , гомеоморфен объединению двух торов

$$2T^2 = S_1^1(\Lambda_1 - \varepsilon, \Lambda_1) \times (S_2^1(-\hat{\lambda}_2 - b, -\delta) + S_3^1(\delta, \hat{\lambda}_2 + b)).$$

Если точка  $(h, f)$  лежит выше прямой  $d5$ , то область возможного движения состоит из двух компонент связности (см. рис. 24,б), прообраз которых гомеоморфен тору

$$T^2 = S_1^1(\Lambda_1 - \varepsilon, \Lambda_1) \times S_{2+3}^1(-\hat{\lambda}_2 - b, \hat{\lambda}_2 + b).$$

Следовательно, прообраз дуги  $d1_1(0, \varepsilon)$  состоит из двух компонент связности, каждая из которых послойно гомеоморфна прямому произведению  $S_1^1(\varepsilon) \times B$ . Рассматриваемая особенность лиувиллево эквивалентна объединению двух особенностей  $A \times B$ .

Отметим, что случай  $\lambda_1 = -a$ ,  $\lambda_2 \in [-b, 0)$  эквивалентен случаю при  $\lambda_1 \neq -a$ . Действительно, при  $\lambda_1 = -a$  образ отображения момента в окрестности точки  $(h_0, f_0)$  ограничен бифуркационной дугой  $d4$  (вместо  $d1$ ). Тогда, введем в окрестности  $O(h_0, f_0)$  координатную сетку, однако теперь вместо кривых  $d1_1(\varepsilon)$  используем кривые

$$d4(\varepsilon) : f = (a - \varepsilon)h + P(-a + \varepsilon).$$

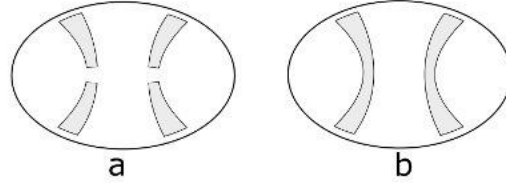


Рис. 24: На рис. а изображена область возможного движения для значений  $(h, f)$  снизу от кривой  $d5$ . На рис. б изображена область для значений  $(h, f)$  сверху от  $d5$ .

Зафиксируем точку  $(h, f)$  на прямой  $d4(\varepsilon)$ . Тогда область возможного движения ограничена дугами софокусной гиперболы с параметром  $\lambda = -a + \varepsilon$ , и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  она вырождается в отрезок. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют случай  $\lambda_1 \in (-a, -b)$ . При  $\lambda_2 \neq -b$  имеют место нерасщепляемые особенности  $A \times B$  и  $A \times B_2$ . При  $\lambda_2 = -b$  имеет место только особенность  $A \times B$ .

Вне рассмотрения остался лишь случай  $\lambda_1 = -b$ ,  $\lambda_2 \in (-b, 0)$ . Здесь образ отображения момент в окрестности точки  $(h_0, f_0)$  ограничен бифуркационной кривой  $d5$  и содержит в себе бифуркационную дугу  $d2$ . Введем в окрестности  $O(h_0, f_0)$  координатную сетку, заданную кривыми  $d2_2(\delta)$  и  $d5(\varepsilon) : f = (b + \varepsilon)h + P(-b - \varepsilon)$ . Зафиксируем точку  $(h, f)$  на прямой  $d5(\varepsilon)$ . Если она лежит ниже кривой  $d2$ , область возможного движения состоит из четырех компонент связности и ограничена софокусной гиперболой с параметром  $\lambda = -b - \varepsilon$  и четырьмя эллипсами с параметрами  $\lambda = e_2(h) + \delta_1$ ,  $\lambda = e_2(h) + \delta_1 - \delta$  и  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$ . Прообраз двух компонент связности, лежащих в полуплоскости  $x > 0$ , гомеоморфен объединению двух торов вида

$$2T^2 = S_1^1(-\varepsilon, \varepsilon) \times (S_2^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_3^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b)),$$

где  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ . Если же точка  $(h_0, f_0)$  лежит выше кривой  $d2$ , образ отображения момента состоит из двух компонент связности и ограничен дугами софокусных эллипсов  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$ . Следовательно, прообраз компоненты связности, лежащей в полуплоскости  $x > 0$ , гомеоморфен тору

$$2T^2 = S_1^1(-\varepsilon, \varepsilon) \times S_{2+3}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b).$$

Заметим, что в этом случае нерасщепляемая особенность также лиувиллево эквивалентна объединению двух особенностей  $A \times B$ .

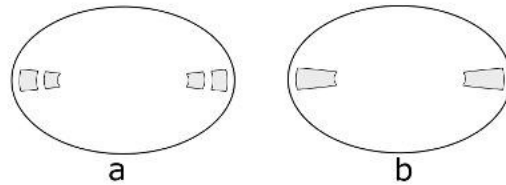


Рис. 25: На рис. а изображена область возможного движения для значений  $(h, f)$  снизу от кривой  $d2$ . На рис. б изображена область для значений  $(h, f)$  сверху от  $d2$ .

Таким образом, были рассмотрены все нерасщепляемые особенности типа центр-седло, содержащие особые точки типа  $CS$ . Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 10.** *Рассмотрим нерасщепляемую невырожденную особенность типа седло-седло эллиптического бильярда с потенциалом. Тогда эта особенность ливиллево эквивалентна одному из следующих почти прямых произведений:  $B \times B$ ,  $B \times B_2$ ,  $B \times C_2$ ,  $B \times C_4$ ,  $B_2 \times B_2$ ,  $(B \times B_2)/\mathbb{Z}_2$ ,  $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$ ,  $(B_2 \times C_2)/\mathbb{Z}_2$  или  $(B \times C_4)/\mathbb{Z}_2$ .*

*Доказательство.* Пусть  $(0, 0, x_0, y_0)$  – точка типа седло-седло, принадлежащая нерасщепляемой особенности. Начнем со случая  $\lambda_1(x_0, y_0) \in (-a, -b)$  и  $\lambda_2(x_0, y_0) \in (-b, 0)$ . Положим  $h_0 = H(0, 0, x_0, y_0)$  и  $f_0 = F(0, 0, x_0, y_0)$ . Образ отображения момента в окрестности точки  $(h_0, f_0)$  разбивается бифуркационными кривыми  $d1$  и  $d2$  на четыре сектора. Введем следующие обозначения для этих секторов (см. рис. 26):

$$I = \begin{cases} f < P(e_1(h)) - he_1(h), \\ f > P(e_2(h)) - he_2(h), \end{cases} \quad II = \begin{cases} f > P(e_1(h)) - he_1(h), \\ f > P(e_2(h)) - he_2(h), \end{cases}$$

$$III = \begin{cases} f > P(e_1(h)) - he_1(h), \\ f < P(e_2(h)) - he_2(h), \end{cases} \quad IV = \begin{cases} f < P(e_1(h)) - he_1(h), \\ f < P(e_2(h)) - he_2(h). \end{cases}$$

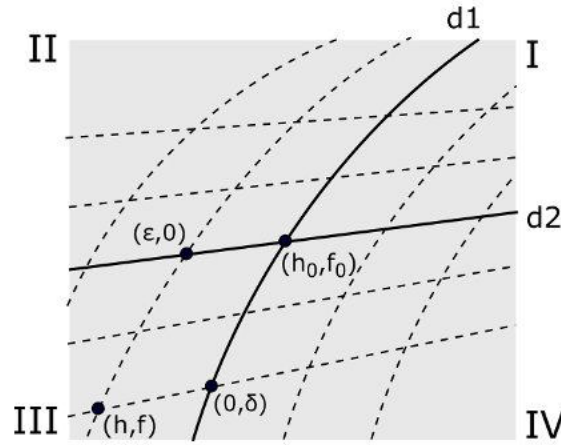


Рис. 26: Образ отображения момента в окрестности точки  $(h_0, f_0)$  и координатная сетка в ней

Введем в окрестности  $O(h_0, f_0)$  координатную сетку, заданную кривыми

$$d1_1(\varepsilon) : f = \begin{cases} P(e_1(h) + \varepsilon_1(h, \varepsilon)) - he_1(h) - h\varepsilon_1(h, \varepsilon) & \text{в области } II \cup III, \\ P(e_1(h)) - he_1(h) - \varepsilon & \text{в области } I \cup IV, \end{cases}$$

$$d2_2(\delta) : f = \begin{cases} P(e_2(h) + \delta_1(h, \delta)) - he_2(h) - h\delta_1(h, \delta) & \text{в области } III \cup IV, \\ P(e_2(h)) - he_2(h) - \delta & \text{в области } I \cup II. \end{cases}$$

Как и ранее, функции  $\delta_1(h, \delta)$  и  $\varepsilon_1(h, \varepsilon)$  определим так, что они обращают в тождество систему уравнений (21), причем  $\delta_1(h, \delta) \in [0, \delta]$ ,  $\varepsilon_1(h, \varepsilon) \in [0, \varepsilon]$ , и при фиксированных  $h, \delta, \varepsilon$  они имеют наименьший модуль среди всех корней соответствующего уравнения. В частности,  $\varepsilon_1(h, 0) = \delta(h, 0) = 0$ .

Отметим, что, в силу нерасщепляемости особенности, дуги  $d4$  и  $d5$  бифуркационной диаграммы не пересекают окрестность  $O(h_0, f_0)$ . Таким образом, для любой точки  $(p_x, p_y, x, y) \in \mathcal{F}^{-1}(O(h_0, f_0)) \subset M^4$  из расслоенной окрестности особого слоя имеем:

$$\begin{aligned} P(-a) + H(p_x, p_y, x, y)a - F(p_x, p_y, x, y) &\neq 0, \\ P(-b) + H(p_x, p_y, x, y)b - F(p_x, p_y, x, y) &\neq 0. \end{aligned}$$

В частности, это означает, что для фиксированной точки  $(h, f)$  из окрестности  $O(h_0, f_0)$  соответствующая ей область возможного движения удовлетворяет одному из следующих условий:

1. область возможного движения не пересекает оси биллиарда  $\{x = 0\}$  и  $\{y = 0\}$ ;
2. область пересекает только ось  $\{x = 0\}$ ;
3. область пересекает только лучи  $\{y = 0, x^2 > a - b\}$ ;
4. область пересекает ось  $\{x = 0\}$  и лучи  $\{y = 0, x^2 > a - b\}$ ;
5. область пересекает только фокальный отрезок  $\{y = 0, x^2 < a - b\}$ ;
6. область пересекает ось  $\{x = 0\}$  и фокальный отрезок  $\{y = 0, x^2 < a - b\}$ .

Пусть выполнено первое условие из системы (\*). Используя формулы разделения переменных (9), найдем параметры дуг софокусных квадрик, ограничивающих область возможного движения. Пусть точка  $(h, f)$  лежит на пересечении кривых  $d1_1(\varepsilon)$  и  $d2_2(\delta)$ . Если  $(h, f) \in II \cup III$ , область возможного движения ограничена дугами четырех софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = \hat{\lambda}_1(h, f)$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_1(h, f)$  и  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1$ ,  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1 - \varepsilon$ . Все эти параметры являются корнями многочлена  $-P(z) + hz + f$ , причем  $\varepsilon > 0$  достаточно малый параметр, а  $\hat{\lambda}_1$  и  $\check{\lambda}_1$  ближайšie корни к  $\lambda_1(x_0, y_0)$  слева и справа соответственно. Если же  $(h, f) \in I \cup IV$ , область возможного движения ограничена софокусными гиперболами с параметрами  $\lambda = \hat{\lambda}_1(h, f)$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_1(h, f)$ . И аналогично, если  $(h, f) \in III \cup IV$ , область ограничена дугами четырех софокусных эллипсов с параметрами  $\lambda = e_2(h) + \delta_1$ ,  $\lambda = e_2(h) + \delta_1 - \delta$  и  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$ . Если же  $(h, f) \in I \cup II$ , область ограничена софокусными эллипсами  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$ .

