

В. А. Кибкало

Топология слоений Лиувилля псевдоевклидовых аналогов систем Эйлера

В работе изучаются интегрируемые псевдоевклидовы аналоги волчков Эйлера на алгебрах Ли $so(4)$ и $so(3, 1)$, построение которых основано на одном наблюдении из работы А.В.Борисова и И.С.Мамаева. Для всех значений параметров, при которых совместный уровень функций Казимира скобки Пуассона $M_{a,b}^4$ является гладким 4-мерным многообразием, были построены бифуркационные диаграммы, описаны возникающие в системе типы перестроек (расширяющие класс атомов Фоменко, известных для компактных слоений интегрируемых систем) и базы слоений Лиувилля на 3-поверхностях (расширение класса грубых молекул Фоменко). Слои слоения Лиувилля, как регулярные так и особые ранга 1, сами представляются в виде прямого произведения двух одномерных множеств. Как оказалось, такие системы реализуют интересные примеры некомпактных некритических бифуркаций, происходящих без падения ранга отображения момента.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: интегрируемая система, квадрака, волчок Эйлера, слоение Лиувилля, псевдоевклидово пространство, бифуркационная диаграмма, топологический инвариант, особенность.

§ 1. Введение

Изучение гамильтоновых систем (в частности, свойств их особых движений — периодических траекторий и положений равновесия) с помощью топологических методов и подходов теории Морса было в значительной степени мотивировано известной работой С.Смейла [1]. В интегрируемом случае теория топологической классификации интегрируемых систем была построена в работах А.Т.Фоменко, его соавторов и учеников (см. обзор в монографии А.В.Болсинова и А.Т.Фоменко [2] и работы [3, 4, 5, 6]).

В настоящей работе изучена топология слоений Лиувилля [2] аналогов системы Эйлера на нескольких алгебрах Ли. Изучаемые системы строятся из известного волчка Эйлера с помощью двух конструкций: включения алгебры Ли $e(3)$ группы движений трехмерного пространства в пучок $so(3, 1) - e(3) - so(4)$, описанное А.В.Комаровым [7] в применении к волчку Ковалевской, и преобразования, предложенного А.В.Борисовым и И.С.Мамаевым на основе псевдоевклидова скалярного произведения в работе [8] и сопоставляющего многим интегрируемым системам механики их вещественные интегрируемые аналоги.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 22-71-00111) в МГУ имени М.В.Ломоносова.

После редукции данная система может быть задана гамильтонианом H на $\mathbb{R}^6(J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3)$ со скобкой Пуассона, задающей на нем структуру двойственного пространства к алгебре Ли $e(3)$. Эта линейная скобка Пуассона включается в пучок (1.1) скобок Пуассона на том же \mathbb{R}^6 , соответствующих алгебрам Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$.

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \quad \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k. \quad (1.1)$$

При $\varkappa < 0$, $\varkappa = 0$, $\varkappa > 0$ эти скобки соответствуют алгебрам Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$. Параметр \varkappa считаем вещественным.

Система уравнений Эйлера

$$\dot{J}_i = \{J_i, H\}, \quad \dot{x}_i = \{x_i, H\}$$

задает на двойственном пространстве к соответствующей алгебре Ли динамическую систему. Для гладкой функции H задается гамильтоново векторное поле — косоый градиент $\text{sgrad } H$.

На пространстве \mathbb{R}^3 зададим скалярное произведение $g = \text{diag}(1, 1, \sigma)$ для $\sigma \in \mathbb{R}/\{0\}$ и рассмотрим \mathbb{R} -линейный изоморфизм Φ пространства \mathbb{C}^6 :

$$\tilde{J}_j = \frac{\sigma}{i} J_j, \quad \tilde{x}_j = \frac{\sigma}{i} x_j, \quad \text{для } j = 1, 2, \quad \tilde{J}_3 = J_3, \quad \tilde{x}_3 = x_3.$$

Структурные константы новой и старой (из пучка P) скобок Пуассона совпадают, за исключением домноженных на σ констант для $\{J_1, J_2\}$, $\{J_1, x_2\}$, $\{x_2, J_1\}$ при $\varkappa \in \mathbb{R}$ и $\{x_1, x_2\}$ при $\varkappa \neq 0$:

$$\{\tilde{J}_1, \tilde{J}_2\} = \sigma \tilde{J}_3 = \sigma J_3 = \sigma \{J_1, J_2\}.$$

Данная операция была предложена в недавней работе А.В.Борисова и И.С.Мамаева [8] и позволяет сопоставить многим известным системам механики их псевдо-евклидовы аналоги: алгебре Ли $so(3)$ при этом соответствует алгебра $so(2, 1)$, а алгебре Ли $e(3)$, входящей в пучок P при нулевом \varkappa , алгебра, которую обозначим $e(2, 1)$.

