

УДК 517.938.5

Г. В. Белозеров

Многомерные эллиптические бильярды и их особенности

Рассматривается задача о движении материальной точки внутри области евклидова n -мерного пространства, ограниченной n -осным эллипсоидом, под действием упругой силы коэффициента k . Предполагается, что центр поля сил совпадает с центром эллипсоида, а отражение точки от границы области абсолютно упругое. Такая динамическая система является интегрируемой по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. При всех значениях k описано устройство слоения Лиувилля этой системы в окрестности слоев, отвечающих невырожденным особенностям. Ответ представлен в виде почти прямых произведений 2-атомов. Определены классы гомеоморфности неособых поверхностей постоянной энергии. Показано, что изоэнергетическая поверхность классического бильярда (т.е. системы в отсутствие внешних сил) внутри произвольной области, диффеоморфной n -мерному диску, гомеоморфна сфере S^{2n-1} .

Библиография: 46 названий.

Ключевые слова: интегрируемая гамильтонова система, интегрируемый бильярд, слоение Лиувилля, невырожденные особенности, изоэнергетическая поверхность.

§ 1. Введение

Почти все гладкие динамические системы физики, механики и геометрии, допускающие решение в квадратурах, либо являются интегрируемыми гамильтоновыми системами (далее ИГС), либо тесно с ними связаны. Поэтому одним из актуальных направлений современной геометрии является качественный анализ таких систем: исследование их топологических и траекторных свойств.

Метод инвариантов, предложенный А. Т. Фоменко и активно развиваемый им и его научной школой, позволяет классифицировать ИГС двух степеней свободы с дополнительным боттовским первым интегралом на неособых поверхностях постоянной энергии Q_h^3 с точностью до нескольких видов эквивалентности: грубая лиувиллева, лиувиллева и траекторная (см. [1]–[5]). Напомним, что две ИГС *грубо лиувиллево эквивалентны*, если существует гомеоморфизм баз слоений Лиувилля этих систем, который локально, т.е. в окрестности каждой точки базы, поднимается до гомеоморфизма слоений. Классифицирующим инвариантом этого отношения эквивалентности в случае Q_h^3 выступает *грубая*

Исследование выполнено в МГУ имени М. В. Ломоносова за счет гранта Российского научного фонда № 25-71-10087, <https://rscf.ru/project/25-71-10087/>. Г. В. Белозеров является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

молекула (инвариант Фоменко) — граф, ребрам которого отвечают однопараметрические семейства торов Лиувилля, а вершинам — символы 3-атомов, описывающих соответствующие бифуркации торов.

Инвариант Фоменко-Цишанга (меченая молекула) получается из инварианта Фоменко добавлением числовых меток, отвечающих склейке торов Лиувилля на границах соседних атомов. Эта молекула классифицирует ИГС двух степеней свободы на изоэнергетических поверхностях с точностью до лиувиллевой эквивалентности, т.е. гомеоморфизма слоений Лиувилля с сохранением ориентации на Q_h^3 и критических окружностях [6]. Инварианты Фоменко и Фоменко-Цишанга вычислены для большого класса ИГС, см., например, [7] [12]. Найдены нетривиальные эквивалентности систем.

В случае трех и более степеней свободы нет удобных в работе классификационных инвариантов ИГС. Однако есть ряд результатов, устанавливающих полу-локальные свойства особенностей таких систем (см. [13, 14]). Например, в работе [15] Н. Т. Зунг показал, что если в окрестности особой точки y_0 ранга 0 образа отображения момента бифуркационную диаграмму посредством некоторого диффеоморфизма удастся привести к максимальному набору трансверсально пересекающихся гиперповерхностей, то малая окрестность слоя, отвечающего y_0 , послойно диффеоморфна почти прямому произведению 2-атомов. В реальных ИГС с тремя (и более) степенями свободы достаточно трудно определить явный вид такого почти прямого произведения. Однако отметим, что в работе [16] Н. Т. Зунг описал устройство слоения Лиувилля вблизи невырожденных особых слоев геодезического потока на поверхности эллипсоида произвольной размерности.

Наиболее наглядными ИГС являются интегрируемые билиарды и их обобщения. Интегрируемость билиярда внутри области, ограниченной эллипсом, была отмечена Дж. Д. Биркгофом в работе [17]. Дополнительным интегралом такой системы является параметр софокусной квадратики, которой касаются все звенья траектории-ломаной (или их продолжения). Более того, интегрируемость сохранится, если в качестве билиардного стола рассмотреть область, ограниченную несколькими софокусными квадратики, см., например, работу С. В. Болотина [18]. Дополнительный первый интеграл при таком переходе останется прежним.

Исследование топологии слоений Лиувилля плоских софокусных билиардов началось в работах В. Драговича и М. Раднович [19, 20], а также В. В. Ведюшкиной [21]. В. В. Ведюшкина ввела обобщение плоских софокусных билиардов — билиардные книжки. Согласно результатам В. В. Ведюшкиной и И. С. Харчевой билиардные книжки реализуют все 3-атомы [22], а также произвольные грубые молекулы [23]. В настоящее время активно изучается гипотеза А. Т. Фоменко о реализации билиардными системами слоений Лиувилля на Q_h^3 произвольных ИГС. Для этого помимо билиардных книжек рассматриваются и другие интегрируемые обобщения классического билиярда внутри эллипса: билиарды с интегрируемыми потенциалами [24, 25], билиарды с проскальзыванием [26] [28], эволюционные силовые билиарды [29, 30], билиарды на квадратики [31] и др.

Настоящая работа посвящена исследованию топологии слоения Лиувилля бильярда внутри эллипсоида произвольной размерности с потенциалом Гука коэффициента k . Предполагается, что все полуоси эллипсоида различные, а его центр совпадает с центром поля сил. Такой бильярд является интегрируемым по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Отметим, что явное решение этой системы в этта-функциях было получено Ю. Н. Федоровым в работе [32]. Однако из решений достаточно трудно извлечь информацию о топологии слоения Лиувилля, поэтому мы применим другой подход.

Во втором параграфе с помощью метода, предложенного В. В. Козловым в [33], найден явный вид дополнительных первых интегралов этой системы, а также написаны уравнения движения на изоинтегральных поверхностях. Далее, в параграфе три, основываясь на геометрических соображениях, мы определим понятие регулярного слоя, после чего покажем согласованность этого определения с классическим (т.е. в терминах ранга отображения момента), а затем при помощи алгебраического метода, разработанного М. П. Харламовым (см., например, [34, 35]), найдем формулу подсчета количества торов Лиувилля, отвечающих регулярному изоинтегральному уровню. Отметим, что алгебраический метод нашел широкое применение в исследовании топологии слоений Лиувилля бильярдов с интегрируемыми потенциалами, начатом в работах И. Ф. Кобцева [36] и С. Е. Пустовойтова [37].

Четвертый параграф посвящен исследованию слоения Лиувилля вблизи невырожденных критических слоев. Мы покажем, что бильярды с потенциалом Гука внутри n -осного, а также $(n-1)$ -осного эллипсоидов тесно связаны друг с другом. Используя эту индуктивную связь, мы опишем полу-локальное устройство слоения Лиувилля вблизи невырожденных особых слоев рассматриваемой системы. Ответ получен в виде почти прямых произведений 2-атомов. Слоение Лиувилля плоских софокусных бильярдов с потенциалом Гука изучались в работах И. Ф. Кобцева [36] и С. Е. Пустовойтова [37], а также В. А. Кибкало и А. Т. Фоменко [38]. В случае $n = 3$ подробный анализ системы проведен автором в работе [39].

Заключительном параграфе посвящен описанию топологических типов неособых поверхностей постоянной энергии рассматриваемой системы. Оказывается, что все эти поверхности гомеоморфны либо сфере S^{2n-1} , либо прямому произведению сфер $S^{i-1} \times S^{2n-i}$. Метод работы, предложенный в этом параграфе, применим, вообще говоря, ко всем бильярдам, не обязательно интегрируемым. В частности, показано, что поверхность постоянной энергии классического бильядра (т.е. системы в отсутствие внешних сил) внутри произвольной области, диффеоморфной n -мерному диску, гомеоморфна сфере S^{2n-1} . Отметим, что в случае $n = 2$ этот результат хорошо известен. В частности, он упоминался в работе Е. Гуткина [40].

Благодарности. Автор благодарит академика РАН Анатолия Тимофеевича Фоменко за ряд ценных замечаний и внимание к работе.

§ 2. Постановка задачи. Интегрируемость

2.1. Описание системы. Фазовое пространство. Рассмотрим в евклидовом n -мерном пространстве $\mathbb{R}^n(x_1, \dots, x_n)$ эллипсоид \mathcal{E} , заданный уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1,$$

где $a_1 > \dots > a_n > 0$.

Мы будем изучать следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри замкнутой области D , ограниченной эллипсоидом \mathcal{E} , под действием упругой силы коэффициента k . Предполагается, что центр поля сил совпадает с центром эллипсоида (т.е. с началом координат), а отражение от границы D абсолютно упругое. Такую динамическую систему мы будем называть *эллиптическим бильярдом с потенциалом Гука*. Случай $k = 0$ выделяется среди остальных, поскольку он отвечает стандартному бильярду, т.е. системе в отсутствие внешних сил. Поэтому при $k = 0$ будем называть нашу систему *классическим эллиптическим бильярдом*.

Опишем фазовое пространство эллиптического бильярда. Состояние этой системы определяется парой точка-вектор (x, v) , где x — точка множества D , т.е. местоположение материальной точки, а v — ее вектор скорости. Ввиду бильярдного отражения некоторые пары кодируют одно и то же состояние. Поэтому фазовым пространством нашей системы является множество $M^{2n} = \widetilde{M}^{2n} / \sim$ с фактор-топологией, где \widetilde{M}^{2n} — ограничение касательного расслоения к \mathbb{R}^n на множество D , а \sim — отношение эквивалентности на границе D , отвечающее бильярдному закону, т.е.

$$(x, v) \sim (x', v') \iff x = x' \in \partial D, \|v\| = \|v'\|, v_1 - v_2 \perp \partial D.$$

Отметим, что полная механическая энергия материальной точки, т.е. функция

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2) + \frac{k}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2),$$

является первым интегралом рассматриваемой системы, непрерывным на M^{2n} .

Фазовое пространство M^{2n} рассматриваемой системы, вообще говоря, не является гладким многообразием. Тем не менее, для почти всех допустимых значений h изоэнергетическая поверхность $Q_h^{2n-1} = \{(x, v) \in M^{2n} | H(x, v) = h\}$ является топологическим многообразием. Доказательство этого факта для $n = 3$ приведено в работе [41]. Случай произвольного n доказан в заключительном параграфе настоящей работы.

2.2. Интегрируемость системы. Обозначим через \widetilde{M}^{2n} объединение гладких участков фазового пространства рассматриваемого бильярда. Сделаем ряд наблюдений.

- На \widetilde{M}^{2n} корректно определена невырожденная замкнутая 2-форма $\omega = dx_1 \wedge dv_1 + \dots + dx_n \wedge dv_n$, где v_1, \dots, v_n — координаты вектора скорости материальной точки в базисе $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$.
- Динамика точки на множестве \widetilde{M}^{2n} задается векторным полем $\text{sgrad } H = \omega^{-1} \nabla H$.

- Существуют непрерывные пределы этой формы «справа» и «слева» при стремлении к участку негладкости M^{2n} (т.е. во всех парах $(x, v) \in M^{2n}$, где $x \in \partial D$).

Функцию H как и в гладком случае будем называть *функцией Гамильтона* (гамилтонианом). Для таких динамических систем А. Т. Фоменко ввел понятие интегрируемости по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Напомним ее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что динамическая система, определяемая функцией Гамильтона H является *интегрируемой по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле*, если существуют непрерывные на M^{2n} и гладкие на \widetilde{M}^{2n} первые интегралы F_1, \dots, F_{n-1} , такие, что:

1. $F_0 = H, F_1, \dots, F_{n-1}$ функционально независимы, т.е. их градиенты почти всюду линейно независимы на \widetilde{M}^{2n} ;
2. F_0, \dots, F_{n-1} коммутируют на \widetilde{M}^{2n} относительно скобки Пуассона, определяемой формой ω .

В работе [33] В. В. Козлов показал, что эллиптический бильярд с потенциалом Гука является интегрируемым по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Для этой системы в работе [41] написаны явные формулы первых интегралов. Приведем их без доказательства. Для этого введем дополнительные обозначения. Через $\sigma_{j_1, \dots, j_k}^i(u_1, \dots, u_n)$ обозначим элементарный симметрический многочлен степени i от переменных $\{u_1, \dots, u_n\} / \{u_{j_1}, \dots, u_{j_k}\}$. При этом, будем полагать $\sigma_{j_1, \dots, j_k}^0 = 1, \sigma_{j_1, \dots, j_k}^{-1} = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Бильярд с потенциалом Гука внутри эллипсоида \mathcal{E} является интегрируемым по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. Первыми интегралами этой системы являются функции*

$$F_i = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j^i(a_1, \dots, a_n) \dot{x}_j^2 - \sum_{l < j} \sigma_{l,j}^{i-1}(a_1, \dots, a_n) K_{l,j}^2 \right) + \frac{k}{2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^i(a_1, \dots, a_n) x_j^2,$$

где $i = 0, \dots, n-1, a_1 > \dots > a_n$ — квадраты полуосей эллипсоида \mathcal{E} , а $K_{l,j} = x_l \dot{x}_j - x_j \dot{x}_l$ для всех l, j .

Доказательство этого факта читатель может найти в работе [41]. На самом деле, интегрируемость рассматриваемой задачи вытекает из следующих соображений. Согласно классическому результату К. Г. Якоби (см., например, [42]) геодезический поток на эллипсоиде в \mathbb{R}^n является интегрируемым. Более того, интегрируемость сохранится, если к системе добавить потенциал Гука, центр которого совпадает с центром эллипсоида. Устремив меньшую полуось эллипсоида к нулю, мы получим эллиптический бильярд (внутри эллипсоида меньшей размерности) с потенциалом Гука, который тоже интегрируем как предел интегрируемых систем.

Напомним, что Якоби показал интегрируемость геодезического потока на эллипсоиде, работая в эллиптических координатах. Мы тоже перейдем к этим координатам, поскольку именно в них будет виден геометрический смысл первых интегралов F_0, \dots, F_{n-1} .

2.3. Эллиптические координаты. Для начала напомним определение софокусных квадрик в \mathbb{R}^n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейством софокусных квадрик в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n(x_1, \dots, x_n)$ называется совокупность квадрик заданных уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1, \quad (2.1)$$

где $a_1 > \dots > a_n$ — фиксированные числа, а λ — вещественный параметр.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формула 2.1 не определяет никакой квадрики, когда $\lambda = a_i$ для некоторого $i = 1, \dots, n$. Чтобы доопределить софокусное семейство для всех значений параметра λ необходимо умножить уравнение 2.1 на произведение $\prod_{i=1}^n (\lambda - a_i)$. В таком случае квадрика параметра a_i будет представлять собой гиперплоскость $x_i = 0$. Мы будем называть такие квадрики *вырожденными*.

На рисунке 1 изображены семейства софокусных квадрик на плоскости и в трехмерном пространстве.

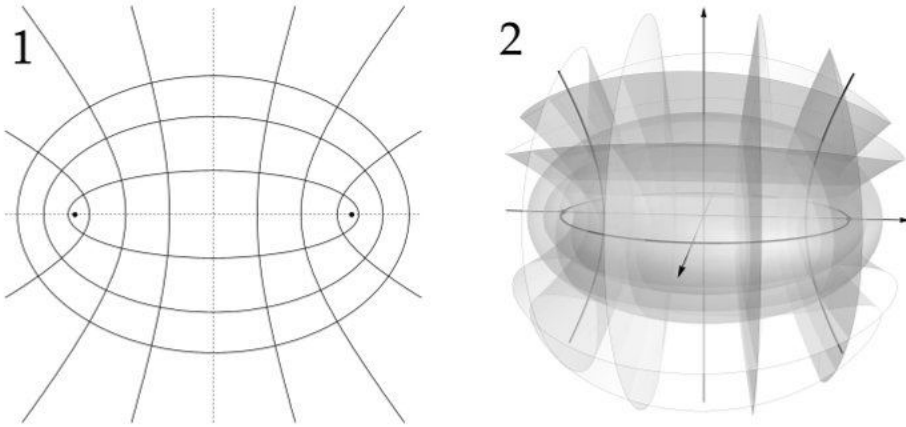


Рис. 1. Семейства софокусных квадрик: 1 на плоскости; 2 в трехмерном пространстве. На рисунке 1 черным выделены фокусы семейства, на рисунке 2 — фокальные кривые и их фокусы.

