

УДК 517.938.5

В. Н. Завьялов

Бильярд с проскальзыванием на любой рациональный угол

Изучается класс бильярдov в кругe с проскальзыванием на соизмеримый с π угол вдоль граничной окружности. Для таких бильярдov показано, что изоэнергетическая поверхность бильярда гомеоморфна некоторому линзовому пространству $L_{(q,p)}$ с параметрами $0 < p < q$. Множество тех пар (q, p) , для которых существует бильярд в круге с проскальзыванием, реализующий соответствующее линзовое пространство $L_{(q,p)}$, описано в терминах множества решений линейного диофантова уравнения с двумя переменными. Полученный результат остается верен для плоских бильярдov с проскальзыванием в односвязных областях с гладкой границей, т.е. не ограничивается интегрируемым случаем.

Библиография: 30 названий.

Ключевые слова: Интегрируемая система, бильярд, бильярд с проскальзыванием, геодезический поток, слоение Лиувилля, инвариант Фоменко-Цишанга, линзовое пространство

За последние годы были получены существенные продвижения в теории интегрируемых бильярдov. Так, в работах А.А. Глуцкока [1], А.Е. Миронова и М. Бялого [2], В.Ю. Калошина и А. Соррентино [3] было доказано несколько аналогов и частных случаев знаменитой гипотезы Биркгофа. Опуская некоторые детали, условие принадлежности гладких дуг границы стола семейству софокусных эллипсов и гипербол или его вырожденному аналогу (например, концентрическим окружностям и их радиусам) оказалось не только достаточным условием интегрируемости, но и необходимым. Иными словами, класс интегрируемых бильярдov (в отсутствие потенциала) в случае плоских столов оказался весьма “узким” и тесно связанным с семействами квадрик.

В работах В.В. Ведюшкиной было построено интегрируемое обобщение плоских софокусных или круговых бильярдov — кусочно-плоские столы-комплексы X с коммутирующими перестановками [4, 5]. Такие столы называют *бильярдными книжками*: 2-клетки (“листы” книжки) изометричны столам плоских бильярдov, а склейка происходит по изометричной склейке гладких дуг их границ (по “корешкам” книжки). Каждый корешок оснащен некоторой циклической перестановкой σ (действующей на инцидентных ему листах), которая задает переход шара с листа i на лист $\sigma(i)$ после удара о данную дугу склейки или границу. Коммутирование перестановок в вершине обеспечивает непрерывность бильярдного потока. Важный подкласс таких систем образуют *топологические бильярды* [6, 7]: их столы являются кусочно-плоскими двумерными многообразиями, и все циклические перестановки имеют длину либо 1, либо 2.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 22-71-00111) в МГУ имени М.В.Ломоносова.

Если при проекции склеенного стола на плоскость все корешки переходят в дуги квадратик с общими фокусами, то бильярд на столе-комплексе или многообразии сохраняет интегрируемость плоских бильярдов в областях, являющихся изометричными проекциями 2-клеток склеенного стола (причем у всех них квадратичный дополнительный интеграл будет одинаковым). То же верно для вырождений софокусного семейства, например, для концентрических окружностей и их радиусов — в последнем случае интеграл будет линейным.

Простейшим примером служит гомеоморфный сфере стол, склеенный из двух одинаковых кругов по их общей граничной окружности. Одна из изучаемых в работе систем является модификацией другого топологического бильярда, стол которого склеен из двух одинаковых круговых колец по их общей внутренней граничной окружности.

Фазовое пространство интегрируемого бильярда обладает структурой слоения на совместные уровни гамильтониана $H = |\vec{v}|^2$ и дополнительного интеграла, но вообще говоря, является лишь топологическим многообразием, склеенным из частей, на которых заданы гладкая и симплектическая структуры.

Для плоской области $\Omega \subset \mathbb{R}^2(x, y)$ с кусочно-гладкой границей, все углы излома которой равны $\pi/2$, фазовое пространство M^4 задается законом упругого отражения с условием равенства углов падения и отражения: $M^4 = \{(P, \vec{v}) | P \in \Omega, \vec{v} \in T_P \mathbb{R}^2, |\vec{v}| > 0\} / \sim$, где

$$(P_1, v_1) \sim (P_2, v_2) \iff P_1 = P_2 \in \partial\Omega, \quad |v_1| = |v_2|, \quad v_1 + v_2 \in T_{P_1} \partial\Omega.$$

Если Ω есть круг радиуса R с центром в точке O , то интегралом является измеряемый в точке отражения шара ориентированный угол $\varphi = \varphi(P, \vec{v}) \in [0, \pi]$ между лучом касательной к окружности $\partial\Omega$ (направленной по часовой стрелке) и лучом $P + \alpha\vec{v}$, $\alpha > 0$. При $\varphi \notin \{0, \pi/2, \pi\}$ шар движется в кольце между окружностями (граница стола $\partial\Omega$ радиуса R и каустика радиуса $R \cos \varphi$), а при $\varphi = 0, \varphi = \pi$ — по границе стола. При $0 \leq \varphi < \pi/2$ шар “обходит” центр круга по часовой стрелке, а при $\pi/2 < \varphi \leq \pi$ — против часовой стрелки. При $\varphi = \pi/2$ все траектории являются двухзвенными, и каждое звено проходит через центр O .

Зафиксируем $H = |\vec{v}|^2 = 1$, тогда в неособом изоэнергетическом многообразии $Q^3 : H = 1$ каждая поверхность уровня интеграла $0 < \varphi < \pi$ связна и гомеоморфна двумерному тору, а каждому особому значению интеграла $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ соответствует слой, гомеоморфный окружности.

Напомним, что для интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем, заданных на гладком симплектическом многообразии M^4 , в работах А.Т. Фоменко и его научной школы была построена теория топологической классификации, см. [8]. Две системы называют *лиувиллево эквивалентными* в неособых зонах энергии, если существует диффеоморфизм между неособыми уровнями энергии двух систем $Q_1^3 : H_1 = h_1$ и $Q_2^3 : H_2 = h_2$, сохраняющий слоение Лиувилля и направления некоторых критических окружностей.

В основе этого подхода лежит теория бифуркаций торов Лиувилля, построенная А.Т. Фоменко [9, 10] и позволяющая классифицировать *невырожденные* (боттовские) особенности коранга 1, возможные в интегрируемых системах. Такие особенности называют *3-атомами*. В изучаемых нами системах встречаются простейшие атомы типа A, B . Они имеют тип прямого произведения

расслоенной двумерной базы (называемой 2-атомом A и B соответственно) на окружность. Слоение на базе содержит ровно одну критическую точку, невырожденную по Морсу: эллиптическую (минимальную или максимальную) или седловую. На рис. 1 изображены 2-атомы и 3-атомы A и B , а также иллюстрация атома A как максимума или минимума функции z на поверхности.

Инвариант Фоменко–Цишанга, классифицирующий системы с точностью до Лиувиллевой эквивалентности [11], является конечным графом с оснащением, ребра которого соответствуют однопараметрическим семействам регулярных торов Лиувилля, а вершины — их бифуркациям. Каждой вершине графа приписан тип атома-бифуркации, каждому ребру — пару числовых меток r, ε , а на некотором связном подграфе-“семье”, не содержащем эллиптических атомов A — целочисленную метку n . Инвариант Фоменко–Цишанга также называют меченой молекулой, а тот же инвариант без числовых меток r, ε , n — молекулой или грубой молекулой. С помощью этих инвариантов удалось исследовать многие интегрируемые случаи динамики и математической физики, системы геодезических потоков на двумерных поверхностях и открыть нетривиальные эквивалентности между такими системами [8; т. 2].