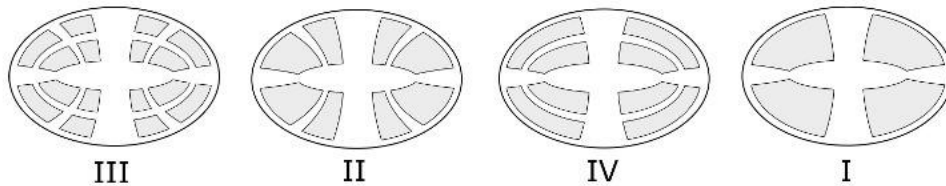


Рис. 27: Области возможного движения, соответствующие значениям первых интегралов из секторов III, II, IV и I

Таким образом, область возможного движения состоит из  $4n$  компонент связности, по  $n$  в каждом квадранте плоскости. Рассмотрим компоненты связности, лежащие в квадранте  $\{x > 0, y > 0\}$ . Точке  $(h, f) \in III$  соответствуют четыре компоненты связности, прообраз которых гомеоморфен объединению четырех торов вида

$$4T^2 = \left( S_1^1(\hat{\lambda}_1 + a, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_2^1(\Lambda_1, \check{\lambda}_1 + a) \right) \times \left( S_3^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_4^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b) \right),$$

где  $\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ ,  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ . Точке  $(h, f) \in II$  соответствуют две компоненты связности, прообраз которых гомеоморфен объединению двух торов вида

$$2T^2 = \left( S_1^1(\hat{\lambda}_1 + a, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_2^1(\Lambda_1, \check{\lambda}_1 + a) \right) \times S_{3+4}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b).$$

Точке  $(h, f) \in IV$  также соответствуют две компоненты связности, прообраз которых гомеоморфен объединению двух торов вида

$$2T^2 = S_{1+2}^1(\hat{\lambda}_1 + a, \check{\lambda}_1 + a) \times \left( S_3^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_4^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b) \right).$$

Наконец, точке  $(h, f) \in I$  соответствуют одна компонента связности, прообраз которой гомеоморфен тору

$$T^2 = S_{1+2}^1(\hat{\lambda}_1 + a, \check{\lambda}_1 + a) \times S_{3+4}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b).$$

При этом, на разделяющей дуге  $d2$  окружности  $S_3^1$  и  $S_4^1$  сливаются в одной точке, образуя фигуру “восьмерка”. Следовательно, прообраз кривой  $d1_1(\varepsilon)$  из области  $II \cup III$  послойно гомеоморфен прямому произведению вида

$$\left( S_1^1(\hat{\lambda}_1 + a, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_2^1(\Lambda_1, \check{\lambda}_1 + a) \right) \times B,$$

а прообраз этой кривой из области  $I \cup IV$  послойно гомеоморфен произведению  $S_{1+2}^1(\hat{\lambda}_1 + a, \check{\lambda}_1 + a) \times B$ . Осталось заметить, что объединение этих прообразов для всевозможных значений  $\varepsilon$  послойно гомеоморфно прямому произведению  $B \times B$ . Следовательно, рассматриваемая особенность лиувиллево эквивалентна объединению четырех особенностей  $B \times B$ .

Теперь положим, что выполнено второе или третье условие системы (\*), и снова найдем параметры граничных квадрик области возможного движения для всевозможных расположений точки  $(h, f)$ . Получим, что область состоит из  $2n$  компонент связности, по  $n$  в каждой полуплоскости  $\pm y > 0$  (см. рис. 28). Рассмотрим компоненты связности, лежащие в полуплоскости  $y > 0$ . Если  $(h, f) \in III$ , то существует шесть компонент связности, прообраз которых гомеоморфен объединению шести торов вида

$$6T^2 = \left( S_1^1(-\hat{\lambda}_1 - a, -\Lambda_1) + S_2^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_3^1(\Lambda_1, \hat{\lambda}_1 + a) \right) \times \left( S_4^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_5^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b) \right),$$

где  $\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ ,  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ . Если  $(h, f) \in II$ , то существует три компоненты связности, прообраз которых гомеоморфен объединению трех торов вида  $3T^2 = \left( S_1^1(-\hat{\lambda}_1 - a, -\Lambda_1) + S_2^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_3^1(\Lambda_1, \hat{\lambda}_1 + a) \right) \times S_{4+5}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b)$ .

При  $(h, f) \in II$  существует две компоненты связности, соответствующие двум торам

$$2T^2 = S_{1+2+3}^1(-\hat{\lambda}_1 - a, \hat{\lambda}_1 + a) \times \left( S_4^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_5^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b) \right).$$

Точкам  $(h, f) \in I$  соответствует один тор

$$T^2 = S_{1+2+3}^1(-\hat{\lambda}_1 - a, \hat{\lambda}_1 + a) \times S_{4+5}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b).$$

Следовательно, прообраз дуги кривой  $d2_2(\delta)$  из области  $III \cup IV$  послойно гомеоморфен прямому произведению  $B_2 \times \left( S_4^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_5^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b) \right)$ , а прообраз этой дуги из области  $I \cup II$  послойно гомеоморфен  $B_2 \times S_{4+5}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b)$ . Несложно заметить, что прообраз всей окрестности  $O(h_0, f_0)$ , т.е. объединение прообразов областей возможного движения для всех значений параметров  $\varepsilon$  и  $\delta$ , послойно гомеоморфен прямому произведению  $B_2 \times B$ . Таким образом, рассматриваемая особенность лиувиллево эквивалентна объединению двух таких произведений.

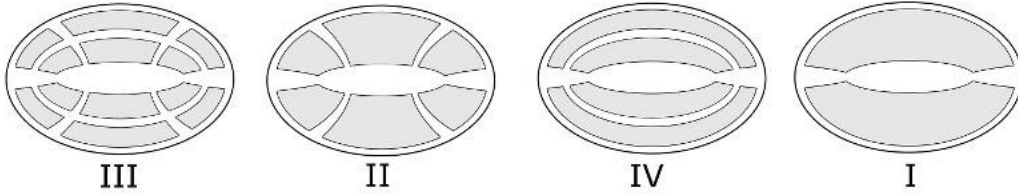


Рис. 28: Области возможного движения, соответствующие значениям первых интегралов из секторов  $III$ ,  $II$ ,  $IV$  и  $I$

Заметим, что условие 5 системы (\*) симметрично условию 3. В этом случае точкам  $(h, f)$  из секторов  $III$ ,  $II$ ,  $IV$  и  $I$  также соответствуют области возможного движения, состоящие из шести, трех, двух и одной компоненты связности соответственно, с той лишь разницей, что ограничивающие их софокусные гиперболы становятся софокусными эллипсами и наоборот. Таким образом, этому условию также соответствует особенность, лиувиллево эквивалентная объединению двух прямых произведений  $B_2 \times B$ .

Положим теперь, что выполнено условие 6 из системы (\*). Тогда точкам  $(h, f)$ , лежащим в секторе  $III$ , соответствует область возможного движения, состоящая из девяти компонент связности (рис. 29,  $III$ ). Прообраз области гомеоморфен объединению девяти торов вида

$$9T^2 = \left( S_1^1(-\hat{\lambda}_1 - a, -\Lambda_1) + S_2^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_3^1(\Lambda_1, \hat{\lambda}_1 + a) \right) \times \left( S_4^1(-\hat{\lambda}_2 - b, -\Lambda_2) + S_5^1(-\Lambda_2 + \delta, \Lambda_2 - \delta) + S_6^1(\Lambda_2, \hat{\lambda}_2 + b) \right),$$

где  $\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ ,  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ . Точкам  $(h, f)$  из сектора  $II$  соответствуют области возможного движения, состоящие из трех компонент (рис. 29,  $II$ ). Их прообразы гомеоморфны трем торами вида

$$3T^2 = \left( S_1^1(-\hat{\lambda}_1 - a, -\Lambda_1) + S_2^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_3^1(\Lambda_1, \hat{\lambda}_1 + a) \right) \times S_{4+5+6}^1(-\hat{\lambda}_2 - b, \hat{\lambda}_2 + b).$$

Точкам из сектора  $IV$  также соответствуют три компоненты связности области возможного движения (рис. 29,  $IV$ ), прообразы которых гомеоморфны трем торами

$$3T^2 = S_{1+2+3}^1(-\hat{\lambda}_1 - a, \hat{\lambda}_1 + a) \times \left( S_4^1(-\hat{\lambda}_2 - b, -\Lambda_2) + S_5^1(-\Lambda_2 + \delta, \Lambda_2 - \delta) + S_6^1(\Lambda_2, \hat{\lambda}_2 + b) \right).$$

Точкам  $(h, f)$  из сектора  $I$  соответствует связная область возможного движения (рис. 29,  $I$ ), прообраз которой гомеоморфен тору

$$T^2 = S_{1+2+3}^1(-\hat{\lambda}_1 - a, \hat{\lambda}_1 + a) \times S_{4+5+6}^1(-\hat{\lambda}_2 - b, \hat{\lambda}_2 + b).$$

Несложно заметить, что прообраз дуги кривой  $d1_1(\varepsilon)$ , лежащей в области  $II \cup III$ , послойно гомеоморфен прямому произведению

$$\left( S_1^1(-\hat{\lambda}_1 - a, -\Lambda_1) + S_2^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_3^1(\Lambda_1, \hat{\lambda}_1 + a) \right) \times B_2.$$

Прообраз дуги кривой  $d1_1(\varepsilon)$  из области  $I \cup IV$ , в свою очередь, послойно гомеоморфен прямому произведению  $S_{1+2+3}^1(-\hat{\lambda}_1 - a, \hat{\lambda}_1 + a) \times B_2$ . Следовательно, рассматриваемая особенность лиувиллево эквивалентна особенности  $B_2 \times B_2$ .

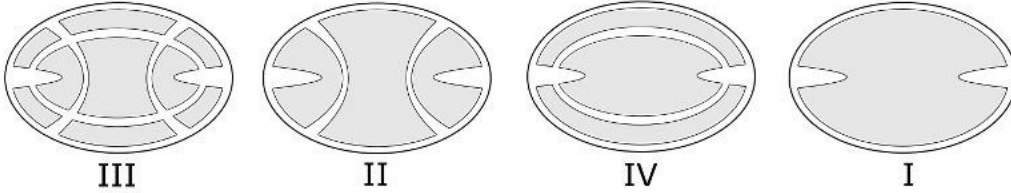


Рис. 29: Области возможного движения, соответствующие значениям первых интегралов из секторов  $III$ ,  $II$ ,  $IV$  и  $I$

Наконец, рассмотрим случай 4 из системы (\*). Здесь область возможного движения уже не ограничена софокусными гиперболами с параметрами  $\lambda = \hat{\lambda}_1$  и  $\lambda = \check{\lambda}_1$ . При  $(h, f) \in III$  она ограничена дугами двух софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1$ ,  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1 - \varepsilon$  и четырех софокусных эллипсов  $\lambda = e_2(h) + \delta_1$ ,  $\lambda = e_2(h) + \delta_1 - \delta$  и  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$  (см. рис. 30,  $III$ ). Ее прообраз гомеоморфен восьми торами вида

$$8T^2 = \left( S_1^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_2^1(-\Lambda_1, \Lambda_1) + S_3^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_4^1(-\Lambda_1, \Lambda_1) \right) \times \left( S_5^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_6^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b) \right),$$

где  $\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ ,  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ . При  $(h, f) \in II$  область возможного движения ограничена дугами указанных софокусных гипербол и дугами эллипсов  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$  (см. рис. 30,II). Ее прообраз гомеоморфен объединению четырех торов

$$4T^2 = \left( S_1^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_2^1(-\Lambda_1, \Lambda_1) + S_3^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + S_4^1(-\Lambda_1, \Lambda_1) \right) \times \\ \times S_{5+6}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b).$$