Отметим, что эллипсоид \mathcal{E} — квадрика параметра 0. Перечислим без доказательства некоторые хорошо известные свойства софокусных квадрик. Доказательство этих свойств читатель может найти в работе [42].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Софокусные квадрики ортогональны в точке пересечения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Через каждую точку \mathbb{R}^n проходит в точности n софокусных квадрик с учетом кратности. Более того, если $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ параметры всех софокусных квадрик, проходящих через данную точку, то справедливы неравенства: $\lambda_n \in (-\infty, a_n]$, $\lambda_i \in [a_{i+1}, a_i]$ для всех $i = 1, \dots, n-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ — параметры всех софокусных квадрик, проходящих через данную точку. Набор функций $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ называется *эллиптической системой координат*.

Эллиптические и декартовы координаты связаны следующей системой соотношений (см. [42]).

$$x_i^2 = \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda_j - a_i)}{\prod_{j \neq i} (a_j - a_i)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Из приведенной формулы ясно, что в каждом координатном ортанте, т.е. подмножестве \mathbb{R}^n , задаваемом n неравенствами вида $x_i > 0$ или $x_i < 0$ для всех i , эллиптические координаты являются однозначными, гладкими и регулярными.

В эллиптических координатах $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и импульсах (p_1, \dots, p_n) , сопряженных им, интегралы F_0, \dots, F_{n-1} принимают следующий вид.

$$F_i = 2 \sum_{j=1}^n \sigma_j^i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) A_j p_j^2 + \frac{k}{2} (\sigma^{i+1}(a_1, \dots, a_n) - \sigma^{i+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \quad (2.3)$$

Здесь $A_j = \frac{\prod_{k=1}^n (a_k - \lambda_j)}{\prod_{k \neq j} (\lambda_k - \lambda_j)}$. Доказательство этих формул приведено в работе [43].

2.4. Формула разделенных переменных. Новые первые интегралы.

С помощью формул 2.3, опишем геометрический смысл первых интегралов нашей задачи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (ФОРМУЛА РАЗДЕЛЯЮЩИХСЯ ПЕРЕМЕННЫХ). *На совместном уровне первых интегралов $F_0 = f_0, \dots, F_{n-1} = f_{n-1}$ уравнения движения системы в эллиптических координатах имеют вид*

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i)} \sqrt{V(\lambda_i)}, \quad (2.4)$$

где $V(z) = \prod_{k=1}^n (a_k - z) \left(-\frac{k}{2} \prod_{k=1}^n (a_k - z) + (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i z^{n-1-i} \right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $m = 1, \dots, n$ с помощью формул 2.3 упростим выражение $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i \lambda_m^{n-1-i}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i \lambda_m^{n-1-i} &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n \sigma_j^i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) A_j p_j^2 (-1)^i \lambda_m^{n-1-i} + \\ &+ \frac{k}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \lambda_m^{n-1-i} (\sigma^{i+1}(a_1, \dots, a_n) - \sigma^{i+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \end{aligned}$$

В первом слагаемом поменяем местами знаки суммирования и применим теорему Виета. Во втором слагаемом сделаем замену индекса $l = i + 1$. Поскольку

$\sigma^0 = 1$, добавим во вторую сумму фиктивное слагаемое для $l = 0$, а затем снова воспользуемся формулами Виета.

$$\begin{aligned}
&= 2 \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_j^i(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (-1)^i \lambda_m^{n-1-i} \right) A_j p_j^2 + \\
&+ \frac{k}{2} \sum_{l=0}^n (-1)^{l+1} \lambda_m^{n-l} (\sigma^l(a_1, \dots, a_n) - \sigma^l(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \\
&= 2 \sum_{j=1}^n \prod_{k \neq j} (\lambda_m - \lambda_k) A_j p_j^2 - \frac{k}{2} \left(\prod_{k=1}^n (\lambda_m - a_k) - \prod_{k=1}^n (\lambda_m - \lambda_k) \right) = \\
&= 2(-1)^{n-1} \left(p_m^2 + \frac{k}{4} \right) \prod_{k=1}^n (a_k - \lambda_m)
\end{aligned}$$

Из полученного равенства выразим квадрат импульса p_m .

$$p_m^2 = \frac{(-1)^{n-1}}{2 \prod_{k=1}^n (a_k - \lambda_m)} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i \lambda_m^{n-1-i} - \frac{k}{4}$$

Согласно уравнениям Гамильтона $\dot{\lambda}_m = \frac{\partial H}{\partial p_m}$ (напомним, что в наших обозначениях $H = F_0$), следовательно,

$$\dot{\lambda}_m = 4A_m p_m.$$

Значит,

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_m^2 = 16A_m^2 p_m^2 = \\
&= \frac{8}{\prod_{k \neq m} (\lambda_k - \lambda_m)^2} \prod_{k=1}^n (a_k - \lambda_m) \left(-\frac{k}{2} \prod_{k=1}^n (a_k - \lambda_m) + (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i \lambda_m^{n-1-i} \right).
\end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень, получим требуемые формулы. Предложение доказано.

Заметим, что если $k \neq 0$, то $\deg V = 2n$. Если $k = 0$ и $f_0 \neq 0$, то $\deg V = 2n - 1$. Везде далее в случае классического бильярда (т.е. $k = 0$) мы будем убирать из M^{2n} все пары (x, v) такие, что $v = 0$. Именно они отвечают значению $f_0 = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Все корни многочлена $V(z)$ вещественные. Внутри каждого из промежутков $(-\infty, a_n)$, (a_n, a_{n-1}) , \dots , (a_2, a_1) многочлен $V(z)$ имеет не более двух вещественных корней с учетом кратности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем это предложение в случае $k \neq 0$. При $k = 0$ доказательство аналогичное. Поскольку первые интегралы F_0, \dots, F_{n-1} функционально независимы и являются коэффициентами одного из элементарных сомножителей многочлена $V(z)$, корни $V(z)$ почти всюду попарно различные.

При этом, для почти всех наборов (f_0, \dots, f_{n-1}) совместная поверхность уровня $F_0 = f_0, \dots, F_{n-1} = f_{n-1}$ представляет собой комплекс размерности n . Более того, согласно формулам 2.4 множество \mathcal{A} , состоящее из всех векторов (f_1, \dots, f_n) , таких, что $V(z)$ не имеет кратных корней, а совместная поверхность уровня $F_0 = f_0, \dots, F_{n-1} = f_{n-1}$ — комплекс размерности n , является открытым и всюду плотным среди всех допустимых наборов значений интегралов F_i . Поэтому, если мы покажем, что для любого вектора $(f_0, \dots, f_{n-1}) \in \mathcal{A}$ все корни многочлена $V(z)$ вещественные, аналогичное будет верным для любого допустимого набора значений первых интегралов F_i .

Итак, пусть $(f_0, \dots, f_{n-1}) \in \mathcal{A}$. Согласно формулам 2.4 на каждом из интервалов $(-\infty, a_n), (a_n, a_{n-1}), \dots, (a_2, a_1)$ многочлен $V(z)$ обязан принимать положительные значения в некоторых точках. Действительно, если через точку с эллиптическими координатами $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ проходит хотя бы одна траектория системы, то $V(\lambda_i) \geq 0$ при всех $i = 1, \dots, n$. А поскольку, поверхность совместного уровня $F_0 = f_0, \dots, F_{n-1} = f_{n-1}$ является комплексом размерности n , то в силу ограничений на эллиптические координаты из предложения 3 на каждом из интервалов $(-\infty, a_n), (a_n, a_{n-1}), \dots, (a_2, a_1)$ многочлен $V(z)$, действительно, должен принимать хотя бы одно положительное значение.

Заметим, что $V(z)$ обращается в нуль при $z = a_1, \dots, a_n$. Следовательно, на каждом из отрезков $[a_n, a_{n-1}], \dots, [a_2, a_1]$ и луче $(-\infty, a_n]$ должны найтись подинтервалы $[\alpha_i, \beta_i] \in [a_{i+1}, a_i]$ и $(a_n, b_n] \in (-\infty, a_n]$, внутри которых $V(z)$ принимал бы положительные значения, а на границе равнялся бы нулю. Заметим, что эти подмножества не могут пересекаться. Действительно, если бы они пересекались, то точка пересечения совпадала бы с одним из a_i . А это означало бы, что “справа” и “слева” от a_i многочлен $V(z)$ принимает положительные значения, т.е. a_i — кратный корень. Однако это противоречит тому, что $(f_0, \dots, f_{n-1}) \in \mathcal{A}$.

Пусть N — количество вещественных корней $V(z)$. Согласно рассуждениям выше граничные точки множеств $(\alpha_n, \beta_n], [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}], \dots, [\alpha_1, \beta_1]$ являются различными корнями многочлена $V(z)$. Следовательно, $N \geq 1 + 2(n-1) = 2n-1$. Значит, $V(z)$ имеет по меньшей мере $2n-1$ вещественный корень. А поскольку $\deg V = 2n$, все его корни вещественные.

Покажем, что на каждом из интервалов $(-\infty, a_n), (a_{n-1}, a_n), \dots, (a_2, a_1)$ не может находиться более трех корней многочлена $V(z)$. Нам снова достаточно доказать этот факт для допустимых наборов из множества \mathcal{A} . Действительно, если на каком-то из интервалов вида (a_{i+1}, a_i) или $(-\infty, a_n)$ многочлен $V(z)$ имеет два различных корня, то на замыкании этого интервала найдутся хотя бы два подотрезка вида $[\alpha_i, \beta_i]$, описанных выше. В таком случае $N \geq 2n+1$, однако $\deg V = 2n$. Противоречие. Таким образом, предложение полностью доказано.

Отметим, что в случае $n = 2$ вещественность корней многочлена $V(z)$ отмечалась С. Е. Пустовойтовым в работе [37].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассуждения с нижней оценкой числа корней показывают, что если на интервале (a_i, a_{i+1}) попали корни ξ и η многочлена $V(z)$ (будем считать, что $\xi < \eta$), то $V(z) > 0$ на интервале (ξ, η) . Иначе бы снова получили, что $N > 2n$.

Пусть $k \neq 0$ и $\xi_1, \dots, \xi_n, a_1, \dots, a_n$ — корни многочлена $V(z)$. Будем считать, что $\xi_1 \geq \dots \geq \xi_n$. Поскольку коэффициенты многочлена $V(z)$ зависят от первых интегралов и констант k, a_i , функции ξ_1, \dots, ξ_n являются непрерывными первыми интегралами рассматриваемой задачи. Более того, они являются гладкими в том и только том случае, когда многочлен $V(z)$ не имеет кратных корней. Аналогично, если $k = 0$ и $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, a_1, \dots, a_n$ — корни многочлена $V(z)$, эти функции — тоже первые интегралы.

Заметим, что интегралы ξ_i (корни многочлена, зависящего от первых интегралов F_i) определяют вид области возможного движения. Действительно, согласно доказательству предложения 5 эллиптические координаты точки на совместном уровне первых интегралов изменяются на отрезках вида $[\alpha_i, \beta_i]$, где числа α_i, β_i равны либо 0, либо квадратам полуосей эллипсоида \mathcal{E} (т.е. a_1, \dots, a_n), либо ξ_1, \dots, ξ_n . В этом и заключается геометрический смысл интегралов ξ_i , а следовательно, и интегралов F_i .

§ 3. Слоение Лиувилля. Регулярные слои системы

Первые интегралы F_0, \dots, F_{n-1} задают разбиение фазового пространства M^{2n} на связные компоненты поверхностей их совместного уровня. Это разбиение задает *слоение Лиувилля*. Наша цель — описать его полу-локальное устройство. Однако для начала необходимо выяснить, какие слои являются регулярными, а какие — критическими.

В случае гладких систем регулярность определяется в терминах ранга отображения момента. Напомним, что точка $x \in M^{2n}$ называется *регулярной* для системы первых интегралов F_0, \dots, F_{n-1} (гладкой вполне интегрируемой гамильтоновой системы $v = \text{sgrad } H$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω)), если векторы $\text{sgrad } F_0, \dots, \text{sgrad } F_{n-1}$ линейно независимы в x . В противном случае x называют *критической*. Аналогично, слой слоения Лиувилля называется *регулярным*, если он целиком состоит из регулярных точек, иначе — *критическим*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласно теореме Лиувилля компактные регулярные слои гладкой вполне интегрируемой гамильтоновой системы диффеоморфны n -мерному тору. Эти торы называются *торами Лиувилля*. При этом, слоение Лиувилля вблизи таких слоев является тривиальным.

Система бильярда, вообще говоря, не является гладкой, поэтому классическое определение регулярного (и критического) слоя нам не подходит. Однако мы можем самостоятельно ввести эти понятия, воспользовавшись следующим геометрическим соображением. Согласно формулам 2.4 и предложению 5 границу области возможного движения (далее ОВД) материальной точки определяют “нетривиальные” корни многочлена $V(z)$ (т.е. ξ_1, \dots, ξ_n — корни, отличные от a_1, \dots, a_n). Более того, в общем случае, при малом возмущении значений первых интегралов F_i комбинаторный тип ОВД не меняется. Поэтому далее слой слоения Лиувилля, отвечающий значениям $F_0 = f_0, \dots, F_n = f_n$, мы будем называть *критическим*, если при любом достаточно малом возмущении параметров f_i комбинаторный тип соответствующей ОВД не меняется. Формализуем это определение.

Тип области возможного движения может измениться лишь в двух случаях. Во-первых, когда одна из квадрик границы ОВД стала критической, т.е. $\xi_i = a_j$ для некоторых i и j . Во-вторых, на границе бильярдного стола появился/исчез слой системы, т.е. $\xi_1 = 0$ и в малой окрестности справа от нуля многочлен $V(z)$ принимает отрицательные значения, т.е. $V'(0) < 0$. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Слой слоения Лиувилля многомерного эллиптического бильяарда с потенциалом Гаука, отвечающий набору значений первых интегралов $F_0 = f_0, \dots, F_{n-1} = f_{n-1}$, будем называть *критическим*, если выполнено хотя бы одно из следующих условий.

1. Многочлен $V(z)$, вычисленный по данному набору значений f_i , имеет кратный корень.
2. $V(0) = 0$ и $V'(0) < 0$

В противном случае слой будем называть *регулярным*.

Оказывается, такое определение хорошо согласовано с классическим, т.е. с аналогичным понятием для гладких систем. Действительно, рассмотрим движение материальной в \mathbb{R}^n под действием потенциала V (*система без границы*). В таком случае функции F_0, \dots, F_{n-1} по-прежнему будут первыми интегралами, при этом, справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Слой слоения Лиувилля системы без границы, отвечающий значениям первых интегралов $F_0 = f_0, \dots, F_{n-1} = f_{n-1}$, является регулярным тогда и только тогда, когда многочлен V , составленный по данному набору параметров f_i , не имеет кратных корней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы разобьем доказательство этого предложения на несколько шагов. Пусть $T = \{(x, v) \in T\mathbb{R}^n \mid F_0 = f_0, \dots, F_{n-1} = f_{n-1}\}$.

Шаг 1. Рассмотрим произвольную пару $(x, v) \in T$, такую, что x не лежит ни в одной из координатных плоскостей. Ясно, что эллиптические координаты $\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0$ точки x отличны от критических значений, в частности, они являются различными. Поэтому точка x лежит в области регулярности эллиптических координат. Найдем ранг системы дифференциалов dF_0, \dots, dF_{n-1} в этой точке.