Как известно, следующий гамильтониан H задает интегрируемый волчок Эйлера на алгебрах Ли из пучка $so(3, 1) - e(3) - so(4)$:

$$H_{Euc} = \frac{J_1^2}{2A_1} + \frac{J_2^2}{2A_2} + \frac{J_3^2}{2A_3}. \quad (1.2)$$

Все они обладают квадратичным интегралом K , который, отметим, является также интегралом системы Жуковского (т.е. волчка Эйлера на алгебре Ли $e(3)$ при добавленном постоянном гиростатическом моменте):

$$K_{Euc} = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2. \quad (1.3)$$

Функции Казимира алгебр Ли $so(3, 1) - e(3) - so(4)$ имеют вид

$$f_{1, Euc} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \varkappa(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2), \quad f_{2, Euc} = J_1 x_1 + J_2 x_2 + J_3 x_3. \quad (1.4)$$

Совместные поверхности уровня $M_{a,b} : f_{1,Euc} = a, f_{2,Euc} = b$ в \mathbb{R}^6 являются четырехмерными симплектическими листами в следующих случаях:

$$\varkappa < 0 : (a, b) \neq (0, 0), \quad \varkappa = 0 : a > 0, \quad \varkappa > 0 : a > \sqrt{\varkappa}|b|.$$

После выполненного преобразования функции f_1, f_2, H, K принимают вид

$$H = \frac{J_1^2}{2A_1} + \frac{J_2^2}{2A_2} - \frac{J_3^2}{2A_3}, \quad (1.5)$$

$$K = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2, \quad (1.6)$$

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + \varkappa(J_1^2 + J_2^2 - J_3^2), \quad f_2 = J_1x_1 + J_2x_2 - J_3x_3. \quad (1.7)$$

Далее будем также обозначать функцию Казимира f_1 в случае $\varkappa = 0$ как $f_1^0(\vec{x})$, а в общем случае будем понимать эту функцию Казимира как $f_1(\varkappa, \vec{x}, \vec{J})$.

В настоящей работе мы единообразно опишем для произвольных $\varkappa \in \mathbb{R}$ бифуркационную диаграмму $\Sigma_{k,h}$ отображения момента (K, H) таких систем на различных четырехмерных симплектических листах $M_{a,b}^4$. Для псевдоевклидова аналога классического волчка Эйлера (т.е. при $\varkappa = 0$) такой вопрос изучался автором ранее, в частности, случаю $a \cdot b = 0, (a, b) \neq (0, 0)$ посвящена работа [9]. Для аналога волчка Ковалевской в работе С.В.Соколова [10] было построено разделение переменных, а в работе автора [11] был получен критерий компактности совместного уровня четырех первых интегралов системы, показано наличие бифуркации компактных уровней в некомпактные (из чего, помимо прочего, следует наличие некритической бифуркации в данной системе).

Изучению интегрируемых систем с некомпактными бифуркациями слоений и неполными потоками гамильтоновых полей первых интегралов посвящено немало работ, выполненных совсем недавно (см. обзор [12] и работы о классификации различных особенностей [13, 14, 15, 16] и работы [17, 18, 19], где изучаются конкретные системы).

§ 2. Вспомогательные утверждения

В данном разделе приведем несколько результатов об изучаемых системах, которые далее позволят нам явно описать топологию слоений Лиувилля, определить типы бифуркаций и построить аналоги инвариантов Фоменко для трехмерных интегральных поверхностей.

Вначале определим, для каких a, b, \varkappa совместные уровни функций $f_1 = a, f_2 = b$ будут гладкими четырехмерными поверхностями. Далее будем изучать слоения Лиувилля именно на этих симплектических листах (или несвязных объединениях последних). Этому посвящена лемма 2.1.