При  $(h, f) \in IV$  область возможного движения состоит из двух неодносвязных компонент, ограниченных софокусными эллипсами  $\lambda = e_2(h) + \delta_1$ ,  $\lambda = e_2(h) + \delta_1 - \delta$  и  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$  (см. рис. 30,IV). Прообраз такой области возможного движения гомеоморфен четырем торам вида

$$4T^2 = \left( S_{cw}^1 + S_{ccw}^1 \right) \times \left( S_5^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_6^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b) \right).$$

Здесь окружности  $S_{cw}^1$  и  $S_{ccw}^1$ , как и раньше, отвечают движениям по часовой стрелке и против нее соответственно. При  $(h, f) \in I$  область возможного движения ограничена лишь эллипсами  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$  (см. рис. 30,I). Ее прообраз гомеоморфен двум торам вида

$$T^2 = \left( S_{cw}^1 + S_{ccw}^1 \right) \times S_{5+6}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b).$$

Заметим, что на разделяющей дуге  $d1$  при  $\varepsilon = 0$  окружности  $S_1^1$ ,  $S_2^1$ ,  $S_3^1$  и  $S_4^1$  сливаются вместе в четырех точках, образуя особый слой 2-атома  $C_4$ . Следовательно, прообраз дуги кривой  $d2_2(\delta)$  из области  $III \cup IV$  послойно гомеоморфен прямому произведению

$$C_4 \times \left( S_5^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_6^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b) \right),$$

а прообраз дуги из области  $I \cup II$  послойно гомеоморфен  $C_4 \times S_{5+6}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b)$ . Следовательно, прообраз всей окрестности  $O(h_0, f_0)$  послойно гомеоморфен особенности  $C_4 \times B$ .

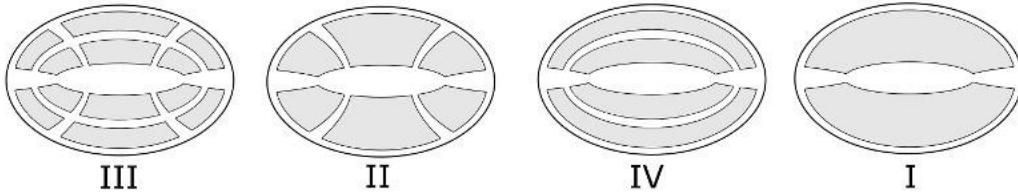


Рис. 30: Области возможного движения, соответствующие значениям первых интегралов из секторов III, II, IV и I

Итак, мы рассмотрели все особенности, содержащие особые точки вида  $\lambda_1(x_0, y_0) \in (-a, -b)$ ,  $\lambda_2(x_0, y_0) \in (-b, 0)$ . Положим теперь  $\lambda_1 = -a$ . В этот раз окрестность точки  $(h_0, f_0)$  в образе отображения момента содержит бифуркационные дуги  $d2$  и  $d4$ . Определим

сектора  $I, II, III, IV$  так же, как и ранее, положив  $e_1(h) \equiv -a$ . В окрестности  $O(h_0, f_0)$  зададим координатную сетку с помощью кривых  $d2_2(\delta)$  и

$$dA(\varepsilon) : f = \begin{cases} (a - \varepsilon)h + P(-a + \varepsilon) & \text{в области } II \cup III, \\ ah + P(-a) - \varepsilon & \text{в области } I \cup IV. \end{cases}$$

Отметим, что, в силу нерасщепляемости, в окрестности  $O(h_0, f_0)$  не лежат точки бифуркационной дуги  $d5$ . Из этого следует, что при любом фиксированном значении первых интегралов область возможного движения либо не пересекается с фокальным отрезком, либо не пересекается с его дополнением на прямой  $\{y = 0\}$ . Следовательно, существует три возможности:

1. область возможного движения не пересекает ось бильярда  $\{y = 0\}$ ;
2. область пересекает только лучи  $\{y = 0, x^2 > a - b\}$ ;
3. область пересекает только фокальный отрезок  $\{y = 0, x^2 < a - b\}$ .

Заметим, что условие 1 эквивалентно условию 1 из системы (\*). Действительно, выбрав значение первых интегралов  $(h, f)$  из сектора  $I, II, III$  или  $IV$ , получим, что соответствующая область возможного движения ограничена дугами тех же софокусных эллипсов, что и в случае 1(\*) (см. рис. 31). Однако теперь она ограничена дугами четырех ветвей софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = \bar{\lambda}_1$  и  $\lambda = -a + \varepsilon$  (вместо дуг четырех гипербол с параметрами  $\lambda = \hat{\lambda}_1(h, f)$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_1(h, f)$  и  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1$ ,  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1 - \varepsilon$ , но только в левой полуплоскости  $x > 0$ ). Эти два случая эквивалентны с точки зрения топологии областей возможного движения и их прообразов. Следовательно, случай 1(\*\*) соответствует особенности типа прямого произведения  $B \times B$ . Аналогично можно показать, что условие 3 также эквивалентно условию 5 из системы (\*). Особенность в этом случае также лиувиллево эквивалентна особенности  $B \times B_2$ .

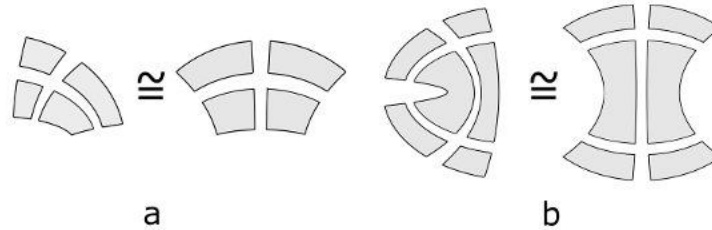


Рис. 31: Области возможного движения для значений первых интегралов из сектора  $III$ . На рис. а изображены области для случаев 1(\*) и 1(\*\*). На рис. б изображены области для случаев 5(\*) и 3(\*\*)

Пусть теперь выполнено условие 2 из (\*\*). Зафиксируем точку  $(h, f) \in O(h_0, f_0)$ . Пусть она лежит в пересечении кривых  $dA(\varepsilon)$  и  $d2_2(\delta)$ . Если точка  $(h, f)$  лежит в секторе  $III$ , соответствующая область возможного движения ограничена дугами софокусной гиперболы  $\lambda = -a + \varepsilon$  и дугами софокусных эллипсов с параметрами  $\lambda = e_2(h) + \delta_1$ ,

$\lambda = e_2(h) + \delta_1 - \delta$  и  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$  (см. рис. 32,III). Прообраз области возможного движения гомеоморфен объединению четырех торов вида

$$4T^2 = \left( S_1^1(-a + \varepsilon, a - \varepsilon) + S_1^2(-a + \varepsilon, a - \varepsilon) \right) \times \left( S_3^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_4^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b) \right),$$

где  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ . Если точка  $(h, f)$  лежит в секторе II, область ограничена дугами тех же гипербол, а также дугами эллипсов с параметрами  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \check{\lambda}_2$  (см. рис. 32,II). Прообраз гомеоморфен объединению двух торов вида

$$2T^2 = \left( S_1^1(-a + \varepsilon, a - \varepsilon) + S_1^2(-a + \varepsilon, a - \varepsilon) \right) \times S_{3+4}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b).$$

При  $(h, f) \in IV$  область возможного движения ограничена только эллипсами и состоит из двух неодносвязных компонент (см. рис. 32,IV), прообраз которых гомеоморфен объединению четырех торов

$$4T^2 = \left( S_{cw}^1 + S_{ccw}^1 \right) \times \left( S_3^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_4^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b) \right)$$

При  $(h, f) \in I$  область возможного движения представляет собой кольцевую область, прообраз которой гомеоморфен двум торам

$$2T^2 = \left( S_{cw}^1 + S_{ccw}^1 \right) \times S_{3+4}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b).$$

На кривой  $d1$ , где  $\varepsilon = 0$ , окружности  $S_1^1$  и  $S_2^1$  сливаются вместе в двух точках, образуя особый слой 2-атома  $C_2$ . Следовательно, прообраз дуги кривой  $d2_2(\delta)$  из области  $III \cup IV$  послойно гомеоморфен прямому произведению

$$C_2 \times \left( S_3^1(\hat{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta) + S_4^1(\Lambda_2, \check{\lambda}_2 + b) \right),$$

а прообраз дуги из области  $I \cup II$  послойно гомеоморфен произведению

$$C_2 \times S_{3+4}^1(\hat{\lambda}_2 + b, \check{\lambda}_2 + b).$$

Несложно заметить, что в этом случае прообраз всей окрестности  $O(h_0, f_0)$  послойно гомеоморфен прямому произведению  $C_2 \times B$ .

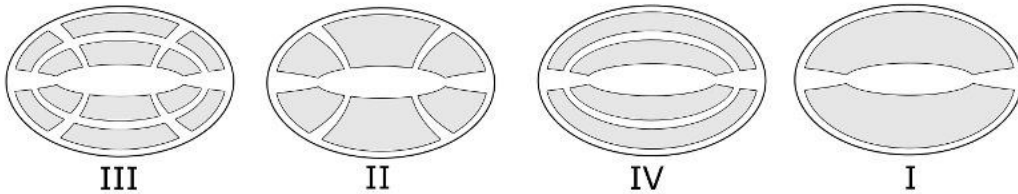


Рис. 32: Области возможного движения, соответствующие значениям первых интегралов из секторов III, II, IV и I

Таким образом, были рассмотрены все особенности для случаев  $\lambda_1 \in [-a, -b)$  и  $\lambda_2 \in (-b, 0)$ . Положим теперь  $\lambda_2 = -b$  и  $\lambda_1 \in (-a, -b)$ . Образ отображения момента разделен на четыре сектора бифуркационными дугами  $d1$  и  $d5$ . Обозначим эти сектора  $I-IV$  так же, как и в предыдущих случаях, подставив  $e_2(h) \equiv -b$ . Введем в окрестности  $O(h_0, f_0)$  координатную сетку с помощью кривых  $d1_1(\varepsilon)$  и

$$d5(\delta) : f = (b + \delta)h + P(-b - \delta),$$

где малый параметр  $\delta$  принимает значения на отрезке  $[-\max(\delta), \max(\delta)]$ .

Отметим, что, в силу условия нерасщепляемости, в окрестности  $O(h_0, f_0)$  нет точек бифуркационной кривой  $d4$ . Из этого, в частности, следует, что для любого выбранного значения первых интегралов  $(h, f) \in O(h_0, f_0)$  область возможного движения либо пересекает ось бильярда  $\{x = 0\}$ , либо не пересекает ее. Кроме того, область может быть зажата между ветвями фиксированной гиперболы  $\lambda = hyp$  и, таким образом, не пересекаться с окрестностью фокусов. Следовательно, существует четыре возможности:

1. область возможного движения не пересекает ось бильярда  $\{x = 0\}$  и ограничена фиксированной гиперболой  $\lambda = hyp$ ;
  2. область пересекает ось бильярда  $\{x = 0\}$  и также ограничена фиксированной гиперболой  $\lambda = hyp$ ;
  3. область не пересекает ось бильярда  $\{x = 0\}$  и не отделена от фокусов
  4. область пересекает ось бильярда  $\{x = 0\}$  и не отделена от фокусов.
- } (\*\*\*)

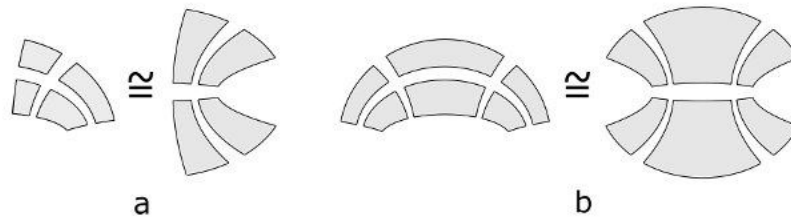


Рис. 33: Области возможного движения для значений первых интегралов из сектора  $III$ . На рис. а изображены области для случаев  $1(*)$  и  $1(***)$ . На рис. б изображены области для случаев  $2(*)$  и  $2(***)$

Отметим, что условие 1 эквивалентно условию 1 из системы  $(*)$ . Действительно, в данном случае значениям первых интегралов из секторов  $III$ ,  $II$ ,  $IV$  и  $I$  также соответствуют областям возможного движения, состоящим из четырех, двух, двух или одной прямоугольной компоненты связности. При этом на бифуркационных кривых эти компоненты сливаются по своим ребрам, образуя бифуркации типа  $B$ . Следовательно, условия  $1(*)$  и  $1(***)$  неотличимы с точки зрения топологии областей возможного движения, а значит, и с точки зрения топологии слоения Лиувилля. В этом случае особенность лиувиллево эквивалентна объединению двух особенностей

$B \times B$ . Аналогично можно показать, что условие  $2(***)$  эквивалентно условию  $2(*)$ . В этом случае особенность лиувиллево эквивалентна прямому произведению  $B \times B_2$ .