Числовые метки можно вычислить, выбрав на граничных торах 3-атомов допустимые базисы λ_i, μ_i и записав матрицы склейки, выражающие циклы допустимого базиса на граничном торе одного 3-атома через циклы допустимого базиса на граничном торе другого 3-атома. Матрица склейки $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ состоит из целых чисел a, b, c, d , и $\det C = -1$. Тогда метки r, ε равны

$$b \neq 0 \Rightarrow r = a/b, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} b, \quad b = 0 \Rightarrow r = \infty, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} a.$$

В общем случае правила выбора циклов приведены в [8; т.1, гл. 4]. Мы остановимся на случае атома A и его граничного тора. Цикл λ стягивается в точку внутри полнотория. Цикл μ дополняет его до базиса и гомологичен критической окружности 3-атома, ориентированной гамильтоновым полем функции H . Направление цикла λ выбирается из условия на ориентацию Q^3 парой их касательных векторов и вектором нормали к 3-атому. Отметим, что цикл μ выбирается неоднозначно: $\mu + k\lambda$ для $k \in \mathbb{Z}$ также может быть выбран в качестве цикла μ' . Случай $r = \infty$ означает гомологичность в Q^3 однозначно определенных λ -циклов для двух смежных по ребру 3-атомов.

Простейшим примером молекулы является молекула вида $A-A$. Тогда изоморфное многообразие Q^3 склеено из двух полноторий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Изоэнергетическая поверхность Q^3 , на которой задано слоение Лиувилля интегрируемой системы с молекулой $A-A$, гомеоморфна*

- *трехмерной сфере S^3 , если $r = 0$,*
- *трехмерному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$, если $r = 1/2$,*
- *прямому произведению окружности и сферы $S^1 \times S^2$, если $r = \infty$,*
- *линзовому пространству $L_{q,p}$, если $r = p/q$, где $0 < p < q$. Отметим, что $L(2, 1)$ гомеоморфна $\mathbb{R}P^3$.*

Для описанного выше билиарда внутри круга молекула имеет вид $A-A$ (Q^3 склеено из двух полноторий), а метки равны $r = 0, \varepsilon = 1$. Действительно, разрежем Q^3 по прообразу $\pi^{-1}(S^1 : r = R_0)$ окружности с центром O и радиусом

$0 < R_0 < R$ (при отображении проекции $\pi : Q^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$). Для той же проекции прообразы диска $r < R_0$ и кольца $R_0 < r \leq R$ являются полнотория. Несложно видеть, что на торе $\pi^{-1}(S^1 = \{r = R_0\})$ цикл λ допустимого базиса одного полнотория склеится с циклом μ допустимого базиса другого полнотория, и наоборот. Тем самым Q^3 гомеоморфно сфере S^3 (известное расслоение Хопфа), т.е. метка $r = 0$.

Хотя софокусные и круговые бильярды не являются, вообще говоря, гладкими системами, по их слоениям оказалось возможным вычислять аналоги инвариантов Фоменко–Цишанга. Для некоторых плоских софокусных бильярдов эти инварианты были вычислены В. Драговичем и М. Раднович [12], а для произвольных плоских софокусных бильярдов [13] и произвольных топологических софокусных бильярдов [6, 14] были вычислены В. В. Ведюшкиной. В работах А. Т. Фоменко и В. В. Ведюшкиной были построены бильярды, реализующие инварианты Фоменко–Цишанга различных систем механики и физики [15, 16], т.е. моделирующие механические системы (в том числе, с интегралами степени 3 и 4 по компонентам импульса) при помощи бильярдов с “каноническим” квадратичным интегралом [17]. Кроме того, топологическими бильярдами и бильярдными книжками были промоделированы все геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях, имеющие линейный (круговыми бильярдами) или квадратичный (софокусными бильярдами) по компонентам импульса дополнительный интеграл [18].

Также были получены существенные продвижения в доказательстве общей гипотезы А. Т. Фоменко о бильярдах, сформулированной в работе [19]: В. В. Ведюшкиной и И. С. Харчевой доказано, что бильярдными книжками реализуются произвольные боттовские 3-атомы [4, 5] и база слоения Лиувилля с такими особенностями [20], т.е. молекула без числовых меток. В работах А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкиной и В. А. Кибкало изучалась “локальная” версия общей гипотезы [21]: было доказано, что реализуются произвольные значения числовых меток r, ε на ребре молекулы [22] и целочисленной метки n на подграфах-“семьях” [23], а также некоторые комбинации меток [24]. Также было показано, что изоэнергетическая поверхность Q^3 бильярдной книжки гомеоморфна трехмерному многообразию [25], а также построены бильярды, для которых Q^3 гомеоморфно трехмерному тору, произвольному линзовому пространству у $L_{(q,p)}$ для взаимно простых $0 < p < q$ [26] и связным суммам произвольных линзовых пространств $L(q_i, p_i)$ и произведений $S^1 \times S^2$. [27]. Как следствие, Q^3 бильярда может не быть многообразием Зейферта как, например, связная сумма трех линз $L(2, 1)$, гомеоморфных трехмерному проективному пространству..

Другое новое обобщение классических плоских бильярдов — бильярды с проскальзыванием — было недавно предложено А. Т. Фоменко [28]. С их помощью удалось развить результаты работы [18], где бильярдами на столах-комплексах были промоделированы интегрируемые геодезические потоки на двумерных сфере S^2 и торе T^2 , на случай неориентируемых двумерных конфигурационных многообразий. Напомним, что в аналитической категории, согласно знаменитому результату В. В. Козлова [29], интегрируемые геодезические потоки на двумерном многообразии M^2 существуют только если это многообразие есть сфера S^2 , тор T^2 , проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ и бутылка Клейна Kl^2 .

Круговые бильярды с проскальзыванием на угол π интегрируемы, и позволяют реализовать произвольный геодезический поток на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ или бутылке Клейна Kl^2 , интегрируемый при помощи линейного интеграла [30]. Аналогично было определено проскальзывание на угол π вдоль эллиптических границ софокусных бильярдов [28]. В той же работе такими бильярдами были промоделированы примеры геодезических потоков на $\mathbb{R}P^2$ и Kl^2 , имеющих квадратичный интеграл. Данные результаты естественно развивают результаты работы [18] на случай неориентируемых многообразий.

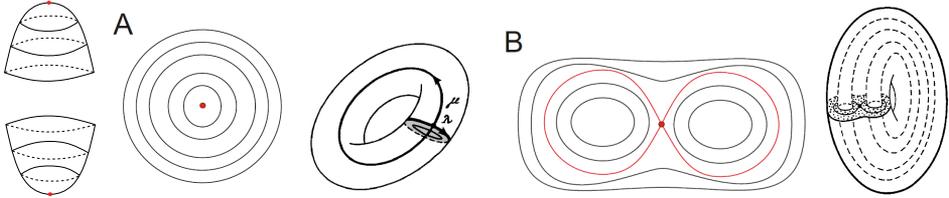


Рис. 1. Слева направо: 2-атом A , как слоение функции высоты вблизи максимума или минимума и схематичное его изображение; 3-атом A как произведение 2-атома A и окружности S^1 ; изображение седлового 2-атома B и боттовский 3-атом B как прямое произведение 2-атома и окружности.

Пусть угол $\alpha \in [0, 2\pi]$ соизмерим с π . Пусть граница стола Ω состоит из окружностей с общим центром O . Введем на одной из них проскальзывание: после удара о границу с углом падения ϕ в точке $P \in \partial\Omega$ частица продолжает движение с тем же углом отражения и модулем вектора скорости, но не из точки P , а из ее образа при повороте вдоль окружности на угол α в том же направлении, как ориентировались касательные (в данной работе — по часовой стрелке). Такие бильярды интегрируемы. Рассмотрим касательную к каустике. Вследствие симметрий круга, при любом повороте относительно центра граничной окружности, каустика перейдет в себя, а касательная перейдет в другую касательную к каустике. Все отрезки траектории при повороте будет также касаться каустики, одной для всех отрезков, следовательно, полученный бильярд интегрируем.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Соизмеримость с π угла проскальзывания является обоснованным ограничением. Связано это с тем, что при угле α , несоизмеримым с π , на особом слое, соответствующем минимуму или максимуму интеграла ($\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ соответственно), будут отождествлены точки $\varphi_0 + k\alpha, k \in \mathbb{Z}$, отличающиеся одним или несколькими поворотами на угол α . Множество отождествленных точек будет всюду плотным на особой окружности, но при этом существуют точки окружности, которые в данном множестве не лежат. Например, фиксируем любую точку на окружности. Отождествим ее со всеми образами поворота данной точки на угол α относительно центра круга. Совершим поворот данной точки на угол π . Образ этого поворота не будет лежать в множестве точек, отождествленных с данной. Допустим, что это не так. Тогда угол π можно представить в виде $r\alpha - 2\pi q$, следовательно, угол α рационально выражается через π . Получаем противоречие. Любая окрестность множества

точек, отождествленных с данной, содержит в себе все точки окружности. Следовательно, комплекс, получаемый после факторизации по действию группы, порожденной поворотом на угол α , является нехаусдорфовым топологическим пространством. Отсюда, в частности, данный слой и уровень постоянной энергии не гомеоморфны гладким многообразиям.