Совершим линейное преобразование и перейдем к системе первых интегралов

$$G_i^0 = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_i^0)^{n-1-k} (-1)^k F_k, \text{ где } i = 1, \dots, n.$$

Поскольку это преобразование осуществляется матрицей типа Вандермонда и все λ_i попарно различные, $\text{rank}(dF_0, \dots, dF_{n-1}) = \text{rank}(dG_1^0, \dots, dG_n^0)$.

Вычислим матрицу Якоби функций G_i^0 в точке x в эллиптических координатах и сопряженных им импульсах. Для этого рассмотрим вспомогательные функции $G_i = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^{n-1-k} (-1)^k F_k$.

$$\frac{\partial G_i^0}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial G_i}{\partial \lambda_j} - \delta_{j,i} \sum_{k=1}^{n-1} (n-1-k) (\lambda_i^0)^{n-k-2} (-1)^k F_k, \quad \frac{\partial G_i^0}{\partial p_k} = \frac{\partial G_i}{\partial p_k} \quad (3.1)$$

Из доказательства предложения 4 имеем $G_i = 2(-1)^{n-1} \left(p_i^2 + \frac{k}{4} \right) \prod_{k=1}^n (a_k - \lambda_i)$.
 Значит, матрица Якоби является блочно-диагональной.

Введем обозначения: $\Delta(z) = \prod_{k=1}^n (a_k - z)$, $W(z) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f_i z^{n-1-i}$. В таком случае Якоби функций G_i^0 в точке x имеет вид

$$(A|B), \text{ где } A = \text{diag}\{2(-1)^{n-1}(p_i^2 + k/4)\Delta'(\lambda_i^0) - W'(\lambda_i^0), i = 1, \dots, n\}, \\ B = \text{diag}\{4(-1)^{n-1}p_i\Delta(\lambda_i^0), i = 1, \dots, n\}.$$

Ранг этой матрицы максимален в том и только в том случае, когда в любой строке есть ненулевой элемент. Значит, ранг не максимален, если и только если $p_i^2 = 0$, а также $(-1)^n k \Delta'(\lambda_i^0)/2 + W'(\lambda_i^0) = 0$ для некоторого i . Это означает, что $V(\lambda_i^0) = 0$ и $V'(\lambda_i^0) = 0$ для некоторого i , т.е. $V(z)$ имеет кратный корень. Действительно, на совместном уровне T с точностью до константы p_i^2 является частным $V(\lambda_i^0)$ и $\Delta(\lambda_i^0)$ и $V(z) = \Delta(z)(-k\Delta(z)/2 + (-1)^{n-1}W(z))$. Таким образом, мы доказали предложение для точек, не лежащих в координатных плоскостях.

Шаг 2. Пусть теперь точка x лежит ровно в одной координатной плоскости, например, в $x_1 = 0$. Это означает, что в x вырождается эллиптическая координата λ_1 . Сделаем замену этой координаты. Положим

$$\mu_1 = \begin{cases} \sqrt{a_1 - \lambda_1}, & \text{если } x_1 \geq 0, \\ -\sqrt{a_1 - \lambda_1}, & \text{если } x_1 < 0. \end{cases}$$

С помощью формул замены 2.2 нетрудно убедиться, что система координат $(\mu_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ является гладкой и регулярной в окрестности точки x . И уже в «подправленных» эллиптических координатах нетрудно, показать, что все рассуждения из шага 1 останутся верными. Аналогичные соображения с заменой координат сработают для любой точки x , чьи эллиптические координаты попарно различны.

Шаг 3. Пусть теперь в точке x эллиптические координаты λ_i и λ_{i+1} совпадают, т.е. равны a_{i+1} . Это означает, что справа и слева от a_{i+1} многочлен $V(z)$ принимает положительные значения. При этом, $V(a_{i+1}) = 0$. Значит, $V'(a_{i+1}) = 0$, т.е. a_{i+1} — кратный корень $V(z)$. Однако в таком случае слой T содержит такие пары (x', v') близкие к (x, v) , что x' попадает под условия шага 2, а координата λ_i этой точки равна a_{i+1} . Тогда по второму шагу ранг системы дифференциалов в этой точке не максимален, т.е. слой T не является регулярным. Таким образом, мы полностью доказали предложение.

Ниже мы опишем регулярные слои рассматриваемой системы, а также укажем их количество на совместном уровне интегралов F_0, \dots, F_{n-1} .

Положим $a_{n+1} = 0$. Согласно замечанию 2 для любого регулярного слоя T на промежутках вида (a_{i+1}, a_i) лежит не более двух корней многочлена $V(z)$. Более того, если корни $\xi < \eta$ лежат на интервале (a_{i+1}, a_i) , то $V(z) > 0$ при $z \in (\xi, \eta)$.

Рассмотрим поверхность совместного уровня T интегралов $F_0 = f_0, \dots, F_{n-1} = f_{n-1}$. Согласно определению 4 все слои, отвечающие этому уровню либо регулярны, либо не являются таковыми. Поэтому можно корректно говорить о

регулярной изоинтегральной поверхности. Предположим, что T регулярна. Положим для любого $i = 1, \dots, n-1$

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{если } V(z) \text{ имеет не более двух корней на } (a_{i+1}, a_i), i = 1, \dots, n-1; \\ 2, & \text{если } V(z) \text{ имеет два корня на } (a_{i+1}, a_i), i = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Число N_n положим равным 1, если $V'(a_n) < 0$, и 2 в противном случае. Тогда справедлив следующий кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля.

ТЕОРЕМА 1.

1. Регулярные слои биллиарда внутри n -осного эллипсоида с потенциалом Гюка гомеоморфны n -мерному тору.
2. Слоение Лиувилля в окрестности каждого такого слоя тривиально.
3. Количество торов, отвечающих регулярной изоинтегральной поверхности $F_0 = f_0, \dots, F_{n-1} = f_{n-1}$ равно произведению $N_1 \cdots N_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и прежде T регулярная изоинтегральная поверхность. Опишем топологическое устройство T .

Эллиптические координаты однозначны внутри каждого координатного ортанта и симметричны относительно всех координатных плоскостей ($x_1 = 0, \dots, x_n = 0$). А поскольку внутри области возможного движения они изменяются на попарно непересекающихся отрезках, сама ОВД разбивается на 2^n симметричных (относительно координатных плоскостей) параллелепипеда. Закодируем координатные ортанты и соответствующие им параллелепипеды ОВД последовательностью v из ± 1 . Символ с номером i будет отвечать знаку координаты x_i .

Согласно предложению 4, если точка x принадлежит области возможного движения, отвечающей поверхности T , то в этой точке допустимы почти всюду 2^n векторов скорости. Каждый из них можно закодировать последовательностью знаков его компонент в эллиптических координатах. Таким образом, над каждым элементарным параллелепипедом ОВД лежит 2^n параллелепипедов поверхности T . В итоге, мы разбили T на 2^{2n} областей, гомеоморфных параллелепипеду. Каждый из них кодируется последовательностью знаков (u, v) длины $2n$, где первые n компонент, т.е. u , указывают координатных ортант, а последние, т.е. v — номер вектора скорости в точке. Занумеруем оси и пары соответствующих перпендикулярных граней параллелепипедов номерами эллиптических координат. А именно так, что i -ая пара граней отвечала бы наибольшему и наименьшему значениям i -й эллиптической координаты на поверхности T , т.е. корню многочлена $V(z)$ или нулю (т.к. 0 — наименьшее значение эллиптической координаты λ_n).

Для того чтобы восстановить поверхность T необходимо указать, как склеиваются между собой параллелепипеды разбиения. Если траектория материальной точки на параллелепипеде $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ соударяется с i -ой парой стенок, то возможны следующие два варианта: стенка соударения отвечает либо a_i или a_{i+1} (кроме a_{n+1}), либо $\xi_j \neq a_i, i = 1, \dots, n$. Во втором случае траектория должна выйти из той же точки той же грани параллелепипеда $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{i-1}, -v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$, так как номер ортанта не изменился,

а скорость вдоль i -й эллиптической координаты поменяла знак. Теперь разберемся с первым случаем.

Если же стенка соударения отвечала значению a_i , то координата x_{i+1} изменит свой знак вместе с направлением координаты λ_i . Значит, по этой стенке мы должны склеить наш параллелепипед с $(u_1, \dots, u_{i-1}, -u_i, u_{i+1}, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{i-1}, -v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$. Аналогично, если стенка отвечает значению a_{i+1} , то происходит аналогичная склейка с параллелепипедом, имеющим код $(u_1, \dots, u_i, -u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_n, v_1, \dots, v_{i-1}, -v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$.

Заметим, что на i -й паре стенок при склейке знак может поменяться только у v_i, u_i или u_{i+1} . Следовательно, далее мы можем воспользоваться индукцией по n .

База индукции. При $n = 1$ первое утверждение теоремы очевидно. Проверим третий пункт. В этом случае полуось ровно одна. Обозначим ее квадрат через a . Пусть ξ — корень $V(z)$ (в случае $k \neq 0$). Возможны три вида областей возможного движения. Все они представлены на рисунке 2. Через π обозначена стандартная проекция M^{2n} на бильярдный стол, сопоставляющая паре (x, v) точку x . Из рисунка видим, что если точка $x = 0$ включена в ОВД, т.е. $V'(a) < 0$ (это означает, что $\lambda_1 \in [\max\{\xi, 0\}, a]$), T представляет собой одну окружность. Если же она не включена, т.е. $V'(a) > 0$ (это означает, что $\lambda_1 \in [0, \xi]$), то в точности две.

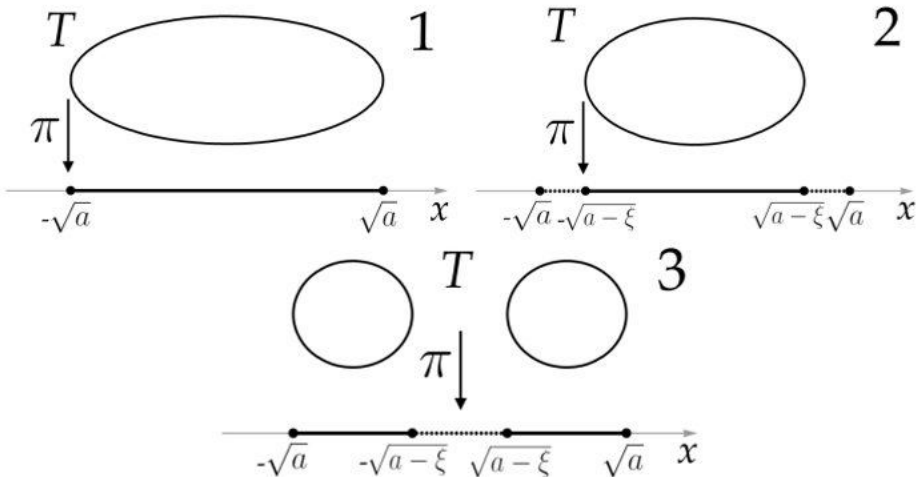


Рис. 2. Три вида регулярных областей возможного движения бильярда с потенциалом Гука внутри отрезка. Черные отрезки на оси x — области возможного движения, T — поверхность совместного уровня, отвечающая ОВД, π — стандартная проекция на бильярдный стол.

Шаг индукции. Склеим стенки параллелепипедов, отвечающие эллиптическим координатам с номерами $2, \dots, n - 1$. Поскольку при такой процедуре параллелепипеды с различными u_1 и v_1 не могут быть оказаны в одной компоненте связности, по предположению индукции мы получим набор комплексов, гомеоморфных прямому произведению отрезка и $(n - 1)$ -мерного тора. Отметим, что этот отрезок отвечает изменению первой эллиптической координаты.

По индукции количество таких поверхностей равно $4N_2 \cdots N_n$. Здесь число 4 появляется благодаря тому, что u_1 и v_1 могут быть произвольными. Закодируем полученные комплексы векторами длины три: (u_1, v_1, w) , где $w \in \{1, \dots, N_2 \cdots N_n\}$ отвечает $(n-1)$ -мерному тору, полученному в результате склейки стенок с номерами $2, \dots, n$, при условии того, что у всех параллелепипедов мы понизили размерность, убрав ребра, отвечающие λ_1 .

Границы рассматриваемых комплексов $(n-1)$ -мерные торы, которые отвечают наибольшему и наименьшему значениям λ_1 . Остается их склеить между собой с учетом закона движения 4.

Предположим, что $\lambda_1 \in [\xi, \eta]$, где $\xi, \eta \neq a_1, a_2$. В таком случае, согласно рассуждениям выше комплексы с кодами (u, v, w) и $(u, -v, w)$ должны тождественно склеиться друг с другом на соответствующих границах. Таким образом, комплексы разобьются на пары и в итоге мы получим $2N_2 \cdots N_n$ торов Лиувилля. Однако в рассматриваемом случае $N_1 = 2$, поэтому для него мы все доказали.

Пусть теперь $\eta = a_1$, а $\xi \neq a_2$, тогда комплекс (u, v, w) по верхней стенке (т.е. по границе отвечающей η) должен склеиться с $(-u, -v, w)$. Последний по нижней склеится с $(-u, v, w)$. Далее на верхней стенке $(-u, v, w)$ отождествляется с $(u, -v, w)$, который по нижней границе склеится с (u, v, w) . В итоге мы получаем из четырех наборов комплексов один n -мерный тор, причем количество торов равно $N_2 \cdots N_n$. А поскольку в описываемом случае $N_1 = 1$, мы снова доказали справедливость первого и третьего пунктов теоремы.

Остальные случаи для ξ и η разбираются по аналогии.

Заметим, что при малом изменении коэффициентов f_i меняются лишь длины сторон элементарных параллелепипедов поверхности T , в то время как комбинаторное их склейки остается прежним. Поэтому слоение Лиувилля в малой окрестности поверхности T будет тривиальным. Таким образом, теорема полностью доказана.

При $k > 0$ многочлен V не может иметь на интервале (a_2, a_1) два вещественных корня. Действительно, если $\xi < \eta$ — корни V на промежутке (a_2, a_1) , то т.к. $V < 0$ при $z > a_1$, V будет принимать отрицательные значения на интервале (ξ, η) , что противоречит замечанию 2. Следовательно, согласно теореме выше $N_1 = 1$. Этот факт позволяет выбрать единообразно на каждом торе Лиувилля цикл γ , обходящий все эллиптические координаты в точности по два раза. Отметим, что в случае $k = 0$ и $n = 2$ такие циклы впервые были найдены В.В. Ведюшкиной (см. [21]). Эти циклы для двух торов Лиувилля (эллиптический и гиперболический) выделены на рисунке 3 в виде своих проекций на бильярдный стол.

Опишем построение этого цикла более подробно для произвольных $k \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$. При доказательстве теоремы 1 мы индуктивно склеивали торы Лиувилля. При этом, сама индукция шла по количеству эллиптических координат: от склейки, отвечающей λ_n , мы переходили к склейке по λ_{n-1} и т.д. Каждая образующая окружность тора отвечала движению от минимума λ_i к максимуму и далее наоборот. При этом, такие обходы эллиптических координат могли происходить либо единожды, либо дважды. Однако, как мы выяснили, в случае $k > 0$ величина N_1 в точности равна 1, т.е. координата λ_1 накручивается

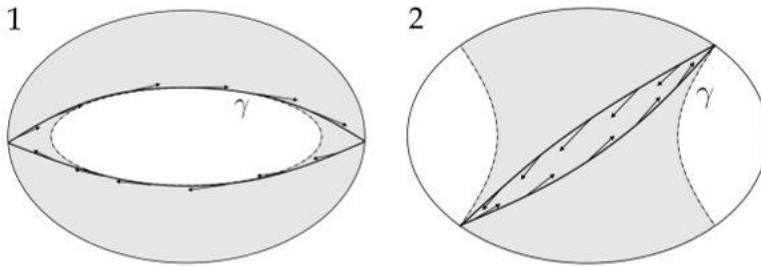


Рис. 3. Циклы, гомологичные критическому движению, на торах Лиувилля классического бильярда внутри эллипса.

