МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА, АЛГЕБРЫ, ГЕОМЕТРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ВЫПУСК 12

*Материалы VI международной молодежной научной школы
«Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы»*

ВОРОНЕЖ
2022

УДК 51: 373
ББК 22: 74
Н47

Н47 **Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования** : материалы VI международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы». Вып. 12 / отв. за выпуск Г.Г. Петросян; редкол.: В.В. Обуховский (глав. ред.) [и др.]. – Воронеж : Воронежский государственный педагогический университет, 2022. – 194 с.

ISSN 2411-1929

Научное издание включено в Российский индекс научного цитирования (РИНЦ). В издании представлены материалы докладов, включенных в программу VI международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы». Тематика охватывает большой круг проблем современного анализа, теории дифференциальных уравнений и включений, алгебры, геометрии и других смежных областей, а также проблем преподавания математики в школе и высших учебных заведениях.

УДК 51: 373
ББК 22: 74

****

Научное издание

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА,
АЛГЕБРЫ, ГЕОМЕТРИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБРАЗОВАНИЯ**

ВЫПУСК 12

*Материалы VI международной молодежной научной школы
«Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы»*

В авторской редакции
Подписано в печать 30.10.22. Формат 60x841/16. Бумага офсетная.
Печать трафаретная. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 12.
Уч.-изд. л. 11,16. Заказ 176. Тираж 200 экз. (1 завод 1-35 экз.)
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Воронежский государственный педагогический университет».
Отпечатано с готового оригинала-макета в издательско-полиграфическом центре ВГПУ.
394043, г. Воронеж, ул. Ленина, 86. Тел. (473) 255-58-32, 255-61-83.

VI-я международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы»

Организатор: ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет»
Председатель организационного комитета: академик А.Т. Фоменко (Москва)
Сопредседатель: профессор С.И. Филоненко, ректор ВГПУ
Заместитель председателя организационного комитета: профессор С.В. Корнев, проректор по научной работе ВГПУ

Члены организационного комитета:

ст. преподаватель С.Н. Афонина (Воронеж)
аспирант Е.Н. Гетманова (Воронеж)
ст. преподаватель И.А. Губанова (Воронеж)
доцент А.Н. Дорохов (Воронеж)
доцент М.Б. Зверева (Воронеж)
профессор М.И. Каменский (Воронеж)
профессор Костин Д.В. (Воронеж)
доцент М.М. Кулманакова (Воронеж)
доцент В.В. Малев (Воронеж)
ст. преподаватель А.Н. Овсянникова (Воронеж)
доцент Г.Г. Петросян (Воронеж) (Ученый секретарь оргкомитета)
доцент С.В. Писарева (Воронеж)
доцент И.Ю. Покорная (Воронеж)
аспирант Е.Н. Ряполова (Воронеж)
профессор Е.М. Семенов (Воронеж)
доцент М.С. Сорока (Воронеж)
доцент С.А. Титоренко (Воронеж)
доцент Е.Л. Ульянова (Воронеж)
ассистент А.В. Уроженко (Воронеж)
доцент А.И. Фурменко (Воронеж)

Программный комитет:
Председатель: профессор В.В. Обуховский, заведующий кафедрой высшей математики ВГПУ
Члены программного комитета:

профессор А.В. Арутюнов (Москва)
профессор А.Г. Баскаков (Воронеж)
профессор Л.А. Бекларян (Москва)
профессор Б.Д. Гельман (Воронеж)
профессор Ю.Е. Гликлих (Воронеж)
профессор А.В. Глушко (Воронеж)
профессор Е.С. Жуковский (Тамбов)
профессор С.Е. Жуковский (Москва)
профессор В.Г. Задорожний (Воронеж)
профессор М.И. Каменский (Воронеж)
профессор А.М. Красносельский (Москва)
профессор В.А. Костин (Воронеж)
академик РАН Н.Ю. Лукоянов (Екатеринбург)
профессор А.Х. Назиев (Рязань)
профессор А.И. Перов (Воронеж)
профессор Н.Н. Петров (Ижевск)
профессор Л.И. Родина (Владимир)
профессор Е.М. Семенов (Воронеж)
профессор В.М. Тихомиров (Москва)
член-корреспондент РАН А.А. Толстоногов (Иркутск)
профессор И.А. Финогенко (Иркутск)
профессор Т.Н. Фоменко (Москва)
член-корреспондент РАН А.Г. Ченцов (Екатеринбург)
профессор I. Benedetti (Modena, Italy)
профессор M. Ilolov (Dushanbe, Tajikistan)
профессор Z. Liu (Nanning, P.R. China)
профессор N.V. Loi (Ha Noi, Viet Nam)
профессор L. Malaguti (Modena, Italy)
профессор P. Nistri (Firenze, Italy)
профессор D. Rachinskii (Dallas, USA)
профессор P. Raynaud de Fitte (Rouen, France)
профессор J.-C. Yao (Kaohsiung, Taiwan)
профессор P. Zecca (Firenze, Italy)

УДК 517.938.5

ИССЛЕДОВАНИЕ ПСЕВДО-ЕВКЛИДОВОЙ СИСТЕМЫ ЖУКОВСКОГО [1]

Агуреева Е. С.
МГУ имени М.В.Ломоносова
agureevamath@yandex.ru

Изучение топологии слоений Лиувилля интегрируемых систем, имеющих некомпактные слои или неполные потоки, предполагает расширение на них теории топологической классификации, построенной в работах А.Т. Фоменко и его школы (например, монография [1] и недавний обзор [2]). Данный класс систем существенно более разнообразен и труден для анализа. Поэтому разбор конкретных примеров таких систем представляет большой интерес.