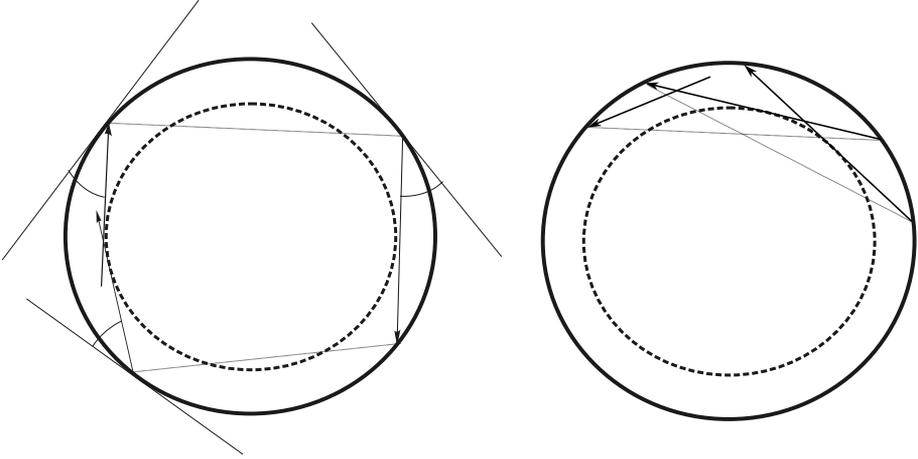


Рис. 2. Движение материальной точки в диске с проскальзыванием.

Сформулируем и докажем основное утверждение настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть m и k два взаимно простых числа, таких что $m < 2k$. Пусть l такое целое число, что для решения l, i диофантова уравнения $2ki - lm = (m, 2k)$, где $(m, 2k)$ — НОД чисел m и $2k$, вектор $\begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix}$ имеет наименьшую длину среди всех решений данного диофантова уравнения.

Рассмотрим бильярд в круге с проскальзыванием на угол $\frac{m\pi}{k}$ вдоль граничной окружности. Инвариант Фоменко-Цишанга такого бильярда имеет вид $A-A$ с метками

$$r = \frac{(m, 2k)[(m, 2k) + 2kl]}{4k^2}, \quad \varepsilon = 1.$$

Метка $r = \frac{1 + 2kl}{k^2}$ в случае четного m , и $r = \frac{1 + 2kl}{4k^2}$ в случае нечетного m .

Из вида молекулы следует, что изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно линзовому пространству $L_{4k^2, (m, 2k)[(m, 2k) + 2kl]}$. Сделаем замену $\alpha = \frac{2k}{(m, 2k)}$, $\beta = \frac{m}{(m, 2k)}$. Тогда наше диофантово уравнение преобразуется в $\alpha i -$

$\beta l = 1$, а r -метка примет вид $r = \frac{1 + \alpha l}{\alpha^2}$. Заметим, что числа α и l не могут иметь общих делителей из-за существования решения диофантова уравнения. Обозначим $q = 4k^2$, а $p = (m, 2k)[(m, 2k) + 2kl]$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $q \neq s^2$ для $s \in \mathbb{N}$, $0 < p < q$, и пара $p, q \in \mathbb{N}$ взаимно просты. Тогда $L(q, p)$ не может быть изоэнергетическим многообразием бильярда в диске с проскальзыванием на соизмеримый с π угол.

Определим теперь бильярд с проскальзыванием на соизмеримый с π угол $\psi = \frac{m\pi}{k}$ вдоль границы односвязной области $\Phi(D^2) \subset \mathbb{R}^2$ плоскости, полученной из диска D^2 при диффеоморфизме Φ . Параметризуем граничную окружность: $\gamma(t) = \partial D^2, t \in [0, 2\pi)$. Внутри области $\Phi(D^2)$ частица движется по геодезическим плоской метрики.

Пусть отражение упругое, т.е. модуль вектора скорости $H = \vec{v}^2$ сохраняется при отражении. Тем самым изоэнергетическая поверхность Q^3 инвариантна. Пусть после удара о границу $\partial\Phi(D^2)$ в точке $P = \Phi(\gamma(t_0))$ частица продолжит движение из точки $P' = \Phi(\gamma(t_0 + \psi))$ с условием, что угол падения в точке P равен углу отражения в точке P' .

ТЕОРЕМА 2. Изоэнергетическое многообразие Q^3 бильярда с проскальзыванием на соизмеримый с π угол $\psi = \frac{m\pi}{k}$ вдоль границы односвязной области, являющейся диффеоморфным образом окружности, гомеоморфно линзовому пространству $L(q, p)$, где q, p вычисляются по k, m согласно теореме 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При диффеоморфизме Φ топологический тип Q^3 не меняется, т.е. истинность более общей теоремы 2 (не требующей интегрируемость системы бильярда) удается доказать на основе теории топологических инвариантов слоений интегрируемых систем, примененной к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Приведем теперь подробное доказательство теоремы 1.

Зафиксируем значение дополнительного интеграла. В каждой точке, лежащей внутри кольца, образованного каустикой и границей бильярда, можно провести ровно две касательных к каустике. Вектор скорости материальной точки в фиксированный момент времени направлен вдоль одной из этих касательных. Каждой касательной параллельны по два вектора, один из которых направлен к каустике, другой от нее. Также два вектора соответствуют движению по часовой стрелке и два вектора — движению против часовой стрелки. Движению по часовой стрелке соответствуют значения дополнительного интеграла, меньшие $\frac{\pi}{2}$, а движению против часовой стрелки, соответственно, значения, большие $\frac{\pi}{2}$. Каждая пара точка-вектор (точка стола и вектор скорости частицы, находящейся в ней) соответствует точке фазового пространства. Из точки стола, лежащей на каустике, может быть проведена ровно одна касательная прямая к ней.. Следовательно, на ней пара векторов скорости, направленные по часовой, склеиваются друг с другом стрелке. Аналогичное верно для направленных против часовой стрелки двух векторов. На границе происходит склейка пары точка-вектор, вектор скорости которой направлен от каустики, со следующей парой точка-вектор: точка получается поворотом радиус-вектора на угол $\frac{m\pi}{k}$, а вектор скорости в ней направлен к каустике. Точки внутри

кольца, образованного двумя окружностями: каустикой и границей бильярдного стола, снабдим векторами скорости, направленными по часовой стрелке. Получим на фазовом многообразии два кольца, одно из которых соответствует парам точек с векторами скорости, направленными к каустике, а другое — парам точек с векторами скорости, направленными от каустики (см. рис. 3). Ввиду склейки пар точка-вектор на границе бильярдного стола и каустике получаем, что регулярная поверхность уровня интегралов H, φ является тором, при значениях дополнительного интеграла $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Аналогичное верно при значениях дополнительного интеграла $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$.

Ввиду такой склейки двух колец в тор, возникает естественная проекция тора на бильярдный стол. Будем называть кольцо, состоящее из пар точка-вектор, вектор которых направлен от каустики, “нижней” половиной тора, а второе кольцо — “верхним”. Кривые на торе могут быть изображены на этих двух кольцах. Поскольку в проекции на плоскость два этих кольца одинаковы, будем изображать пунктирной линией сегменты кривой, лежащие на “нижнем” кольце, а сплошной линией — на “верхнем”.

