

# Топология интегрируемой гамильтоновой системы и точные решения уравнения длинных волн над наклонным дном<sup>1</sup>

<sup>1,2,3</sup>М. М. Вотякова, <sup>1,3</sup>Д. С. Миненков

<sup>1</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Долгопрудный, Россия

<sup>3</sup>Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Москва, Россия

**Аннотация.** В работе исследуется топологическая структура интегрируемой гамильтоновой системы, соответствующей набегу длинных волн над ровным наклонным дном (волновая скорость равна  $c^2 = D(y_1, y_2) = \gamma y_1$  и вырождается на берегу  $y_1 = 0$ ). Построены бифуркационные диаграммы и классифицированы типы лагранжевых многообразий – совместных уровней первых интегралов. На рассмотренном модельном примере показано, как бифуркации первых интегралов могут влиять на правила квантования Бора–Зоммерфельда и типы асимптотических решений. Именно, многообразия общего положения соответствуют волнам типа волн Урселла, и две бифуркации соответствуют переходу этих решений в волны Стокса или в обобщенные собственные функции непрерывного спектра, выражающиеся через функции Бесселя.

**Ключевые слова:** береговые волны, бильярды с полужесткой стенкой, интегрируемые гамильтоновы системы, полиномы Лаггера, полиномы Эрмита, сложение Лиувилля, функции параболического цилиндра.

---

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 25-71-10087).

# 1 Введение

В ряде работ [1, 2, 3, 4, 5, 6] исследуется задача распространения волн в протяжённом бассейне глубины  $D(y) = D(y_1, y_2)$ . Невозмущённая волновая поверхность занимает на плоскости  $\mathbb{R}^2$  область  $\Omega = \{y : D(y) > 0\}$ , береговой линии соответствует гладкая кривая  $\Gamma = \{y : D(y) = 0\}$ , предполагается, что  $\nabla D|_{y \in \Gamma} \neq 0$ . В качестве математической модели для описания длинных волн используется двумерное волновое уравнение

$$N_{tt} - \langle \nabla, D(y) \nabla \rangle N = 0, \quad (1)$$

где  $N(y, t)$  – возвышение волновой поверхности. На границе  $\Gamma$  отсутствуют стандартные условия типа Дирихле или Неймана, они заменяются условием ограниченности энергии [7, 8]

$$|N(y, t)|_{y \in \Gamma} < \infty. \quad (2)$$

Данная модель широко исследовалась в ряде работ, в частности ее несомненным достоинством является возможность описывать распространение длинных волн, таких как цунами или сейши. С физической точки зрения недостатком данной модели является пренебрежение нелинейными эффектами, в частности, набегом волн на берег. Однако, в недавней работе [9] предложен подход, позволяющий по известным решениям системы (1), (2) восстанавливать решения нелинейной системы мелкой воды со свободной границей, которые учитывают заплеск на берег, поэтому исследование линейной модели может быть интересно для исследования физических законов распространения волн, в частности, в прибрежной зоне. Так в работах [10, 11, 12] изучались береговые волны – волны, локализованные в малой окрестности береговой линии (такие волны также называют захваченными берегом).

В данной работе рассматривается случай, когда дно бассейна представляет собой наклонную плоскость  $D(y) = \gamma y_1$ ,  $\gamma = const$  (ровное наклонное дно). Он привлекает внимание возможностью сравнивать результаты для асимптотических решений задачи (1), (2) с известными классами точных решений (соответствующие волнам Стокса и Урселла [5, 6]), а также получать точные решения в виде распространяющихся волн (см. [4, 13]).