дважды. Поэтому цикл γ , обходящий два раза все эллиптические координаты на каждом торе Лиувилля в притягивающем случае является базисным. Аналогичные рассуждения работают и при $k = 0$, т.е. в отсутствии внешних сил. Таки образом нами доказано следующее предложение.

Предложение 7. *В случае $k \geq 0$ на каждом торе Лиувилля можно выбрать базисный цикл γ , обходящий все эллиптические координаты в точности два раза.*

Мы применим это предложение при описании слоения Лиувилля в окрестности особых слоев.

§ 4. Слоение Лиувилля вблизи особых невырожденных слоев

Настоящий параграф посвящен изучению слоения Лиувилля эллиптических бильярдных произвольной размерности вблизи особых слоев. Наша цель — описать его полулокальное устройство в окрестности слоев, отвечающих невырожденным особенностям. Определение невырожденной особенности и невырожденного особого слоя приведено в пункте 4.2. Ответ мы будем искать в виде почти прямого произведения 2-атомов. Для этого, в пункте 4.1 мы напомним определение 2-атомов и приведем несколько примеров. Также в 4.1 приведена конструкция почти прямого произведения атомов.

В 4.3 будет найдена индуктивная связь между слоениями Лиувилля многомерных эллиптических бильярдных, на основе которой мы сформулируем окончательный ответ.

4.1. Два-атомы и их симметрии. Рассмотрим гладкую гамильтонову систему $v = \text{sgrad } H$ на двумерном симплектическом многообразии (M^2, ω) . Она является интегрируемой, поскольку функция H — первый интеграл. Регулярные слои слоения Лиувилля этой системы диффеоморфны окружности. Чтобы описать слоение на всем M^2 , необходимо знать его устройство вблизи слоев, содержащих особые точки.

Как правило, в задачах механики H является функцией Морса, т.е. гессиан d^2H задает невырожденную билинейную форму в каждой особой точке функции H . Пусть h — критическое значение для H . Предположим, что оно

является единственным на отрезке $[h - \varepsilon, h + \varepsilon]$. Связная компонента P^2 подмногообразия $H^{-1}([h - \varepsilon, h + \varepsilon])$, расслоенная на линии уровня функции H , называется *2-атомом*. Количество особых точек функции H , лежащих в P^2 , называется *сложностью 2-атома*. Все 2-атомы рассматриваются с точностью до послыйного гомеоморфизма (или диффеоморфизма в зависимости от рассматриваемой задачи).

Известно, что в особой точке x_0 функция Морса H приводится к виду $H = H(x_0) \pm x^2 \pm y^2$. Если оба знака в разложении совпадают, то x_0 является точкой минимума или максимума, а ее малая окрестность представляет собой диск, расслоенный окружностями — линиями уровня функции H . Эта расслоенная окрестность называется *2-атомом A* (см. рис. 4.1). В случае, когда точка x_0 седловая, атомов отвечающих ей бесконечно много. На рисунках 4.2, 4.3 представлены несколько таких атомов: B, C_2 . Отметим, что все они нарисованы центрально симметричными. На самом деле, центральная симметрия единственная нетривиальная инволюция атома B (с точностью до гомотопии), сохраняющая его ориентацию. В дальнейшем мы будем обозначать ее через α .

Список симметрий у C_2 гораздо богаче. Для того чтобы их увидеть, рассмотрим сферическую реализацию этого атома, представленную на рисунке 4.4. Видно две оси симметрии. Следовательно, повороты α и β относительно них, а также композиция этих преобразований являются нетривиальными инволюциями 2-атома C_2 . Оба поворота α и β — равнозначные преобразования. Мы будем называть их *вращательными симметриями*.

Опишем теперь конструкцию почти прямого произведения атомов, которая понадобится нам в дальнейшем. Рассмотрим набор седловых 2-атомов V_1, \dots, V_n со своими симплектическими структурами $\omega_1, \dots, \omega_n$ и функциями Морса f_1, \dots, f_n соответственно. Пусть на каждом атоме V_i действует одна и та же конечная группа G , причем каждое из этих действий φ_i сохраняет как симплектическую структуру ω_i , так и функцию f_i . Тогда на прямом произведении $V_1 \times \dots \times V_n$ определена симплектическая структура $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_n$, а также слоение Лиувилля, задаваемое функциями f_1, \dots, f_n (они, очевидно, коммутируют относительно формы ω). Пусть также действие группы G на $V_1 \times \dots \times V_n$, заданное формулой $\varphi(g)(x_1, \dots, x_n) = (\varphi_1(g)x_1, \dots, \varphi_n(g)x_n)$, свободно. Тогда фактор-многообразие $(V_1 \times \dots \times V_n)/G$ является $2n$ -мерной окрестностью связного особого слоя L с особыми точками ранга нуль. Такую особенность будем называть *особенностью типа почти прямого произведения* (или *просто почти прямым произведением*). При этом, будем говорить, что почти прямое произведение $(V_1 \times \dots \times V_n)/G$ *несократимо*, если каждый элемент группы G (кроме единицы) действует нетривиально не менее чем на двух сомножителях прямого произведения $V_1 \times \dots \times V_n$.

4.2. Невырожденные особенности. В случае гладких ИГС определение невырожденной особой точки дается в терминах картановских подалгебр. Напомним это определение для точек ранга 0 (в случае произвольного ранга см. книгу [5]).

Рассмотрим ИГС $v = \text{sgrad } H$ на симплектическом многообразии (M^{2n}, ω) с инволютивными независимыми первыми интегралами $F_0 = H, \dots, F_{n-1}$. Пусть

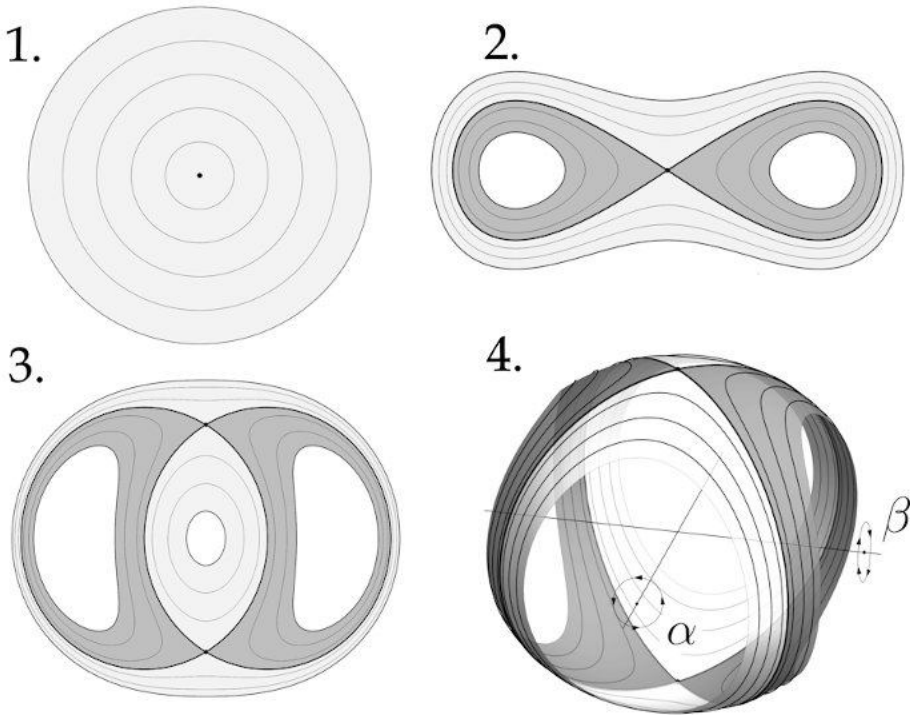


Рис. 4. Двумерные атомы и их расслоения линиями уровня функции Морса f : 1 – два-атом A ; 2 – два-атом B ; 3, 4 – два-атом C_2 в плоской и сферической реализациях. На рисунках 2–4 черной жирной линией выделен критический уровень $f = c$, светло-серым и темно-серым цветами – области $c < f \leq c + \varepsilon$ и $c - \varepsilon \leq f < c$ соответственно. Прямые на рисунке 4 – оси симметрии.

в точке x_0 дифференциалы функций F_i обнуляются. В таком случае линеаризации A_i векторных полей $\text{sgrad } F_i$ образуют коммутативную подалгебру $K(x, F)$ в $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$. Если эта подалгебра является картановской, то говорят, что точка x_0 является *невыврожденной*.

Чтобы описать устройство топологии слоения Лиувилля в окрестности невырожденной особой точки, необходимо знать, как устроена картановская подалгебра $K(x, F)$. Отметим, что в вещественной алгебре ли $\mathfrak{sp}(2(n - i), \mathbb{R})$ не все картановские подалгебры сопряжены (в отличие от комплексного случая). Полная классификация картановских подалгебр в $\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ была получена Вильямсоном в работе [44]. Чтобы сформулировать его теорему, рассмотрим $\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ как пространство однородных полиномов степени 2 в симплектическом пространстве \mathbb{R}^{2m} с канонической формой ω . Коммутатор в этой алгебре – скобка Пуассона квадратичных многочленов.

ТЕОРЕМА 2 (J. WILLIAMSON, [44]). Пусть $K \subset \mathfrak{sp}(2m, \mathbb{R})$ подалгебра Картана. Тогда существует симплектическая система координат x_1, \dots, x_m ,

y_1, \dots, y_m в \mathbb{R}^{2m} и базис e_1, \dots, e_m в K такие, что каждый из квадратичных полиномов e_i имеет один из следующих видов:

1. $e_i = x_i^2 + y_i^2$ (эллиптический тип),
2. $e_i = x_i y_i$ (гиперболический тип),
3. $e_i = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$, $e_{i+1} = x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1}$ (тип фокус-фокус).

Если все полиномы e_i имеют гиперболический тип, то говорят, что x_0 седловая точка. Слой слоения Лиувилля назовем невырожденным, если он целиком состоит из невырожденных точек.

Мы изучаем интегрируемую бильярдную систему, которая, вообще говоря, является лишь кусочно-гладкой. Поэтому мы снова вынуждены самостоятельно ввести определение невырожденного слоя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Рассмотрим слой слоения Лиувилля, отвечающий критическому набору (f_0, \dots, f_{n-1}) первых интегралов F_0, \dots, F_{n-1} . В таком случае либо $V(0) = 0$ и $V'(0) < 0$, либо многочлен $V(z)$ имеет кратный корень. Будем называть этот слой невырожденным, если кратность любого корня $V(z)$ не превосходит двух.

Определим теперь ранг невырожденного критического слоя в алгебраических терминах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Прибавим к количеству пар кратных корней единицу, если $V(0) = 0$ и $V'(0) < 0$. Полученное в результате число объявим рангом невырожденного особого слоя.

На самом деле, определения 5 и 6 хорошо согласованы с классическими, т.е. в терминах ранга отображения момента и картановских подалгебр. Проверка этого факта осуществляется по аналогии с доказательством предложения 6.

Остается описать типы особенностей рассматриваемой бильярдной системы. Пусть слой, отвечающий совместному уровню интегралов $F_0 = f_0, \dots, F_{n-1} = f_{n-1}$ является невырожденным критическим. В таком случае, кратные корни многочлена $V(z)$ являются либо точками минимума, либо максимума, т.к. их кратности согласно определению не превосходят трех. Если кратный корень является точкой максимума, то размерность соответствующей ОВД меньше n и при малом изменении параметров f_i слой слоения Лиувилля станет пустым. Следовательно, набор (f_0, \dots, f_n) лежит на границе образа отображения момента. Иными словами, этот кратный корень порождает особенность типа центр.

Если кратный корень отвечает максимуму V , то такая ситуация невозможна (т.е. слой не может исчезнуть при малом изменении f_i , оставляющем другие корни на месте). Остается заметить, что если $V(0) = 0$ и $V'(0) = 0$, то соответствующий набор f_i снова лежит на границе образа отображения момента. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Невырожденный особый слой слоения Лиувилля, отвечающий изоинтегральному уровню $F_0 = f_0, \dots, F_{n-1} = f_{n-1}$, будем называть седловым, если все кратные корни многочлена $V(z)$ являются точками локального минимума, при этом, если $V(0) = 0$, то $V'(0) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из рассуждений выше следует, что остальные невырожденные слои имеют тип $(m+l, l, m, 0)$: m раз центр, l раз седло, 0 раз фокус. Здесь l количество пар кратных корней $V(z)$, а число m равно разности ранга слоя и числа l .

Приведем несколько свойств седловых слоев рассматриваемых билиардов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $V(z)$ отвечает невырожденному седловому слою. Тогда если ξ — кратный корень $V(z)$, то $\xi = a_i$ для некоторого $i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из замечания 2.

Напомним, что в случае $k > 0$ через $\xi_1 \geq \dots \geq \xi_n$ мы обозначали «нетривиальные корни» многочлена $V(z)$. При $k = 0$ таких корней в точности $n - 1$: $\xi_1 \geq \dots \geq \xi_{n-1}$.

- ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. 1. При $k > 0$ минимальный ранг седлового слоя равен 1. Все такие слои определяются соотношениями $\xi_n < a_n, \xi_{n-1} = a_n, \dots, \xi_1 = a_2$.
2. При $k = 0$ минимальный ранг седлового слоя равен 1. Все такие слои определяются соотношениями $h > 0, \xi_1 = a_2, \dots, \xi_{n-1} = a_n$.
3. При $k < 0$ существует единственный седловой особый слой ранга 0. Он отвечает началу координат b задается уравнениями $\xi_i = a_i, i = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первый пункт. Все остальные разбираются по аналогии. В случае $k > 0$ при $z \rightarrow -\infty$ многочлен $V(z)$ стремится к $-\infty$. Поэтому чтобы слой был седловым необходимо существование корня $V(z)$ на интервале $(-\infty, a_n)$. Следовательно, в таком случае седлового слоя ранга 0 система иметь не может. При этом, если $z = a_1$ корень кратности 2, то поскольку все корни $V(z)$ сосредоточены на промежутке $(-\infty, a_1]$ и $k > 0$, $V(z) < 0$ при $z > a_1$, т.е. a_1 — точка минимума. Таким образом, минимальный ранг седлового слоя не меньше, чем 1, и все такие слои ранга 1 должны задаваться соотношениями $\xi_n < a_n, \xi_{n-1} = a_n, \dots, \xi_1 = a_2$. Легко проверить, что все такие слои непустые. Предложение доказано.

Проверим на примере согласованность введенного определения седлового слоя и классического. Для этого убедимся, что состояние равновесия в начале координат при $k < 0$ является седловой точкой ранга 0 для системы без отражения. То, что ранг системы дифференциалов dF_i в этой точке фазового многообразия равен нулю, легко проверяется с помощью предложения 6. Матрицы d^2F_i , вычисленные в декартовых координатах и сопряженных им импульсах в точке $(0, 0)$ являются диагональными и имеют следующий вид.

$$d^2F_i = \text{diag}\{k\sigma_1^i/2, \dots, k\sigma_n^i/2, \sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i\}$$

Рассмотрим матрицы операторов $A_i = \omega^{-1}d^2F_i$. Они порождают подалгебру $K(x, F)$ в $sp(2n, \mathbb{R})$. Нетрудно видеть, что все матрицы одновременно диагонализуются, а собственные значения A_i вещественные и равны $\pm\alpha\sigma_j^i$, где $\alpha = \sqrt{-k/2}$, $j = 0, \dots, n - 1$. Остается заметить, что с помощью линейной

комбинации матриц A_i можно реализовать любую матрицу, собственные значения которой равны $\pm c_1, \dots, \pm c_n$, где c_i — произвольные. Это следует из того, что все a_i различны, а следовательно, матрица из σ_j^i является невырожденной. Значит, подалгебра $K(x, F)$, действительно, является картановской, а особенность, отвечающая равновесию в нуле — невырожденной седловой ранга 0.