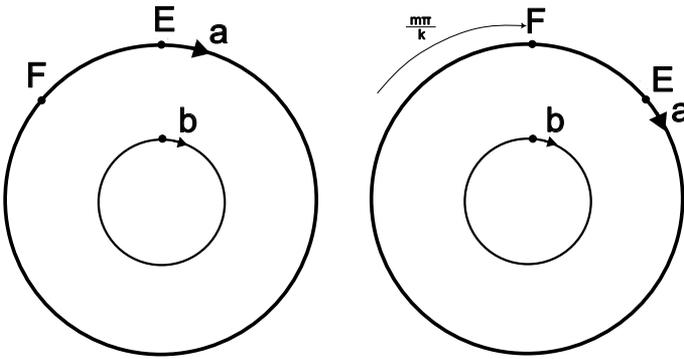


Рис. 3. Склейка тора из двух колец (“нижнего” справа и “верхнего” слева) при значении $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$: границы склеены по парам стрелок, помещенных одинаковыми буквами a, b . Для точек E, F на нижнем кольце явно указаны соответствующие им точки на “верхнем” кольце.

Рассмотрим значение дополнительного интеграла $\varphi = \frac{\pi}{2}$. В пределе каустика сжимается в точку — центр окружности — и все траектории проходят через центр окружности. Отступим от центра на малое значение радиуса ε , тогда каждую точку получаемой окружности можно снабдить векторами скорости, направленными к центру или от центра. Получим на фазовом многообразии две окружности, одна из которых состоит из точек окружности радиуса ε с векторами скорости, направленными к центру, а другая из точек с векторами скорости, направленными от центра. Тогда при устремлении ε к нулю эти две окружности склеиваются между собой следующим образом: точка с вектором

скорости, направленным к центру, склеивается с точкой диаметропротиволожной ей относительно центра окружности с вектором скорости, направленным от центра (см. рис. 4). Следовательно, при значении дополнительного интеграла $\varphi = \frac{\pi}{2}$ регулярный слой гомеоморфен тору. При значении дополнительного интеграла $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$ в каждой точке возможен всего один вектор скорости, поэтому поверхность уровня является окружностью. Получаем, что молекула имеет вид $A-A$, т.е. изоэнергетическая поверхность является склейкой двух полноторий.

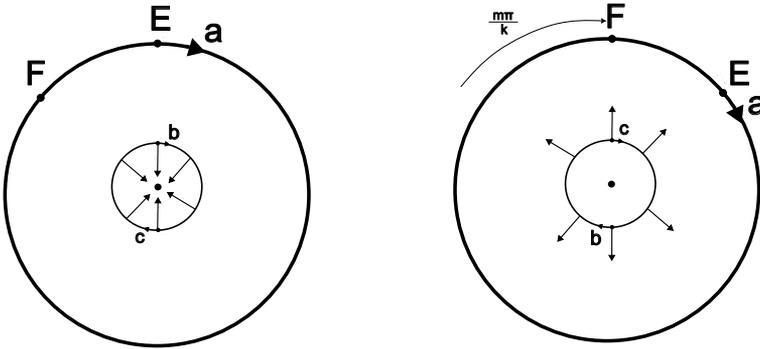


Рис. 4. Склейка тора из двух колец (“нижнего” справа и “верхнего” слева) при значении $\varphi = \pi/2$: границы склеены по парам стрелок, помещенных одинаковыми буквами a, b, c . Для точек E, F на нижнем кольце явно указаны соответствующие им точки на “верхнем” кольце.

Для полного описания топологии слоения необходимо понять, как атомы склеиваются друг с другом. На граничных торах атома A вводятся допустимые системы координат, базисные циклы которых обозначаются λ и μ . Цикл λ выбирается однозначно, и стягивается в точку внутри полнотория. В качестве цикла μ выбирается любой цикл, дополняющий цикл λ до базиса. При стремлении к особому слою, цикл μ переходит в критическую окружность. Это позволяет однозначно определить на нём ориентацию (она должна совпасть с ориентацией критической окружности). Выбранные циклы изобразим в проекции на стол бильярда. Сегменты циклов, которые соответствуют точкам с векторами скорости, направленными от каустики, будем изображать пунктиром, а остальные отрезки сплошной линией.

Меридианом тора в проекции на бильярдный стол назовем прообраз каустики, или точки при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ориентация которого совпадает с ориентацией границы, где граница ориентирована по часовой стрелке. У системы есть S^1 -симметрия, порождаемая поворотом вокруг центра окружностей. Относительно нее все торы являются поверхностями вращения, и под параллелью на произвольном торе Лиувилля системы будем понимать цикл, получаемый при действии группы симметрии на произвольную точку. В случае бильярда без проскальзывания проекцией параллели тора на бильярдный стол является радиальным отрезком, соединяющим каустику и граничную окружность стола,

и оснащенным векторами скорости, направленными как к каустике, так и от каустики (оба вектора направлены “по часовой стрелке” для $0 < \varphi < \pi/2$ и “против” для $\pi/2 < \varphi < \pi$). Как уже было замечено, в бильярде с проскальзыванием “нижняя” половина тора (которая соответствует точкам с векторами скорости, направленными от каустики) совершает поворот при проецировании на бильярд, так что при проецировании на бильярдный стол параллель будет состоять из отрезка от границы до каустики с векторами скорости, направленными к каустике, и отрезка, полученного обратным поворотом отрезка от границы до каустики с векторами скорости, направленными от каустики (см. рис. 5). Данные отрезки действительно образуют цикл на торе. Напомним, что тор склеен из двух колец, которые получены из пар точек-вектор. Одно из этих колец образовано из пар точек с векторами скорости, направленными к каустике, причем внутренность кольца остается неподвижной. Второе кольцо образовано из пар точек с векторами скорости, направленными от каустики, к кольцу применен поворот для склейки в тор. Отрезок с векторами скорости, направленными к каустике, соответственно на торе остается неподвижным, а отрезок с векторами скорости, направленными от каустики, был получен применением обратного поворота, значит на торе он перейдет в отрезок, подобный отрезку с векторами скорости, направленными к каустике, и склеится с ним по точкам, образы которых на бильярдном столе при проекции тора лежат на границе и каустике, соответственно.

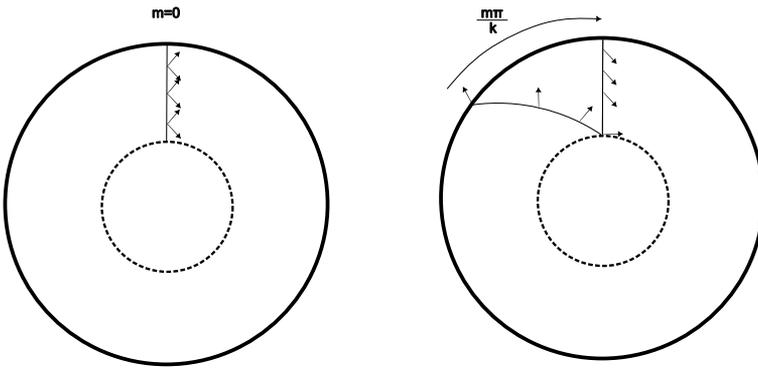


Рис. 5. Проекция параллели тора в случае бильярда без проскальзывания (слева) и бильярда с проскальзыванием (справа). Сдвиг вдоль меридиана при проскальзывании нивелируется обратным сдвигом вдоль кривой на бильярдном столе.

Сначала предположим, что атом A соответствует движению по часовой стрелке. Рассмотрим вертикальный отрезок от границы до каустики, выходящий из точки $(0, R)$. Совершим поворот данного отрезка на угол $\frac{m\pi}{k}$ относительно центра круга. Так как точки на границе отождествлены также с поворотом радиус-вектора на угол $\frac{m\pi}{k}$, то у данного вертикального отрезка и результата его поворота отождествлены точки, лежащие на границе. Следовательно,

их объединение также является отрезком. Продолжим данную операцию поворота вертикального отрезка на углы кратные $\frac{m\pi}{k}$ и объединения результата поворота с предыдущими отрезками. Так как $2m\pi$ также кратен $\frac{m\pi}{k}$, то поворот вертикального отрезка переведет его в себя. Снабдим точки полученных отрезков векторами скорости, направленными по часовой стрелке. Каждый отрезок с векторами скорости, направленными по часовой стрелке, соответствует двум отрезкам на фазовом многообразии (один отрезок с векторами скорости, направленными от каустики, и один отрезок с векторами скорости, направленными к каустике). Точка, лежащая на границе, с вектором скорости, направленным от каустики, отождествлена на фазовом многообразии с точкой, лежащей на границе и полученной поворотом данной на угол $\frac{m\pi}{k}$ относительно центра круга, с вектором скорости, направленным к каустике. То есть, точки, лежащие на границе, отождествлены между собой поворотом на угол $\frac{m\pi}{k}$, тогда как на фазовом многообразии отождествлены две пары точка-вектор. Также в замечании 1 уже было сказано, что вектора скорости, направленные от каустики и к каустике в точках, лежащих на каустике, склеены. Соответственно, на фазовом многообразии прообразы отрезков склеены по прообразам своих концевых точек с прообразом какого-то другого отрезка, причем разными для прообраза каждой концевой точки. Получим окружность на фазовом многообразии, лежащую на торе, который является совместной поверхностью уровня интегралов энергии и интеграла. Это искомый цикл λ , так как при уменьшении значения интеграла φ радиус каустики будет увеличиваться до значения радиуса граничной окружности бильярда. При этом отрезки будут уменьшаться, пока не превратятся в точку. Следовательно, полученный цикл стягивается в точку внутри полнотория.