В работе А.В. Борисова и И.С. Мамаева [3] была указана серия аналогов известных систем механики в псевдо-евклидовом пространстве, например, для волчков Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

Рассмотрим скобку Пуассона на $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -J_3 & -J_2 & 0 & -x_3 & -x_2 \\ +J_3 & 0 & J_1 & +x_3 & 0 & x_1 \\ J2 & -J_1 & 0 & x_2 & -x_1 & 0 \\ 0 & -x_3 & -x_2 & 0 & -\kappa J_3 & -\kappa J_2 \\ +x_3 & 0 & x_1 & +\kappa J_3 & 0 & J_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 & J_2 & -J1 & 0 \end{pmatrix}$$

Функции Казимира f_1, f_2 такой скобки Пуассона имеют вид:

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a, \qquad f_2 = J_1x_1 + J_2x_2 - J_3x_3 = b,$$

Нами изучается фазовая топология псевдо-евклидова аналога системы Жуковского, т.е. волчка Эйлера с гиростатом. Все первые интегралы данной системы в шестимерном фазовом пространстве задают квадрики так же, как и первые интегралы в еклидовом пространстве. В отличие от классической системы, все первые интегралы в всевдо-евклидовом пространстве индефинитны,

[1]Работа поддержана грантом РНФ 22-71-00111

т.е. среди них нет положительно определенных. По этой причине, в системе могут возникнуть новые примеры некомпактных слоений и некритических бифуркаций, а также возможно расширение теории А.Т.Фоменко топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с "компактного" случая на "разумные" подклассы систем с некомпактными слоями.

В псевдо-евклидовом случае возникает три принципиально разных и нетривиальных случая в зависимости от знака a, равного $-1, 0, 1$. При фиксированных (S_1, S_2, S_3) совместный уровень $f_1 = a, f_2 = b$ в пространстве $\mathbb{R}^3(R_1, R_2, R_3)$ есть пересечение обобщенного гиперболоида и плоскости. Как оказалось, тип такого пересечения полностью задается значениями a, b и $k = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Теорема. *Рассмотрим аналог системы Жуковского в псевдоевклидовом пространстве. Пусть* $(a, b) \neq (0, 0)$, $\lambda_i \neq 0$, $A_i > 0$, $A_i \neq A_j$, $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$.

Бифуркации кривой уровня $\mathbf{R}^2(h, k)$ *содержится в объединении двух (если* $a \cdot b = 0$*) или трех бифуркационных кривых: прямых* $k = 0$, $k = b^2/a$ *(если* $a \cdot b \neq 0$*) и параметрической кривой*

$$h(t) = \frac{t^2}{2}\left(\frac{A_1\lambda_1^2}{(1+A_1t)^2} + \frac{A_2\lambda_2^2}{(1+A_2t)^2} - \frac{A_3\lambda_3^2}{(1+A_3t)^2}\right),$$

$$k(t) = \frac{A_1^2\lambda_1^2}{(1+A_1t)^2} + \frac{A_2^2\lambda_2^2}{(1+A_2t)^2} - \frac{A_3^2\lambda_3^2}{(1+A_3t)^2}.$$

Литература

1. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация/ А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999.

2. Fedoseev D.A. Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems / Fedoseev D.A., Fomenko A.T. // J. Math. Sc.,- 2020. - N.248 -C. 810-827

3. Borisov, A. V. Rigid Body Dynamics in Non-Euclidean Spaces / A. V. Borisov, I. S. Mamaev // Russ. J. Math. Phys., - 2016. - N. 23:4 - C. 431-454.

Агуреева Екатерина Сергеевна, студентка 3 курса механико-математического факультета ФГБОУ «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», Москва.

УДК 517.938.5

ТРЕХМЕРНЫЕ БИЛЛИАРДЫ С ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕМ НА БЕЗФОКУСНОМ СТОЛЕ[1]

Белозеров Г. В., Завьялов В. Н.
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
gleb0511beloz@yandex.ru vnzavyalov@mail.ru

Ключевые слова: интегрируемая система, слоение Лиувилля, трехмерный биллиард, биллиард с проскальзыванием, изоэнергетическая поверхность.

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве компактную область, ограниченную конечным числом софокусных квадрик и имеющую двугранные углы излома на границе, равные $\pi/2$. Такую область назовем трехмерным биллиардным столом.