Положим теперь, что выполнено условие 3 из  $(***)$ . Отметим, что ранее во всех рассмотренных случаях точкам  $(h, f)$  на бифуркационных кривых соответствовали слияния областей возможного движения вдоль дуг софокусных квадрик. Теперь же точкам дуги  $d5$  соответствует перестройка области возможного движения через фокусы бильярда. В связи с этим разобьем бильярдный стол фиксированной софокусной гиперболой  $\lambda = \bar{\lambda}_1$  на три части таким образом, что область между ветвями этой гиперболы содержит все особые точки ранга ноль  $(x_0, y_0)$  рассматриваемой особенности. Тогда для каждого значения первых интегралов  $(h, f)$  область возможного движения разбивается на две части  $D_F + D_S$ . При этом подобласть  $D_S$  содержит дуги критической гиперболы  $\lambda = e_1(h)$ , а подобласть  $D_F$  пересекает окрестность фокусов (см. рис. 33). Также отметим, что любая область возможного движения разбита на две непересекающиеся части, симметричные друг другу относительно прямой  $\{x = 0\}$ . Далее будем работать только в полуплоскости  $x > 0$ .

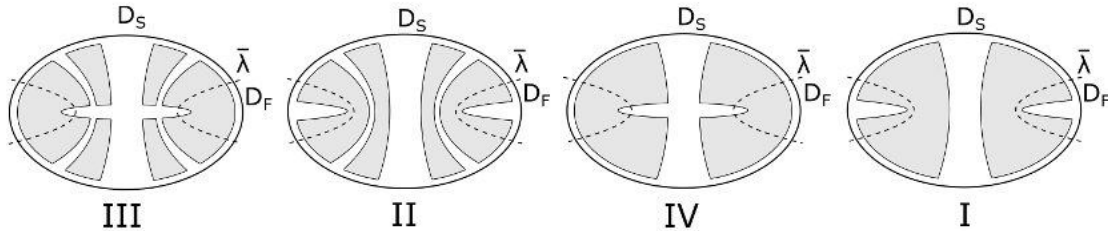


Рис. 34: Области возможного движения, соответствующие значениям первых интегралов из секторов  $III$ ,  $II$ ,  $IV$  и  $I$

Итак, если точка  $(h, f)$  лежит в секторе  $III$ , то, в силу формул разделения переменных (9), область возможного движения ограничена дугами софокусных эллипсов с параметрами  $\lambda = -b + \delta$  и  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ , а также дугами софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = \hat{\lambda}_1(h, f)$  и  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1$ ,  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1 - \varepsilon$ . Прообраз области  $D_S$  имеет вид

$$Pr^{-1}(D_S) = \left( S_1^1(\hat{\lambda}_1 + a, \Lambda_1 - \varepsilon) + I_2^1[\Lambda_1, \bar{\lambda}_1 + a] \right) \times \left( S_3^1(-\hat{\lambda}_2 - b, -\delta) + S_4^1(\delta, \hat{\lambda}_2 + b) \right),$$

где  $\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ , а  $I^1[u, v]$  обозначает топологический отрезок, склеенный из двух копий  $[u', v']$ ,  $[u'', v'']$  отрезка  $[u, v] \in \mathbb{R}$  в точках  $u' \sim u''$ . При  $(h, f) \in IV$ , область возможного движения ограничена дугами гиперболы с параметром  $\lambda = \hat{\lambda}_1(h, f)$ . В этом случае прообраз области  $D_S$  имеет вид

$$Pr^{-1}(D_S) = I_{1+2}^1[\hat{\lambda}_1 + a, \bar{\lambda}_1 + a] \times \left( S_3^1(-\hat{\lambda}_2 - b, -\delta) + S_4^1(\delta, \hat{\lambda}_2 + b) \right).$$

Если точка  $(h, f)$  лежит в секторе  $II$ , область возможного движения ограничена софокусным эллипсом с параметром  $\lambda = \hat{\lambda}_2(h, f)$  и софокусными гиперболами  $\lambda = \hat{\lambda}_1(h, f)$ ,  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1$ ,  $\lambda = e_1(h) + \varepsilon_1 - \varepsilon$  и  $\lambda = -b - \delta$ . Тогда, прообраз области  $D_S$  имеет вид

$$Pr^{-1}(D_S) = \left( S_1^1(\hat{\lambda}_1 + a, \Lambda_1 - \varepsilon) + I_2^1[\Lambda_1, \bar{\lambda}_1 + a] \right) \times S_{3+4}^1(-\hat{\lambda}_2 - a, \hat{\lambda}_2 + a).$$

В случае  $(h, f) \in O(h_0, f_0)$  область возможного движения ограничена дугами софокусных квадрик  $\lambda = \hat{\lambda}_2(h, f)$ ,  $\lambda = \hat{\lambda}_1(h, f)$  и  $\lambda = -b - \delta$ . Прообраз области  $D_S$  имеет вид

$$Pr^{-1}(D_S) = I_{1+2}^1[\hat{\lambda}_1 + a, \bar{\lambda}_1 + a) \times S_{3+4}^1(-\hat{\lambda}_2 - b, \hat{\lambda}_2 + b).$$

При  $\delta = 0$  точка  $(h, f)$  попадает на бифуркационную дугу  $d5$ , и окружности  $S_3^1$  и  $S_4^1$  сливаются вместе в общей точке, образуя особый слой 2-атома  $B$ . Если же  $\varepsilon = 0$ , точка  $(h, f)$  попадает на дугу  $d1$ , и окружность  $S_1^1$  сливается с отрезком  $I_2^1$ , образуя особый слой некомпактного 2-атома  $\bar{B}$  (см. рис. 35). Следовательно, прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$  в ограничении на область  $D_S$  послойно гомеоморфен прямому произведению  $\bar{B} \times B$ .

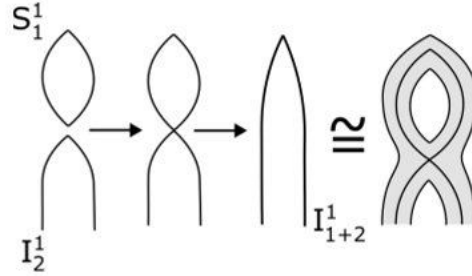


Рис. 35: Некомпактный 2-атом  $\bar{B}$

Найдем теперь прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$  в ограничении на область  $D_F$ . Отметим, что граница этой области всегда содержит дуги софокусной гиперболы  $\lambda = \bar{\lambda}_1$  и софокусного эллипса  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ . При  $(h, f) \in III \cup IV$  она дополнительно ограничена дугой эллипса  $\lambda = -b + \delta$ , а при  $(h, f) \in I \cup II$  она ограничена дугой гиперболы  $\lambda = -b - \delta$ . При  $\delta = 0$  точка  $(h, f)$  попадает на дугу  $d5$ , а область  $D_F$  перестраивается через фокус (см. рис. 34). В работе [12] было показано, что прообраз дуги  $d1_1(\varepsilon)$  в этом случае послойно гомеоморфен прямому произведению вида  $[0, 1] \times B$  (см. рис. 36, а). Если же на гиперболической границе  $\lambda = \bar{\lambda}_1$  задать закон абсолютно упругого отражения, т.е. превратить  $D_F$  в бильярд, полученная трехмерная особенность слоения имеет вид

$$(S^1 \times B)/\mathbb{Z}_2 = ([0, 1] \times B)/\sim,$$

где отношение эквивалентности отождествляет точку границы  $p_0 \in \{0\} \times B$  с точкой границы  $p_1 \in \{1\} \times B$  поворотом на угол  $\pi$ .

Таким образом, прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$  склеен из двух частей:

$$\bar{B} \times B \quad \text{и} \quad [0, 1] \times [-\max(\varepsilon), \max(\varepsilon)] \times B.$$

В результате рассматриваемая особенность ливиллево эквивалентна особенности вида  $(\bar{B} \times B)/\sim$ , где отношение эквивалентности сопоставляет точки границы  $(u, v) \in 2I \times B$  так, что точки  $u' \sim u''$ ,  $u' \neq u''$  лежат на одном слое 2-атома  $\bar{B}$ , а точки  $v' \sim v''$  переходят друг в друга поворотом 2-атома  $B$  на угол  $\pi$  (см. рис. 36, б). Осталось заметить, что построенная особенность эквивалентна почти прямому произведению  $(B_2 \times B)/\mathbb{Z}_2$ , где группа  $\mathbb{Z}_2$  действует на каждом сомножителе поворотом на угол  $\pi$ .

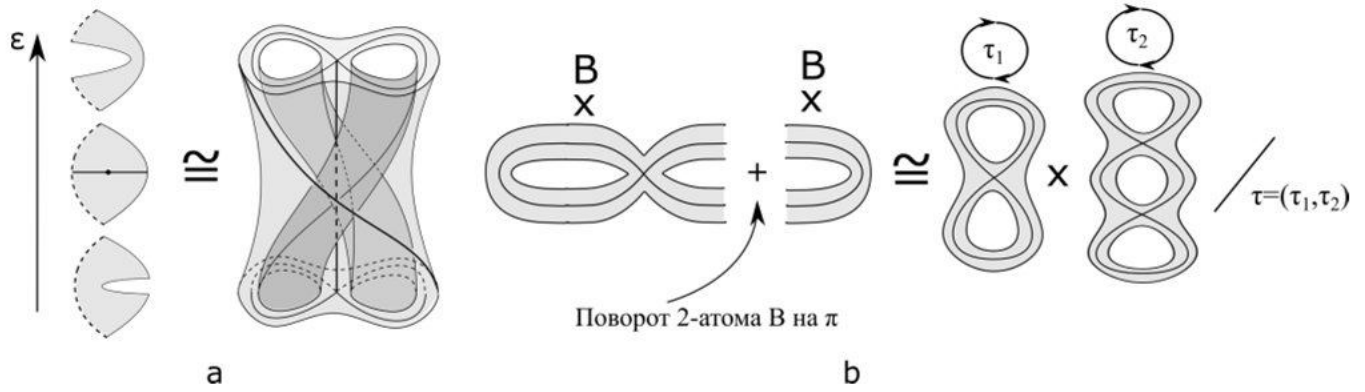


Рис. 36: На рис. а изображен прообраз дуги кривой  $dI_1(\varepsilon)$  в ограничении на область  $D_F$ . На рис. б изображена особенность типа почти прямого произведения  $(B_2 \times B)/\mathbb{Z}_2$

Положим теперь, что выполнено условие 4 из системы (\*\*\*) . Снова разобьем область возможного движения на три части  $D_{F-}$ ,  $D_S$  и  $D_{F+}$ , как и в прошлом случае. Области  $D_{F-}$  и  $D_{F+}$  здесь пересекают окрестность левого и правого фокуса соответственно (рис. 37). Отметим, что эти области симметричны и совпадают с областью  $D_F$  из прошлого случая. Следовательно, прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$  в ограничении на  $D_{F-} \cup D_{F+}$  состоит из двух частей, послойно гомеоморфных прямому произведению  $[0, 1] \times [-\max(\varepsilon), \max(\varepsilon)] \times B$ .