В следующем пункте мы опишем слоение Лиувилля вблизи невырожденных седловых слоев самого младшего ранга в притягивающем и отталкивающем случаях. Однако перед этим напомним важный результат Н. Т. Зунга о слоении Лиувилля вблизи седловых слоев (см. [13, 15]). Для краткости мы сформулируем его для седловых особенностей ранга нуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Рассмотрим связный особый слой L слоения Лиувилля с невырожденными седловыми особыми точками ранга нуль и его малую связную окрестность $U(L)$ в M^{2n} . Эта окрестность с соответствующим слоением Лиувилля на ней (рассматриваемым с точностью до послыоного диффеоморфизма) называется $2n$ -мерной *невырожденной седловой особенностью ранга нуль*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Будем говорить, что для невырожденной седловой $2n$ -мерной особенности $U(L)$ ранга нуль выполняется *условие нерасщепляемости по Зунгу*, если в некоторой окрестности критического значения $y_0 = \mathcal{F}(L)$ существует диффеоморфизм, приводящий бифуркационную диаграмму к набору из n гиперплоскостей общего положения, проходящих через точку y_0 .

ТЕОРЕМА 3 (Н. Т. ЗУНГ, [13]). *Любая нерасщепляемая по Зунгу невырожденная седловая особенность $U(L)$ ранга нуль является особенностью типа почти прямого произведения. Причем если почти прямое произведение $(V_1 \times \dots \times V_n)/G$ несократимо, то представление особенности $U(L)$ в виде почти прямого произведения единственно.*

4.3. Слоение Лиувилля вблизи невырожденных особых слоев билиардов с потенциалом Гука. На самом деле, нам достаточно получить ответ только для седловых слоев минимального ранга. Действительно, любой другой седловой слой получается из данного малым «шевелением»: некоторые корни $V(z)$ перестают быть кратными. А это значит, что слоение Лиувилля в малой окрестности любого седлового слоя получается ограничением слоения Лиувилля вблизи седлового слоя минимального ранга. Поэтому наша цель — доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. 1. *Пусть $k \geq 0$ и U — малая окрестность седлового слоя ранга 1 билиарда внутри n -осного эллипсоида с потенциалом Гука коэффициента k , тогда U послыоно гомеоморфна почти прямому произведению*

$$\frac{B \times \overbrace{C_2 \times \dots \times C_2}^{n-2}}{\mathbb{Z}_2(\tau_1) \times \dots \times \mathbb{Z}_2(\tau_{n-2})} \times \text{Cyl}^2,$$

где Cyl^2 — плоское кольцо, расслоенное концентрическими окружностями, и при всех $i = 1, \dots, n-2$ инволюция τ_i действует симметрией α на i -м сомножителе и β на $(i+1)$ -м.

2. Пусть $k < 0$ и U — малая окрестность седлового слоя ранга 0 бильярда внутри n -осного эллипсоида с потенциалом Гука коэффициента k , тогда U послойно гомеоморфна почти прямому произведению

$$\frac{B \times \overbrace{C_2 \times \cdots \times C_2}^{n-1}}{\mathbb{Z}_2(\tau_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}_2(\tau_{n-1})},$$

где при всех $i = 1, \dots, n-1$ инволюция τ_i действует симметрией α на i -м сомножителе и β на $(i+1)$ -м.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Напомним, что согласно определениям пункта 4.1 α действует на атоме B центральной симметрией. На C_2 инволюции α, β — вращательные симметрии.

Мы разобьем доказательство на несколько шагов — вспомогательных лемм, из которых будет следовать справедливость теоремы 4. Пусть сначала $k \neq 0$. Заметим, что переход от первых интегралов F_0, \dots, F_{n-1} к корням $\xi_1 \geq \dots \geq \xi_n$ многочлена $V(z)$ является взаимно однозначной непрерывной в обе стороны заменой. Поэтому далее вместо интегралов F_i мы будем использовать ξ_i . Обозначим через U_n и V_n малые окрестности седловых слоев ранга 1 и 0 эллиптических бильярдов с притягивающим и отталкивающим потенциалами Гука в \mathbb{R}^n соответственно. Согласно предложению 8 можем считать, что U_n задается системой ограничений $\xi_n \in [\xi_n^0 - \varepsilon_1, \xi_n^0 + \varepsilon_1], \xi_{n-1} \in [a_n - \varepsilon_2, a_n + \varepsilon_2], \dots, \xi_1 \in [a_2 - \varepsilon_n, a_2 + \varepsilon_n]$, а V_n — условиями $\xi_n \in [a_n - \varepsilon_1, a_n + \varepsilon_1], \xi_{n-1} \in [a_{n-1} - \varepsilon_2, a_{n-1} + \varepsilon_2], \dots, \xi_1 \in [a_1 - \varepsilon_n, a_1 + \varepsilon_n]$, где $\xi_n^0 < a_n$, и $\varepsilon_i > 0$ — достаточно малые числа.

ЛЕММА 4.1. Окрестности U_n и V_n с точностью до послойного гомеоморфизма не зависят от величин k, ε_i . При этом, U_n также не зависит от выбора седлового слоя ранга 1, т.е. ξ_n^0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся уравнениями движения 2.4. Их можно переписать следующим образом.

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i)} \sqrt{-\frac{k}{2} \prod_{j=1}^n (a_j - \lambda_i)(\xi_j - \lambda_i)} \quad (4.1)$$

Заметим, что при изменении величины k и фиксации ξ_i область возможного движения останется прежней, а длины всех векторов скорости изменятся на одну и ту же величину. Это изменение длин определяет гомеоморфизм между соответствующими слоениями Лиувилля (пара точка-вектор (x, v) переходит в пару $(x, \alpha v)$, где $\alpha > 0$ — постоянное число), а значит, U_n и V_n сохраняются с точностью до послойного гомеоморфизма.

Теперь покажем независимость от ε_i . Рассмотрим для примера окрестность V_n . Пусть \hat{V}_n задается величинами $\hat{\varepsilon}_1, \dots, \hat{\varepsilon}_n$. Совершим линейные преобразования l_i , переводящие точки $a_i \pm \varepsilon_{n+1-i}$ в $a_i \pm \hat{\varepsilon}_{n+1-i}$. Тогда декартово произведение l отображений l_i является гомеоморфизмом базы слоения Лиувилля окрестности V_n в базу слоения окрестности \hat{V}_n , при этом, $l_i(a_i) = a_i$ для любого $i = 1, \dots, n$ (т.е. критические наборы переходят в критические и наоборот).

Отображение l глобально поднимается до гомеоморфизма слоений на области возможного движения — ОВД (каждой точке базы слоения Лиувилля мы сопоставляем соответствующую ОВД). Действительно, ОВД задаются неравенствами на эллиптические координаты, причем соответствующие неравенства имеют одинаковый вид. Поэтому, в качестве гомеоморфизма областей возможного движения можно выбрать линейные растяжения соответствующих интервалов изменения эллиптических координат. Следовательно, гомеоморфизм баз мы подняли до послынного гомеоморфизма слоений на области возможного движения. Остается заметить, что с помощью формул 4.1 послынный гомеоморфизм областей возможного движения, поднимается до послынного гомеоморфизма слоений Лиувилля. Таким образом, независимость от ε_i мы доказали.

Остается показать, что U_n также не зависит от выбора седлового особого слоя ранга 1. Для этого мы можем применить метод из предыдущего абзаца. Однако может возникнуть сложность при построении гомеоморфизма слоений Лиувилля из послынного гомеоморфизма слоений на области возможного движения. Если $\xi_n^0 > 0$, то частица не доходит до границы стола, т.е. отражение не происходит, а при $\xi_n^0 < 0$ она может отразиться. Для того чтобы доказательство было корректным, необходимо отметить, что касание граничного эллипсоида и квадрики параметра ξ_n^0 равносильны с точки зрения топологии слоения Лиувилля. Действительно, при обоих преобразованиях все скорости λ_i кроме $i = n$ сохраняют свой знак, а λ_n изменит. Таким образом, Лемма 1 доказана.

Оказывается, слоения Лиувилля в окрестностях U_n и V_{n-1} связаны друг с другом. Это устанавливает следующая лемма.

ЛЕММА 4.2. *Для любого $n \geq 2$ окрестность U_n послынно гомеоморфна прямому произведению $V_{n-1} \times \text{Cyl}^2$, где Cyl^2 — плоское кольцо, расслоенное концентрическими окружностями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4.1 можем считать, что внутри U_n интеграл ξ_n больше нуля. В таком случае частица не доходит до границы стола, т.е. бильiardная система на U_n является гладкой. Для начала опишем идею доказательства леммы, а далее приступим к ее реализации. На первом этапе мы построим гладкую переменную действия s , корректно определенную в U_n . После чего, на втором шаге для каждого значения $\xi_n = \xi$ найдем подмногообразие $V_{n-1}^\xi \subset U_n$ размерности $2(n-1)$, диффеоморфное V_{n-1} , такое, что однопараметрическая подгруппа φ_t векторного поля $\text{sgrad } s$ при $t \in [0, 2\pi]$ пронесит V_{n-1}^ξ по всей изоинтегральной поверхности $\xi_n = \xi$. Более того, ограничения слоев слоения Лиувилля на V_{n-1}^ξ при однопараметрическом сдвиге будут замечать слои в окрестности U_n .

Шаг 1. С помощью предложения 6 нетрудно показать, что особые точки ранга 1 в U_n лежат на оси Ox_1 . На каждом седловом слое такие точки собраны в окружности, движение вдоль которых реализуют колебания по оси Ox_1 . Ясно, что все такие критические окружности гомологичны друг другу.

Напомним, что согласно предложению 7 на каждом торе Лиувилля T при $k > 0$ можно выбрать базисный цикл γ_T , обходящий каждую эллиптическую

координату дважды. Покажем, что циклы γ_T гомологичны критическим окружностям.

Частица, совершающая колебания вдоль оси Ox_1 , движется внутри эллипсоида параметра ξ_n , доходя до его границы. Следовательно, ее траектория отрезок $[-\sqrt{a_1 - \xi_n}, \sqrt{a_1 - \xi_n}]$. Однако заметим, что на отрезках $[-\sqrt{a_1 - \xi_n}, -\sqrt{a_1 - a_n}]$ и $[\sqrt{a_1 - a_n}, \sqrt{a_1 - \xi_n}]$ все эллиптические координаты кроме λ_n постоянны. Аналогично, на $[-\sqrt{a_1 - a_n}, -\sqrt{a_1 - a_{n-1}}]$ и $[\sqrt{a_1 - a_{n-1}}, \sqrt{a_1 - a_n}]$ непостоянна только λ_{n-1} и так далее. Таким образом, при движении вдоль Ox_1 каждая эллиптическая координата дважды переходит с минимального значения на максимальное и наоборот (см. рис. 5). Т.е. на критическом цикле каждая эллиптическая координата обходится дважды. Значит, все циклы γ_T гомологичны критической окружности (в частности, гомологичны друг другу).

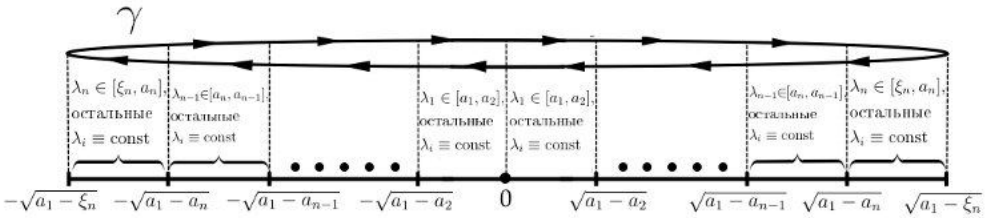


Рис. 5. Критический цикл γ , отвечающий движению материальной точки вдоль оси Ox_1 , обходит каждую эллиптическую координату в точности 4 раза.

В таком случае определим на торах Лиувилля внутри U_n функцию

$$s = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_T} \alpha,$$

где α — каноническая 1-форма на кокасательном расслоении к \mathbb{R}^n . Благодаря тому что все циклы γ_T гомологичны критической окружности, функция s корректно определена внутри U_n , более того, $\text{sgrad } s$ в U_n отличен от нуля. Тем не менее, этот факт можно доказать аналитически, используя комплексное интегрирование. С помощью формул 2.4 нетрудно показать, что

$$s = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_{\Gamma^+} \sqrt{-\frac{k(\xi_1 - z) \dots (\xi_n - z)}{(a_1 - z) \dots (a_n - z)}} dz,$$

где Γ^+ — дуга верхней полуокружности, соединяющей точки ξ_n и a_1 . Из последней формулы становится очевидным, что s определена не только на торах Лиувилля, но и в целой окрестности U_n . Другие свойства s также проверяются с помощью полученного уравнения.

Шаг 2. Обозначим, через φ_t однопараметрическую группу диффеоморфизмов, отвечающую векторному полю $\text{sgrad } s$. Т.к. s — переменная действия, $\varphi_0 = \varphi_{2\pi} = \text{id}$.

Пусть V — подмногообразие в U_n , определяемое условиями $x_1 = 0, \dot{x}_1 > 0$. Оно пересекает каждый тор Лиувилля T^n в U_n ровно по одному тору T^{n-1} .

Действительно, в доказательстве предложения 7 мы выяснили, что в случае притягивающего потенциала $N_1 = 1$, а это эквивалентно тому, что тор T^{n-1} в пересечении будет единственным. Более того, цикл γ_T дополняет любой базис в T^{n-1} до базиса в T^n .

Следовательно, отображение $\Phi(t, x) : S^1 \times T^{n-1} \rightarrow T^n$, действующее по формуле $\Phi(t, x) = \varphi_t(x)$ является диффеоморфизмом (в частности, гомеоморфизмом). Поскольку все эти рассуждения справедливы для любого тора T^n , глобальное отображение $\Phi : S^1 \times V \rightarrow U_n$ — тоже диффеоморфизм. При этом, если мы ограничим слоение Лиувилля на V и каждый слой прямо умножим на окружность, то отображение Φ будет послойным.

Отметим, что при каждом фиксированном ξ_n слоение на V будет одинаковым, поэтому U_n послойно гомеоморфна $\hat{V} \times \text{Cyl}^2$, где Cyl^2 — плоское кольцо, расслоенное концентрическими окружностями, а \hat{V} пересечение V и изоинтегральной поверхности $\xi_n = \xi_n^0$.

Остается описать слоение Лиувилля на \hat{V} . Для этого заметим, что в плоскости $x_1 = 0$ вырождается первая эллиптическая координата (она равна a_1). Поэтому для исследования слоения Лиувилля на V , обратимся к уравнениям на $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ из системы 4.1. Так как, $\lambda_i < a_1$ при $i > 1$, то множители вида $a_1 - \lambda_i$ не существенны, и мы можем избавиться от них. Топология слоения при таком переходе не изменится. Заметим, что множитель $\xi_n^0 - \lambda_i$ мы также можем убрать, поскольку $\xi_n^0 \leq \lambda_i$. Однако последнее неравенство может обратиться в равенство, если $i = n$. В таком случае частица должна коснуться эллипсоида параметра ξ_n^0 . Но касание и отражение, как уже отмечалось в лемме 4.1, с топологической точки зрения равнозначны. Поэтому мы привели систему уравнений 4.1 в \hat{V} к виду

$$\lambda_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i)} \sqrt{\frac{k}{2} (\xi_1 - \lambda_i)(a_n - \lambda_i) \prod_{j=2}^{n-1} (a_j - \lambda_i)(\xi_j - \lambda_i)},$$

где $\lambda_n \geq \xi_n^0$. Эта система определяет динамику материальной точки бильярда внутри эллипсоида в $\mathbb{R}^{n-1}(x_2, \dots, x_n)$, заданного уравнением $\frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1$, с отталкивающим потенциалом Гука. А поскольку мы изучаем случай, когда $\xi_{n-1} = a_n, \dots, \xi_1 = a_2$, то \hat{V} с точностью до послойного гомеоморфизма является малой окрестностью седлового слоя ранга 0 бильярда с отталкивающим потенциалом Гука внутри $(n-1)$ -осного эллипсоида. Следовательно, \hat{V} послойно гомеоморфна V_{n-1} . Таким образом, лемма 2 доказана.