Классический биллиард внутри трехмерного биллиардного стола является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно–гладком смысле. Эта система обладает тремя независимыми попарно коммутирующими (относительно стандартной скобки Пуассона) первыми интегралами H, Λ_1, Λ_2, где Λ_1, Λ_2 — параметры квадрик, которых одновременно касаются все прямые траектории материальной точки. Г. В. Белозеров в работе [1] классифицировал все такие биллиарды по отношению слабой эквивалентности.

Рассмотрим связный биллиардный стол, симметричный относительно координатных плоскостей. Выберем несколько пар противоположных гладких граней его границы и зададим на них проскальзывание, то есть скажем, что при попадании на грань с проскальзыванием материальная точка, находившаяся в точке x с вектором скорости v_1, выйдет из точки $-x$ с вектором скорости v_2, где v_2 получается из v_1 путем следующих преобразований: сначала v_1 отражается от касательной плоскости к данной грани в точке x, а затем заменяется на противоположный. В точках излома проскальзыва-

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-71-00111 в МГУ им. М. В. Ломоносова

ние определяется по непрерывности. Полученную систему назовем трехмерным биллиардом с проскальзыванием.

Трехмерный биллиард с проскальзыванием тоже является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно-гладком смысле с теми же первыми интегралами, что и классический биллиард. Отметим, что в плоском случае класс биллиардов с проскальзыванием ввел А.Т. Фоменко в работе [2]. Также в этой работе В.В. Ведюшкина и В.Н. Завьялов изучили слоение Лиувилля топологических биллиардов с проскальзыванием.

Рассмотрим связный односвязный трехмерный биллиардный стол, симметричный относительно координатных плоскостей и ограниченный софокусными эллипсоидом, однополостным и двуполостным гиперболоидами. Обозначим его через D. Граница этого стола состоит из 3-х пар симметричных гладких граней. А следовательно, на этом столе можно задать 7 комбинаций проскальзывания. Для каждой комбинации нами построена бифуркационная диаграмма, найдены классы гомеоморфности слоев слоения Лиувилля, описаны 1-перестройки торов Лиувилля. Также нами доказана теорема классификации изоэнергетических поверхностей.

Теорема 1. *Изоэнергетическая поверхность биллиарда с проскальзыванием на трехмерном столе D гомеоморфна* $\dfrac{\mathbb{T}^i \times S^{5-i}}{(\mathbb{Z}_2)^i}$, *где i — количество пар граней с проскальзыванием.*

Литература

1. Г. В. Белозеров, Топологическая классификация биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадриками // Матем. сб., **213**:2, 2022, 3–36.

2. Fomenko A. T., Vedyushkina V. V., Zav'yalov V. N., Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping // Russ. Jour. of Math. Phis., **28**, 2021, 37–55.

Белозеров Глеб Владимирович, аспирант 1 года обучения механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Завьялов Владимир Николаевич, студент 5-го курса механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, кафедра дифференциальной геометрии и приложений

Студенческая школа-конференция «Математическая весна 2023»

Сборник тезисов

Национальный исследовательский университет

«Высшая школа экономики»

Нижний Новгород,
27–30 Марта 2022

Организаторы

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород

Организационный комитет

- Владислав Дмитриевич Галкин
- Андрей Игоревич Морозов
- Елена Вячеславовна Ноздринова
- Данила Денисович Шубин

Программный комитет

- Вячеслав Зигмундович Гринес
- Ольга Витальевна Починка

Благодарность. Конференция проведена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение №075-15-2022-1101.

Содержание

Бифуркационные свойства множества Мандельброта
Абдрахимова К.Р. **7**

Basis-Free Formulas for Characteristic Polynomial Coefficients in Clifford Algebras
Abdulkhaev K.S., Shirokov D.S. **7**

On some 3-generated 6-transposition groups
Afanasev Vsevolod A., Another Author I.I. **8**

Псевдоевклидовы аналоги интегрируемых систем механики: осесимметричный случай Жуковского
Агуреева Е.С., Кибкало В.А. **10**

Almost differentially non-degenerate singularities of Nijenhuis operators
Akpan D. Zh. **11**

Absence of Solutions to Complex-Valued Semilinear Equations
Ali Hanan **12**

On plane dentrites which have unusual type of ramification
Allabergenova K.B. **14**

Asymptotic aproach for solving equation with almost periodic coefficient
Astafyeva Polina Y., Kiselev Oleg M. **15**

A family of Hodgkin-Huxley-type of models with bistability between silent state and bursting state
Bagautdinova E.R., Stankevich N. V. **16**

Классификация многомерных временных рядов с помощью методов топологии
Банаръ А.А. **17**

Discrete Hodge theory, towards Hodge Laplacian eigenmaps
Beketov Maxim **18**

The problem on parametric resonance for Hamiltonian systems
Belova A.S. **19**

Топология слоения Лиувилля биллиарда, ограниченного эллипсоидом, в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{2,1}$
Белозеров Г.В. **19**

Mathematical modeling of the temporal shift of current-voltage signals in multisensor system 4H2SO4
Bitkulov M.D. **21**