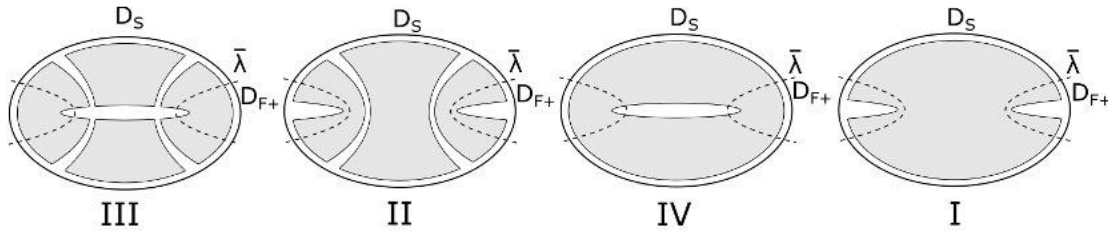


Рис. 37: Области возможного движения, соответствующие значениям первых интегралов из секторов III, II, IV и I

Найдем прообраз области  $D_S$ . При  $(h, f) \in III$  он имеет вид прямого произведения

$$Pr^{-1}(D_S) = \left( I_1^1(-\bar{\lambda}_1 - a, -\Lambda_1] + S_2^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + I_3^1[\Lambda_1, \bar{\lambda}_1 + a) \right) \times \\ \times \left( S_4^1(-\hat{\lambda}_2 - b, -\delta) + S_5^1(\delta, \hat{\lambda}_2 + b) \right),$$

где  $\Lambda_1 = e_1(h) + \varepsilon_1 + a$ . При  $(h, f) \in II$  имеем

$$Pr^{-1}(D_S) = \left( I_1^1(-\bar{\lambda}_1 - a, -\Lambda_1] + S_2^1(-\Lambda_1 + \varepsilon, \Lambda_1 - \varepsilon) + I_3^1[\Lambda_1, \bar{\lambda}_1 + a) \right) \times \\ \times S_{4+5}^1(-\hat{\lambda}_2 - b, \hat{\lambda}_2 + b).$$

Если точка  $(h, f)$  лежит в секторе IV, получим

$$Pr^{-1}(D_S) = 2[-\bar{\lambda}_1 - a, \bar{\lambda}_1 + a] \times \left( S_4^1(-\hat{\lambda}_2 - b, -\delta) + S_5^1(\delta, \hat{\lambda}_2 + b) \right).$$

Если же точка  $(h, f)$  лежит в секторе  $I$ , то

$$Pr^{-1}(D_S) = 2[-\bar{\lambda}_1 - a, \bar{\lambda}_1 + a] \times S_{4+5}^1(-\hat{\lambda}_2 - b, \hat{\lambda}_2 + b).$$

Если точка  $(h, f)$  лежит на бифуркационной дуге  $d1$ , то  $\varepsilon = 0$ , в отрезки  $I_1^1$  и  $I_2^1$  сливаются с окружностью  $S_2^1$ , образуя особый слой некомпактного 2-атома  $\bar{B}_2$  (рис. 38). На дуге кривой  $d5$  имеем  $\delta = 0$ , и окружности  $S_4^1$  и  $S_5^1$  сливаются в одной точке, образуя особый слой 2-атома  $B$ .

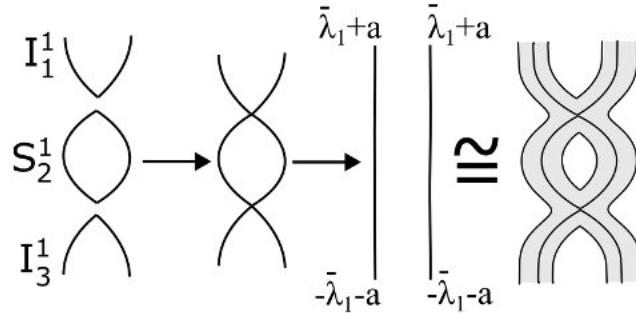


Рис. 38: Некомпактный 2-атом  $\bar{B}_2$

Таким образом, прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$  состоит из трех частей: прямого произведения  $\bar{B}_2 \times B$  и двух произведений вида  $[0, 1] \times [-\max(\varepsilon), \max(\varepsilon)] \times B$ . Склеим их в одну особенность вида  $\bar{B}_2 \times B / \sim$ , где, как и ранее, отношение эквивалентности сопоставляет точки границы  $(u, v) \in 4I \times B$  так, что точки  $u' \sim u''$ ,  $u' \neq u''$  лежат на одном слое некомпактного 2-атома  $\bar{B}_2$ , а точки  $v' \sim v''$  переходят друг в друга поворотом 2-атома  $B$  на угол  $\pi$ . Осталось заметить, что полученная особенность ливиллево эквивалентна почти прямому произведению  $(C_4 \times B) / \mathbb{Z}_2$ , где  $\mathbb{Z}_2$  действует на каждом сомножителе поворотом на угол  $\pi$ , как показано на рис. 38.

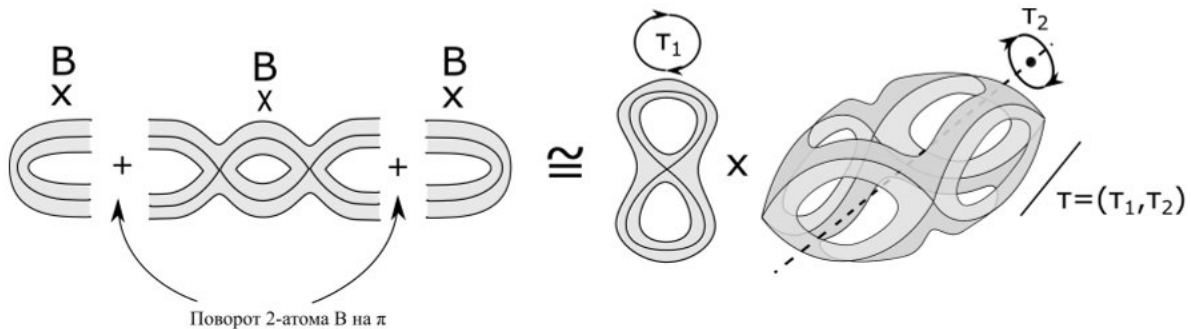


Рис. 39: Прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$

Таким образом, были рассмотрены все особенности, отвечающие условию  $\lambda_2 = -b$  и  $\lambda_1 \in (-a, -b)$ . Рассмотрим симметричный случай  $\lambda_1 = -b$  и  $\lambda_2 \in (-b, 0)$ . Тогда

окрестность  $O(h_0, f_0)$  содержит бифуркационные дуги  $d_2$  и  $d_5$ , разбивающие ее на четыре сектора

$$I = \begin{cases} f < P(-b) + hb, \\ f > P(e_2(h)) - he_2(h), \end{cases} \quad II = \begin{cases} f > P(-b) + hb, \\ f > P(e_2(h)) - he_2(h), \end{cases}$$

$$III = \begin{cases} f > P(-b) + hb, \\ f < P(e_2(h)) - he_2(h), \end{cases} \quad IV = \begin{cases} f < P(-b) + hb, \\ f < P(e_2(h)) - he_2(h). \end{cases}$$

Введем в этой окрестности координатную сетку, заданную кривыми  $d_2(\delta)$  и

$$d_5(\varepsilon) : f = (b - \varepsilon)h + P(-b + \varepsilon).$$

Отметим, что, в силу условия нерасщепляемости, бифуркационная кривая  $d_4$  не пересекает окрестность  $O(h_0, f_0)$ . Из этого, в частности, следует, что для любого значения первых интегралов  $(h, f) \in O(h_0, f_0)$  область возможного движения либо пересекает ось  $\{x = 0\}$ , либо не пересекает. Кроме того, может существовать фиксированный софокусный эллипс с параметром  $\lambda = \bar{\lambda}_2$ , отделяющий все области возможного движения от фокусов билиарда. Таким образом, имеют место четыре случая

1. область возможного движения не пересекает ось билиарда  $\{x = 0\}$  и ограничена фиксированным эллипсом  $\lambda = \Lambda_1$ ;
  2. область пересекает ось билиарда  $\{x = 0\}$  и также ограничена фиксированным эллипсом  $\lambda = \Lambda_1$ ;
  3. область не пересекает ось билиарда  $\{x = 0\}$  и не отделена от фокусов
  4. область пересекает ось билиарда  $\{x = 0\}$  и не отделена от фокусов.
- } (\*\*\*\*)

Отметим, что условия 1 и 2 эквивалентны условиям 1 и 2 системы (\*\*\*) соответственно в том смысле, что области возможного движения, соответствующие значениям первых интегралов из секторов  $I - IV$ , неотличимы с точки зрения их структуры и бифуркаций (рис. 40). Этим случаям также соответствуют особенности, лиувиллево эквивалентные прямым произведениям  $B \times B$  и  $C_2 \times B$ .

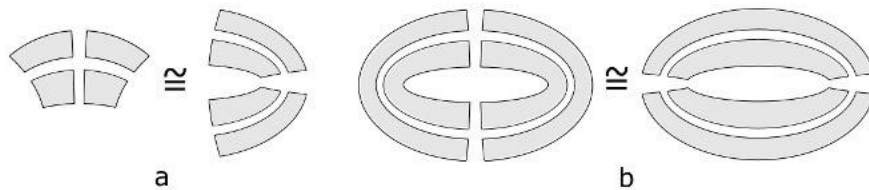


Рис. 40: Области возможного движения для значений первых интегралов из сектора  $III$ . На рис. а изображены области для случаев 1(\*\*) и 1(\*\*\*\*). На рис. б изображены области для случаев 2(\*\*) и 2(\*\*\*\*)

Также отметим, что условие 3 эквивалентно условию 3 системы (\*\*\*). Действительно, возьмем два значения первых интегралов:  $(h_1, f_1)$  в случае 3(\*\*\*\*) и  $(h_2, f_2)$

в случае  $3(***)$ . Пусть точка  $(h_1, f_1)$  лежит на пересечении кривых  $d_{2_2}(\delta)$  и  $d_5(\varepsilon)$ , а точка  $(h_2, f_2)$  лежит на пересечении кривых  $d_5(\delta)$  и  $d_{1_1}(\varepsilon)$  в том же секторе. Тогда этим двум значениям соответствуют области возможного движения, симметричные относительно замены гиперболических границ на эллиптические и наоборот. В итоге мы снова получили две системы, неотличимые друг от друга с точки зрения структуры областей возможного движения и их бифуркаций. Следовательно, в этом случае нерасщепляемая особенность снова лиувиллево эквивалентна почти прямому произведению  $(B_2 \times B)/\mathbb{Z}_2$ .