Замечание 6. Поскольку цикл γ обходит каждую эллиптическую координату на торах Лиувилля дважды, то в силу симметрии эллипсоида и координат λ_i за время $t = \pi$ поток φ_t переводит любую пару точка-вектор в диаметрально противоположную, т.е. $\varphi_\pi(x, v) = (-x, -v)$.

Таким образом, мы фактически свели пункт 1 к пункту 2. Остается описать слоение Лиувилля внутри окрестностей V_n .

Лемма 4.3. *Окрестность V_1 послойно гомеоморфна 2-атому B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $n = 1$ движение материальной точки происходит внутри отрезка $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$. Если корень ξ многочлена V меньше a , то областью возможного движения являются два промежутка: $[-\sqrt{a}, -\sqrt{a-\xi}]$, $[\sqrt{a-\xi}, \sqrt{a}]$, каждому из которых в фазовом M^2 отвечает по одной окружности. При $\xi = a$ эти окружности склеиваются в точке, формируя восьмерку. А при $\xi > a$ получится в точности одна окружность. Таким образом, две окружности через восьмерку трансформируются в одну, а это и есть 2-атом B (см. рис. 4.2). Лемма доказана.

- ЛЕММА 4.4. 1. На V_n действует естественная инволюция τ_n центральной симметрии.
2. Для любого $n \geq 2$ окрестность V_n послойно гомеоморфна почти прямому произведению $(V_{n-1} \times C_2)/\mathbb{Z}_2(\tau_{n-1})$, где τ_{n-1} действует на C_2 вращательной симметрией.
3. Инволюция τ_n реализуется дополнительной вращательной симметрией на C_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый пункт леммы очевиден. Действительно, если пара точка-вектор (x, v) лежит на некотором слое слоения Лиувилля, то этому слою также принадлежит и пара $(-x, -v)$. Это следует из симметрии эллиптических координат. Докажем теперь второй пункт.

Обозначим через $W_n(\xi^0)$ ограничение окрестности V_n на изоинтегральный уровень $\xi_1 = \xi^0 \in [a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon]$. Опишем, как устроено слоение Лиувилля на $W_n(\xi^0)$ в зависимости от ξ^0 .

Пусть сначала $\xi^0 > a_1$. Тогда в формулах 4.1 под знаком корня множители вида $\xi_1 - \lambda_i$ можно исключить, заменив их на -1 . В таком случае топология слоения Лиувилля на $W_n(\xi^0)$ не изменится, а уравнения движения станут такими же как у бильярда с притягивающим потенциалом Гука. Следовательно, $W_n(\xi^0)$ послойно гомеоморфно прямому произведению V_{n-1} и окружности.

Пусть теперь $\xi^0 = a_1$. В этом случае у каждой точки плоскости $x_1 = 0$ количество векторов скорости уменьшится вдвое. Действительно, рассмотрим $W_n(a_1 + \varepsilon)$ и пару $(x, v) \in W_n(a_1 + \varepsilon)$ такую, что $x = (0, x_2, \dots, x_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$. При стремлении ε к нулю пара (x, v) будет приближаться к паре (x, v') , где $v' = (-v_1, v_2, \dots, v_n)$. Значит, $W_n(a_1)$ получается из $W_n(a_1 + \varepsilon)$ склейкой пар (x, v) и (x, v') . Найдем явный вид $W_n(a_1)$ через V_{n-1} .

Рассмотрим внутри $W_n(a + \varepsilon)$ подмножество V всех пар (x, v) таких, что $x_1 = 0$, $v_1 > 0$. Согласно доказательству леммы 4.2 это подмножество V послойно гомеоморфно V_{n-1} и при $t = \pi$ поток φ_t переводит V в центрально симметричное подмножество V' , которое также лежит в плоскости $x_1 = 0$, но с ограничением $v_1 < 0$. Однако при $\varepsilon = 0$ подмножества V и V' совпадают, т.е. V переходит в себя, т.к. в этом случае $v_1 = 0$ на плоскости $x_1 = 0$. Т.е. пара (x, v) , где $x = (0, x_2, \dots, x_n)$, $v = (0, v_2, \dots, v_n)$ перешла в пару $(-x, -v)$. Остается применить инволюцию центральной симметрии τ_{n-1} на V и тогда пара (x, v) перейдет в исходное положение. Поскольку при $\varepsilon > 0$ и $t \in [0, \pi]$ поток φ_t заполнял все $W_n(a + \varepsilon)$, лежащее в полупространстве $x_1 \geq 0$. То при $\varepsilon = 0$ в полупространстве $x_1 \geq 0$ слоение выглядит так. Мы должны умножить V_{n-1} на S^1 , а далее применить к этому произведению инволюцию, действующую центральной симметрией на S^1 и τ_{n-1} на V_{n-1} . Аналогичная ситуация

будет и в полупространстве $x_1 \leq 0$. Однако два таких комплекса имеют непустое пересечение по V_{n-1} . Таким образом, $W_n(a_n)$ послойно гомеоморфно двум комплексам $(V_{n-1} \times S^1)/\mathbb{Z}_2(\tau_{n-1})$, склеенным по V_n .

Если же $\xi^0 < a_1$, то комплексы $(V_{n-1} \times S^1)/\mathbb{Z}_2(\tau_{n-1})$, которые были склеены по V_{n-1} в $W_n(a_1)$, будут разделены. Таким образом, динамику относительно ξ_1 можно представить графически (см. рис. 6). Отсюда становится ясным, что V_n послойно гомеоморфно почти прямому произведению $(V_{n-1} \times C_2)/\mathbb{Z}_2(\tau_{n-1})$.

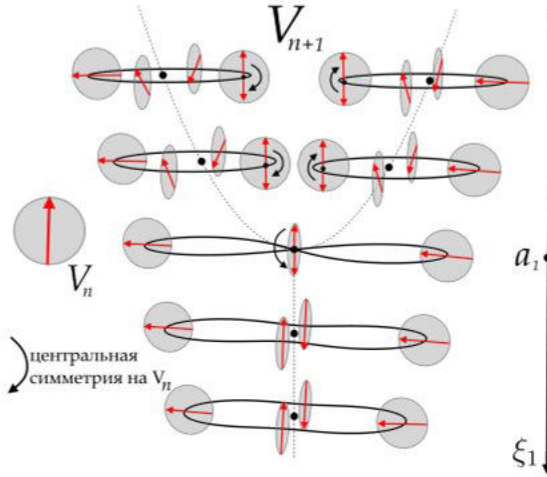


Рис. 6. Индуктивное топологическое выражение V_{n+1} через V_n .

Действительно, посмотрим, как действует вращательная симметрия на некритических уровнях C_2 . Она либо склеивает две окружности, либо действует центральной симметрией на паре окружностей. В первом случае при факторизации $(V_{n-1} \times C_2)/\mathbb{Z}_2(\tau_{n-1})$ из двух экземпляров V_{n-1} остается один, умноженный на окружность. Во втором случае будут два экземпляра $(V_{n-1} \times S^1)/\mathbb{Z}_2(\tau_{n-1})$. Если ограничить факторизацию на критический уровень C_2 в прямом произведении $V_{n-1} \times C_2$, то получим два экземпляра $(V_{n-1} \times S^1)/\mathbb{Z}_2(\tau_{n-1})$, склеенных по V_{n-1} . Таким образом, V_n , действительно, послойно гомеоморфно почти прямому произведению $(V_{n-1} \times C_2)/\mathbb{Z}_2(\tau_{n-1})$. А значит, второй пункт леммы доказан.

Остается описать устройство центральной симметрии на V_n . Для этого заметим, что на рисунке 6 появляется 2-атом B . Он получается так. Первый сомножитель в произведении $(V_{n-1} \times C_2)/\mathbb{Z}_2(\tau_{n-1})$ нужно стянуть в точку (действительно, $C_2/\mathbb{Z}_2(\tau_{n-1}) = B$). Отметим, что симметрия τ_n на V_n является центральной симметрией этого атома B . Однако, центральная симметрия на атоме B как раз реализуется дополнительной вращательной симметрией на C_2 . Следовательно, инволюция τ_n , действительно, образована дополнительной вращательной симметрией атома C_2 . Таким образом, лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Нетрудно показать, что естественная инволюция τ_1 на V_1 есть центральная симметрия атома B . Для этого достаточно проанализировать доказательство леммы 4.3.

Леммы 4.3, 4.4 и замечание 7 дают конструктивное доказательство второго пункта теоремы 4 по индукции.

Остается разобраться со случаем $k = 0$. В терминах первых интегралов $h, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ уравнение движения системы можно записать следующим образом.

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_i)} \sqrt{h(a_n - \lambda_i) \prod_{j=1}^{n-1} (a_j - \lambda_i)(\xi_j - \lambda_i)} \quad (4.2)$$

Однако при доказательстве леммы 4.2 мы заметили, что в системе уравнений бильярда с притягивающим потенциалом Гука вблизи седлового слоя минимального ранга множители $\xi_1 - \lambda_i$ можно убрать, заменив их на -1 и добавив ограничение $\lambda_n \geq \xi_1$. Такое преобразование не изменит топологии слоения Лиувилля. Более того, получившаяся система уравнений будет совпадать с системой 4.2 при каждом фиксированном h вблизи слоя $\xi_{n-1} = a_n, \dots, \xi_1 = a_2$. А значит, слоения вблизи седловых слоев ранга 1 бильярдов в случаях $k = 0$ и $k > 0$ совпадают. Таким образом, теорема 4 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Согласно результатам Н. Т. Зунга (см. [16]) минимальный ранг седлового слоя геодезического потока на поверхности эллипсоида в \mathbb{R}^n с различными полуосями равен одному. Более того, слоение Лиувилля вблизи такого слоя послойно гомеоморфно почти прямому произведению

$$\frac{\overbrace{C_2 \times \dots \times C_2}^{n-1}}{\mathbb{Z}_2(\tau_1) \times \dots \times \mathbb{Z}_2(\tau_{n-2})} \times \text{Cyl}^2,$$

где действие инволюций τ_i определяется точно так же как в теореме 4. Как известно, при стремлении меньшей полуоси эллипсоида к нулю геодезический поток на его поверхности перейдет в классическую бильярдную систему внутри эллипсоида меньшей размерности (см. рис. 7). При таком переходе точки эллипсоида, симметричные относительно плоскости $x_n = 0$, склеятся друг с другом. Эта склейка произойдет на уровне $\lambda_n = \text{const}$. Поэтому вполне естественно, что она должна привести к факторизации первого атома C_2 , ведь именно он отвечает бифуркации по эллиптической координате λ_n . Согласно теореме 4 эта факторизация, действительно, произошла и первый атом C_2 заменился на атом B .

Опишем теперь, что происходит в случае седлового слоя неминимального ранга. Какие-то из корней $V(z)$ перестанут быть кратными. Следовательно, некоторые из 2-атомов (присутствующие в формулировке теоремы 4) заменятся на расслоенные цилиндры — участки соответствующих атомов, лежащие выше или ниже критического слоя. При этом действия групп τ_n сохранятся. В результате вид особенности упростится, и в большей части случаев она распадается в прямое произведение более элементарных сомножителей.

Если же особенность не является седловой, то к сомножителям, перечисленным в предыдущем абзаце добавятся прямые произведения одного или нескольких 2-атомов A . Все дело в том, что неседловые слои отвечают таким

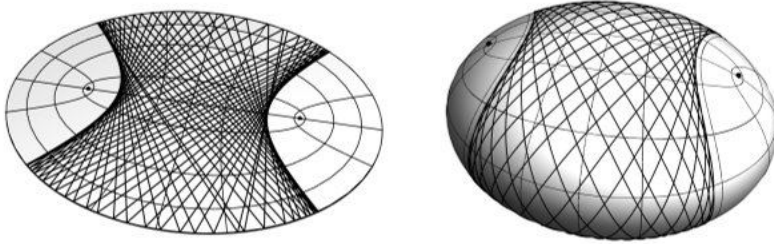


Рис. 7. Геодезический поток на поверхности n -осного эллипсоида при стремлении меньшей полуоси к нулю переходит в бильярдную систему внутри $(n - 1)$ -осного эллипсоида.

наборам значений интегралов F_i , что многочлен $V(z)$ имеет кратный корень, являющийся локальным максимумом. Такие корни отвечают стягиванию тора Лиувилля по образующей окружности, отвечающей некоторой эллиптической координате. Поэтому, сколько негомологических окружностей на торах исчезает, столько 2-атомов A в прямом произведении явного вида особенности возникает. Это число равно количеству кратных корней многочлена $V(z)$, являющихся точками его локального максимума.

§ 5. Неособые поверхности постоянной энергии

Пусть h — значение энергии, отвечающее непустой изоэнергетической поверхности Q_h^{2n-1} . Напомним, что корректно определено отображение канонической проекции $\pi : M^{2n} \rightarrow D$ фазового пространства системы на бильярдный стол D (бильярдную область). Оно переводит пару точка-вектор $(x, v) \in M^{2n}$ в точку x .

В предыдущих параграфах под областью возможного движения мы подразумевали образ проекции π слоя слоения Лиувилля. Однако для исследования топологического типа Q_h из всех интегралов нам нужна только полная механическая энергия. Поэтому далее под областью возможного движения D_h , отвечающей изоэнергетической поверхности Q_h , мы будем подразумевать множество $\pi(Q_h)$.

Теперь введем понятие неособого значения энергии, основываясь на геометрических соображениях. Будем говорить, что h — *небифуркационное значение энергии*, если в малой окрестности h топологический тип D_h остается неизменным. Чтобы найти все такие значения, определим топологический тип D_h в зависимости от величины энергии. Для этого заметим, что при $k \neq 0$ множество точек D_h , в которых скорость равна нулю, образуют сферу S_h с центром в нуле радиуса $\frac{2h}{k}$. Эту сферу мы будем называть *границкой*. В случае $k = 0$ область D_h совпадает с бильярдным столом, т.е. с D .

В случае $k > 0$ множество D_h получается пересечением бильярдной области D и внутренней части \mathbb{R}^n , отделяемой граничной сферой, т.е. пересечением двух выпуклых шаров. Поэтому если $h > 0$, то Q_h гомеоморфна замкнутому

n -мерному диску. При $h < 0$ поверхность Q_h пуста. Таким образом, в притягивающем случае единственным бифуркационным значением энергии является $h = 0$.

Если же $k < 0$, то внутренняя часть \mathbb{R}^n , отделяемая граничной сферой, заменится на внешнюю. Эта ситуация более сложная. Однако кажется вполне естественным, что если граничная сфера и граница бильярдной области не касаются друг друга, то при малом изменении радиуса сферы S_h множество D_h не изменит свой топологический тип. Далее мы покажем, что это, действительно, так. Поэтому нужно выяснить, при каких значениях h граничная сфера S_h касается эллипсоида \mathcal{E} — границы рассматриваемого бильярдного стола.

Если сфера $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 2h/k$ и эллипсоид $G(x_1, \dots, x_n) = x_1^2/a_1 + \dots + x_n^2/a_n = 1$ касаются друг друга в некоторой точке с координатами (x_1^0, \dots, x_n^0) , то в ней градиенты функций F и G должны быть линейно зависимы (т.к. они являются нормальными к касательным плоскостям), т.е. для некоторых одновременно ненулевых λ и μ имеем $\lambda x_i^0 = \mu x_i^0/a_i$ при всех i . Отсюда заключаем, что точка касания обязана быть вершиной одной из полуосей эллипсоида \mathcal{E} , а значит, $2h/k = 1/a_j$ для некоторого $j = 1, \dots, n$.

Однако существует еще одна возможность возникновения бифуркационного значения. При $h > 0$ радиус граничной сферы становится мнимым, т.е. сфера S_h «исчезает». Ясно, что D_h — замкнутый диск при $h > 0$ и сферический слой при $h < 0$. Значит, $h = 0$ — бифуркационное значение. Следовательно, в отталкивающем случае бифуркационными значениями являются $h = 0$, $h = \frac{ka_j}{2}$, где $j = 1, \dots, n$. Отметим, что при $h < \frac{ka_1}{2}$ граничная сфера лежит вне стола D , поэтому Q_h пуста.

