

УДК 517.938.5

## ИНВАРИАНТЫ ПСЕВДОЕВКЛИДОВА ВОЛЧКА ЭЙЛЕРА С НЕКОМПАКТНЫМИ СЛОЯМИ

Н. А. Белоусов <sup>1</sup> В. А. Кибкало <sup>2</sup>

Рассмотрен псевдоевклидов аналог волчка Эйлера, средний из трех главных моментов инерции которого отвечает отрицательной оси пространства. Слои слоения Лиувилля имеют тип прямого произведения, один из сомножителей которого всегда некомпактен или пуст. При произвольных значениях функций Казимира вычислены аналоги инвариантов Фоменко на неособых изоэнергетических и изоинтегральных поверхностях.

*Ключевые слова:* Интегрируемая система, динамика твердого тела, псевдоевклидово пространство, волчок Эйлера, топологический инвариант, особенность.

A pseudo-Euclidean analogue of the Euler top is considered such that the middle principal moment of inertia corresponds to the negative axis of the space. The leaves of the Liouville foliation are of direct product type, one of whose factors is always non-compact or empty. For arbitrary values of the Casimir functions, analogues of Fomenko invariants are calculated on non-singular isoenergy or isointegral surfaces.

*Key words:* Integrable system, rigid body dynamics, pseudo-Euclidean space, Euler top, topological invariant, singularity.

Топологический подход к интегрируемым гамильтоновым системам был предложен в работах А.Т.Фоменко и его научной школы, см. [1-2] и монографию [3]. Фазовое пространство системы — симплектическое многообразие  $(M^4, \omega)$  — разбивается на совместные уровни первых интегралов  $H, K$ , т.е. на нем возникает структура слоения Лиувилля. В ограничении на неособый трехмерный уровень энергии  $Q_h^3 : H = h$  или интеграла  $Q_k^3 : K = k$  имеем трехмерное многообразие  $Q^3$ , расслоенное на совместные уровни функции  $F$ , равной  $K$  и  $H$  соответственно. Почти все связные слои являются регулярными торами Лиувилля, а конечный набор значений  $c_i$  функции  $F$  может быть бифуркационным. В прообразе  $F^{-1}(U(c_i))$  окрестности  $U(c_i) \subset \mathbb{R}$  такого значения слоение не является тривиальным. Отметим, что если  $Q^3$  компактно и гладко, то  $F^{-1}(U(c_i))$  содержит критические точки, в которых косые градиенты первых интегралов  $\text{sgrad } H$  и  $\text{sgrad } K$  линейно зависимы. Бифуркации слоения на некомпактном  $Q^3$  могут происходить без критических точек (назовем их *некритическими бифуркациями*), причем прообраз  $F^{-1}(c_i)$  может быть пуст.

Построенная в работах [1-3] классификация боттовских особенностей (3-атомов Фоменко) и слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях  $Q^3$  существенно опирается на ряд свойств системы, включая гладкость многообразия  $Q^3$ , компактность  $Q^3$  и слоев слоения Лиувилля, полноту потоков гамильтоновых векторных полей энергии  $\text{sgrad } H$  и первого интеграла  $\text{sgrad } K$ , отсутствие положений равновесия  $\text{sgrad } H \neq 0$  в  $Q^3$ , невырожденность (боттовость) особенностей ранга 1 в нем, топологическую устойчивость системы.

<sup>1</sup>Белоусов Никита Алексеевич — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, email: nikbelousov09@gmail.com

*Belousov Nikita Alekseevich* — student of Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications.

<sup>2</sup>Кибкало Владислав Александрович — канд. физ.-мат. наук, ассист. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ; Москов. центр фонд. и прикл. матем.; e-mail: slava.kibkalo@gmail.com.