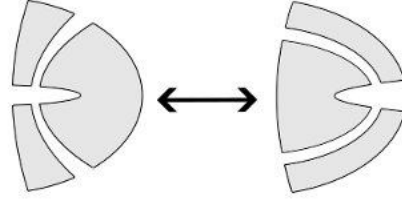


Рис. 41: Область возможного движения для случая  $3(***)$  получена из области для случая  $3(**)$  заменой эллиптических границ на гиперболические и наоборот

Рассмотрим случай  $4(***)$ . Разобьем бильярдный стол дугой софокусного эллипса с параметром  $\lambda = \bar{\lambda}_2$  так, что все особые точки ранга ноль рассматриваемой особенности лежат в кольцевой области между этим и граничным эллипсами. Тогда, при любом значении первых интегралов  $(h, f)$  область возможного движения разбивается на две части  $D_F$  и  $D_S$  так, что  $D_S$  содержит дуги критического эллипса  $\lambda = e_2(h)$ , а  $D_F$  пересекается с окрестностью фокусов (рис. 42).

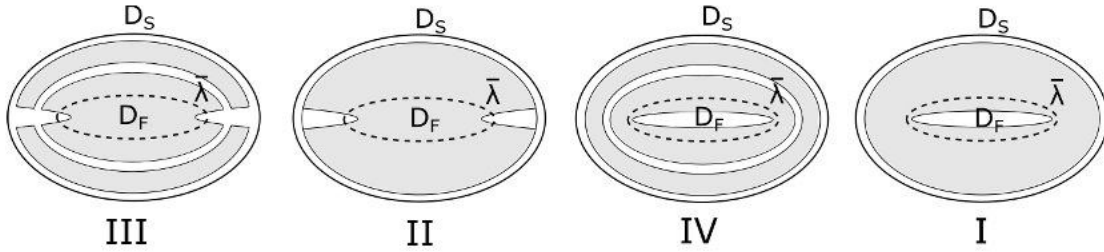


Рис. 42: Области возможного движения, соответствующие значениям первых интегралов из секторов  $III$ ,  $II$ ,  $IV$  и  $I$

Изучим слоение Лиувилля особенности в ограничении на область  $D_S$ . Пусть точка  $(h, f)$  лежит в секторе  $III$  на пересечении кривых  $d_{2_2}(\delta)$  и  $d_5(\varepsilon)$ . Тогда область  $D_S$  ограничена дугами софокусных эллипсов с параметрами  $\lambda = \bar{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \hat{\lambda}_2$  и  $\lambda = e_2(h) + \delta_1 - \delta$ ,  $\lambda = e_2(h) + \delta_1$ , а также софокусной гиперболой с параметром  $\lambda = -b - \varepsilon$ . Прообраз такой области имеет вид

$$Pr^{-1}(D_S) = \left( S_1^1(-b - \varepsilon, b + \varepsilon) + S_2^1(-a + \varepsilon, a - \varepsilon) \right) \times \left( I_3^1(\bar{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta] + S_4^1(\Lambda_2, \hat{\lambda}_2 + b) \right),$$

где  $\Lambda_2 = e_2(h) + \delta_1 + b$ . При  $(h, f) \in II$  область  $D_S$  ограничена дугами софокусных эллипсов с параметрами  $\lambda = \bar{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \hat{\lambda}_2$  и дугами гиперболы  $\lambda = -b - \varepsilon$ . Прообраз

этой области гомеоморфен прямому произведению

$$Pr^{-1}(D_S) = \left( S_1^1(-b - \varepsilon, b + \varepsilon) + S_2^1(-a + \varepsilon, a - \varepsilon) \right) \times I_{3+4}^1(\bar{\lambda}_2 + b, \hat{\lambda}_2 + b).$$

При  $(h, f) \in IV$  область  $D_S$  состоит из двух кольцевых компонент, прообраз которых гомеоморфен прямому произведению

$$Pr^{-1}(D_S) = \left( S_{cw}^1 + S_{ccw}^1 \right) \times \left( I_3^1(\bar{\lambda}_2 + b, \Lambda_2 - \delta] + S_4^1(\Lambda_2, \hat{\lambda}_2 + b) \right),$$

где окружности  $S_{cw}^1$  и  $S_{ccw}^1$  отвечают движению по часовой стрелке и против нее. При  $(h, f) \in I$  область  $D_S$  ограничена эллипсами  $\lambda = \bar{\lambda}_2$ ,  $\lambda = \hat{\lambda}_2$ . Ее прообраз гомеоморфен прямому произведению

$$Pr^{-1}(D_S) = \left( S_{cw}^1 + S_{ccw}^1 \right) \times I_{3+4}^1(\bar{\lambda}_2 + b, \hat{\lambda}_2 + b).$$

Если точка  $(h, f)$  лежит на бифуркационной прямой  $d5$ , окружности  $S_1^1$  и  $S_2^1$  сливаются вместе в двух точках, образуя особый слой 2-атома  $C_2$ . Если точка  $(h, f)$  лежит на дуге  $d2$ , окружность  $S_4^1$  сливается с отрезком  $I_3^1$ , образуя особый слой некомпактного 2-атома  $\bar{B}$  (как и в случае 3(\*\*\*) на рис. 35). Следовательно, прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$  в ограничении на область  $D_S$  послойно гомеоморфен прямому произведению  $C_2 \times \bar{B}$ .

Найдем теперь прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$  в ограничении на область  $D_F$ . Отметим, что эта область всегда ограничена софокусным эллипсом с параметром  $\bar{\lambda}_2$ . Если точка  $(h, f)$  лежит в области  $II \cup III$ , то она также ограничена дугами софокусной гиперболы с параметром  $\lambda = -b - \varepsilon$ . Если же точка  $(h, f)$  лежит в области  $I \cup IV$ , то она ограничена софокусным эллипсом  $\lambda = -b + \varepsilon$ . Таким образом, любой дуге  $d2_2(\delta)$  в окрестности  $O(h_0, f_0)$  соответствует перестройка прямоугольной области  $D_F$  в кольцевую через фокусы бильярда. В работе [12] было показано, что в этом случае прообраз дуги  $d2_2(\delta)$  послойно гомеоморфен прямому произведению  $C_2 \times [0, 1]$  (см. рис. 43, а). Более того, если на граничном эллипсе  $\lambda \bar{\lambda}_2$  задать закон отражения, превратив  $D_F$  в бильярд, получим трехмерную особенность вида

$$(C_2 \times S^1)/\mathbb{Z}_2 = (C_2 \times [0, 1])/\sim,$$

где отношение эквивалентности  $\sim$  склеивает точки границы  $C_2 \times \{0\}$  с точками  $C_2 \times \{1\}$  с поворотом 2-атома  $C_2$  на угол  $\pi$ .

Итак, прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$  состоит из двух частей вида  $C_2 \times \bar{B}$  и  $C_2 \times [0, 1] \times [-\max(\delta), \max(\delta)]$ . Послойно склеим эти две части в особенность вида  $(C_2 \times \bar{B})/\sim$ , где отношение эквивалентности сопоставляет точки границы  $(u, v) \in C_2 \times 2I$  так, что точки  $v' \sim v''$ ,  $v' \neq v''$  лежат на одном слое 2-атома  $\bar{B}$ , а точки  $u' \sim u''$  переходят друг в друга поворотом 2-атома  $C_2$  на угол  $\pi$  (см. рис. 43, б). Несложно заметить, что такая особенность Лиувиллево эквивалентна почти прямому произведению  $(C_2 \times B_2)/\mathbb{Z}_2$ , где группа  $\mathbb{Z}_2$  действует на каждом сомножителе поворотом на  $\pi$ .

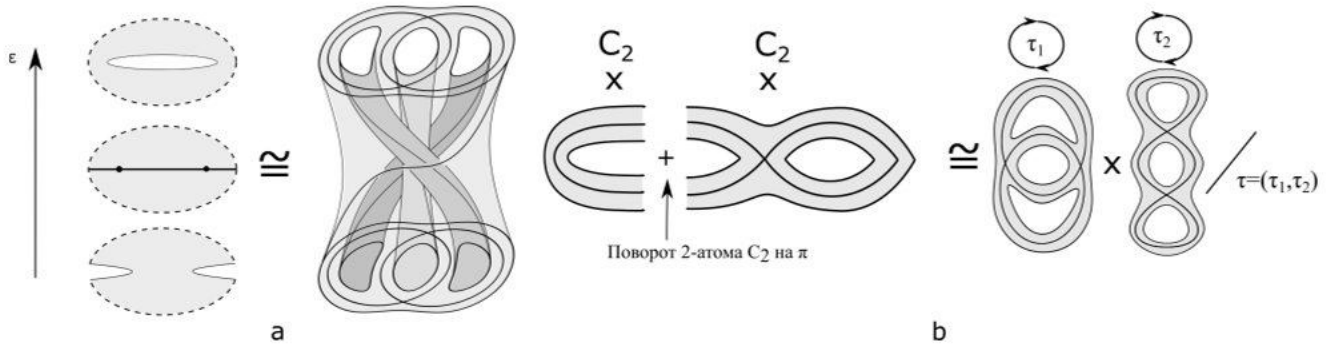


Рис. 43: На рис. а изображен прообраз дуги кривой  $d5(\varepsilon)$  в ограничении на область  $D_F$ . На рис. б изображена особенность типа почти прямого произведения  $(C_2 \times B_2)/\mathbb{Z}_2$

Вне рассмотрения остался случай  $\lambda_1 = -a$  и  $\lambda_2 = -b$ , соответствующий особой точке  $(0, 0, 0, 0)$  в центре бильярда. В этом случае окрестность особого значения интегралов  $(h_0, f_0)$  содержит бифуркационные прямые  $d4$  и  $d5$ , разбивающие ее на секторы  $I$ - $IV$ . Введем в  $O(h_0, f_0)$  координатную сетку, состоящую из дуг кривых с уравнениями

$$d4(\varepsilon) : f = (a - \varepsilon)h - P(-a + \varepsilon), \quad d5(\delta) : f = (b - \delta)h - P(-b + \delta).$$

Положим, что существует софокусная гипербола с параметром  $\lambda = hyp < -b$ , такая, что для любого значения первых интегралов  $(h, f) \in O(h_0, f_0)$  область возможного движения лежит между ветвями этой гиперболы, т.е. области отделены от фокусов бильярда. Тогда точкам  $(h, f)$  из сектора  $III$  соответствует область возможного движения, состоящая из четырех прямоугольных компонент связности, разделенных гиперболой  $\lambda = -a + \varepsilon$  и эллипсом  $\lambda = -b + \delta$ . Точкам  $(h, f)$  из секторов  $II$  и  $IV$  соответствуют две компоненты связности, разделенные осью  $\{y = 0\}$  или  $\{x = 0\}$ . При  $(h, f) \in I$  область возможного движения связна и представляет собой прямоугольник в эллиптических координатах. Заметим, что с топологической точки зрения этот случай эквивалентен случаю  $1(*)$  (рис. 44). Следовательно, соответствующая нерасщепляемая особенность лиувиллево эквивалентна прямому произведению  $B \times B$ .

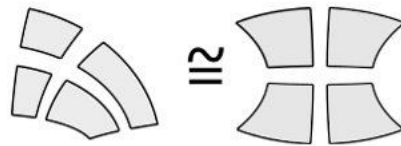


Рис. 44: Области возможного движения для значений первых интегралов из сектора  $III$

Положим теперь, что области возможного движения не отделены от фокусов бильярда. Как и в случае  $4(***)$ , разобьем бильярдный стол на три части фиксированной гиперболой с параметром  $\lambda = \bar{\lambda}_1$ . Тогда любая область возможного движения

разбивается на три части  $D_{F-}$ ,  $D_S$  и  $D_{F+}$ , где область  $D_{F-}$  пересекает окрестность левого фокуса, а  $D_{F+}$  – правого (см. рис. 44). Отметим, что области  $D_{F\pm}$  совпадают с областью  $D_F$  для случая  $3(***)$ . Следовательно, прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$  в ограничении на них состоит из двух частей, попарно гомеоморфных прямому произведению  $[0, 1] \times [-\max(\varepsilon), \max(\varepsilon)] \times B$ .