Поскольку гамильтониан H и первый интеграл K являются функциями от импульсов $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$, то слой слоения Лиувилля в \mathbb{R}^6 представим как расслоение с базой $H = h, K = k$ и слоем $f_1 = a, f_2 = b$, где последняя система рассматривается в $\mathbb{R}^{\neq}(\vec{x})$. Нахождение типа такого слоя для разных k, a, b, \varkappa посвящено утверждение 1.

Затем, с использованием найденного в работе [9] слоения пространства $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ на совместные уровни пары функций $H = h$ и $K = k$, опишем возникающие типы слоев и их окрестностей (аналоги 3-атомов Фоменко). Для этого покажем,

что слой Лиувилля (и даже вся изоинтегральная поверхность $K = k$) имеет структуру расслоения. Неособым слоям отвечают расслоения с базой — одномерным многообразием, а базой для особого слоя слоения Лиувилля может быть, например, особый слой 2-атома C_2 .

Далее укажем виды бифуркационных диаграмм при разных a, b, \varkappa и вычислим типы слоений на изоинтегральных и некоторых изоэнергетических поверхностях для разных \varkappa, a, b . —

Вначале изучим, когда совместный уровень $f_1 = a, f_2 = b$ будет гладкой четырехмерной поверхностью, т.е. когда он точно будет являться симплектическим листом (или их несвязным объединением) данной скобки Ли-Пуассона.

ЛЕММА 2.1. *В зависимости от знака \varkappa , совместный уровень $f_1 = a, f_2 = b$ является глобальной гладкой четырехмерной поверхностью при следующих значениях a, b . Для остальных $M_{a,b}^4$ теорема о неявной функции не выполнена в следующих точках из $\mathbb{R}^6(\vec{J}, \vec{x})$:*

$$\varkappa > 0: \quad a \neq 2\kappa k, \quad u \neq \pm\sqrt{\varkappa}k, \quad \text{т.е. } a \neq \pm 2\sqrt{\varkappa}b; \quad \text{точки } \vec{x} = \pm\sqrt{\varkappa}\vec{J};$$

$$\varkappa = 0: \quad (a, b) \neq (0, 0); \quad \text{точки } \vec{x} = 0 \text{ и любом } \vec{J} \in \mathbb{R}^3;$$

$$\varkappa < 0: \quad (a, b) \neq (0, 0); \quad \text{точки } \vec{J} = \vec{x} = 0.$$

Отсюда следует, что при указанных выше a, b совместные уровни $M_{a,b}^4$ являются симплектическими листами (или их связным объединением) скобки Ли-Пуассона.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Составим матрицу из дифференциалов f_1, f_2 по всем шести переменным и рассмотрим все определители 2×2 в ней. Найдем те точки, где все они равны нулю. Во всех остальных точках будет верна теорема о неявной функции, т.е. совместный уровень будет гладкой 4-мерной поверхностью для тех a, b , которые не содержат этих точек.

$$df_1 = (2\kappa J_1, 2\kappa J_2, -2\kappa J_3, 2x_1, 2x_2, -2x_3)$$

$$df_2 = (x_1, x_2, -x_3, J_1, J_2, -J_3)$$

Поскольку наличие знака “минус” при x_3, J_3 в df_1 и df_2 не влияет на свойство определителя быть равным нулю, то запишем определители для пар столбцов J_i и J_j, J_j и x_j, x_i и x_j :

$$\varkappa(x_i J_j - x_j J_i) = 0, \quad i \neq j, \quad x_i x_j - \varkappa J_i J_j = 0, \quad \forall i, j, \quad x_i J_j - x_j J_i = 0, \quad i \neq j.$$

2. Если $\vec{x} = \vec{J} = \vec{0}$, то независимо от знака \varkappa все определители равны нулю. Из третьего условия (так же, при всех \varkappa) получаем, что или хотя бы один из векторов \vec{x}, \vec{J} равен нулю, или они пропорциональны $(x_1 : x_2 : x_3) = (J_1 : J_2 : J_3)$.

Если $\vec{x} = \vec{0}$, то при $\varkappa = 0$ все определители равны нулю независимо от \vec{J} , а при остальных \varkappa определители второго типа для $i = j$ отличны от нуля для всех \vec{J} кроме нулевого.

Если \vec{x} и \vec{J} отличны от нуля и пропорциональны, то определители первого, третьего и второго (для $i \neq j$) типов равны нулю. Для $i = j$ имеем $x_i^2 = \varkappa J_i^2$, т.е. в случае $\varkappa < 0$ решений нет, а при $\varkappa > 0$ решениями будут $\vec{x} = \pm\sqrt{\varkappa}\vec{J}$.