Для построения асимптотических решений, согласно геометрическому подходу [14], исследуются гамильтоновы системы. Так в задаче (1), (2) возникают различные постановки в зависимости от характерных масштабов бассейна и типа искомых асимптотических решений. Например, считая, что изучаемым волнам соответствуют гармонические по времени решения (с частотой  $\omega = \frac{1}{h^2} \gg 1$ )

$$N(y, t) = \text{Re}(e^{i\omega t} \Psi(y)) \quad (3)$$

получаем для функции  $\Psi(y)$  спектральную задачу в области  $\Omega$  [10, 15]:

$$\hat{H}\Psi := -h^2 \langle \nabla, D(y) \nabla \rangle \Psi(y) = \lambda \Psi(y), \quad \lambda = \omega^2; \quad |\Psi(y)| < \infty, \quad y \in \Gamma. \quad (4)$$

Также можно искать волны, порожденные локализованным источником  $N_0(y)$  с шириной локализации  $\mu$ , малой по сравнению с характерной длиной береговой линии  $L$ :  $h = \frac{\mu}{L} \ll 1$ . Тогда получаем для функции  $N(y, t)$  задачу Коши в области  $\Omega$  [12]:

$$h^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} N + \hat{H}N = 0, \quad N|_{\tau=0} = V_0(y), \quad hN_\tau|_{\tau=0} = V_1(y), \quad (5)$$

Обе задачи сводятся к исследованию классической гамильтоновой системы, отвечающей оператору  $\hat{H}$ .

Пример с ровным наклонным дном  $D(y_1, y_2) = \gamma y_1$  вызывает отдельный интерес, так как тогда интегрируема классическая гамильтонова система

$$H = H(y_1, p_1, p_2) = \gamma y_1 (p_1^2 + p_2^2). \quad (6)$$

Топологический подход к различным бильярдным системам был предложен в работах А. Т. Фоменко и его научной школы [16, 17, 18]. Фазовое пространство системы разбивается на совместные уровни первых интегралов, т.е. на нем возникает структура слоения Лиувилля, а также его перестройки в зависимости от значений первых интегралов. Хотя класс бильярдов (5) (с вырождающейся метрикой, так называемыми “полужесткими стенками”, термин введен в [19, 20]) подробно описан в работе [21], но вопрос бифуркаций слоений Лиувилля для него не рассматривался.

Данная работа посвящена исследованию топологической структуры совместных уровней первых интегралов гамильтоновой системы, соответствующей (6), влиянию возникающих бифуркаций на правила квантования и типы асимптотических решений системы (1), (2) над ровным наклонным дном. Кроме того обсуждается новый класс точных решений, соответствующий многообразию общего положения. Отдельное внимание в работе уделено интегральному представлению точных решений для береговых волн в случае ровного наклонного дна. Показано, что асимптотические формулы, построенные с помощью канонического оператора Маслова, при всех значениях параметра  $h$  согласуются с точными решениями, что свидетельствует о глобальной применимости квазиклассического приближения в данной задаче.

Изложенный материал организован следующим образом. В разделе 2 проводится топологический анализ интегрируемой системы: исследуется слоение Лиувилля, строятся бифуркационные диаграммы и обсуждается связь бифуркаций с правилами квантования. В разделе 3 на основе суперпозиции гармонических решений получены новые точные решения для бегущих береговых волн, выраженные через функции параболического цилиндра и полиномы Эрмита. В разделе 4 рассматривается интегральное представление точных решений, полученное методом канонического оператора, и де-

монстрируется его согласие с точными формулами при всех значениях параметра  $h$ .

## 2 Топологический анализ

Совместные уровни первых интегралов  $H_0$  и  $F$  задают слоение Лиувилля фазового пространства. В зависимости от значений  $(H_0, F)$  топологический тип поверхностей уровня может меняться, что соответствует бифуркациям. На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма системы.

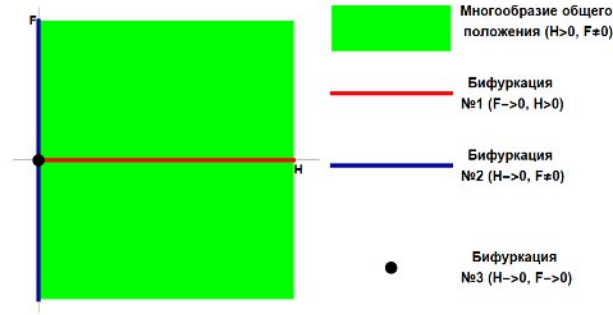


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы  $H = \gamma y_1(p_1^2 + p_2^2)$ .