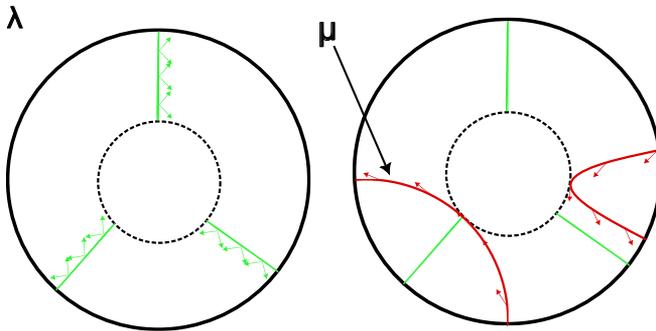


Рис. 6. Проекция цикла λ (слева) и цикла μ (справа) на граничных торах атома A , соответствующих движению по часовой стрелке. Красным на правом рисунке выделен цикл μ , а зеленым — радиальные отрезки, входящие в состав цикла λ .

Предполагаем, что $(m, k) = 1$. Следовательно, $(m, 2k)$ принимает значения либо 1, либо 2. За один отрезок в проекции цикла на стол, цикл соверша-

ет сдвиг вдоль меридиана тора на угол $\frac{m\pi}{k}$ и один оборот вдоль параллели. Необходим оборот цикла по меридиану, чтобы вернуться в исходное положение. Для случая $(m, 2k) = 1$ получаем, что количество отрезков равно $2k$, а для $(m, 2k) = 2$ число отрезков равно k . То есть количество отрезков равно $\frac{2k}{(m, 2k)}$.

Количество оборотов по меридиану равно $\frac{m\pi}{k} \cdot \frac{2k}{(m, 2k)} : 2\pi = \frac{m}{(m, 2k)}$. Следовательно, цикл λ имеет разложение по параллели и меридиану тора $\left(\begin{array}{c} 2k \\ (m, 2k) \\ m \\ (m, 2k) \end{array} \right)$,

соответственно.

Теперь рассмотрим цикл μ . Цикл μ должен пересекать цикл λ в одной точке. Цикл λ делит отрезками область внутри кольца на секторы. Цикл μ строим следующим образом: мы выбираем две точки на границе, лежащие в соседних секторах, соединяем их кривой, пересекая при этом один раз цикл λ . Далее отрезками, подобным тем, что были в составе цикла λ , соединяем эти две точки, используя проскальзывание. Количество секторов совпадает с количеством отрезков в составе цикла λ и равно $\frac{2k}{(m, 2k)}$.

Совершим поворот цикла λ на угол $2\pi : \frac{2k}{(m, 2k)} = \frac{(m, 2k)\pi}{k}$ относительно центра круга вдоль часовой стрелки, цикл перейдет в себя. При этом повороте каждый сектор перейдет в соседний с ним сектор. Заметим, что поворот на угол $\frac{(m, 2k)\pi}{k}$ является поворотом на угол кратный $\frac{m\pi}{k}$ по модулю 2π . Это следует из того, что число $(m, 2k)$ можно представить в виде линейной комбинации чисел m и $2k$, то есть существуют такие целые u и v такие, что $(m, 2k) = um - 2kv$.

Как известно, наибольший общий делитель двух чисел является минимальным по модулю числом, отличным от нуля, который представляется в виде линейной комбинации двух чисел с целыми коэффициентами. Подставим в угол поворота вместо $(m, 2k)$ данную комбинацию и получим, что $\frac{(m, 2k)\pi}{k} = \frac{(um - 2kv)\pi}{k} = u \frac{m\pi}{k} - 2\pi v$. Поворот на угол 2π не меняет положение точек, поэтому данное выражение можно сократить на число кратное 2π , и получим $u \frac{m\pi}{k}$.

Теперь построим цикл μ . Рассмотрим две точки на границе биллиарда, которые отличаются поворотом на угол $\frac{(m, 2k)\pi}{k}$ (т.е. лежащие в соседних секторах) относительно центра круга, но не лежащие на отрезках цикла λ . Соединим две отмеченные точки на границе кривой так, чтобы кривая проходила через точку, лежащую на пересечении каустики и отрезка цикла λ , который лежит между

двумя отмеченными точками на границе. Кривая не должна иметь других пересечений с циклом λ .

Из двух отмеченных точек выберем ту, которая перейдет в другую поворотом на угол $\frac{(m, 2k)\pi}{k}$ относительно центра круга по часовой стрелке, и назовем её изначальной для будущего цикла. Совершим поворот другой точки на угол $\frac{m\pi}{k}$ относительно центра круга по часовой стрелке. Из полученной точки отложим радиальный отрезок между каустикой и границей, оснащенный векторами скорости (из таких отрезков состоит цикл λ). Будем совершать поворот этого отрезка на углы, кратные $\frac{m\pi}{k}$, относительно центра круга вдоль часовой стрелки, пока на отрезке не будет лежать изначальная точка цикла. Наш цикл будет состоять из объединения всех полученных при вышеуказанных поворотах отрезков и ранее выбранной кривой, соединяющей точки из двух соседних секторов.

Снабдим точки отрезков векторами скорости, направленными по часовой стрелке к каустике и от каустики. Кривую снабдим векторами скорости, направленными к каустике до пересечения с ней и векторами скорости, направленными от каустики после пересечения с ней. Покажем, что ориентируя этот цикл вдоль векторов в каждой точке, мы получим искомый цикл μ . Во-первых, цикл пересекает λ только в одной точке, так как кривая пересекает его в одной точке, лежащей также на каустике, а отрезки не имеют пересечения, так как они лежат внутри секторов, образованных циклом λ . Во-вторых, прообраз кривой на фазовом многообразии является отрезком. Границы кривой и отрезков, снабженных векторами скорости, направленными по часовой стрелке, склеиваются попарно на фазовом многообразии в окружность. Следовательно, цикл μ есть цикл на торе изоэнергетического многообразия.

При устремлении радиуса каустики к радиусу граничной окружности, отрезки цикла μ стянутся в точку, а кривая стянется в дугу граничной окружности длины $\frac{(m, 2k)R}{2k}$. Так как на граничной окружности склеиваются точки, отличающиеся поворотом на угол $\frac{m\pi}{k}$, но, как уже было показано, это и склейка точек с поворотом на угол $\frac{(m, 2k)\pi}{k}$, следовательно, любая дуга длины $\frac{(m, 2k)R}{2k}$ содержит в себе все точки граничной окружности. Получаем, что цикл μ в пределе становится критической окружностью, причем ориентация у критической окружности и цикла μ будет совпадать. Следовательно, цикл μ удовлетворяет всем необходимым условиям дополняющего цикла базиса системы координат.