Подставив полученные \vec{x} и \vec{J} в f_1 и f_2 получим следующие “запрещенные” уровни $M_{a,b}^4$: в случае $\varkappa \leq 0$ Это $(a, b) = 0$, а в случае $\varkappa > 0$ это $a = 2\varkappa(J_1^2 + J_2^2 - J_3^2) = 2\varkappa k$ и $b = \pm\sqrt{\varkappa}(J_1^2 + J_2^2 - J_3^2) = \pm\sqrt{\varkappa}k$, т.е. $a = \pm 2\sqrt{\varkappa}b$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Далее на указанных уровнях слоения мы изучать не будем: они могут не быть четырехмерными топологическими многообразиями, а скобка Пуассона на них может не задавать симплектическую структуру.

Теперь опишем, как в случаях $\varkappa < 0$, $\varkappa = 0$ и $\varkappa > 0$ устроено пересечение уровней $f_1 = a$ и $f_2 = b$ как функций в $\mathbb{R}^3(x)$. При фиксированном \mathbb{J} имеем, что $f_2 = b$ задает плоскость, т.е. функция f_1 в ограничении на нее задаст квадрику. В более узком случае $\varkappa = 0, a \cdot b = 0$ он был изложен в работе [9].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При фиксированном $\vec{J} \in \mathbb{R}^3(\vec{J})$ совместный уровень обобщенного гиперлоида $f_1 = a$ и плоскости $f_2 = b$ в пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ является плоской квадрикой, тип которой определяется знаком \varkappa , неособой парой значений $f_1 = a, f_2 = b$ и значением $k = K(\vec{J})$ согласно таблицам 1, 2, 3 для случаев $\varkappa < 0, \varkappa = 0, \varkappa > 0$ соответственно. В первом столбце указан номер бифуркационной диаграммы каждого случая на рис. 1, 2.

6	$a \cdot b \neq 0;$ $k :$	$k < k_1$	$k_1 = \frac{a+\sqrt{\Delta}}{2\varkappa}$	$(k_1, 0)$	0	$(0, k_2)$	$k_2 = \frac{a-\sqrt{\Delta}}{2\varkappa}$	$k > k_2$
	тип	Im-элл.	Im- X	эллипс	параб.	гиперб.	X	гиперб.
	I_2, I_3	+, +	+, 0	+, -	0, -	-, -	-, 0	-, +
8	$a > 0, b = 0;$ $k :$	$k < k_1$	$k_1 = \frac{a}{\varkappa}$	$(k_1, 0)$	$k_2 = 0$	$k > 0$	-	-
	тип	Im-элл.	Im- X	эллипс		гиперб.	-	-
	$I_2, I_3, (\hat{I}_2)$	+, +	+, 0	+, -	0, 0, (-)	-, +	-	-
6	$a = 0, b \neq 0;$ $k :$	$k < k_1$	$k_1 = \frac{- b }{\sqrt{-\varkappa}}$	$(k_1, 0)$	0	$(0, k_2)$	$k_2 = \frac{ b }{\sqrt{-\varkappa}}$	$k > k_2$
	тип	Im-элл.	Im- X	эллипс	параб.	гиперб.	X	гиперб.
	I_2, I_3	+, +	+, 0	+, -	0, -	-, -	-, 0	-, +
7	$a < 0, b = 0;$ $k :$	-	-	$k < 0$	$k_1 = 0$	$(0, k_2)$	$k_2 = \frac{a}{\varkappa}$	$k > k_2$
	тип	-	-	Im-элл.	Im-	гиперб.	X	гиперб.
	$I_2, I_3, (\hat{I}_2)$	-	-	+, +	0, 0, (+)	-, -	-, 0	-, +

Таблица 1. Случай $\varkappa < 0$: тип пересечения поверхностей $f_1 = a, f_2 = b$ в пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ в зависимости от $k \in \mathbb{R}$. Здесь I_2, I_3 — инварианты квадрики, \hat{I}_2 — ее полуинвариант. Через X и $||$ обозначим пары действительных прямых (пересекающихся или параллельных), а $Im-X$ и $Im-||$ — их мнимые аналоги (как множества точек — точка и пустое множество).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $f_1 = f_1^0 + \varkappa K$. Отсюда при фиксированном \vec{J} совместный уровень $f_1 = a, f_2 = b$ сводится к условию $f_1^0 = a_0, f_2 = b$ для