Оказывается, поверхности постоянной энергии в небифуркационных случаях являются топологическими многообразиями, гомеоморфными прямым произведениям сфер. Более того, справедливо следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть h — небифуркационное значение энергии бильярда с потенциалом Гука коэффициента k внутри эллипсоида с квадратами полуосей $a_1 > \dots > a_n$, тогда

1. Если $k \geq 0$, то изоэнергетическая поверхность Q_h гомеоморфна сфере S^{2n-1} .
2. Если $k < 0$, то
 - $Q_h \cong S^{i-1} \times S^{2n-i}$ при $h \in \left(\frac{ka_i}{2}, \frac{ka_{i+1}}{2} \right)$ для любого $i = 1, \dots, n$, где $a_{n+1} = 0$;
 - $Q_h \cong S^{2n-1}$ при $h > 0$.

Мы докажем эту теорему цепочкой нескольких лемм. В первую очередь определим классы гомеоморфности областей возможного движения D_h для небифуркационных значений энергии.

ЛЕММА 5.1. Если h — значение энергии с непустой Q_h , то

1. При $h > 0$ и произвольном k множество D_h гомеоморфно n -мерному замкнутому диску D^n .

2. При $k < 0$ и $h \in \left(\frac{ka_i}{2}, \frac{ka_{i+1}}{2}\right)$, где $i = 1, \dots, n$, $a_{n+1} = 0$, множество D_h гомеоморфно прямому произведению $S^{i-1} \times D^{n-i+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый пункт леммы фактически доказан перед формулировкой теоремы 5. Менее тривиальным является второй пункт.

Область D_h задается двумя неравенствами: $x_1^2/a_1 + \dots + x_n^2/a_n \leq 1$, $x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 2h/k$. Значит, любой луч с центром в нуле пересекает D_h либо по отрезку, либо в одной точке, либо не пересекает вовсе. При этом, вершина отрезка, расположенная ближе к началу координат, будет лежать на граничной сфере S_h , а дальняя вершина — на эллипсоиде \mathcal{E} . Значит, границу множества D_h можно получить следующим образом. На эллипсоиде \mathcal{E} необходимо рассмотреть область K_h , задаваемую неравенством $x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 2h/k$, а затем склеить эту область с ее дублем по границе. Опишем устройство K_h в зависимости от h .

Если $h \in (ka_i/2, ka_{i+1}/2)$, то вершины полуосей с номерами $1, \dots, i$ будут лежать в K_h , в то время как остальные вершины не будут принадлежать этому множеству (нумерация полуосей по убыванию их длины). Значит, сечение эллипсоида \mathcal{E} плоскостью, натянутой на оси Ox_1, \dots, Ox_i , целиком лежит в K_h .

Пусть e_1, \dots, e_n — ортонормированный базис, отвечающий координатам x_1, \dots, x_n и $e \in \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$ — единичный вектор. Рассмотрим плоскость π_e , натянутую на e, e_{i+1}, \dots, e_n . Введем в ней соответствующие декартовы координаты (t, x_{i+1}, \dots, x_n) (см. рис. 8). Тогда в плоскости π_e эллипсоид \mathcal{E} задается уравнением

$$\frac{t^2}{a_e} + \frac{x_{i+1}^2}{a_{i+1}} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1,$$

где $a_e \geq a_i$. Поскольку $h \in (ka_i/2, ka_{i+1}/2)$, в пересечении K_h и π_e не лежит ни одна точка плоскости $t = 0$. Покажем, что K_h в полупространстве $t > 0$ плоскости π_e гомеоморфно замкнутому диску D^{n-i} . Действительно, имеем систему из трех соотношений

$$\begin{cases} \frac{t^2}{a_e} + \frac{x_{i+1}^2}{a_{i+1}} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n} = 1, \\ t^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 \geq \frac{2h}{k}, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Из первого и третьего условия можно однозначно выразить t через x_{i+1}, \dots, x_n . Подставим это выражение во второе соотношение системы выше. Получим

$$\left(\frac{a_e}{a_{i+1}} - 1\right)x_{i+1}^2 + \dots + \left(\frac{a_e}{a_n} - 1\right)x_n^2 \leq a_e - \frac{2h}{k}. \quad (5.1)$$

Все коэффициенты в последнем неравенстве положительны. Более того, если некоторый набор удовлетворяет этому неравенству, то t^2 , вычисленный из первого соотношения, будет положительным, а значит, t восстановится однозначно. Следовательно, K_h в полупространстве $t > 0$ плоскости π_e определяется неравенством 5.1, т.е. гомеоморфно замкнутому диску размерности $n - i$.

Отсюда автоматически следует, что K_h гомеоморфно прямому произведению $S^{i-1} \times D^{n-i}$. Действительно, каждой точке $P = (x_1, \dots, x_n)$ из K_h мы

ставим в соответствие пару (e, Q) , где e — нормированный вектор (x_1, \dots, x_i) , а $Q = (x_{i+1}, \dots, x_n)$ — точка диска D^{n-i} . При этом точку Q мы можем привести к каноническому виду, не зависящему от e . Для этого все координаты x_j точки Q нужно умножить на соответствующие коэффициенты $\alpha_j = \sqrt{\frac{a_e/a_j - 1}{a_e - 2h/k}}$. В таком случае диск D^{n-i} станет единичным. Отметим, что фактически мы построили непрерывное отображение $\varphi: K_h \rightarrow \mathbb{R}^n(y_1, \dots, y_n)$, которое гомеоморфно переводит K_h в подмножество \mathbb{R}^n , задаваемое соотношениями $y_1^2 + \dots + y_i^2 = 1$, $y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2 \leq 1$ (см. рис. 8).

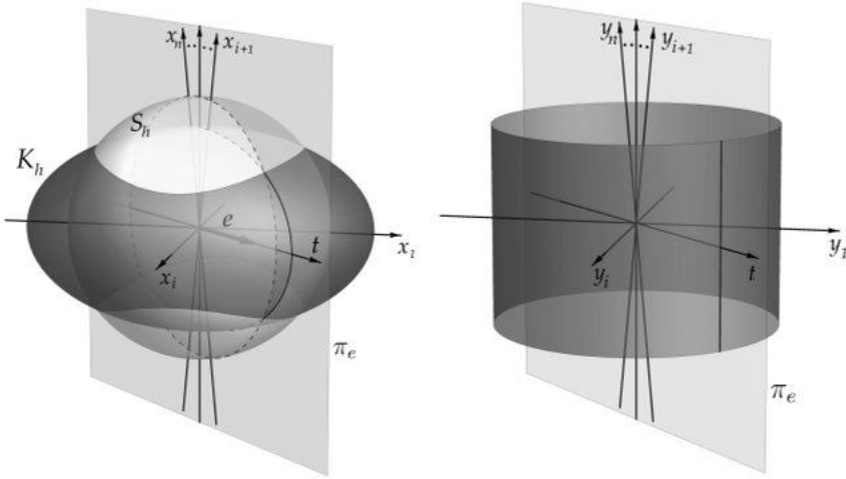


Рис. 8. Построение гомеоморфизма φ между множеством K_h и прямым произведением $S^{i-1} \times D^{n-1}$, выделенным справа темно-серым. Слева изображено множество K_h и его сечение плоскостью π_e . При гомеоморфизме φ оно переходит в подмножество плоскости π_e (отрезок на рисунке справа).

На самом деле отображение φ можно “подправить” и доопределить его на всем D_h так, чтобы D_h гомеоморфно переходило бы в прямое произведение $S^{i-1} \times D^{n-i+1}$ в \mathbb{R}^n . Опишем процедуру этих преобразований.

Корректировка φ . Рассмотрим точку $(e, Q) = \varphi(P)$, а также плоскость натянутую на вектор e и оси Oy_{i+1}, \dots, Oy_n . Пусть t , как и прежде — координата, отвечающая e . Тогда (e, Q) лежит в этой плоскости и ее координата t будет равна нулю. По построению Q находится в диске $y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2 \leq 1$. Гомеоморфно отобразим этот диск на полусферу $(t-2)^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2 = 1, t \geq 2$. Саму сферу мы обозначим \tilde{S}_P . Пара (e, Q) при таком преобразовании перейдет в точку, которую мы обозначим через $\tilde{\varphi}(P)$.

Доопределение $\tilde{\varphi}$ на D_h . Рассмотрим луч из начала координат к точке $P \in D_h$. Он пересекает множество D_h по отрезку $[P_1, P_2]$, где $P_1 \in S_h, P_2 \in K_h$. Переведем точку P_1 в точку на \tilde{S}_P , симметричную $\tilde{\varphi}(P_2)$ относительно плоскости $t = 0$. Объявим ее $\tilde{\varphi}(P_1)$. А теперь линейным образом отобразим отрезок $[P_1, P_2]$ в отрезок $[\tilde{\varphi}(P_1), \tilde{\varphi}(P_2)]$. Таким образом мы определили $\tilde{\varphi}$ на всем D_h .

Нетрудно показать, что отображение $\tilde{\varphi}$ непрерывное. Его биективность следует из построения. Ввиду компактности D_h заключаем, что $\tilde{\varphi}$ гомеоморфизм. А поскольку образ D_h заполняет все замкнутые шары, ограниченные сферами \tilde{S}_P , то $D_h \cong S^{i-1} \times D^{n+i-1}$. Таким образом, лемма полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Из леммы 5.1 сразу же следует, что в отталкивающем случае бифуркационными значениями функции H , действительно, являются $h = 0$, $h = ka_i/2$, где $i = 1, \dots, n$, и только они.

ЛЕММА 5.2. *Если h — небифуркационное значение энергии, то изоэнергетическая поверхность Q_h является компактным топологическим многообразием.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Компактность пространства Q_h следует из того, что оно получается факторизацией компактного подмножества в $T\mathbb{R}^n$. Хаусдорфовость Q_h очевидна. Остается показать, что каждая точка Q_h обладает малой окрестностью, гомеоморфной диску размерности $2n-1$. Рассмотрим пару $(P, v) \in Q_h$. Возможны два варианта: точка P лежит внутри множества D_h или на его границе.

В первом случае пара (P, v) вместе со своей малой окрестностью в Q_h принадлежит изоэнергетической поверхности \bar{Q}_h системы, аналогичной рассматриваемой, но без отражения. Поскольку \bar{Q}_h при $h \neq 0$ является квадрикой общего положения в $T\mathbb{R}^n$, то \bar{Q}_h топологическое многообразие. Значит, пара (P, v) , действительно, обладает окрестностью в Q_h , гомеоморфной $(2n-1)$ -мерному диску.

Если же точка P лежит на границе множества D_h , то согласно лемме 5.1, ее малая окрестность U гомеоморфна полупространству размерности n , т.е. $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. При этом множество $U' \times \{0\}$, отвечает границе D_h . Расслоим U лучами, стартующими с площадки U' . Опишем, как устроено ограничение Q_h на эти лучи.

Заметим, что все лучи стартуют либо из множества K_h , либо из сферы S_h . В первом случае ограничение Q_h на луч представляет собой стягивание сферы S^{i-1} к замкнутому диску такой же размерности (см. рис. 9), а во втором сферы S^{i-1} стягиваются в точку (см. рис. 9). Значит, ограничение Q_h на любой луч, трансверсальный к границе области D_h , гомеоморфен диску D^i . А поскольку, площадка U' гомеоморфна диску размерности $n-1$, получаем, что окрестность $\pi^{-1}(U) \cap Q_h$ пары (P, v) гомеоморфна диску D^{2n-1} . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Метод расслоения бильярдного стола на отрезки с последующим изучением ограничения Q^3 на них неоднократно применялся в работах В. В. Ведошкиной (см., например, [45]). Отметим, что в статье [46] И. С. Харчева доказала аналог леммы 5.2 для бильярдных книжек.

При построении гомеоморфизма изоэнергетических поверхностей бильярдных в диффеоморфных областях D_1 и D_2 всегда возникает трудность, связанная с отражением. Дифференциал диффеоморфизма $\varphi : D_1 \rightarrow D_2$, вообще говоря, не обязан переводить падающий и отраженный векторы к границе D_1 соответственно в падающий и отраженный к границе D_2 . Поэтому $d\varphi$ всегда

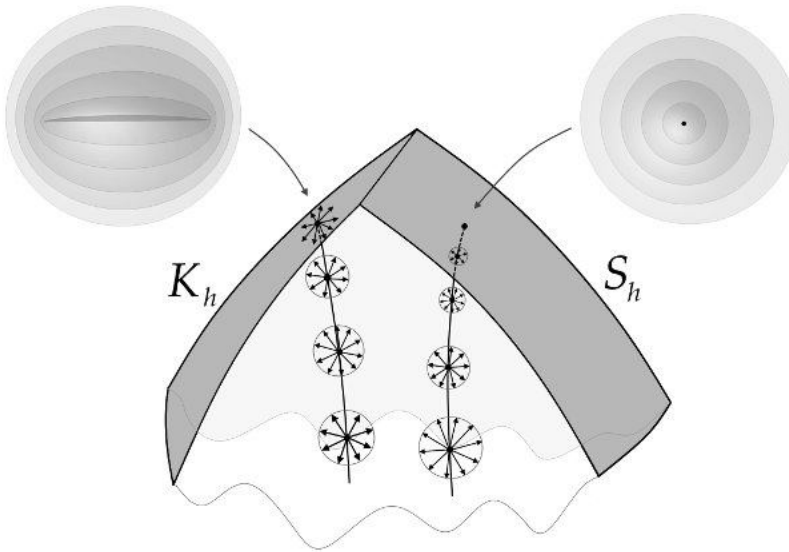


Рис. 9. Ограничение изоэнергетической поверхности Q_h на лучи, трансверсальные к границе области возможного движения D_h . Все такие ограничения гомеоморфны диску D^n .

приходится «подкручивать» рядом с границами билиардных областей. Это реализуется довольно трудно для произвольных D_1 и D_2 . Однако в следующей лемме, мы покажем, как можно достаточно быстро решить эту проблему. Оказывается, Q_h можно изменить так, что на границе D_h все допустимые вектора скорости станут нулевыми, а каждой внутренней точке этого множества будет отвечать стандартная сфера S^{n-1} , составленная из векторов скорости. При этом топологический тип Q_h остается прежним. Иными словами, от отражения в системе можно избавиться.

ЛЕММА 5.3 (ОБ УСТРАНЕНИИ ОТРАЖЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ). *Существует такая непрерывная функция $\tilde{V} : D \rightarrow \mathbb{R}$, что*

- область возможного движения $\tilde{D}_{\tilde{V}}$ системы с потенциальной энергией \tilde{V} совпадает с множеством D_h ;
- кинетическая энергия на границе D_h равна нулю, а внутри D_h больше нуля;
- поверхности Q_h и $\tilde{Q}_{\tilde{V}}$ гомеоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D^i — замкнутый диск размерности $i < k$, лежащий в топологическом многообразии X^k . Тогда пространство X_*^k , полученное из X^k стягиванием диска D^i к диску D^j , вложенного в D^i , будет топологическим многообразием, гомеоморфным X^k . Иллюстрация этого факта изображена на рисунке 10. Воспользуемся этим соображением.

Триангулируем границу множества D_h так, чтобы все открытые симплексы триангуляции (далее грани) целиком лежали либо в S_h , либо в K_h , либо только на пересечении K_h и S_h . Рассмотрим вершины триангуляции. Им в Q_h отвечает замкнутый диск размерности $n - 1$ или нулевой вектор скорости. В первом

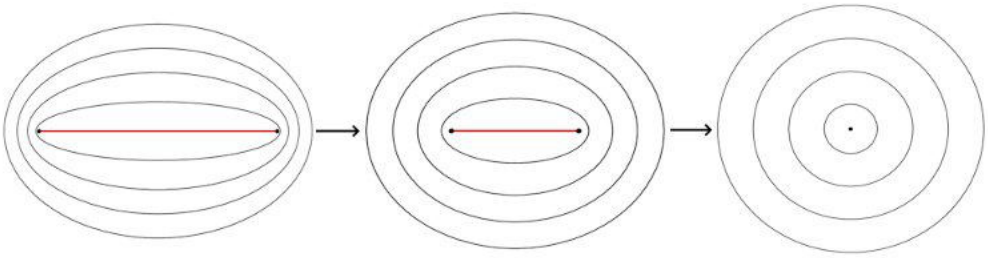


Рис. 10. Иллюстрация того, что стягивание замкнутого диска D^i в многообразии X^k (предполагается, что $i < k$) к диску меньшей размерности не меняет топологический тип самого многообразия.