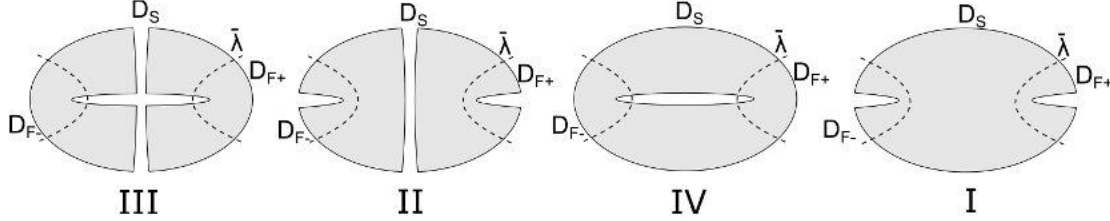


Рис. 45: Области возможного движения, соответствующие значениям первых интегралов из секторов  $III$ ,  $II$ ,  $IV$  и  $I$

Изучим теперь прообраз области  $D_S$ . Если точка  $(h, f)$  лежит в секторе  $III$ , область ограничена дугами софокусных эллипсов с параметрами  $\lambda = \hat{\lambda}_2$  и  $\lambda = -b + \delta$ , а также дугами софокусных гипербол с параметрами  $\lambda = \bar{\lambda}_1$  и  $\lambda = -a + \varepsilon$ . Прообраз области  $D_S$  в этом случае гомеоморфен прямому произведению

$$Pr^{-1}(D_S) = \left( I_1^1(-\bar{\lambda}_1 - a, -\varepsilon] + I_2^1[\varepsilon, \bar{\lambda}_1 + a) \right) \times \left( S_3^1(-\hat{\lambda}_2 - b, -\delta) + S_4^1(\delta, \hat{\lambda}_2 + b) \right).$$

Если точка  $(h, f)$  лежит в секторе  $II$ , область  $D_S$  ограничена дугами софокусного эллипса  $\lambda = \hat{\lambda}_2$  и дугами софокусных гипербол  $\lambda = \bar{\lambda}_1$ ,  $\lambda = -a + \varepsilon$ . Прообраз области гомеоморфен прямому произведению

$$Pr^{-1}(D_S) = \left( I_1^1(-\bar{\lambda}_1 - a, -\varepsilon] + I_2^1[\varepsilon, \bar{\lambda}_1 + a) \right) \times S_{3+4}^1(-\hat{\lambda}_2 - b, \hat{\lambda}_2 + b).$$

При  $(h, f) \in IV$  область  $D_S$  ограничена софокусными эллипсами  $\lambda = \hat{\lambda}_2$  и  $\lambda = -b + \delta$ , а также дугами софокусной гиперболы с параметрами  $\lambda = \bar{\lambda}_1$  и  $\lambda = -a + \varepsilon$ . Прообраз области  $D_S$  гомеоморфен объединению четырех цилиндров

$$Pr^{-1}(D_S) = 2[-\bar{\lambda}_1 - a, \bar{\lambda}_1 + a] \times \left( S_3^1(-\hat{\lambda}_2 - b, -\delta) + S_4^1(\delta, \hat{\lambda}_2 + b) \right).$$

При  $(h, f) \in I$  область ограничена софокусными эллипсами  $\lambda = \hat{\lambda}_2$  и  $\lambda = -b + \delta$ , а также дугами софокусной гиперболы с параметрами  $\lambda = \bar{\lambda}_1$  и  $\lambda = -a + \varepsilon$ . Прообраз области  $D_S$  гомеоморфен объединению двух цилиндров

$$Pr^{-1}(D_S) = 2[-\bar{\lambda}_1 - a, \bar{\lambda}_1 + a] \times S_{3+4}^1(-\hat{\lambda}_2 - b, \hat{\lambda}_2 + b).$$

Если точка  $(h, f)$  лежит на бифуркационной кривой  $d5$ , параметр  $\delta$  обращается в ноль, и окружности  $S_3^1$  и  $S_4^1$  сливаются вместе в одной точке, образуя особый слой 2-атома  $B$ . Если же точка  $(h, f)$  лежит на прямой  $d4$ , отрезки  $I_1$  и  $I_2$  также сливаются

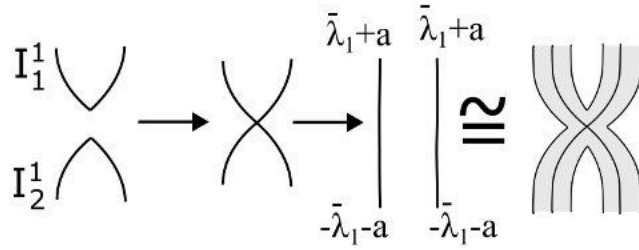


Рис. 46: Седловая особенность функции Морса

в одной точке, образуя крест. Следовательно, прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$  в ограничении на область  $D_S$  послойно гомеоморфен прямому произведению  $Saddle^2 \times B$ , где  $Saddle^2$  обозначает локальную седловую особенность двумерной функции Морса  $p^2 - q^2$  (рис. 46).

Таким образом, прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$  состоит из трех частей: прямого произведения  $Saddle^2 \times B$  и двух копий  $[0, 1] \times [-\max(\varepsilon), \max(\varepsilon)] \times B$ . Послойно склеим их в одну особенность вида  $(Saddle^2 \times B) / \sim$ , где отношение эквивалентности сопоставляет точки границы  $(u, v) \in 4I \times B$  так, что точки  $u' \sim u''$ ,  $u' \neq u''$  лежат на одном слое “креста”  $Saddle^2$ , а точки  $v' \sim v''$  переходят друг в друга поворотом 2-атома  $B$  на угол  $\pi$  (см. рис. 47). Осталось заметить, что такая особенность Лиувиллево эквивалентна почти прямому произведению  $(C_2 \times B) / \mathbb{Z}_2$ , где группа  $\mathbb{Z}_2$  действует на каждом множителе поворотом на угол  $\pi$ .

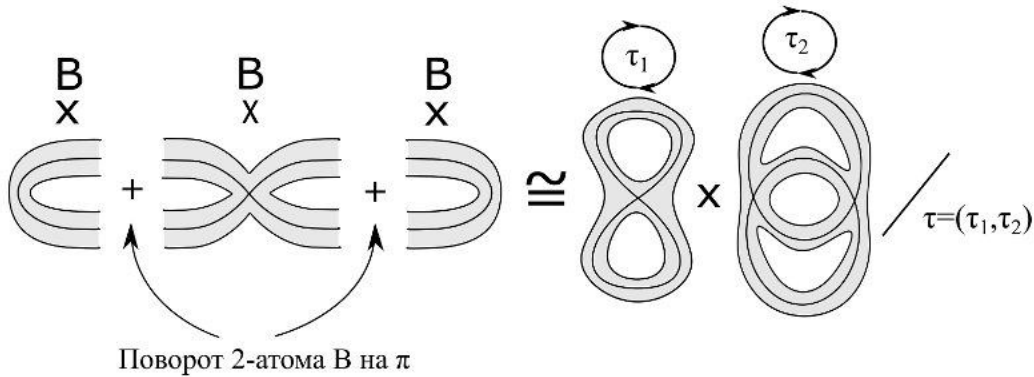


Рис. 47: Прообраз окрестности  $O(h_0, f_0)$

Итого, были рассмотрены все нерасщепляемые полулокальные особенности ранга ноль, соответствующие особым точкам типа  $SS$ . Теорема доказана.  $\square$

## 5 Биллиарды с потенциалом, допускающие расщепляемые особенности

В предыдущем разделе были описаны все нерасщепляемые особенности ранга ноль эллиптических биллиардов с полиномиальным потенциалом. Покажем, что свойство

нерасщепляемости типично для таких билиардов. Сперва докажем следующую теорему о приближении “расщепляемых” билиардов “нерасщепляемыми”.

**Теорема 11.** Пусть эллиптический билиард, снабженный полиномиальным потенциалом

$$W(x, y) = \frac{P(\lambda_1(x, y)) - P(\lambda_2(x, y))}{\lambda_1(x, y) - \lambda_2(x, y)},$$

где  $P(z) = \sum_{k=2}^n c_k z^k$ , допускает расщепляемую невырожденную особенность ранга ноль. Тогда, для любого  $\varepsilon > 0$  существует потенциал  $\bar{W}$ , заданный многочленом  $\bar{P}(z) = \sum_{k=2}^n \bar{c}_k z^k$ , такой, что

1. расстояние между векторами коэффициентов  $c = (c_2, \dots, c_n)$  и  $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n)$  в  $L_2$ -норме меньше  $\varepsilon$ ,
2. все невырожденные особенности эллиптического билиарда с потенциалом  $\bar{W}$  удовлетворяют условию нерасщепляемости.

*Доказательство.* Рассмотрим две кривые бифуркационной диаграммы типа  $d1$  и  $d2$ , трансверсально пересекающиеся в точке  $(h_0, f_0)$ . Напомним, что эти кривые заданы уравнениями

$$f_1(h) = P(e_1(h)) - he_1(h) \quad \text{и} \quad f_2(h) = P(e_2(h)) - he_2(h),$$

где функции  $e_1(h)$ ,  $e_2(h)$  заданы неявно уравнением

$$P'(e_i(h)) \equiv h. \tag{22}$$

Отметим, что функции  $e_i(h)$  заданы корректно и однозначно в силу условий невырожденности  $P'' \neq 0$ , полученных в разделе 3. Кроме того,  $e_1(h_0) \neq e_2(h_0)$ . Рассмотрим теперь многочлен  $P$  как функцию от  $n$  переменных  $P(z, c)$ , где  $c = (c_2, \dots, c_n)$ . Тогда уравнение (22) задает гладкие функции  $n$  переменных  $e_1(h, c)$ ,  $e_2(h, c)$  в окрестности точки  $(h_0, c_0)$ . Здесь и в дальнейшем  $c_0$  обозначает вектор коэффициентов исходного многочлена.

Изучим, как измениться точка пересечения кривых  $d1$  и  $d2$  при малом изменении коэффициентов  $c_0$ . Рассмотрим разность  $f = f_1 - f_2$

$$f(h, c) = P(e_1(h, c), c) - he_1(h, c) - P(e_2(h, c), c) + he_2(h, c).$$

Заметим, что, в силу уравнений (22)

$$\frac{\partial f_i}{\partial h} = P'(e_i, c) \frac{\partial e_i}{\partial h} - h \frac{\partial e_i}{\partial h} - e_i(h, c) = -e_i(h, c),$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_k} = e_i^k(h, c) + P'(e_i, c) \frac{\partial e_i}{\partial c_k} - h \frac{\partial e_i}{\partial c_k} = e_i^k(h, c).$$

Следовательно, в силу неравенства  $e_1 \neq e_2$  в окрестности точки  $(h_0, c_0)$  имеем

$$\frac{\partial f}{\partial h} = -e_1 + e_2 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial c_k} = e_1^k - e_2^k \neq 0, \quad f(h_0, c_0) = 0.$$

Зададим функцию  $h = h(c)$  в окрестности точки  $c_0$  неявно с помощью уравнения  $f(h(c), c) \equiv 0$ , так что  $h(c_0) = h_0$ . Отметим, что это корректное однозначное определение гладкой функции  $h(c)$  в силу теоремы о неявной функции. Кроме того, имеем

$$\frac{\partial h}{\partial c_k} = \frac{e_1^k - e_2^k}{e_1 - e_2}.$$

Таким образом, при малом изменении коэффициентов  $c = c_0 + \Delta c$  координата  $h$  точки пересечения кривых  $d1$  и  $d2$  меняется следующим образом:

$$h = h_0 + \Delta h = h_0 + \frac{\Delta P(e_1) - \Delta P(e_2)}{e_1 - e_2} + o((\Delta c)^2),$$

где  $\Delta P(z) = \sum_{k=2}^n \Delta c_k z^k$ .