Для многообразия общего положения  $H_0 > 0$ ,  $F \neq 0$  (рис. 2) фазовое пространство некомпактно по импульсам в точках берега ( $p_1 \rightarrow \infty$ ,  $y_1 \rightarrow 0$ ) из-за вырождения гамильтониана и ограничено по нормали к берегу:  $y_1 \leq y_{\max} = H_0/(\gamma F^2)$ .

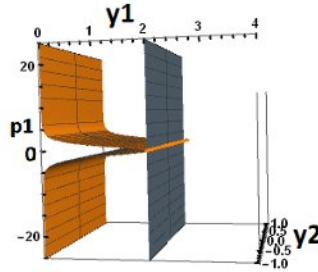


Рис. 2. Многообразие общего положения  $H_0 > 0$ ,  $F \neq 0$ . Серым цветом выделена плоскость  $y = H_0/(\gamma F^2)$ .

Траектории гамильтоновой системы для (6) соответствует бильярду с “полужесткой стенкой” (термин был введен в работах [19, 20]). В отличие от стандартных бильярдных систем, здесь  $D(y)$  обращается в нуль на границе области  $\Gamma_0 = \{y : D(y) = 0\}$  (береговой линии), причем  $\nabla D|_{\Gamma_0} \neq 0$ . Из-за вырождения  $D(x)$  на границе соответствующие импульсы стремятся к бесконечности, и все траектории в таких бильярдах входят в границу и отражаются от нее перпендикулярно  $\Gamma_0$ , причем условие выпуклости области не требуется. В недавней работе [21] данный класс бильярдных систем всесторонне изучен в общем случае. Для случая ровного наклонного дна решения гамильтоновой системы

выписываются явно:

$$\begin{cases} y_1(\tau) = \frac{H_0 \cos^2(F(\gamma\tau - c_1))}{\gamma F^2} \\ y_2(\tau) = \frac{H_0 \sin(2F(\gamma\tau - c_1)) - 2c_1 H_0 F + 2\gamma c_2 F^2 + 2\gamma H_0 F \tau}{2\gamma F^2} \\ p_1(\tau) = -F \tan(\gamma F \tau - c_1 F) \\ p_2(\tau) = F. \end{cases} \quad (7)$$

На рис. 3 показаны проекции траекторий бильярда на конфигурационное пространство для случая ровного наклонного дна.

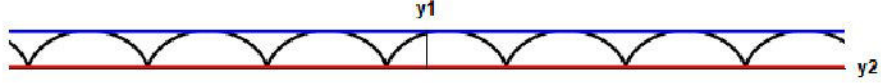


Рис. 3. Проекция траекторий бильярда с полужесткой стенкой на конфигурационное пространство для ровного наклонного дна. Траектории отражаются от берега под прямым углом.

Случай многообразия общего положения соответствует береговым волнам, и для корректного построения асимптотических решений необходимо записать условие квантования первых интегралов. По методу расширения фазового пространства [22] (отождествление точек  $p = \pm\infty$  в точка берега) условие квантования Бора–Зоммерфельда на этом цикле имеет вид:

$$\int_{\gamma} p dy = \pi h(n + \frac{1}{2}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad (8)$$

и приводит к квантованию энергии с квантовым числом  $n$ :

$$H_0 = F\gamma h(2n + 1). \quad (9)$$

Постановка дополнительных краевых условий в точках берега (условие Неймана или периодичности) приводит к квантованию импульса  $F \propto m$  с квантовым числом  $m$ .

*Замечание 2.1.* Из условий квантования можно заметить, что базовое состояние  $n = 0$  задает ненулевой уровень энергии  $H_0$ , следовательно бифуркация  $H_0 \rightarrow 0$  ( $F \rightarrow 0$ ) не будет соответствовать квантовой задаче.

Точные гармонические решения (3), отвечающие береговым волнам (многообразию общего положения), имеют вид (рис. 4):

$$N(y_1, y_2, t) = \exp\left(-i\omega t + \frac{iy_2 - y_1}{2\gamma n + \gamma} \omega^2\right) L_n\left(\frac{2y_1}{2\gamma n + \gamma} \omega^2\right), \quad (10)$$

где  $n$  — число осцилляций волны по нормали к берегу, после последней осцилляции волна затухает.