Classical solution of the initial-value problem for a quasilinear wave equation with discontinuous initial conditions
Rudzko J.V., Korzyuk V.I. **54**

О классификации полярных потоков на четырёхмерных многообразиях
Сараев И.А. **55**

Неособые потоки Морса-Смейла с тремя периодическими орбитами на ориентируемых 3-многообразиях
Шубин Д.Д., Починка О.В. **56**

Об инварианте виртуальных узлов
Соколов П. П. **57**

Topological structures of cognitive maps
Sorokin Konstantin **58**

Классификация поверхностей дель Пеццо степени 8 без точек
Трепалин А.С. **59**

Некоторые деформации столов-книжек, реализующих упорядоченные биллиардные игры
Туниянц Д. А. **59**

Бифуркации в моделях популяционной динамики с эффектом Олли
Усманова Д.Р. **60**

Jordan constant for Cremona group of rank 2 over a finite field
Vikulova A.V. **61**

Образующие и соотношения декартовых подгрупп граф-произведений групп
Вылегжанин Ф. Е. **62**

On Jacobian group and complexity of the delta-graph
Yudin I.N. **64**

Слоение Лиувилля интегрируемого биллиарда с гравитационным потенциалом в некомпактной области, ограниченной софокусными параболами
Зайцева Анастасия Владимировна **65**

Биллиард с проскальзыванием на трехмерном столе без фокальных кривых
Завьялов В.Н. **66**

Релейная модель замирающего нейрона
Зеленова В.К. **68**

The characteristic Lie ring of the evolutionary equation $u_y = u_x + f(u)$.
Zotova E.I. **69**

Список литературы

[1] S.C.E. Decelle, Majorana Representations and the Coxeter Groups $G^{(m,n,p)}$. *Imperial College London*, 2014.

[2] A. Mamontov, A. Staroletov, M. Whybrow, Minimal 3-generated Majorana algebras. *Journal of Algebra* 2019, vol. 524 pp. 367–394.

[3] S. Khasraw, J. McInroy, S.Shpectorov, Enumerating 3-generated axial algebras of Monster type. (2018) https://arxiv.org/abs/1809.10657

[4] J.I. Hall, The general theory of 3-transposition groups *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 1993. vol. 114 pp. 269-294.

[5] J. McInroy, S.Shpectorov, Axial algebras of Jordan and Monster type. (2022) https://arxiv.org/abs/2209.08043

[6] A.A. Ivanov. The Monster Group and Majorana Involutions, *Cambridge Tracts in Mathematics*, 2009. vol. 176

Псевдоевклидовы аналоги интегрируемых систем механики: осесимметричный случай Жуковского

Агуреева Е.С.[1], Кибкало В.А.[1]

1. МГУ имени М.В.Ломоносова

Топологический подход к изучению интегрируемых систем был развит в работах А.Т.Фоменко и его научной школы, см. [1]. Слоение Лиувилля системы, т.е. разбиение фазового пространства на совместные поверхности уровня первых интегралов, характеризуется при помощи инварианта Фоменко–Цишанга — графа с оснащением, ребра которого отвечают однопараметрическим семействам регулярных торов Лиувилля, а вершины — особенностям слоения. Совпадение двух инвариантов у разных систем в выбранных неособых зонах энергии означает их топологическую эквивалентность (послойную гомеоморфность слоений). При этом были обнаружены неожиданные связи с трехмерной топологией и теорией особенностей, а в последние годы, также с теорией интегрируемых биллиардов.

В работе А.В.Борисова и И.С.Мамаева [2] была предложена следующая замена в фазовом пространстве $R^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$, сохраняющая вещественной скобку Пуассона и первые интегралы многих известных интегрируемых случаев динамики: систем Эйлера, Лагранжа, Ковалевской, Жуковского, а также ряда других.

$$x_1 \to ix_1, \quad x_2 \to ix_2, \qquad J_1 \to iJ_1, \quad J_2 \to iJ_2, \qquad J_3 \to J_3, \quad x_3 \to x_3$$

Полученные системы удовлетворяют псевдо-сферическим уравнениям Эйлера (для алгебры Ли $e(2,1)$ вместо алгебры Ли $e(3)$ из классической механики). Будем называть их псевдоевклидовыми аналогами соответствующих систем. Наш доклад будет посвящен случаю Жуковского, являющегося обобщением волчка Эйлера (твердого тела с главными моментами инерции A_1, A_2, A_3, закрепленного в центре масс) путем добавления постоянного гиростатического момента $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Параметрами задачи являются моменты инерции A_i, компоненты вектора λ_i. Значения функций Казимира $f_1 = a, f_2 = b$, гамильтониана $H = h$ и первого интеграла $K = k$ сохраняются вдоль фазовых траекторий системы (последние лежат на слоях слоения Лиувилля):

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = a, \qquad f_2 = x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3 = b,$$

$$H = \frac{(J_1 - \lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2 - \lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3 - \lambda_3)^2}{2A_3} = h, \qquad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2 = k.$$

Утверждение 1. Пересечение в пространстве x_1, x_2, x_3, при фиксированном $\vec{J}$, обобщенного гиперболоида $f_1 = a$ и плоскости $f_2 = b$ (как квадрики на этой плоскости) полностью определяется тройкой значений $a, b, k = K(\vec{J})$. Т.е. каждый слой слоения Лиувилля является расслоением с базой $H = h, K = k$ (обе функции не зависят от $\vec{J}$).