Пусть количество отрезков, входящих в состав цикла μ , равно $l - 1$. За один отрезок в проекции цикла на стол, цикл совершает сдвиг вдоль меридиана тора на угол $\frac{m\pi}{k}$ и один оборот вдоль параллели. Кривая в проекции цикла на стол совершает один оборот вокруг параллели и сдвиг вдоль меридиана на угол $\frac{(m + (m, 2k))\pi}{k}$, так как кривую можно представить в виде объединения отрезка и части каустики. Сдвиг от отрезка равен $frac{m\pi}{k}$ по часовой стрелке,

а часть каустики соответствует сдвигу $\frac{(m, 2k)\pi}{k}$. Следовательно, количество оборотов вдоль параллели равно l , а количество оборотов вдоль меридиана равно $l \cdot \frac{m\pi}{k} + \frac{(m, 2k)\pi}{k}$. Поскольку последние образуют цикл, то полученное число кратно 2π . Тогда имеем соотношение $l \cdot \frac{m\pi}{k} + \frac{(m, 2k)\pi}{k} = 2i\pi$.

Умножим это соотношение на k и разделим на π , получим, что $lm + (m, 2k) = 2ki$. Следовательно, $2ki - lm = (m, 2k)$ - диофантово уравнение на l и i , причем l и i должны быть минимальными по модулю решениями данного диофантова, иначе получаем неоднократный обход по циклу μ , что соответствует неоднократному пересечению λ . Получаем, что разложение по меридиану и параллели тора цикла μ равно $\begin{pmatrix} l \\ i \end{pmatrix}$.

Теперь рассмотрим два вертикальных отрезка, идущих от граничной окружности стола до каустики, один из которых будет выходить из точки $(0, R)$, а другой из точки $(0, -R)$. Снабдим “вышележащий” отрезок (т.е. отрезок, исходящий из точки $(0, R)$) векторами скорости, направленными по часовой стрелке к каустике, а “нижележащий” отрезок векторами скорости, направленными по часовой стрелке от каустики. Рассмотрим точки этих отрезков на каустике. Как уже было замечено, в точках каустики вектора скорости, направленные от каустики и направленные к каустике, будут склеиваться. Соединим эти две точки, которые являются диаметрально противоположными, половиной каустики так, чтобы путь от “вышележащей” точки на каустике до “нижележащей” был направлен по часовой стрелке. При этом снабдим эту половину каустики векторами скорости, направленными по часовой стрелке. Получим комплекс, гомеоморфный отрезку, изображенный на рисунке 7. Будем совершать операцию поворота данного комплекса на углы кратные, $\frac{m\pi}{k}$, с последующим объединением образа поворота с комплексом, пока комплекс не перейдет в себя при очередном повороте. На торе комплекс (снабженный векторами так, как было указано ранее) будет гомеоморфен отрезку. Объединение комплекса с результатами его поворотов породит склейку на торе концевых точек прообразов комплексов попарно между собой в окружность. Это будет вспомогательный цикл η .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Построенный нами цикл η на торе является кривой с самопересечениями. Чтобы этого избежать, точки отрезков, входящих в состав комплекса, будем при очередном повороте сдвигать по каустике на довольно малое значение так, чтобы угол между радиус-векторами этих точек и горизонтальной осью координат увеличивался. Рассмотрим малую окрестность каустики. Половину каустики, входящую в состав комплекса, изменим как кривую в малой окрестности каустики так, чтобы она пересекала каустик только в точках, которые принадлежат отрезкам, входящим в состав комплекса. Полученная кривая, уже не является частью каустики, так как не пересекает ее.

За каждый проход по образу комплекса цикл η делает один оборот вдоль параллели, а вдоль меридиана совершается сдвиг на угол $\frac{m\pi}{k} + \pi = \frac{(k+m)\pi}{k}$.

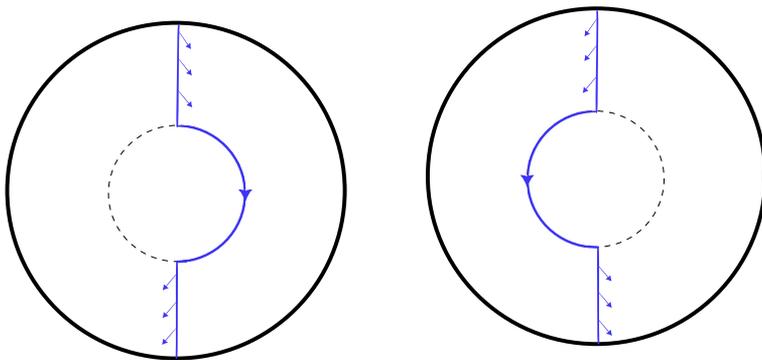


Рис. 7. Комплексы, входящие в состав циклов η^+ (слева) и η^- (справа).

Если число m четное, то поворот отрезка цикла λ на угол π , как комбинации поворотов на угол $\frac{m\pi}{k}$, оказывается невозможен. Отсюда в цикле η будет вдвое больше радиальных отрезков, нежели в цикле λ . Следовательно, у цикла η оборотов вдоль параллели тора будет в два раза больше, чем в цикле λ . Если число m нечетное, то ситуация оказывается обратной, сдвигов вдоль параллели циклов λ и η будет одинаковое количество. Соответственно, количество сдвигов можно описать формулой $2k$. Количество оборотов вдоль меридиана при этом равно $2k \cdot \frac{(k+m)\pi}{k} : 2\pi = k+m$. Соответственно, разложение цикла η имеет вид $\begin{pmatrix} 2k \\ k+m \end{pmatrix}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отдельно рассмотрим случай, когда m и k нечетные. В данном случае, в разложении цикла η будет совершаться двойной обход по циклу, то есть разложение цикла η можно уменьшить вдвое, но для остальных случаев это неверно. Данное удвоение не повлияет на ответ, так как циклы η , которые соответствуют атомам A движения по часовой стрелке и движения против часовой стрелки, будут переходить друг в друга, и их разложение по циклам λ и μ , необходимое нам для подсчета меток, увеличиться также вдвое, но ввиду увеличения вдвое обеих частей равенства, ответ не изменится.

Рассмотрим еще один цикл ν , который является каустикой с векторами скорости, направленными по часовой стрелке. Очевидно, что его разложение имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, так как совершается всего 1 оборот вдоль меридиана.

Посчитаем разложение циклов η и ν по циклам λ и μ . Для начала посчитаем разложение цикла η .

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{(m, 2k)} & l \\ \frac{m}{(m, 2k)} & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\eta \\ y_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ k+m \end{pmatrix}.$$

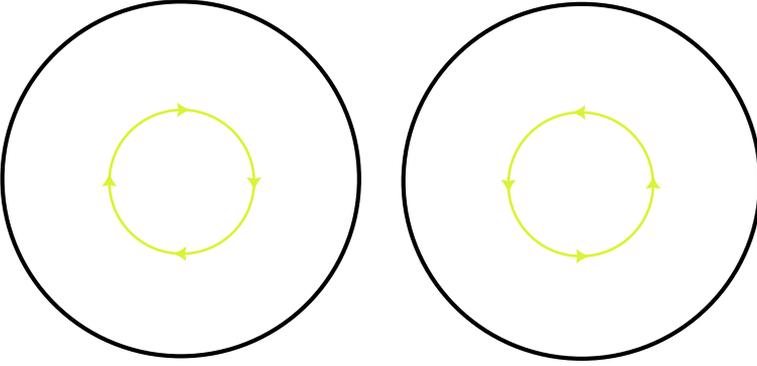


Рис. 8. Дополнительные циклы ν^+ (слева) и ν^- (справа).

Определитель левой матрица равен $\frac{2ki - lm}{(m, 2k)} = 1$. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_\eta \\ y_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & -l \\ m & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k \\ k + m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m, 2k) - lk \\ \frac{2k^2}{(m, 2k)} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом получаем, что разложение цикла ν равно $\begin{pmatrix} x_\nu \\ y_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l \\ \frac{2k}{(m, 2k)} \end{pmatrix}$.

Эти разложения образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} \eta^+ \\ \nu^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m, 2k) - lk & \frac{2k^2}{(m, 2k)} \\ -l & \frac{2k}{(m, 2k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \mu^+ \end{pmatrix},$$

где λ^+ и μ^+ суть циклов λ и μ атома A , соответствующего движению по часовой стрелке. Циклы η и ν мы будем обозначать η^+ и ν^+ .