При стремлении значений первых интегралов к нулю происходят бифуркации,

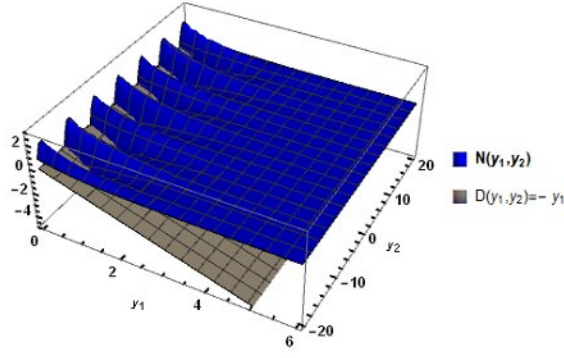


Рис. 4. Точные гармонические решения в случае ( $F \neq 0, H_0 > 0$ ).

меняющие структуру многообразия и отвечающие ему волновые решения. На рис. 5 показана эволюция многообразий уровня при различных значениях параметров.

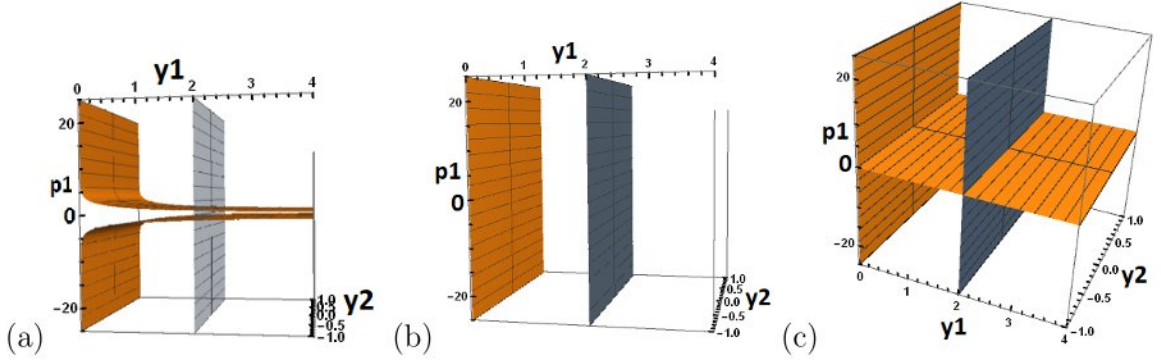


Рис. 5. Поверхности уровня системы (a)  $F \rightarrow 0, H_0 > 0$ ; (b)  $H_0 \rightarrow 0, F \neq 0$ ; (c)  $H_0 \rightarrow 0, F \rightarrow 0$ .

При  $F \rightarrow 0$  происходит бифуркация «типа эллипс в параболу»: цикл по  $(y_1, p_1)$  превращается в две кривые,  $y_{\max} \rightarrow \infty$ , цикл по  $(y_2, p_2)$  вырождается в точку  $(y_2, 0)$ . Условие квантования энергии  $H_0 = F\gamma h(2n+1)$  теряет смысл, асимптотические решения соответствуют волнам, постоянным вдоль берега. Гармонические по времени решения в этом пределе выражаются через функцию Бесселя  $J_0$  [23, 24, 25] (рис. 6):

$$N(y_1, y_2, t) = e^{-i\omega t} J_0\left(2\omega \sqrt{\frac{y_1}{\gamma}}\right). \quad (11)$$

На рис. 6 приведено решение, соответствующее данной бифуркации.

При  $H_0 \rightarrow 0$  происходит бифуркация «типа эллипс в точку»: многообразие вырождается в плоскость  $(0, y_2, p_1)$ , что физически соответствует береговой линии.