*Kibkalo Vladislav Alexandrovich* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Differential Geometry and Applications; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

Классифицирующим инвариантом лиувиллевой эквивалентности (последней гомеоморфности, сохраняющей некоторые ориентации, см. [3, т. 1, гл. 1, 4]), является граф с числовыми метками, называемый меченой молекулой или инвариантом Фоменко–Цишанга. Его ребра отвечают семействам регулярных связных слоев-торов, вершины — бифуркациям слоения, т.е. 3-атомам. Числовые метки кодируют склейку  $Q^3$  из 3-атомов по диффеоморфизмам граничных торов. “Забывание” числовых меток приводит к инварианту Фоменко или грубой молекуле, классифицирующей системы с точностью до грубой лиувиллевой эквивалентности.

Топологический подход активно развивался для систем с более слабыми ограничениями: интегрируемых билиардов с кусочно-гладким слоением [4-6], гамильтоновых системы с неполными потоками [7], систем с некомпактными слоями, см. обзор А.Т.Фоменко и Д.А.Федосеева [8]. Системы такого класса возникают в приложениях и содержат интересные примеры некомпактных некритических бифуркаций, например, классическая задача Кеплера и ряд обобщающих ее систем типа Бертрана [8], системы Соколова на алгебрах Ли [9]. С.С.Николаенко была построена топологическая классификация слоений конечного типа на некомпактных двумерных поверхностях [10], расширяющая конструкцию 2-атомов Фоменко. Некомпактные слоения и особенности были также найдены в слоениях билиардов на неограниченных столах [5].

А.В.Борисовым и И.С.Мамаевым [11] был рассмотрен класс “псевдоевклидовых” аналогов систем классической механики. Для этого на фазовом пространстве  $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$  выполним преобразование  $x_s \rightarrow ix_s, J_s \rightarrow iJ_s$  для  $s = 1, 2$ . Оно оставляет вещественным скобку Пуассона, отвечающую алгебре Ли  $e(3)$  группы движений трехмерного пространства  $\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk}J_k, \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk}x_k, \{x_i, x_j\} = 0$  для знака  $\varepsilon_{ijk}$  перестановки  $(123) \rightarrow (ijk)$ . Вещественными остаются функции Казимира получаемой скобки  $f_1$  и  $f_2$  (геометрический интеграл и интеграл площадей), а также гамильтонианы и первые интегралы известных систем классической механики, включая волчки Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, систему Жуковского.

В работах В.А.Кибкало, в том числе совместных с Е.С.Агуреевой и М.К.Алтуевым, показано, что слоения Лиувилля псевдоевклидовых аналогов волчка Эйлера [12], волчка Ковалевской [13-14] и системы Жуковского содержат и компактные, и некомпактные слои, а также некритические (присходящие без точек падения ранга отображения момента) бифуркации слоения.

Для псевдоевклидова аналога волчка Эйлера четыре первых интеграла  $f_1, f_2, H, K$  имеют вид

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad f_2 = x_1J_1 + x_2J_2 - x_3J_3, \quad H = \frac{J_1^2}{2A_1} + \frac{J_2^2}{2A_2} - \frac{J_3 - \lambda_3}{2A_3}, \quad K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2.$$

В работе [12] было описано разбиение пространства  $\mathbb{R}^3(\vec{J})$  на совместные уровни функций  $K$  и  $H$ . Результат существенно зависит от того, является ли главный момент инерции  $A_3$ , отвечающий отрицательной оси  $J_3$ , средним из трех  $A_i$  (тогда считаем  $0 < A_1 < A_3 < A_2$ ), или он является максимальным (минимальным) из трех. В первом случае каждая непустая связная компонента уровня  $K = k, H = h$  будет неограниченной, а во втором случае она будет компактной.

Для обоих случаев были построены бифуркационные диаграммы отображения  $K, H$  из неособого уровня  $M_{a,b}^4: f_1 = a, f_2 = b$  в  $\mathbb{R}^2(k, h)$  для случая  $(a, b) \neq (0, 0)$  и  $a \cdot b = 0$ . Каждый совместный уровень  $f_1, f_2, H, K$  кроме  $(h, k) = (0, 0)$  имеет тип прямого произведения, первый множитель которого есть совместный уровень двух квадрик  $K = k, H = h$  в  $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ , а второй — совместный уровень квадрики  $f_1 = a$  и плоскости  $f_2 = b$  в  $\mathbb{R}^3(\vec{x})$  при фиксированном  $\vec{J}$ . Дугам диаграммы сопоставляются аналоги 3-атомов Фоменко, т.е. классы последовательной гомеоморфности слоения Лиувилля, находящегося в прообразе малого отрезка, трансверсального к данной дуге.