Теперь рассмотрим атом A , соответствующий движению против часовой стрелки. В цикле λ^+ изменим вектора скорости, направленные по часовой стрелке, на вектора скорости, направленные против часовой стрелки, и получаемый цикл обозначим λ^- . Следовательно, цикл λ^- имеет такое же разложение по меридиану и параллели тора, что и цикл λ^+ . Проведем ту же операцию с циклом μ^+ , полученный цикл стягивается на окружность на атоме A . Данный цикл будет ориентирован по часовой стрелке, а ориентация критической окружности атома A направлена против часовой стрелки. Изменим ориентацию цикла на противоположную и получим цикл μ^- . Цикл μ^- имеет такое же разложение, что как и цикл μ^+ , но знаки компонент разложения будут противоположными.

При задании цикла η^+ был использован комплекс, склеенный из двух отрезков и половины каустики. Для построения цикла η^- построим аналогичный комплекс, который будет состоять из тех же двух отрезков, но уже другой

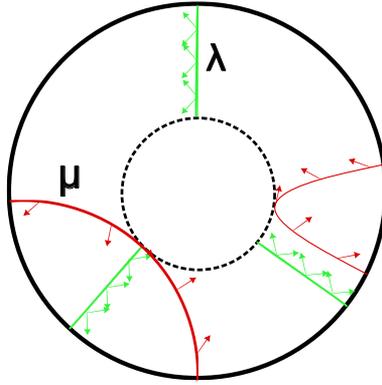


Рис. 9. Проекция циклов λ и μ с граничных торов атома A , соответствующего движению против часовой стрелки, на бильярдный стол.

половины каустики. Заметим, что другая половина каустики также соединяет концевые точки отрезков, которые лежат на каустике. Снабдим векторами полученный комплекс также, как и в комплексе для цикла η^+ . А именно, “вышележащий” отрезок снабдим векторами скорости, направленными против часовой стрелки к каустике. На “нижележащем” отрезке снабдим векторами скорости, направленными по часовой стрелке от каустики. Также снабдим половину каустики векторами скорости, направленными против часовой стрелки.

Совершим операцию поворота на кратные $\frac{m\pi}{k}$ углы относительно центра круга с последующим объединением всех образов. Это будет вспомогательный цикл η^- .

Цикл η^- имеет столько же оборотов вдоль параллели, что и цикл η^+ , а именно $2k$. При этом за один оборот вдоль параллели происходит сдвиг вдоль меридиана на угол $\frac{m\pi}{k} - \pi = \frac{(m-k)\pi}{k}$. Соответственно, количество оборотов вдоль меридиана равно $(m-k)$. Также, в силу своего направления, цикл ν^- имеет разложение $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Теперь посчитаем разложение циклов η^- и ν^- по циклам λ^- и μ^- .

$$\begin{pmatrix} \frac{2k}{(m, 2k)} & -l \\ \frac{m}{(m, 2k)} & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ m-k \end{pmatrix}.$$

Определитель левой матрицы равен -1 , так как это матрица отличается знаком одной строчки от аналогичной матрицы, записанной для движения по часовой стрелке. Следовательно,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -i & l \\ \frac{m}{(m, 2k)} & \frac{2k}{(m, 2k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2k \\ m-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m, 2k) + lk \\ \frac{2k^2}{(m, 2k)} \end{pmatrix}.$$

Соответственно,

$$\begin{pmatrix} \eta^- \\ \nu^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m, 2k) + lk & \frac{2k^2}{(m, 2k)} \\ l & \frac{2k}{(m, 2k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^- \\ \mu^- \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим образы вспомогательных циклов при значении интеграла $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Комплексы, образующие циклы η^+ и η^- , превратятся в отрезки, соединяющие две диаметрально противоположные точки. Вектора скорости в точках этого отрезка будут направлены как к центру, так и от него. Следовательно, цикл η^+ переходит в цикл η^- . Циклы ν^+ и ν^- при данном значении интеграла перейдут в центр, в котором будет целая окружность векторов скорости. Ориентации этих окружностей будут различными, так как циклы ν^+ и ν^- были противоположны ориентированы. Следовательно, цикл ν^+ переходит в $-\nu^-$. Выразив соотношения циклов η^+ , ν^+ и η^- , ν^- , можем описать соотношения между λ^+ , μ^+ и λ^- , μ^- , используя выражения циклов η^+ , ν^+ и η^- , ν^- через них.

$$\begin{pmatrix} (m, 2k) - lk & \frac{2k^2}{(m, 2k)} \\ -l & \frac{2k}{(m, 2k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \mu^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m, 2k) + lk & \frac{2k^2}{(m, 2k)} \\ -l & -\frac{2k}{(m, 2k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^- \\ \mu^- \end{pmatrix}.$$

Определитель левой матрицы равен $\frac{2k(m, 2k) - 2k^2l + 2k^2l}{(m, 2k)} = 2k$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \mu^+ \end{pmatrix} &= \frac{1}{2k} \begin{pmatrix} \frac{2k}{(m, 2k)} & \frac{-2k^2}{(m, 2k)} \\ l & (m, 2k) - lk \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (m, 2k) + lk & \frac{2k^2}{(m, 2k)} \\ -l & -\frac{2k}{(m, 2k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^- \\ \mu^- \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2k} \begin{pmatrix} \frac{2k(m, 2k) + 4k^2l}{(m, 2k)} & \frac{8k^3}{(m, 2k)^2} \\ 2kl^2 & \frac{4k^2l - 2k(m, 2k)}{(m, 2k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^- \\ \mu^- \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(m, 2k) + 2kl}{(m, 2k)} & \frac{4k^2}{(m, 2k)^2} \\ l^2 & \frac{2kl - (m, 2k)}{(m, 2k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^- \\ \mu^- \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, $r = \frac{(m, 2k)[(m, 2k) + 2kl]}{4k^2}$, а $\varepsilon = 1$. Доказательство окончено.

Такие проскальзывания на соизмеримый с π угол можно вводить на свободных границах — окружностях круговых топологических бильярдов и бильярдных книжек. При этом в слоении Лиувилля могут появляться седловые атомы, то есть можно ставить вопрос о реализации подграфов-семей и целочисленной метки n на них. Далее разберем пример такого бильярда.

ТЕОРЕМА 3. Рассмотрим кольцо, полученное путем вырезания из кругового диска внутренности диска, ограниченного окружностью того же концентрического семейства. Склеим два экземпляра такого кольца по внутренней окружности, а на внешних окружностях введем проскальзывание на углы $\frac{m_1\pi}{k_1}$ и $\frac{m_2\pi}{k_2}$, соответственно. Инвариант Фоменко–Цишанга полученного бильярда показан на рисунке 10.

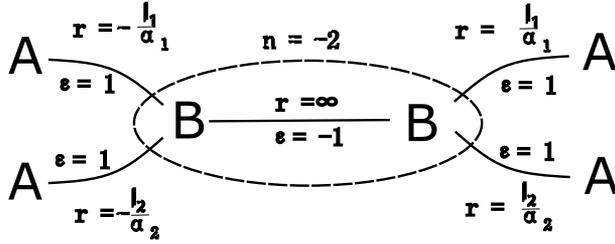


Рис. 10. Инвариант Фоменко–Цишанга в двух склеенных кольцах с проскальзываниями на внешних дугах.

Доказательство. В этой теореме мы также будем обозначать циклы, соответствующие движению по часовой стрелке, знаком “+”, а движению против часовой стрелки — знаком “-”. Циклы λ и μ для атома A были показаны в прошлой теореме. Циклы атома B показаны на рисунке 11. Цикл λ также совпадает с циклом ν из прошлой теоремы. Следовательно, $\nu^+ = \begin{pmatrix} -l & 2k \\ (m, 2k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \mu^+ \end{pmatrix}$, а $\nu^- = \begin{pmatrix} l & 2k \\ (m, 2k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^- \\ \mu^- \end{pmatrix}$. Разложение циклов μ^+ и μ^- по меридиану и параллели тора, соответствующего данному значению интеграла, равно $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Выразим их также через циклы атомов A . Получим, что $\mu^+ = \begin{pmatrix} i-l & 2k-m \\ (m, 2k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^+ \\ \mu^+ \end{pmatrix}$, а $\mu^- = \begin{pmatrix} i-l & m-2k \\ (m, 2k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^- \\ \mu^- \end{pmatrix}$. Получаем матрицы склейки $\begin{pmatrix} -l & 2k \\ (m, 2k) \\ i-l & 2k-m \\ (m, 2k) \end{pmatrix}$ для движения по часовой стрелке и $\begin{pmatrix} l & 2k \\ (m, 2k) \\ i-l & m-2k \\ (m, 2k) \end{pmatrix}$ для движения против часовой стрелки. Следовательно, метки r равны $\frac{-l(m, 2k)}{2k}$ и $\frac{l(m, 2k)}{2k}$ для движения по часовой и против, соответственно, а метки $\varepsilon = 1$.