Интересно, что отображение момента (матрица  $dF, dH_0$ ) имеет максимальный ранг везде кроме точек плоскости  $y_1 = 0$ , где вырождение связано с обращением в нуль производной  $\partial H_0 / \partial y_1$ . Это вырождение соответствует береговой линии  $\Gamma_0$ : в классической системе траектории достигают берега за конечное время. Точки  $y_1 = 0$  образуют особое множество в слоении Лиувилля, а бифуркации  $H_0 \rightarrow 0$  и  $F \rightarrow 0$  соответствуют

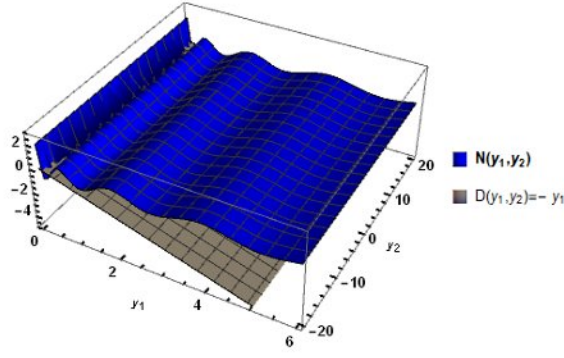


Рис. 6. Точные гармонические решения в случае бифуркации  $F \rightarrow 0, H_0 > 0$ .

выходу на это множество.

Проведённый топологический анализ позволяет классифицировать все возможные типы волновых режимов в зависимости от значений первых интегралов  $H_0$  и  $F$ . Бифуркационные переходы связывают различные классы решений: от волн, бегущих вдоль берега (общий случай), до волн, постоянных вдоль берега (предел  $F \rightarrow 0$ ), что важно для понимания трансформации волновых полей в прибрежной зоне.

### 3 Точные решения для бегущих волн

Интегрируемость системы позволяет получить не только гармонические, но и нестационарные точные решения, описывающие бегущие береговые волны. В данном разделе получены новые формулы для бегущих решений, представленные я в виде суперпозиции гармонических решений по частотам.

Для интеграла по положительным частотам, который соответствует волне, бегущей в одном направлении вдоль берега (ненулевая начальная скорость):

$$N_{\text{run}}(y_1, y_2, t) = \int_0^{+\infty} N_{\omega}^n(y_1, y_2, t) e^{-\omega^2 \mu^2} d\omega, \quad (12)$$

где  $N_{\omega}^n(y_1, y_2, t)$  — гармоническое решение

$$N_{\omega}^n(y_1, y_2, t) = \exp\left(-i\omega t + \frac{iy_2 - y_1}{2\gamma n + \gamma} \omega^2\right) L_n\left(\frac{2y_1}{2\gamma n + \gamma} \omega^2\right), \quad (13)$$

а множитель  $e^{-\omega^2 \mu^2}$  обеспечивает локализацию начального возмущения (параметр  $\mu$  характеризует ширину волнового пакета). Используя разложение полинома Лаггера, интеграл (12) можно свести к линейной комбинации табличных интегралов, которые удалось записать в терминах специальных функций.

Для интеграла по положительным частотам (12) получается выражение через

функции параболического цилиндра  $D_s(x)$ :

$$N_{\text{run}}^n = (2\pi A)^{-1/2} e^{\frac{B^2}{8A}} \sum_{k=0}^n C_n^k \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) \left(-\frac{4y_1}{A(2\gamma n + \gamma)}\right)^k D_{-2k-1}\left(\frac{B}{\sqrt{2A}}\right), \quad (14)$$

где  $A = \frac{y_1 - iy_2}{\gamma + 2\gamma n} + \mu^2$ ,  $B = it$ . Параметр  $\mu$  определяет ширину волнового пакета в начальный момент,  $A$  описывает комплексное распространение волны вдоль берега, а  $B$  — временную эволюцию. Интегрирование только по положительным частотам соответствует волне, бегущей в одном направлении вдоль берега (ненулевая начальная скорость). На рис. 7 показана эволюция решения (14).