Теорема Слоение $H = h, K = k$ на пространстве $R^3(J_1, J_2, J_3)$ при $A_1 \neq A_3, \lambda_1 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$ устроено так: в прообразе каждой точки бифуркационной кривой $h(t), k(t)$ находится точка максимума (минимума) или слой, гомеоморфный “восьмерке”. Прообразы остальных точек либо пусты, либо гомеоморфны окружности S^1 или двум окружностям $2S_1^2$.

$$2h(t) = t^2 \left(A_1\lambda_1^2/(1 + A_1 t)^2 + A_2\lambda_2^2/(1 + A_2 t)^2 - A_3\lambda_3^2/(1 + A_3 t)^2\right)$$

$$k(t) = A_1^2\lambda_1^2/(1 + A_1 t)^2 + A_2^2\lambda_2^2/(1 + A_2 t)^2 - A_3^2\lambda_3^2/(1 + A_3 t)^2.$$

Список литературы

[1] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.

[2] Borisov A. V., Mamaev I. S. Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Rus. J. of Math. Phys. 2016. Vol. 23, №4. P. 431–454.

Almost differentially non-degenerate singularities of Nijenhuis operators

Akpan D. Zh.[1,2]

1. Lomonosov Moscow State University
2. Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics

Let us consider operator fields L on manifolds; it turns out that a necessary condition for their integrability is the vanishing of the Nijenhuis tensor N_L.

Definition. *Let M^n be a smooth n-dimensional manifold and let L be a tensor field of type* $(1,1)$*. Then the Nijenhuis torsion or the Nijenhuis tensor N_L is a tensor of type* $(1,2)$ *which is invariantly defined as follows:*

$$N_L[u, v] = L^2[u, v] + [Lu, Lv] - L[u, Lv] - L[Lu, v],$$

Топология слоения Лиувилля биллиарда, ограниченного эллипсоидом, в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{2,1}$

Белозеров Г.В.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{2,1}(x, y, z)$ эллипсоид $\mathcal{E}$, заданный уравнением $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$, где $a > b$. Зададим в замкнутой области D, ограниченной эллипсоидом $\mathcal{E}$, следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри D вдоль прямых с постоянной по модулю скоростью, отражаясь от $\mathcal{E}$ абсолютно упруго в смысле метрики Минковского, то есть если v — вектор скорости, с которым материальная точка соударяется с $\mathcal{E}$, и $v = \alpha + n$ — разложение этого вектора на касательную и ортогональную составляющие (в метрике Минковского) в точке соударения, то после отражения частица приобретет вектор скорости $v' = \alpha - n$. Такую динимаческую систему мы будем называть трехмерным биллиардом внутри эллипсоида в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{2,1}$. Заметим, что функция $H = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2$ является его первым интегралом.

Рассматриваемый биллиард является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно-гладком смысле. Помимо энергии H эта система сохраняет параметры двух софокусных с $\mathcal{E}$ квадрик, которых одновременно касаются все прямолинейные участки траектории материальной точки. Параметры этих квадрик Λ_1 и Λ_2, взятые вместе с энергией H, образуют набор функционально независимых первых интегралов, коммутирующих относительно скобки Пуассона, отвечающей симплектической форме $\omega = dx_1 \wedge dp_1 + dx_2 \wedge dp_2 - dx_3 \wedge dp_3$ на кокасательном расслоении к $\mathbb{R}^{2,1}$.

Отметим, что биллиарды на плоскости Минковского, ограниченные дугами софокусных квадрик рассматривались В. Драговичем и М. Раднович в работе [1], а также Е. Е. Каргиновой в работах [4], [5]. В. В. Ведюшкина и А. И. Скворцов в [4] вычислили инварианты Фоменко-Цишанга биллиарда с потенциалом Гука внутри эллипса на плоскости Минковского для небифуркационных значений энергии.

Бифуркационным значением энергии нашего биллиарда является уровень $H = 0$. Именно на нем слоение системы некомпактно. Более того, если $h_1, h_2 > 0$, то слоения Лиувилля биллиарда на уровнях $H = h_1$, $H = h_2$ совпадают. Аналогичное верно и для отрицательных значений энергии. Для положительных и отрицательных значений энергии автором были построены бифуркационные диаграммы, описаны регулярные слои и их 1-перестройки. В частности, была доказана следующая теорема.

Теорема. *Регулярный слой трехмерного биллиарда внутри эллипсоида в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{2,1}$ гомеоморфен трехмерному тору.*

Тем самым, для рассматриваемого биллиарда справедлив аналог теоремы Лиувилля.