В работе мы завершим анализ “некомпактного” случая  $A_1 < A_3 < A_2$ , построим бифуркационные диаграммы при  $a > 0, b \neq 0$  и  $a < 0, b \neq 0$ , опишем возникающие аналоги 3-атомов и грубых молекул для неособых уровней гамильтониана  $H$  или интеграла  $K$ .

На рис. 1 изображена бифуркационная диаграмма  $\Sigma$  отображения момента  $(K, H)$  псевдоевклидова аналога волчка Эйлера с условием  $A_1 < A_3 < A_2$  при неособых  $a \cdot b = 0$ . Каждый совместный уровень функций  $f_1, f_2, K, H$  кроме  $(k, h) = (0, 0)$  представлен как прямое произведение пересечения  $H = h, K = k$  в  $\mathbb{R}^3(\vec{J})$  и пересечения  $f_1 = a, f_2 = b$  в  $\mathbb{R}^3(\vec{x})$  при фиксированном  $\vec{J}$ . Через  $)$  обозначим гиперболу, каждая ветвь которой биективно проецируется на  $OJ_3$  или  $Ox_3$ , а через  $\asymp$  — гиперболу, не пересекающую плоскость  $J_3 = J_{3,0}$  или  $x_3 = x_{3,0}$ . Дугам  $\Sigma$  отвечают аналоги 3-атомов Фоменко  $\widehat{A} = A \times I, \widehat{B}'' \times S^1, \widehat{B}'' = B'' \times I, \widehat{X}_U = X_U \times I, \widehat{X}_{||} = X_{||} \times I, \widehat{O} = O_2 \times I$ .

Их базы  $A, B'', X_U, O_2$  приведены на рис. 1.