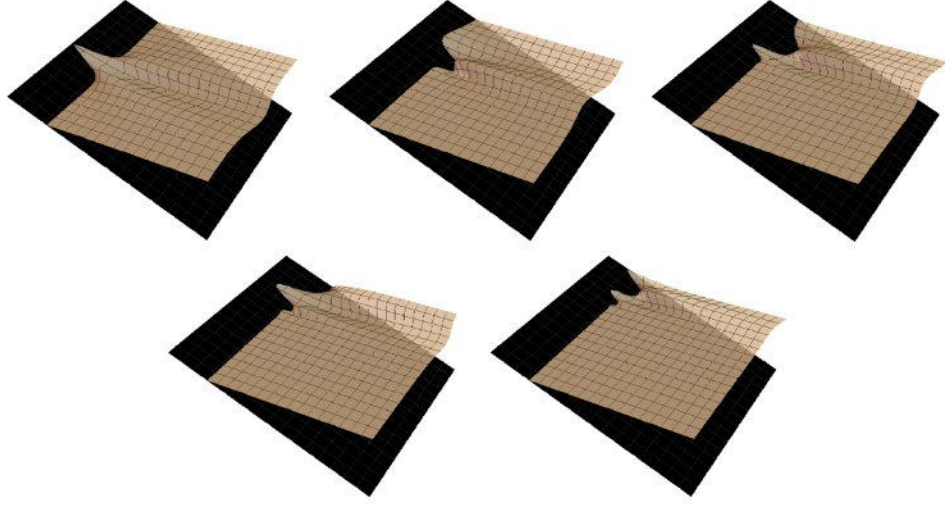


Рис. 7. Эволюция точного решения для бегущей береговой волны, выраженного через функции параболического цилиндра  $D_s(x)$ . Последовательные моменты времени.

Для интеграла по всей вещественной оси, который соответствует начальному условию с нулевой начальной скоростью:

$$N_{\text{run}}^n(y_1, y_2, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\omega}^n(y_1, y_2, t) e^{-\omega^2 \mu^2} d\omega, \quad (15)$$

получается выражение через полиномы Эрмита  $H_{2k}(x)$ :

$$N_{\text{run}}^n = \left(\frac{\pi}{A}\right)^{1/2} e^{\frac{B^2}{4A}} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k!} \left(\frac{y_1}{A(4\gamma n + 2\gamma)}\right)^k H_{2k}\left(\frac{iB}{2\sqrt{A}}\right). \quad (16)$$

Данное решение описывает волну, распространяющуюся в обоих направлениях вдоль берега, что соответствует стоячей волне в движущейся системе отсчёта или волне, порождённой начальным возмущением с нулевой скоростью. На рис. 8 показана эволюция решения (16).

Построенные точные решения (14) и (16) описывают бегущие береговые волны на ровном наклонном дне и могут служить эталонными тестами для численных методов, а

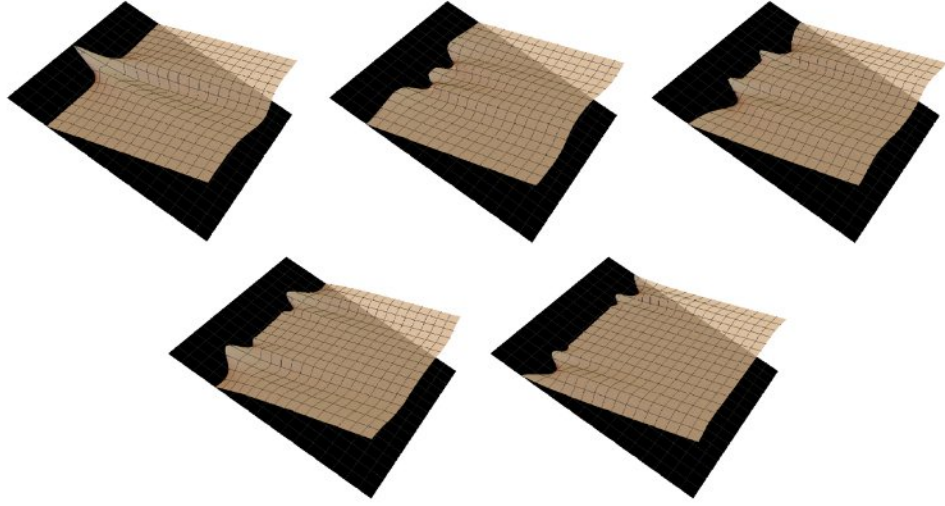


Рис. 8. Эволюция точного решения для бегущей береговой волны, выраженного через полиномы Эрмита  $H_{2k}(x)$ . Последовательные моменты времени.