Работа выполнена в МГУ им. М. В. Ломоносова при поддержке гранта РНФ №22-71-00111.

Список литературы

[1] В. Драгович, М. Раднович, “Топологические инварианты эллиптических биллиардов и геодезических потоков эллипсоидов в пространстве Минковского”, Фундамент. и прикл. матем., **20**:2 (2015), 51–64

[2] Е. Е. Каргинова, “Слоение Лиувилля топологических биллиардов на плоскости Минковского”, Фундамент. и прикл. матем., **22**:6 (2019), 123–150

[3] Е. Е. Каргинова, “Биллиарды, ограниченные дугами софокусных квадрик на плоскости Минковского”, Матем. сб., **211**:1 (2020), 3–31

[4] В. В. Ведюшкина, А. И. Скворцов, “Топология интегрируемого бильярда в эллипсе на плоскости Минковского с гуковским потенциалом”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2022, №1, 8–19

Mathematical modeling of the temporal shift of current-voltage signals in multisensor system 4H2SO4

Bitkulov M.D.

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

The paper describes the dynamics of the electrode/solution system

$$\tilde{y}_{k+1} = A \cdot \tilde{y}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

where A is a square matrix of order 11×11.

In this regard, it is proposed to move from the AG matrix to another matrix, which has a significantly lower order and, in a natural sense, approximates the AG matrix. Namely, we take into account that the input signals of the system can be considered as a periodic external signal with a period $T = 1210$ and, accordingly, the outputs of the system are also periodic. Therefore, the function can be approximated as follows

1) From the vector y_k, we construct a continuous function $y_k(t)$ so that $y_k(j) = y_k$, $j = 0, 1, 2, \dots, 1210$;

2) We define the Fourier coefficients of the function as follows y_k

$$y_{k_0} = \frac{1}{1210} \int_0^{1210} y_k(t)dt, \quad y_{k_c} = \frac{1}{1210} \int_0^{1210} y_k(t) \cdot \cos ktdt,$$

$$y_{k_s} = \frac{1}{1210} \int_0^{1210} y_k(t) \cdot \sin ktdt.$$

We put the following

$$\tilde{y}_k(t) = y_{k_0} + \sum_{j=1}^{5} \left(y_{k_c} \cos kt + y_{k_s} \sin kt \right).$$

Биллиард с проскальзыванием на трехмерном столе без фокальных кривых

Завьялов В.Н.

МГУ им. М.В. Ломоносова

В работе [2] А.Т.Фоменко был введен новый класс биллиардов с проскальзыванием. Рассмотрим F — изометрию границы плоского эллипса, переводящую точку x в диаметрально противоположную ей точку y. Пусть материальная точка движется равномерно и прямолинейно внутри эллипса и попадает на границу. Продолжим ее траекторию из точки $y = F(x)$ по лучу, выходящему из нее под углом α. Иными словами, ее продолжение выходит из новой точки под тем же углом, "проскальзывая" вдоль границы. На основании этого такой класс систем был назван "биллиардами с проскальзыванием".

Данная система обладает тем же первым интегралом — параметром софокусной квадрики. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве компактную область, ограниченную конечным числом софокусных квадрик и имеющую двугранные углы излома на границе, равные $\frac{\pi}{2}$. Такую область назовем трехмерным биллиардным столом.

Классический биллиард внутри трехмерного биллиардного стола является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно–гладком смысле. Эта система обладает тремя независимыми попарно коммутирующими (относительно стандартной скобки Пуассона) первыми интегралами H, Λ_1, Λ_2, где Λ_1, Λ_2 — параметры квадрик, которых одновременно касаются все прямые траектории материальной точки. Г. В. Белозеров в работе [1] классифицировал все такие биллиарды по отношению слабой эквивалентности.

Рассмотрим связный биллиардный стол, симметричный относительно координатных плоскостей. Выберем несколько пар противоположных граней его границы и зададим на них проскальзывание, то есть при попадании на грань с проскальзыванием материальная точка, находившаяся в точке x с вектором скорости v_1, выйдет из точки $-x$ с вектором скорости v_2, где v_2 получается из v_1 путем отражения v_1 от касательной плоскости к данной грани в точке x, а затем заменой на противоположный. Полученную систему назовем трехмерным биллиардом с проскальзыванием.

Трехмерный биллиард с проскальзыванием тоже является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно-гладком смысле с теми же первыми интегралами, что и классический биллиард.

Рассмотрим связный односвязный трехмерный биллиардный стол, симметричный относительно координатных плоскостей и ограниченный софокусными эллипсоидом, однополостным и двуполостным гиперболоидами. Обозначим его через D. Граница этого стола состоит из 3-х пар симметричных гладких граней. А следовательно, на этом столе можно задать 7 комбинаций проскальзывания. Для каждой комбинации нами построена бифуркационная диаграмма, найдены классы гомеоморфности слоев слоения Лиувилля, описаны 1-перестройки торов Лиувилля. Также нами доказана теорема классификации изоэнергетических поверхностей.