Для описания последнего ребра заметим, что при переходе через значение интеграла $\varphi = \pi/2$ циклы λ_A переходят друг в друга, а циклы λ_B переходят друг в друга сменой ориентации одного из них. Заметим, что $\lambda_A^+ = \frac{m-2k}{m, 2k} \lambda_B^+ +$

$\frac{2k}{m, 2k} \mu_B^+$, а $\lambda_A^- = \frac{-m+2k}{m, 2k} \lambda_B^- + \frac{2k}{m, 2k} \mu_B^-$. Получаем, что $\frac{m-2k}{m, 2k} \lambda_B^+ + \frac{2k}{m, 2k} \mu_B^+ = \frac{-m+2k}{m, 2k} \lambda_B^- + \frac{2k}{m, 2k} \mu_B^-$. Так как $\lambda_B^+ = -\lambda_B^-$, то $\mu_B^+ = \mu_B^-$. Следовательно, матрица склейки равна $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Вклад в метку n с ребер по часовой стрелке

равен $\theta^+ = [-1 + \frac{m}{2k}]$, с ребер против часовой стрелки $\theta^- = [1 - \frac{m}{2k}]$, центральное ребро вклада в метку n не дает. Из постановки задачи следует, что $m < 2k$, так как мы берем угол по модулю 2π . Получается, что вклад с ребер по часовой стрелке равен -1 , а с ребер против часовой стрелки 0 . Получаем метку $n = -2$. Доказательство завершено.

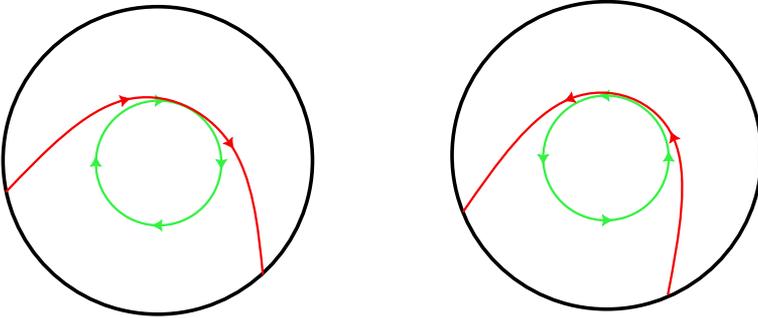


Рис. 11. Циклы λ и μ на атомах B . Слева показаны циклы, соответствующие движению по часовой стрелке, справа — движению против часовой стрелки.

Сделаем замену, аналогичную той, что мы делали в прошлой теореме 1. А именно, обозначим $\alpha = \frac{2k}{(m, 2k)}$. Тогда r -метка на ребрах между атомами A и B примет вид $r = \frac{l}{\alpha}$. Как уже было замечено, α и l не могут иметь общих делителей. Поэтому, задав $\frac{l}{\alpha}$ как произвольное рациональное число от 0 до 1, мы можем решить диофантово уравнение $\alpha i - \beta l = 1$ уже относительно неизвестных β и i . Числа α и β определяют угол нашего проскальзывания, который вычисляется по значению рациональной метки r . Следовательно, существует соответствие между r -метками и углами, на которые мы можем вводить проскальзывание. Это означает, что мы можем получить любую r -метку.

Автор выражает благодарность А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкиной, В.А. Кибкало и И.Г. Рочеву за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] А.А. Glutsyuk, “On polynomially integrable Birkhoff billiards on surfaces of constant curvature”, J. Eur. Math. Society, 23:3 (2021), 994–1049.

- [2] M. Bialy, A.E. Mironov, “Algebraic non-integrability of magnetic billiards”, *J. Phys. A*, 49:45 (2016), 455101, 18 pp.
- [3] V. Kaloshin, A. Sorrentino, “On the local Birkhoff conjecture for convex billiards”, *Ann. of Math. (2)*, **188**:1 (2018), 315–380.
- [4] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Биллиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, 209:12 (2018), 17–56.
- [5] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, И.С. Харчева, “Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими биллиардами”, *ДАН*, 479:6 (2018), 607–610.
- [6] В.В. Фокичева, “Топологическая классификация биллиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, *Матем. сб.*, 206:10 (2015), 127–176.
- [7] В.В. Ведюшкина (Фокичева), А.Т. Фоменко, “Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы”, *Известия РАН, серия Матем.*, 81:4, 2017, 20–67.
- [8] А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко, “Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.
- [9] А.Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, *Доклады АН СССР*, 287:5 (1986), 1071–1075.
- [10] А.Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, *Изв. АН СССР. Серия матем.*, 50:6 (1986), 1276–1307.
- [11] А.Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Серия Матем.*, 54:3 (1990), 546–575.
- [12] Dragović, V., Radnović, M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards. *Regul. Chaot. Dyn.* 14, 479–494 (2009).
- [13] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2014, № 4, 18–27;
- [14] В.В. Ведюшкина, “Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических биллиардов”, *Матем. сб.*, 210:3 (2019), 17–74
- [15] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, “Интегрируемые биллиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела”, *Доклады Академии Наук (РАН)*, 465:2 (2015), 1–4.
- [16] В. В. Ведюшкина, “Слоение Лиувилля бильярдной книжки, моделирующей случай Горячева–Чаплыгина”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2020, № 1, 64–68;
- [17] В.В. Ведюшкина, А.Т. Фоменко, “Понижение степени интегралов гамильтоновых систем с помощью биллиардов”, *Доклады Академии наук*, 486:2 (2019), 151–155.
- [18] В.В. Ведюшкина (Фокичева), А.Т. Фоменко, “Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические биллиарды”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **83**:6 (2019), 63–103;
- [19] А.Т. Фоменко, В.В. Ведюшкина, “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2019, № 3, 15–25.
- [20] В.В. Ведюшкина, И.С. Харчева, “Биллиардные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, 212:8 (2021), 89–150.

- [21] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, А.Т. Фоменко, “Топологическое моделирование интегрируемых систем бильярдами: реализация числовых инвариантов”, Доклады Академии Наук (РАН), 493 (2020), 9–12.
- [22] В.В. Ведюшкина, “Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов” // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2021, 2, 28–32.
- [23] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало, “Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем” // Вестник Моск. унив. Серия 1: Матем. Механ., 2020, № 4, 22–28.
- [24] В.В. Ведюшкина, В.А. Кибкало “Бильярдные книжки малой сложности и реализация слоений Лиувилля интегрируемых систем”, Чебышевский сборник. 2022;23(1):53-82.
- [25] И.С. Харчева, “Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2020, № 4, 12–22.
- [26] В.В. Ведюшкина, “Интегрируемые бильярды реализуют торические слоения на линзовых пространствах и 3-торе”, Матем. сб., 211:2 (2020), 3–30.
- [27] В.В. Ведюшкина, “Топологический тип изоэнергетических поверхностей бильярдных книжек”, Матем. сб., 212:12 (2021), 3–19.
- [28] A.T. Fomenko, V.V. Vedyushkina and V.N. Zav'yalov, “Liouville foliations of topological billiards with slipping”, Russ. J. Math. Phys. Vol. 28, No. 1, 2021, pp. 37–55.
- [29] В.В. Козлов, “Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем”, Докл. АН СССР, **249**:6 (1979), 1299–1302.
- [30] В.В. Ведюшкина, В.Н. Завьялов, “Реализация геодезических потоков с линейным интегралом бильярдами с проскальзыванием”, Матем. сб., **213**:12 (2022)

В. Н. Завьялов (V. N. Zav'yalov)

Механико-математический факультет Московского
государственного университета им. М. В. Ломоносова
E-mail: vnzavyalov@mail.ru

Поступила в редакцию
28.03.2023