также использоваться для верификации асимптотических построений в более сложных геометриях.

#### 4 Интегральное представление точного решения для береговых волн

Согласно классической теории [14] асимптотические решения задачи (3) строятся по формуле

$$N(y_1, y_2) = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{ip_1 y_1}{h}\right) \exp\left(\frac{iS(y_2, p_1)}{h}\right) dp_1 \Big|_{\tau=\tau(y_2, p_1)}, \quad (17)$$

где  $S(y, p)$  – фаза на лагранжевом многообразии  $\Lambda = \{y = Y(\tau) \quad p = P(\tau)\}$ , порожденному гамильтоновой системой (6):

$$S(y_2, p_1) = \int_0^{\tau} \left( p_1(\tau) dy_1(\tau) + p_2(\tau) dy_2(\tau) \right) - p_1(\tau) y_1(\tau) \Big|_{\tau=\tau(y_2, p_1)}. \quad (18)$$

Тогда асимптотическое представление решения (3) выглядит как

$$\Psi_{as}(y_1, y_2) = \frac{\exp\left(i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{F}{h} y_2\right)\right)}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i\left(- (1+2n) \tan^{-1}\left(\frac{p_1}{F}\right) + \frac{p_1 y_1}{h}\right)\right)}{\sqrt{F^2 + p_1^2}} dp_1, \quad (19)$$

где условие квантования имеет вид

$$\frac{\omega^2}{\gamma(2n+1)} = \frac{H_0}{h^2 \gamma(2n+1)} = \frac{F}{h}. \quad (19)$$

Интересно отметить, что данное асимптотическое представление хорошо соотносится с точным решением даже при значительном увеличении малого параметра  $h$  (см. Рис. 9).

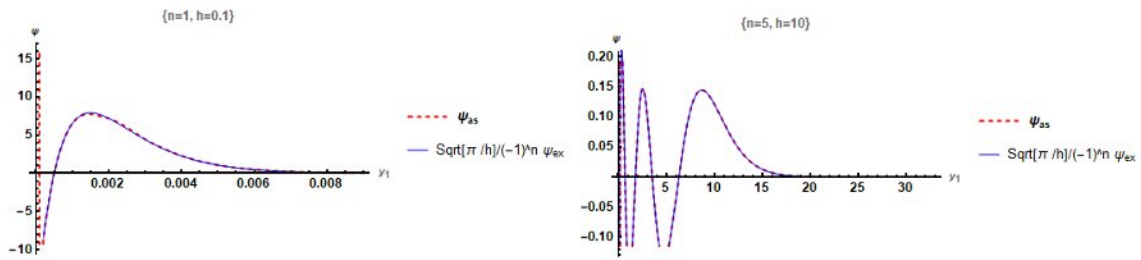


Рис. 9. Сравнение точного (10) асимптотического (19) решений уравнения (3). Слева  $n = 1, h = 0.1$ , справа  $n = 5, h = 10$ .

Этот факт еще подлежит обоснованию, однако видно, что (19) в некотором смысле удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и (10), а значения при  $y_1 = 0$  соотносятся как

$$(-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{h}} \Psi_{ex}(0, y_2) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{h}} e^{i \frac{F}{h} y_2}, \quad \Psi_{as}(0, y_2) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{h}} e^{i \frac{F}{h} y_2} \frac{\exp^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}.$$