5	$a > 0, b \neq 0$	$k < 0$	0	$(0, k_0)$	$k_0 = b^2/a$	$k > k_0$
	тип	эллипс	параб.	гиперб.	X	гиперб.
	I_2, I_3	+, -	0, -	-, -	-, 0	-, +
4	$a < 0, b \neq 0$;	$k < k_0$	$k_0 = b^2/a$	$(k_0, 0)$	0	$k > k_0$
	тип	Im-элл.	Im-X	эллипс	параб.	гиперб.
	I_2, I_3	+, +	+, 0	+, -	0, -	-, -
3	$a > 0, b = 0$	$k < 0$	0	$k > 0$		
	тип	эллипс		гиперб.		
	$I_2, I_3, (\hat{I}_4)$	+, -	0, 0, (-)	-, +		
2	$a = 0, b \neq 0$	$k < 0$	0	$k > 0$		
	тип	эллипс	параб.	гиперб.		
	I_2, I_3	+, -	0, -	-, -		
1	$a < 0, b = 0$	$k < 0$	0	$k > 0$		
	тип	Im-элл.	Im-	гиперб.		
	$I_2, I_3, (\hat{I}_4)$	+, +	0, 0, (+)	-, -		

Таблица 2. Случай $\varkappa = 0$: тип пересечения поверхностей $f_1 = a, f_2 = b$ в пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ в зависимости от $k \in \mathbb{R}$. Здесь I_2, I_3 — инварианты квадрики, \hat{I}_4 — ее полуинвариант. Через X и || обозначим пары действительных прямых (пересекающихся или параллельных), а Im-X и Im-|| — их мнимые аналоги (как множества точек — точка и пустое множество).

$a_0 = a - \varkappa k$. Вначале опишем случай $\varkappa = 0$ (тогда $f_1 = f_1^0$), затем перейдем к случаям $\varkappa \neq 0$.

1. Геометрическая суть задачи такова: плоскость $f_2 = b$, состоящая из точек пространства $\mathbb{R}^3(x)$, перпендикулярна в евклидовом смысле вектору с координатами $(J_1, J_2, -J_3)$. При $f_2 = b = 0$ она проходит через ноль, а иначе радиус-векторы ее точек получаются из радиус-векторов точек плоскости $f_2 = 0$ сдвигом на вектор $(J_1, J_2, -J_3)$, умноженный на $b/(J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)$.

Условие $f_1^0 = a_0$ задает обобщенный гиперboloид: двуполостный при $a_0 < 0$, конус при $a_0 = 0$ и однополостный при $a_0 > 0$. Исключим далее случай $a = b = 0$ как особую пару. Для нахождения типа совместного уровня $f_1 = a_0, f_2 = b$ к информации о том, каковы знаки $f_1 = a_0$ и $f_2 = b$, надлежит добавить следующую. Как относительно асимптотического конуса $f_1 = 0$ расположен радиус-вектор \vec{J} , т.е. каков знак $f_1 = k$ функции f_1 в конце соответствующего вектора пространства $\mathbb{R}^3(\vec{x})$? Как покажем ниже, инварианты I_2, I_3 соответствующей квадрики определяются значениями a_0, b, k , а знаки следа I_1 и полуинварианта \hat{I}_2 , зависящих также от J_3^2 , в актуальных для задачи классификации случаях легко восстанавливаются из знаков I_2 и I_3 .

Здесь мы пользуемся замечательным свойством систем типа Эйлера (классический волчок, его аналоги на $so(4)$ и $so(3, 1)$, системы Жуковского итп) — они имеют один и тот же дополнительный интеграл, не зависящий от параметров системы (моменты инерции A_i , компоненты вектора гиростатического момента для системы Жуковского) и являющийся квадратикой от трех перемен-