случае стянем этот диск в точку, а во втором оставим все без изменения. От Q_h мы перейдем к новому топологическому многообразию Q'_h . Согласно рассуждениям выше Q_h и Q'_h гомеоморфны. Осталось понять, как Q'_h можно реализовать. Мы можем это сделать, изменив в малых окрестностях вершин потенциальную энергию V так, чтобы в них V стала бы принимать значение h , т.е. добавим на линию уровня $V = h$ вершины триангуляции.

Теперь перейдем к ребрам триангуляции. Поступим аналогично. Каждой точке ребра в Q_h отвечает либо диск размерности $n - 1$ из касательных направлений (если ребро лежит строго в K_h), либо в точности один нулевой вектор скорости (если ребро попало в S_h). Поскольку в каждой вершине триангуляции расположен только нулевой вектор скорости, на замыкании ребра в Q_h получаем диск размерности 1 либо n . Во втором случае стянем диск в отрезок. Топологический тип Q_h снова не изменится. А результат такого стягивания можно получить последовательным изменением функции V в окрестностях все ребер так, что в итоге на линию уровня $V = h$ попадут все ребра триангуляции.

Продолжим этот процесс индукцией по размерности граней триангуляции. Шаг индукции фактически описан нами в предыдущем абзаце. В итоге получим, что Q_h гомеоморфна поверхности постоянной энергии \tilde{Q}_h системы с потенциальной энергией \tilde{V} обладающей следующими свойствами: $\tilde{V} \leq h$ только на множестве D_h ; граница D_h задается уравнением $\tilde{V} = h$, т.е. в каждой граничной точке D_h расположен нулевой вектор скорости, а во внутренних точках D_h — сфера S^{n-1} , составленная из касательных векторов. Таким образом, лемма доказана.

Отметим, что лемма 5.3 как и многие другие рассуждения в этом параграфе работают в случае произвольного бильярда и потенциала, иными словами процедуру устранения отражения можно применять при исследовании топологического типа изоэнергетической поверхности, вообще говоря, любого бильярда.

ЛЕММА 5.4. Пусть $h > 0$, а $k \in \mathbb{R}$ — произвольное, тогда изоэнергетическая поверхность Q_h гомеоморфна сфере S^{2n-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 5.1 при $h > 0$ множество $D_h \subset \mathbb{R}^n$ гомеоморфно замкнутому единичному диску D^n . Пусть отображение $f : D_h \mapsto D^n$

реализует этот гомеоморфизм. По лемме 5.3 рассматриваемую билиардную систему можно модифицировать, заменив потенциал V на новую функцию \tilde{V} такую, что $\tilde{V} \leq h$ на множестве D_h , $\tilde{V} = h$ на границе D_h и изоэнергетическая поверхность \tilde{Q}_h измененной системы гомеоморфна Q_h .

Определим отображение $F: \tilde{Q}_h \rightarrow T\mathbb{R}^n$ по формуле $F(P, v) = (f(P), v)$, т.е. точку отображаем, а вектор скорости переносим параллельно. Ясно, что такое отображение является гомеоморфизмом на образ, поскольку F непрерывно и инъективно, а \tilde{Q}_h компактно по лемме 5.2. Опишем теперь образ отображения F .

В каждой внутренней точке диска D^n расположена сфера из касательных векторов одной длины. На границе D^n в каждой точке имеем по одному нулевому вектору скорости. Перенормируем векторы скоростей во внутренних точка диска. Для этого каждый вектор разделим на его длину и умножим на величину $\sqrt{1-r^2}$, где r — расстояние от центра диска D^n до точки, в которой рассматривается касательный вектор. В таком случае возникает гомеоморфизм множества $F(\tilde{Q}_h)$ с подмножеством $T\mathbb{R}^n$, задаваемым уравнением

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + \dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2 = 1.$$

Последнее уравнение определяет стандартную сферу S^{2n-1} в $T\mathbb{R}^n$. Следовательно, мы построили следующую цепочку гомеоморфизмов.

$$Q_h \cong \tilde{Q}_h \cong F(\tilde{Q}_h) \cong S^{2n-1}$$

Таким образом, лемма доказана.

Остается последний шаг.

ЛЕММА 5.5. Пусть $k < 0$, тогда для любого $h \in \left(\frac{ka_i}{2}, \frac{ka_{i+1}}{2}\right)$, где $i = 1, \dots, n$ и $a_{n+1} = 0$, поверхность Q_h гомеоморфна прямому произведению $S^{i-1} \times S^{2n-i}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем по аналогии с леммой 5.4. А именно, перейдем к обновленной системе с изоэнергетической поверхностью \tilde{Q}_h из леммы 5.3, рассмотрим гомеоморфизм $\tilde{\varphi}$, построенный в лемме 5.1 и определим отображение $F: \tilde{Q}_h \mapsto T\mathbb{R}^n$ по формуле $F(P, v) = (\tilde{\varphi}(P), v)$. Остается правильным образом перенормировать векторы скоростей.

Для этого рассмотрим произвольный единичный вектор e из леммы 4.1. Тогда в полуплоскости $\pi_e, t > 0$ множество $\tilde{\varphi}(D_h)$ задается неравенством $(t-2)^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2 \leq 1$, т.е. является шаром, ограниченным сферой \tilde{S}_P . Изменим длины касательных векторов из $F(\tilde{Q}_h)$ во внутренних точках этого шара так, чтобы длина касательного вектора была равна $\sqrt{1-r^2}$, где r расстояние от центра сферы \tilde{S}_P до точки, в которой рассматривается касательный вектор. Получаем гомеоморфизм множества $F(\tilde{Q}_h)$. Опишем его образ. В каждой полуплоскости $\pi_e, t > 0$ этот образ описывается уравнением

$$(t-2)^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2 + \dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2 = 1,$$

т.е. является стандартной сферой S^{2n-i} . А поскольку все единичные векторы e заметают сферу S^{i-1} , получаем, что $Q_h \cong S^{2n-i} \times S^{i-1}$. Лемма доказана.

Таким образом, теорема 5 полностью доказана. Как уже неоднократно отмечалось выше, с помощью техник, описанных в этом параграфе, можно достаточно просто найти топологический тип поверхности постоянной энергии любого бильярда с произвольным потенциалом. В частности, из лемм 5.1 – 5.4 можно сделать следующий вывод об Q_h классического бильярда в диске (т.е. системы в отсутствие внешних сил).

Список литературы

- [1] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, *Функц. анализ и его прил.*, **22:4** (1988), 38–51; *Funct. Anal. Appl.*, **22:4** (1988), 286–296.
- [2] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **52:2** (1988), 378–407; *Math. USSR-Izv.*, **32:2** (1989), 385–412.
- [3] А. Т. Фоменко, “Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем”, *УМН*, **44:1(265)** (1989), 145–173; *Russian Math. Surveys*, **44:1** (1989), 181–219.
- [4] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности”, *УМН*, **45:2(272)** (1990), 49–77; *Russian Math. Surveys*, **45:2** (1990), 59–94.
- [5] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация, т. 1, 2*, издательский дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.
- [6] А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54:3** (1990), 546–575; *Math. USSR-Izv.*, **36:3** (1991), 567–596.
- [7] А. В. Болсинов, В. С. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия”, *Матем. сб.*, **189:10** (1998), 5–32; A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, A. T. Fomenko, “Two-dimensional Riemannian metrics with integrable geodesic flows. Local and global geometry”, *Sb. Math.*, **189:10** (1998), 1441–1466.
- [8] E. N. Selivanova, “Classification of geodesic flows of Liouville metrics on the two-dimensional torus up to topological equivalence”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **75:2** (1993), 491–505.
- [9] В. В. Калашников, “Топологическая классификация квадратично-интегрируемых геодезических потоков на двумерном торе”, *УМН*, **50:1(301)** (1995), 201–202; *Russian Math. Surveys*, **50:1** (1995), 200–201.
- [10] А. А. Ошемков, “Fomenko invariants for the main integrable cases of rigid body motion equations”, *Adv. in Sov. Math.*, № 6, 67–146.
- [11] П. В. Морозов, “Лиувиллева классификация интегрируемых систем случая Клебша”, *Матем. сб.*, **193:10** (2002), 113–138; P. V. Morozov, “The Liouville classification of integrable systems of the Clebsch case”, *Sb. Math.*, **193:10** (2002), 1507–1533.
- [12] И. К. Козлов, “Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ ”, *Матем. сб.*, **205:4** (2014), 79–120; I. K. Kozlov, “The topology of the Liouville foliation for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $so(4)$ ”, *Sb. Math.*, **205:4** (2014), 532–572.
- [13] T. Z. Nguen, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I: Arnold-Liouville with singularities”, *Compositio Mathematica*, **101** (1996), 179–215.

- [14] T. Z. Nguen, “Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems. II. Topological classification”, *Compositio Mathematica*, **138** (2003), 125–156.
- [15] T. Z. Nguen, *Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems*, *Letters in Mathematical Physics*, **33** (1995), 187–193.
- [16] T. Z. Nguen, “Singularities of integrable geodesic flows on multidimensional torus and sphere”, *Journal of Geometry and Physics*, 1996.
- [17] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999.
- [18] С. В. Болотин, “Интегрируемые бильярды Биркгофа”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1990, № 2, 33–36.
- [19] V. Dragović, M. Radnović, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **14**:4-5 (2009), 479–494.
- [20] В. Драгович, М. Раднович, *Интегрируемые бильярды, квадратики и многомерные поризмы Понселе*, Регулярная и хаотическая динамика, М.–Ижевск, 2010.
- [21] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2014, № 4, 18–27; *Moscow University Mathematics Bulletin*, **69**:4 (2014), 148–158.
- [22] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **209**:12 (2018), 17–56; V. V. Vedyushkina, I. S. Kharcheva, “Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems”, *Sb. Math.*, **209**:12 (2018), 1690–1727.
- [23] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, “Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **212**:8 (2021), 89–150; V. V. Vedyushkina, I. S. Kharcheva, “Billiard books realize all bases of Liouville foliations of integrable Hamiltonian systems”, *Sb. Math.*, **212**:8 (2021), 1122–1179.
- [24] И. Ф. Кобцев, “Геодезический поток двумерного эллипсоида в поле упругой силы: топологическая классификация решений”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2018, № 2, 27–33; *Moscow University Mathematics Bulletin*, **73**:2 (2018), 64–70.
- [25] С. Е. Пустовойтов, “Топологический анализ бильярда, ограниченного софокусными квадратами, в потенциальном поле”, *Матем. сб.*, **212**:2 (2021), 81–105; S. E. Pustovoytov, “Topological analysis of a billiard bounded by confocal quadrics in a potential field”, *Sb. Math.*, **212**:2 (2021), 211–233.
- [26] В. В. Ведюшкина, В. Н. Завьялов, “Реализация геодезических потоков с линейным интегралом бильярдами с проскальзыванием”, *Матем. сб.*, **213**:12 (2022), 31–52; V. V. Vedyushkina, V. N. Zav’yalov, “Realization of geodesic flows with a linear first integral by billiards with slipping”, *Sb. Math.*, **213**:12 (2022), 1645–1664.
- [27] В. Н. Завьялов, “Бильярд с проскальзыванием на любой рациональный угол”, *Матем. сб.*, **214**:9 (2023), 3–26; V. N. Zav’yalov, “Billiard with slipping by an arbitrary rational angle”, *Sb. Math.*, **214**:9 (2023), 1191–1211.
- [28] В. Н. Завьялов, “Бильярд с переменным проскальзыванием”, *Матем. сб.*, **216**:9 (2025), 42–68; V. N. Zav’yalov, “Billiard with variable slipping”, *Sb. Math.*, **216**:9 (2025), 1231–1254.
- [29] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, “Силовые эволюционные бильярды и бильярдная эквивалентность случая Эйлера и случая Лагранжа”, *Докл. РАН. Матем., информ., прогн. упр.*, **496** (2021), 5–9; *Dokl. Math.*, **103**:1 (2021), 1–4.
- [30] А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, “Эволюционные силовые бильярды”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **86**:5 (2022), 116–156; *Izv. Math.*, **86**:5 (2022), 943–979.
- [31] Г. В. Белозеров, “Топологическая классификация интегрируемых геодезических бильярдов на квадратах в трехмерном евклидовом пространстве”, *Матем. сб.*,

- 211:11 (2020), 3–40; G. V. Belozеров, “Topological classification of integrable geodesic billiards on quadrics in three-dimensional Euclidean space”, *Sb. Math.*, **211:11** (2020), 1503–1538.
- [32] Ю. Н. Федоров, “Эллипсоидальный бильярд с квадратичным потенциалом”, *Функц. анализ и его прил.*, **35:3** (2001), 48–59; *Funct. Anal. Appl.*, **35:3** (2001), 199–208.
- [33] В. В. Козлов, “Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде”, *Прикл. матем. и мех.*, **59:1** (1995), 3–9.
- [34] М. П. Харламов, “Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам”, *Нелинейная динам.*, **6:4** (2010), 769–805.
- [35] М. П. Харламов, “Топологический анализ и булевы функции: II. Приложения к новым алгебраическим решениям”, *Нелинейная динам.*, **7:1** (2011), 25–51.
- [36] И. Ф. Кобцев, “Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ”, *Матем. сб.*, **211:7** (2020), 93–120; I. F. Kobtsev, “An elliptic billiard in a potential force field: classification of motions, topological analysis”, *Sb. Math.*, **211:7** (2020), 987–1013.
- [37] С. Е. Пустовойтов, “Топологический анализ бильярда в эллиптическом кольце в потенциальном поле”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **22:6** (2019), 201–225; *J. Math. Sci.*, **259:5** (2021), 712–729.
- [38] A. T. Fomenko, V. A. Kibkalo, “Saddle Singularities in Integrable Hamiltonian Systems: Examples and Algorithms”, *Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics, Understanding Complex Systems*, ред. V. A. Sadovnichiy, M. Z. Zgurovsky, Springer, Cham, 2021, 1–24.
- [39] G. V. Belozеров, “Non-degenerate singularities of a three-dimensional billiard bounded by an ellipsoid in a Hooke potential field”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **46:3** (2025), 983–1000.
- [40] E. Gutkin, “Billiard Dynamics: a Survey with the Emphasis on Open Problems on Billiards”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **8:1** (2003), 1–13.
- [41] Г. В. Белозеров, “Топология изоэнергетических 5-поверхностей трехмерного бильярда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2022, № 6, 21–31; *Moscow University Mathematics Bulletin*, **77:6** (2022), 277–289.
- [42] К. Якоби, *Лекции по динамике*, ОНТИ, М. Л., 1936.
- [43] Г. В. Белозеров, “Геодезический поток на пересечении нескольких софокусных квадрик в \mathbb{R}^n ”, *Матем. сб.*, **214:7** (2023), 3–26; G. V. Belozеров, “Geodesic flow on an intersection of several confocal quadrics in \mathbb{R}^n ”, *Sb. Math.*, **214:7** (2023), 897–918.
- [44] J. Williamson, “On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems”, *Amer. J. Math.*, **58:1** (1936), 141–163.
- [45] В. В. Ведюшкина, “Топологический тип изоэнергетических поверхностей бильярдных книжек”, *Матем. сб.*, **212:12** (2021), 3–19; V. V. Vedyushkina, “Topological type of isoenergy surfaces of billiard books”, *Sb. Math.*, **212:12** (2021), 1660–1674.
- [46] И. С. Харчева, “Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2020, № 4, 12–22; *Moscow University Mathematics Bulletin*, **75:4** (2020), 149–160.

Г. В. Белозеров (G. V. Belozеров)

Московский государственный университет имени

М. В. Ломоносова

E-mail: gleb0511beloz@yandex.ru

Поступила в редакцию

30.11.2025