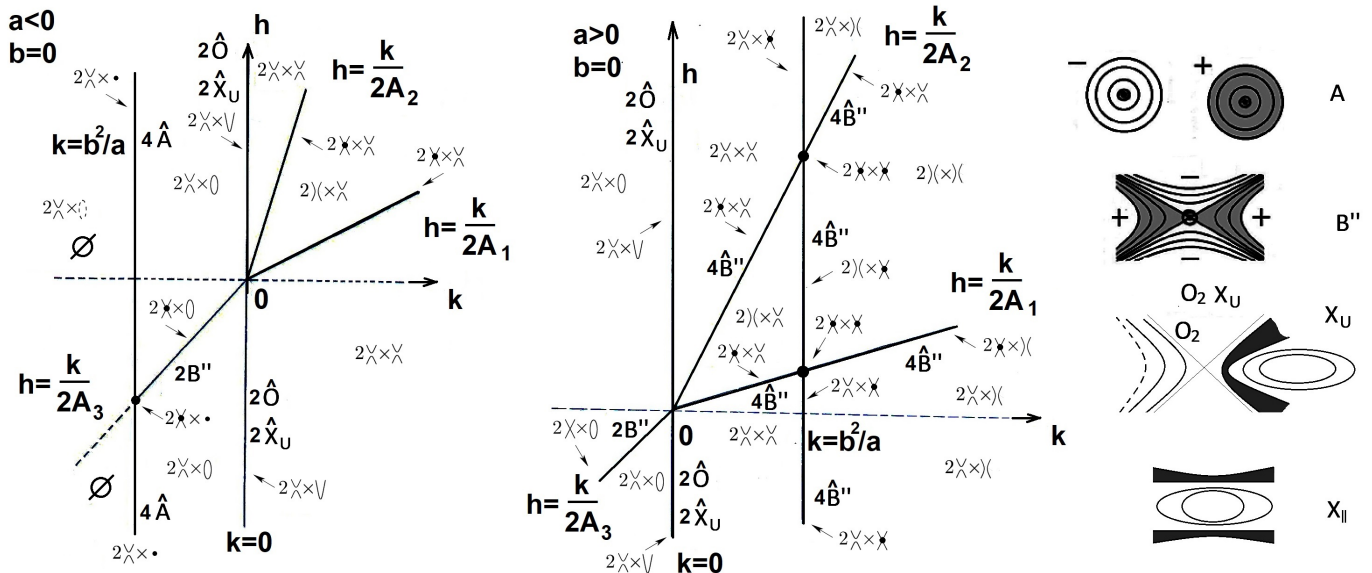


Рис. 1: Бифуркационные диаграммы отображения  $(K, H)$  аналога волчка Эйлера с условием  $A_1 < A_3 < A_2$  при  $a < 0, b \neq 0$  и  $a > 0, b \neq 0$  соответственно.

**Утверждение 1.** При  $A_1 < A_3 < A_2$  бифуркационные диаграммы  $\Sigma$  отображения  $(K, H)$  для случаев  $a > 0, b \neq 0$  и  $a < 0, b \neq 0$  изображены на рис. 1. Они состоят из сегментов пяти прямых:  $k = b^2/a, k = 0$  и  $h = h_i(k) = k/(2A_i)$  для  $i = 1, 2, 3$ . Для всех стратов  $\Sigma$  и  $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$  кроме  $(0, 0)$  совместный уровень представлен как прямое произведение и является некомпактным. Дугам  $\Sigma$  сопоставлены аналоги 3-атомов Фоменко  $\hat{A} = A \times I, B'' \times S^1, \hat{B}'', \hat{X}_U, \hat{O}$ .

**Доказательство.** 1. Пересечение квадрики  $f_1 = a$  в  $\mathbb{R}^3$  и плоскости  $f_2 = b$  является плоской квадратикой. Ее тип находится по инвариантам формы в подходящих координатах: следу  $I_1$  и определителю  $I_2$  квадратичной части и определителю матрицы. Последние определяются знаками чисел  $a, b, k$  и выражения  $b^2 - ak$ , обращаясь в ноль при  $k = 0$  и при  $b^2 = ak$ . В случае  $a > 0, b \neq 0$  с ростом  $k$  тип квадрики меняется так: эллипс -  $X_U$  - гипербола  $\simeq$  -  $B''$  - гипербола  $\simeq$ . В случае  $a < 0, b \neq 0$  имеем: мнимый эллипс -  $A$  - эллипс -  $X_U$  - гипербола  $\simeq$ .

2. Отсюда слой Лиувилля является расслоением, где базой будет первая компонента, а слоем — вторая. Связная компонента базы есть 1-диск (для гипербол  $\simeq$ ) (или  $\simeq$ ) или односвязна (для  $X \times O$ ), т.е. расслоение тривиально. Утверждение доказано.  $\square$

Сформулируем основную теорему об аналогах грубых молекул для неособых изоэнергетических  $Q_h^3$  или изоинтегральных  $Q_k^3$  поверхностей изучаемой системы. Слоение кодируется графом с заданной на нем функцией  $F$ , равной  $K$  или  $H$  соответственно. Ребра отвечают семействам регулярных связных слоев, вершины — связным компонентам прообраза окрестности бифуркационного значения. Указанная на рис. 2 информация о графах позволяет задать как класс гомеоморфности двух графов, так и класс послыной гомеоморфности прообраза окрестностей бифуркационных значений функции на них.