## Список литературы

- [1] Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. — Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. — 276 с.
- [2] Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. — М.: Наука, 1977. — 816 с.
- [3] Stoker J.J. Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. — New York: John Wiley and Sons, 1958. — 609 p.
- [4] G. F. Carrier, H. P. Greenspan, Water waves of finite amplitude on a sloping beach // J. Fluid Mech. - 1958. - Vol. 4. - P. 97-109.
- [5] Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. — 1847. — Vol. 8. — P. 441–455.
- [6] Ursell F. Edge waves on a sloping beach // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. — 1952. — Vol. 214. — P. 79–97.
- [7] Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. — М.: МЦНМО, 2015. — 520 с.
- [8] Vladimirov V.S. Equations Of Mathematical Physics. — New York: M. Dekker, 1971. — 418 p.
- [9] Dobrokhotov S.Yu., Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E. Asymptotic Solutions of the Cauchy Problem for the Nonlinear Shallow Water Equations in a Basin with a Gently

- Sloping Beach // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2022. — Vol. 29. — P. 28–36.
- [10] Dobrokhotov S.Yu., Minenkov D.S., Votyakova M.M. Asymptotics of Long Nonlinear Coastal Waves in Basins with Gentle Shores // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2024. — Vol. 31, No. 1. — P. 79–93.
- [11] Вотякова М.М., Доброхотов С.Ю., Миненков Д.С. Классическая и волновая динамика длинных нелинейных волн, локализованных в окрестности пологих берегов // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. — 2024. — Т. 327. — С. 27–43.
- [12] Вотякова М.М. Асимптотики распространяющихся вдоль берега длинных волн, порожденных локализованным начальным возмущением // Математические заметки. — 2026. — Т. 119, № 5. — С. 784–790.
- [13] Доброхотов С.Ю., Тироцци Б. Локализованные волны и вихревые решения линейных гиперболических систем и их приложения к линейным уравнениям мелкой воды // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. — 2010. — Т. 270. — С. 62–81.
- [14] Маслов В.П., Федорюк М.В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976. — 296 с.
- [15] Dobrokhotov S.Yu., Minenkov D.S., Votyakova M.M. Asymptotic Eigenfunctions of the Operator  $\nabla D \nabla$  Degenerating on the Boundary of a Domain and Billiards with Semi-Rigid Walls // Mathematical Notes. — 2024. — Vol. 115, No. 3. — P. 401–415.
- [16] Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. — М.: Изд-во МГУ, 1988. — 416 с.
- [17] Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический анализ интегрируемых гамильтоновых систем // Математический сборник. — 1989. — Т. 180, № 4. — С. 503–540.
- [18] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999. — 444 с.
- [19] Anikin A.Yu., Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E., Tsvetkova A.V. Asymptotics, related to billiards with semi-rigid walls of eigenfunctions of the operator  $\nabla D(x) \nabla$  in dimension 2 and trapped coastal waves // Mathematical Notes. — 2019. — Vol. 105, No. 5–6. — P. 789–794.
- [20] Anikin A.Yu., Dobrokhotov S.Yu., Nazaikinskii V.E., Tsvetkova A.V. Asymptotic eigenfunctions of the operator  $\nabla D(x) \nabla$  defined in a two-dimensional domain and

- degenerating on its boundary and billiards with semi-rigid walls // *Differential Equations*. — 2019. — Vol. 55, No. 5. — P. 644–657.
- [21] Bolotin S., Treschev D. Another Billiard Problem // *Russian Journal of Mathematical Physics*. — 2024. — Vol. 31, No. 1. — P. 50–59.
- [22] Назайкинский В.Е. Геометрия фазового пространства для волнового уравнения, вырождающегося на границе области // *Математические заметки*. — 2012. — Т. 92, № 1. — С. 153–156.
- [23] Доброхотов С.Ю., Тироцци Б., Шафаревич А.И. Локализованные волны и вихревые решения линейных гиперболических систем и их приложения к линейным уравнениям мелкой воды // *Труды Математического института им. В.А. Стеклова*. — 2007. — Т. 259. — С. 72–98.
- [24] Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е. Асимптотики решений волнового уравнения с вырождающимся на границе символом // *Современная математика. Фундаментальные направления*. — 2019. — Т. 65, № 3. — С. 403–418.
- [25] Доброхотов С.Ю., Миненков Д.С., Назайкинский В.Е. Асимптотические решения задачи Коши для нелинейных уравнений мелкой воды в бассейне с пологим берегом // *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. — 2021. — Т. 500. — С. 32–37.