Теорема 1. *Изоэнергетическая поверхность биллиарда с проскальзыванием на трехмерном столе D гомеоморфна $\frac{\mathbb{T}^i \times S^{5-i}}{(\mathbb{Z}_2)^i}$, где i — количество пар граней с проскальзыванием.*

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ (проект №22-71-00111) в МГУ имени М.В. Ломоносова.

Список литературы

[1] Г. В. Белозеров, Топологическая классификация биллиардов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадриками // Матем. сб., **213**:2, 2022, 3–36.

[2] Fomenko A. T., Vedyushkina V. V., Zav'yalov V. N., Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping // Russ. Jour. of Math. Phis., **28**, 2021, 37–55.

Релейная модель замирающего нейрона

Зеленова В.К.

Центр интегрируемых систем, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль

В качетсве модели одного нейрона рассматривается уравнение

$$\dot{R} = \lambda\Big[\mathcal{F}\Big(R(t-h)\Big) + \mathcal{H}\Big(X_*(t)\Big)\Big]R(t), \tag{1}$$

предложенное в статье [1]. Здесь $R(t)$ — нормированный мембранный потанциал, λ — скорость электрических процессов в нервной клетке, $\mathcal{F}$ — пороговая функция, характеризующая внутреннее поведение нейрона

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} 1, & 0 < u \le 1, \\ -\alpha, & u > 1, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(u) = \begin{cases} -\eta, & 0 < u \le \theta, \\ \xi, & u > \theta, \end{cases}$$

$X_*(t) = e^{\lambda x_*(t)}$, $x_*(t)$ – периодическая функция с периодом T_*

$$x_*(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ > 0, & 0 < t < t_*, \\ 0, & t = t_*, \\ < 0, & t_* < t < T_*, \end{cases}$$

$\eta, \xi, \alpha, \theta$ — положительные параметры, $h > 0$ — запаздывание, $\lambda \gg 1$.

Уравнение (1) — это модификация уравнения

$$\dot{u} = \lambda\mathcal{F}(u(t-h))u, \tag{2}$$

предложенного в статье [2]. Данное уравнение лежит в основе ряда рассматриваемых феноменологических нейромоделей.

В уравнении (1) сделаем экспоненциальную подстановку $R(t) = e^{\lambda r(t)}$. Получим релейное уравнение:

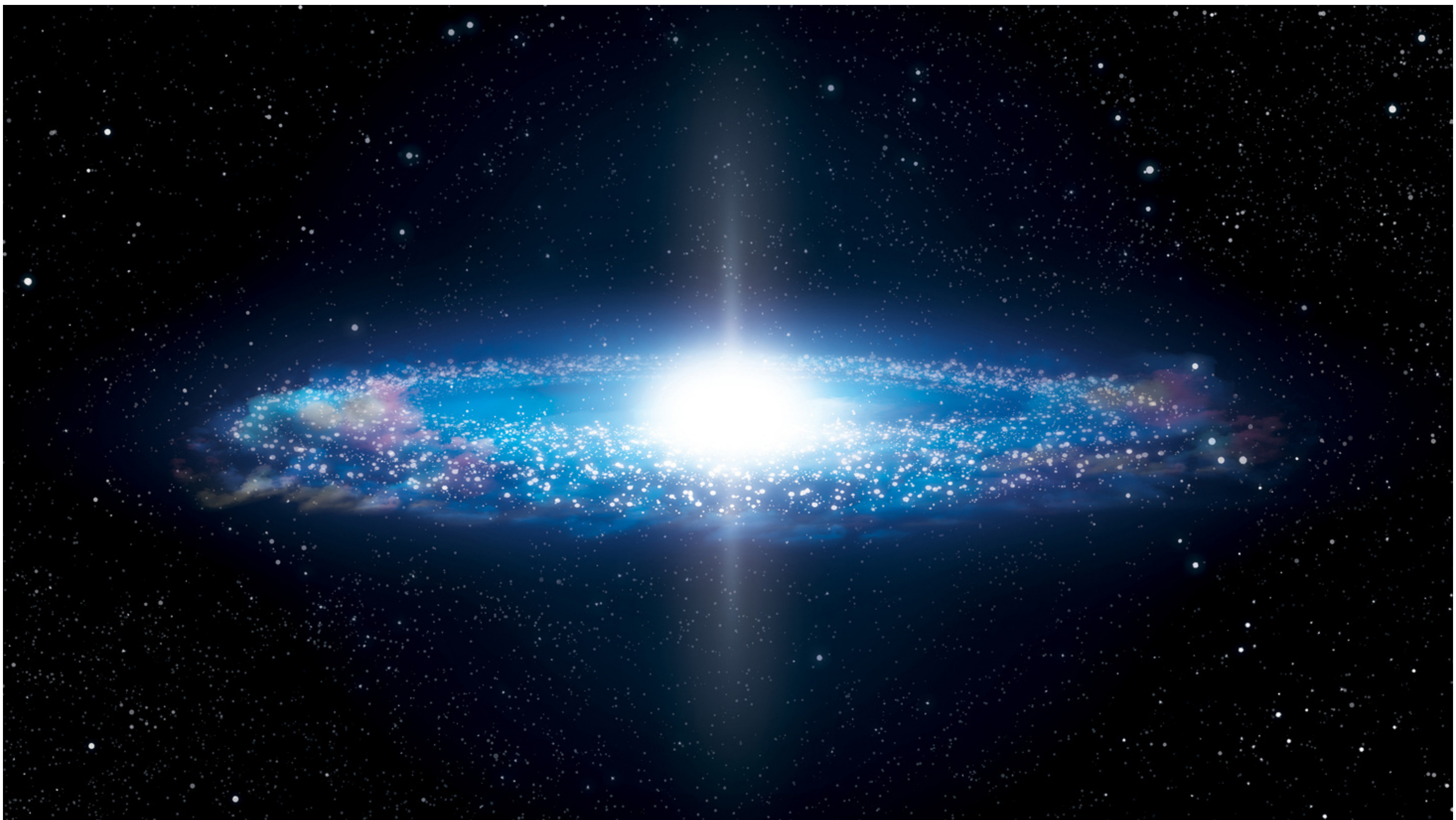
Университет Сириус

International conference

Dynamical Systems of Classical and Celestial Mechanics

(19 - 23 September 2022, Sirius Federal Territory, Sirius Mathematics Center, Sochi)

Book of Abstracts



Bifurcation curves of the Zhukovsky system in Pseudo-Euclidean space

E.S. Agureeva[1]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Topological classification of integrable systems satisfying some conditions was done by A. Fomenko and his coauthors [1]. Generalization of this theory to the case of non-compact Liouville foliations and incomplete Hamiltonian flows is an open and important problem. Such systems are well-known in mathematics, mechanics, and their applications. They appear in the class of superintegrable Bertrand systems on Riemannian manifolds of revolution in a central potential field (e.g., the Kepler problem on the plane) and among the analogues of mechanical systems on various Lie algebras [2].

Recently enlisted by A. Borisov and I. Mamaev [3], "pseudo-Euclidean" analogues of classical systems of rigid body dynamics turn out to be interesting examples of such systems. A pseudo-Euclidean analogue of the Euler top (describing the motion of a "plate" on the Lobachevsky plane) and its generalization via addition of a gyrostat (also called the Zhukovsky integrable case) are among them. Their Liouville foliations on $\mathbf{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$ are given by four functions: the Casimirs f_1, f_2, the additional first integral K

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \qquad f_2 = J_1x_1 + J_2x_2 - J_3x_3, \qquad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2$$

and the Hamiltonian H with moments of inertia A_i and gyrostatic moment vector $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, which is equal to zero in the Euler case:

$$H = \frac{(J_1+\lambda_1)^2}{2A_1} + \frac{(J_2+\lambda_2)^2}{2A_2} - \frac{(J_3+\lambda_3)^2}{2A_3}.$$

Regular orbits of coadjoint representation $M^4_{a,b} = \{f_1 = a, f_2 = b\}$ correspond to pairs $(a,b) \neq (0,0)$. On such $M^4_{a,b}$, both critical points of the momentum map $F = (H, K)$ and noncompact noncritical bifurcations of the Liouville foliation can appear. We describe the bifurcation diagram $\Sigma \subset \mathbf{R}^2(h,k)$ of the map F (i.e., the union of the set of bifurcation values and of the set of critical values of F) in the following way for each regular pair (a,b).

Theorem. *Consider a pseudo-Euclidean analog of the Zhukovsky system and its restriction to the regular orbit $M^4_{a,b}$ for arbitrary $(a,b) \neq (0,0)$, $\lambda_i \neq 0$, $A_i > 0$, $A_i \neq A_j$ for $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$. Its bifurcation diagram on $\mathbf{R}^2(h,k)$ is contained in the union of two or three bifurcation curves: the straight line $k = 0$, the straight line $k = b^2/a$ (if $a \cdot b \neq 0$) and the parametrized curve*

$$h(t) = \frac{t^2}{2}\left(\frac{A_1\lambda_1^2}{(1+A_1t)^2} + \frac{A_2\lambda_2^2}{(1+A_2t)^2} - \frac{A_3\lambda_3^2}{(1+A_3t)^2}\right), k(t) = \frac{A_1^2\lambda_1^2}{(1+A_1t)^2} + \frac{A_2^2\lambda_2^2}{(1+A_2t)^2} - \frac{A_3^2\lambda_3^2}{(1+A_3t)^2}.$$

Noncompact noncritical bifurcations correspond to the line $k = 0$. The image of a critical point of F can belong to the parametric curve or (if $a \neq 0$) to the line $k = b^2/a$.

The author is supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-71-00111).

1. *Bolsinov A.V., Fomenko A.T.* Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification // Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

2. *Fedoseev D.A., Fomenko A.T.* Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems // J. of Math. Sc., **248** (2020), 810–827.

3. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Rus. J. Math. Phys., **23**:4 (2016), 431–454.