**Теорема 1.** Слоение Лиувилля “некомпактного” псевдоевклидова волчка Эйлера с условием  $A_1 < A_3 < A_2$  для неособых пар  $(a, b) \neq (0, 0)$ , ограниченное на неособую изоэнергетическую  $Q_h^3$  или изоинтегральную  $Q_k^3$  поверхность, задается как оснащенный граф  $M_i$  или несвязное объединение таких графов, изображенных на рис. 2. В случае  $a \cdot b = 0$  инвариант слоения на неособой  $Q_h^3$  и  $Q_k^3$  зависит от знака  $h$  или  $k$ , см. табл. 1. В случае  $a \cdot b \neq 0$  неособым зонам значений  $H$  и  $K$ , упорядоченным по возрастанию соответствующей функции, отвечают следующие инварианты:

$$a > 0, h : 2M_4, M_3, M_2, M_1; \quad a > 0, k : 2M_{10}, 2M_{11}, 2M_{11};$$

$$a < 0, h : 4M_9 \sqcup 4M_8, 2M_7 \sqcup 4M_8, M_5 \sqcup M_6; \quad a < 0, k : \emptyset, 2M_{10}, 2M_{11}.$$

случай	$h > 0$	$h < 0$	$k > 0$	$k < 0$
$a > 0, b = 0$	$M_{12}$	$2M_{13}$	$2M_{11}$	$2M_{10}$
$a = 0, b \neq 0$	$M_5 \sqcup M_6$	$2M_{14} \sqcup 4M_8$	$2M_{11}$	$2M_{10}$
$a < 0, b = 0$	$2M_6$	$8M_8$	$2M_{11}$	$\emptyset$

Таблица 1: Аналоги грубых молекул слоений Лиувилля на неособых  $Q_h^3$  и  $Q_k^3$  в случае  $ab = 0$ .