Аналогично рассмотрим пересечение бифуркационных кривых  $d5$  и  $d2$ . Тогда функция  $f_1$  заменяется на функцию вида

$$f_1(h, c) = bh - P(-b, c),$$

которая является линейной по переменным  $(h, c)$ . В силу условий невырожденности имеем  $P'(-b) \neq 0$ . Следовательно  $e_2 \neq -b$  в окрестности точки  $(h_0, c_0)$ . Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial h} = b + e_2 \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial c_k} = (-b)^k - e_2^k \neq 0, \quad f(h_0, c_0) = 0.$$

Таким образом, функция  $h(c)$  снова задана корректно, и, кроме того, имеем

$$\frac{\partial h}{\partial c_k} = \frac{(-b)^k - e_2^k}{-b - e_2}.$$

Тогда, при малом изменении коэффициентов  $c = c_0 + \Delta c$  получим

$$h = h_0 + \Delta h = h_0 + \frac{\Delta P(-b) - \Delta P(e_2)}{-b - e_2} + o((\Delta c)^2).$$

Аналогичные равенства можно получить, заменяя кривые  $d5$ ,  $d2$  на  $d4$ ,  $d1$  и  $d3$ .

Пусть, в силу условия теоремы, в точке  $(h_0, f_0)$  в образе отображения момента пересекаются  $m$  бифуркационных кривых, соответствующих функциям  $e_1(h)$ ,  $e_2(h)$ , ...,  $e_m(h)$  (при этом положим  $e_1 \equiv -b$  в случае кривой  $d5$ ,  $e_2 \equiv -a$  в случае кривой  $d4$ , и  $e_3 \equiv 0$  в случае кривой  $d3$ ). Тогда, положив  $G(z) = \sum_{k=2}^n g_k z^k$  в качестве произвольного многочлена, уравнения вида

$$\frac{G(e_i) - G(e_j)}{e_i - e_j} = \frac{G(e'_i) - G(e'_j)}{e'_i - e'_j} \quad (23)$$

задают  $C_m^4$  линейных уравнений на коэффициенты многочлена  $G$ . Возьмем вектор коэффициентов  $g$ , для которого не выполнено ни одно из равенств этой системы. Положим  $\Delta c = \varepsilon_1 g / |g|_2$  для достаточно малого параметра  $\varepsilon_1 < \varepsilon$ . Тогда для любой пары бифуркационных кривых  $(e_i, e_j)$  линейная часть функции  $h_{i,j}(c)$  будет различной. Следовательно,  $\Delta h_{i,j} \neq \Delta h_{i',j'}$ , и значение первых интегралов  $(h_0, f_0)$ , соответствующее расщепляемой особенности, перешло в  $m(m-1)/2$  значений первых интегралов  $(h_0 + \Delta h_{i,j}, f_0 + \Delta f_{i,j})$ , соответствующих нерасщепляемым особенностям. Искомый многочлен  $\bar{P}$  имеет вид  $\bar{P} = P + \Delta P$ .  $\square$

**Утверждение 1.** *Если  $P = c_3 z^3 + c_2 z^2$ , то эллиптический бильярд не допускает расщепляемых особенностей типа седло-седло.*

*Доказательство.* Действительно, пусть в точке  $(h_0, f_0)$  пересекаются три бифуркационные кривые. Если среди них есть кривая типа  $d1$  или  $d2$ , то многочлен  $-P(z) + h_0 z + f_0$ , в силу теоремы 3, имеет три корня, суммарная кратность которых превосходит три. Следовательно, возможно лишь пересечение трех прямых  $d3$ ,  $d4$  и  $d5$ . Но тогда особенность не может иметь тип седло-седло, так как такие особые точки не появляются на границе бильярда.  $\square$

Таким образом, не существует полиномиального потенциала четвертой степени, допускающего расщепляемую особенность типа седло-седло. Приведем пример бильярда с потенциалом шестой степени, допускающим такую особенность. Пусть потенциал задан многочленом  $P$  четвертой степени с коэффициентами  $c = (c_2, c_3, c_4)$ . Положим, что три кривые бифуркационной диаграммы имеют общую точку пересечения  $(h_0, f_0)$ , отвечающую особенности типа седло-седло. Тогда одна из них обязана иметь тип  $d1$  или  $d2$ . Следовательно, многочлен  $V(z) = -P(z) + h_0 z + f_0$  имеет три корня, суммарная кратность которых не меньше четырех. Это достигается лишь в случае, когда две другие бифуркационные кривые имеют тип  $d4$  и  $d5$ . Таким образом, имеет место разложение

$$V(z) = -t_1(z+a)(z+b)(z-t_2)^2,$$

где параметр  $t_1 < 0$  в силу условия  $SS$  на особые точки, и параметр  $t_2 \in (-a, -b) \cup (-b, 0)$  является параметром критической гиперболы или эллипса. Тогда, коэффициенты многочлена  $P$  задаются параметрически

$$c_4 = t_1, \quad c_3 = t_1(a+b-2t_2), \quad c_2 = t_1(t_2^2 - 2t_2(a+b) + ab).$$

Заметим, что полученное множество коэффициентов имеет меру ноль в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

В общем случае, исходя из аналогичных рассуждений, можно доказать следующее очевидное утверждение.

**Лемма 2.** *Пусть эллиптический бильярд с потенциалом, заданным многочленом  $P(z)$ , допускает расщепляемую особенность. Пусть  $(h_0, f_0)$  значения первых интегралов в этой особенности. Тогда многочлен  $V(z) = -P(z) + h_0 z + f_0$  корни  $t_1, t_2, t_3$ , удовлетворяющие одному из следующих условий:*

1. корни  $t_1, t_2, t_3 \in (-a, -b) \cup (-b, 0)$  кратные;
2. корни  $t_1, t_2 \in (-a, -b) \cup (-b, 0)$  кратные, и корень  $t_3$  равен  $-a, -b$  или  $0$ ;
3. корень  $t_1 \in (-a, -b) \cup (-b, 0)$  кратный, а корни  $(t_2, t_3)$  равны  $(-a, -b), (-a, 0)$  или  $(-b, 0)$ ;
4.  $(t_1, t_2, t_3) = (-a, -b, 0)$ .

Отметим, что в каждом указанном случае вектор коэффициентов  $c = (c_2, c_3, \dots, c_n)$  многочлена  $P$  задается полиномиальными соотношениями от  $n - 2$  параметров. Действительно, пусть многочлен  $V(z)$  имеет три кратных корня. Тогда

$$-P(z) + h_0z + f_0 = (z - t_1)^2(z - t_2)^2(z - t_3)^2Q_{n-6}(z),$$

где  $Q_{n-6}(z) = \sum_{k=0}^{n-6} q_k z^k$  некоторый многочлен степени  $n - 6$ . Но тогда, раскрывая скобки в полученном выражении и приравнявая коэффициенты при  $z^k$ , получим полиномиальную зависимость

$$c = c(t_1, t_2, t_3, q_0, \dots, q_{n-6})$$

от  $n - 2$  параметров  $t_1, t_2, t_3, q_0, \dots, q_{n-6}$ . Причем степень каждого такого полинома не превышает семи.

Аналогично, если многочлен  $V(z)$  имеет два кратных корня и корень  $t_3 = -a$  ( $t_3 = -b, t_3 = 0$ ), то получим представление

$$-P(z) + h_0z + f_0 = (z - t_1)^2(z - t_2)^2(z + a)Q_{n-5}(z).$$

В этом случае, исходя из тех же соображений, получим полиномиальную зависимость

$$c = c(t_1, t_2, q_0, \dots, q_{n-5})$$

от  $n - 2$  параметров  $t_1, t_2, t_3, q_0, \dots, q_{n-6}$ . Оставшиеся случаи леммы 2 рассматриваются аналогично.

Таким образом, было показано, что множество  $U \in \mathbb{R}^{n-1}$  коэффициентов  $c = (c_2, \dots, c_n)$ , для которых бильярд допускает расщепляемую особенность, лежит на поверхности, заданной параметрически набором полиномов не более чем седьмой степени от  $n - 2$  параметров

$$K_{n-2} = \begin{cases} c_2 = c_2(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}), \\ c_3 = c_3(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}), \\ \dots \\ c_n = c_n(\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}). \end{cases}$$

Но, в силу размерности, эта поверхность имеет меру ноль в  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Следовательно, верна следующая теорема.

**Теорема 12.** Пусть  $U \in \mathbb{R}_n[[z]]$  множество многочленов  $P$  степени  $n$ , задающих интегрируемый эллиптический бильярд с потенциалом, который допускает расщепляемую особенность. Тогда  $U$  имеет меру ноль в  $\mathbb{R}_n[[z]]$ .

## Поддержка и финансирование

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект №25-71-10087) в МГУ имени М.В. Ломоносова.

## Список литературы

- [1] Дж. Биркгоф, *Динамические системы* Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999.
- [2] А. Т. Фоменко, *Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем*,// Успехи Математических Наук 1989 Т. 44 вып. 1(265) С. 145-173
- [3] А. Т. Фоменко, *Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем*,// Доклады АН СССР 1986 Т. 287 вып. 5 С. 1071-1075
- [4] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*. Том I, II Ижевск: РХД, 1999.
- [5] V. Dragovic, M. Radnovic, *Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards*// Regular and Chaotic Dynamics 2009 Vol. 14 no 4-5 p. 479-494.
- [6] В. В. Фокичева, *Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик*,// Математический сборник 2015 Т. 206 вып. 10 С. 127-176.
- [7] D. R. da Costa, C. P. Dettmann, E. D. Leonel, *Circular, elliptic and oval billiards in a gravitational field*// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 2015 V. 22 no 1-3 p. 731-746
- [8] И. Ф. Кобцев, *Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ*// Математический сборник 2020 Т. 211 вып. 7 С. 93-120
- [9] В. В. Козлов, *Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде*// Прикладная математика и механика 1995 Т. 59 вып. 1
- [10] Vladimir Dragovic, *The Appell hypergeometric functions and classical separable mechanical systems*// Journal of Physics A: Mathematical and General 2002 Vol. 35
- [11] V. I. Dragovich, *Integrable perturbations of a Birkhoff billiards inside an ellipse*// Journal of Applied Mathematics and Mechanics 1998 Vol. 62 no 1 p. 159-162

- [12] С. Е. Пустовойтов, *Исследование структуры слоения Лиувилля интегрируемого эллиптического бильярда с полиномиальным потенциалом*// Чебышевский сборник. – 2024 – Т. 25, вып. 1 – С. 62–102.
- [13] М. П. Харламов, *Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приближения к классическим системам*// Нелинейная динамика –2010 – Т. 6 вып. 4, С. 769-805.
- [14] S. E. Pustovoitov, *Classification of Singularities of the Liouville Foliation of an Integrable Elliptical Billiard with a Potential of Fourth Degree*// Russian Journal of Mathematical Physics. – 2023 – vol. 30, no 4 – pp. 643–673.
- [15] A. T. Fomenko, V. A. Kibkalo, *Saddle singularities in integrable Hamiltonian systems: Examples and algorithms*// Sadovnichiy, V.A., Zgurovsky, M.Z. (eds.): Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems – 2021 – p. 3–26
- [16] В. В. Ведюшкина, В. А. Кибкало, С. Е. Пустовойтов, *Реализация фокусных особенностей интегрируемых систем бильярдными книжками с потенциалом Гукка*// Чебышевский сборник. 2021 Т. 22, вып. 5. С. 44-57.
- [17] Nguen Tien Zung, *Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems.* // Letters of Mathematical Physics – 1995 – Vol. 33 – pp. 187-193
- [18] L. H. Eliasson, *Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals – elliptic case* // Comment. Math. Helv. – 1990 – Vol. 65, no. 1 – pp. 4–35.