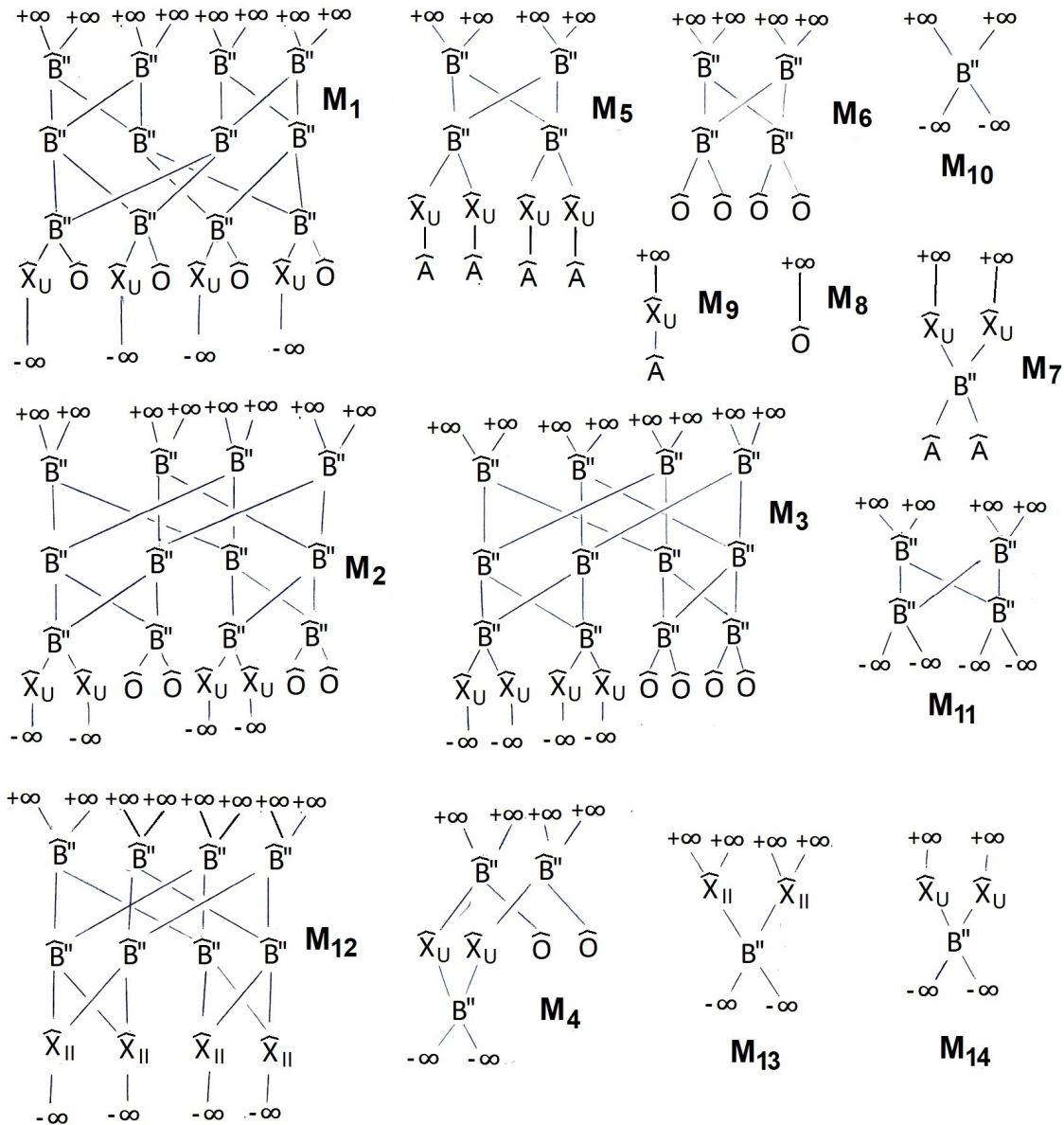


Рис. 2: Аналоги грубых молекул слоений Лиувилля на связных компонентах неособых  $Q_h^3$  и  $Q_k^3$ .

**Доказательство.** 1. Для построения грубых молекул требуется соотнести связные компоненты границ двух наборов 3-атомов, отвечающих соседним бифуркационным уровням.

2. Изоинтегральные поверхности  $K = k \neq 0$  будут прямым произведением неособой базы  $\{K = k_0\} \subset \mathbb{R}^3(\vec{J})$  на слой, тип которого определяется знаками  $a, b, b^2 - ak$ . Если слой непуст, то молекула содержит один или два бифуркационных уровня, по количеству лучей  $h = k/(2A_i)$ , пересекаемых прямой  $k = k_0, k_0 \neq 0$ . Если таких луча два, то каждому отвечает два 2-атома  $B''$ , и два верхних ребра одного атома переходят в нижние ребра двух разных атомов с другого уровня.

3. При анализе случая  $H = h_0 \neq 0$  заметим, что слоение  $H = h, K = k$  обладает тремя

симметриями  $J_i \rightarrow -J_i$ . На четырех связных компонентах неособого слоя их попарные композиции (повороты вокруг оставшейся оси) и  $id$  зададут группу  $Z_2 \oplus Z_2$  собственных симметрий.

Каждую связную компоненту регулярного уровня  $f_1, f_2, H, K$  закодируем четырьмя символами  $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta)$ , где  $\delta_i \in \{\pm\}$  для  $i = 1, 2, 3$  и  $\delta \in \{0, \smile, \frown\}$ . На каждой связной компоненте уровня  $H = h, K = k$  в  $\mathbb{R}^3(\vec{J})$  знаки в тохности двух из трех координат  $J_1, J_2, J_3$  постоянны. Примем для них  $\delta_i = \text{sgn } J_i$ . Это следует из попарного различия моментов  $A_i$ . Оставшийся  $\delta_i$  отметим штрихом и будем считать фиктивным для данного уровня. Разные знаки этой координаты отвечают разным “концам” данной компоненты, гомеоморфной  $\mathbb{R}$ .

Символ  $\delta_1$  фиктивен при  $h < k/(2A_1), k > 0$  и при  $h < k/(2A_3), k < 0$ , символ  $\delta_2$  при  $h > k/(2A_2), k > 0$  и при  $h > k/(2A_3), k < 0$ , а символ  $\delta_3$  при  $k/(2A_1) < h < k/(2A_2), k > 0$ .

Символ  $\delta$  кодирует компоненту слоя в  $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ : 0 отвечает эллипсу, символы  $\smile$  и  $\frown$  ветвям гиперболы  $\succ, \smile$  (отвечают двум ветвям гиперболы или паре параллельных прямых).

Регулярный уровень задается набором кодов, где пара не фиктивных символов из  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  принимает все четыре значения, а символ  $\delta$  — произвольные допустимые при таких  $a, k, b^2 - ak$  значения. При переходе через бифуркационный уровень набор кодов  $S_{f+\varepsilon}$  уровня  $f - \varepsilon$  переходит в набор кодов  $S_{f-\varepsilon}$  уровня  $f + \varepsilon$ . Возникает многозначное отображение  $F : S_{f-\varepsilon} \rightarrow S_{f+\varepsilon}$ , при котором вершине молекулы отвечает пара  $X \subset S_{f-\varepsilon}$  и  $Y \subset S_{f+\varepsilon}$  такие что  $Y = F(X), X = F^{-1}(Y)$ .

Для лучей  $h = k/(2A_i)$  меняется номер фиктивного символа, а для прямых  $k = 0$  и  $k = b^2/a$  меняется значение символа  $\delta$ . При проходе через прямую  $k = b^2/a$  по возрастанию  $k$  значение  $\delta$  меняется так:  $\succ \rightarrow \smile$  (в случае  $a > 0, b \neq 0$  и  $\circ \rightarrow \succ$  в случае  $a > 0, b = 0$ ). При переходе через  $k = 0$  значение  $\delta$  меняется так, от  $k < 0$  к  $k > 0$ :

$$a \in \mathbb{R}, b \neq 0 : 0 \rightarrow \smile, \circ \rightarrow \frown; \quad a > 0, b = 0 : 0 \rightarrow \smile, \quad a < 0, b \neq 0 : \circ \rightarrow \succ.$$

Для каждой неособой зоны энергии  $Q_h^3$  можно записать коды для уровней с большим по модулю отрицательным  $k < 0$ . Далее из вида бифуркационной диаграммы  $\Sigma$  (см. рис. 1 при  $ab \neq 0$  и [12, рис. 8-9] при  $ab = 0$ ) известно, в какой последовательности применять при построении молекулы указанные выше преобразования, отвечающие кривым из  $\Sigma$ . Теорема доказана.  $\square$

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 22-71-00111) в МГУ имени М.В.Ломоносова.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фоменко А.Т.* Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. **50**, №6. 1276–1307.
2. *Фоменко А.Т., Цишанг Х.* Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Известия АН СССР. **54**, №3. 546–575.
3. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2 // Изд. дом "Удмуртский университет Ижевск 1999.
4. *Фокичева В.В.* Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. **206**, №10. 127–176.
5. *Ведюшкина (Фокичева) В.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые топологические бильярды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2017. **81**, №4. 20–67.
6. *Фоменко А.Т., Ведюшкина В.В.* Бильярды и интегрируемые системы // УМН. 2023. **78**, №5. 93–176.
7. *Кудрявцева Е.А.* Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками // Докл. РАН. 2012. **445**, №4. 383–385.
8. *Fedoseev D.A., Fomenko A.T.* Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems // J. Math. Sc. 2020. **248**. 810–827.
9. *Новиков Д.В.* Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли  $e(3)$  // Матем. сб. 2011. **202**, №5. 127–160.
10. *Николаенко С.С.* Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях // Матем. сб. 2020. **211**, №8. 68–101.
11. *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces // Rus. J. of Math. Phys. 2016. **23**, №4. 431–454.

12. *Алтуев М.К., Кибкало В.А.* Топологический анализ псевдоевклидова волчка Эйлера при особых значениях параметров // Матем. сб. 2023. **214**, №3. 54–70
13. *Кибкало В.А.* Свойство некомпактности слоев и особенностей неевклидовой системы Ковалевской на пучке алгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2020. №6. 56–59.
14. *Кибкало В.А.* Первый класс Апфельрота псевдоевклидовой системы Ковалевской // Чебышевский Сборник. 2023. **24**, №1. 69-88
15. *Агуреева Е.С., Кибкало В.А.* Топологический анализ осесимметричной системы Жуковского в случае алгебры Ли  $e(2, 1)$  // Вестн. Моск. ун-та. Матем., мех., 2024, в печати.