12	$a > 2\sqrt{\varkappa} b ,$ $b \neq 0; k :$	$k < 0$	0	$(0, k_1)$	$k_1 = \frac{a-\sqrt{\Delta}}{2\varkappa}$	(k_1, k_2)	$k_2 = \frac{a+\sqrt{\Delta}}{2\varkappa}$	$k > k_2$
	тип	эллипс	параб.	гиперб.	X	гиперб.	X	гиперб.
	I_2, I_3	+, -	0, -	-, -	-, 0	-, +	-, 0	-, -
	$a = 2\sqrt{\varkappa} b ,$ $b \neq 0; k :$	-	-	$k < 0$	0	$(0, k_1)$	$k_1, k_2 = \frac{a}{\varkappa}$	$k > k_2$
	тип	-	-	эллипс	параб.	гиперб.	X	гиперб.
	I_2, I_3			+, -	0, -	-, -	-, 0	-, -
2	$ a < 2\sqrt{\varkappa} b ,$ $a \neq 0; k :$	-	-	$k < 0$	0	$k > 0$	-	-
	тип	-	-	эллипс	параб.	гиперб.	-	-
	I_2, I_3			+, -	0, -	-, -		
	$a = -2\sqrt{\varkappa} b ,$ $b \neq 0; k :$	$k < k_1$	$k_1, k_2 = \frac{a}{\varkappa}$	$(k_2, 0)$	0	$k > 0$	-	-
	тип	эллипс	параб.	гиперб.	X	гиперб.	-	-
	I_2, I_3	+, -	+, 0	+, -	0, -	-, -		
11	$a < -2\sqrt{\varkappa} b ,$ $b \neq 0; k :$	$k < k_1$	$k_1 = \frac{a-\sqrt{\Delta}}{2\varkappa}$	(k_1, k_2)	$k_2 = \frac{a+\sqrt{\Delta}}{2\varkappa}$	$(k_2, 0)$	0	$k > 0$
	тип	эллипс	Im-X	Im-элл.	Im-X	эллипс	параб.	гиперб.
	I_2, I_3	+, -	+, 0	+, +	+, 0	+, -	-, 0	-, -
10	$a > 0, b = 0;$ $k :$	-	-	$k < 0$	$k_1 = 0$	$(0, k_2)$	$k_2 = \frac{a}{\varkappa}$	$k > k_2$
	тип	-	-	элл.		гиперб.	X	гиперб.
	$I_2, I_3, (\hat{I}_2)$	-	-	+, -	0, 0, (-)	-, +	-, 0	-, -
2	$a = 0, b \neq 0;$ $k :$	-	-	$k < 0$	0	$k > 0$	-	-
	тип	-	-	эллипс	параб	гиперб.	-	-
	I_2, I_3			+, -	0, -	-, -	-	-
9	$a < 0, b = 0;$ $k :$	$k < k_1$	$k_1 = \frac{a}{\varkappa}$	$(k_1, 0)$	$k_2 = 0$	$k > 0$	-	-
	тип	элл.	Im-X	Im-элл.	Im-	гиперб.	-	-
	$I_2, I_3, (\hat{I}_2)$	+, -	+, 0	+, +	0, 0, (+)	-, -	-	-

Таблица 3. Случай $\varkappa > 0$: тип пересечения поверхностей $f_1 = a, f_2 = b$ в пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ в зависимости от $k \in \mathbb{R}$. Здесь I_2, I_3 — инварианты квадрики, \hat{I}_2 — ее полуинвариант. Через X и || обозначим пары действительных прямых (пересекающихся или параллельных), а Im-X и Im-|| — их мнимые аналоги (как множества точек — точка и пустое множество).

ных, коэффициенты которой совпадают с таковыми для f_1^0 . Данное свойство сохраняется при преобразовании, предложенных Борисовым и Мамаевым.

2. В случае $a_0 \cdot b = 0, \varkappa = 0$ классификацию легко описать явно. Если $k = 0$, то ненулевому вектору J соответствует плоскость $f_2 = b$, параллельная одной из образующих асимптотического конуса $f_1 = 0$ и содержащая ее при

$b = 0$. При $k > 0$ евклидова нормаль к плоскости лежит вне конуса $f_1 = 0$, а при $k < 0$ — внутри него. Знак $f_1 = a_0$ теперь полностью определит нам, как данная плоскость пересечется с обобщенным гиперboloидом $f_1 = a$.

Если $a = 0, b \neq 0$, то имеем пересечение конуса и плоскости, не проходящей через его вершину — знаменитые конические сечения (эллипс, парабола и гипербола). В случаях $b = 0, a \neq 0$ плоскость проходит через вершину конуса. При бифуркационном значении $k_0 = 0$ она содержит образующую конуса и с точностью до поворота вокруг Ox_3 задается уравнением $x_3 = \pm x_1$. Ограничение $f_2 = a$ тогда примет вид $x_2^2 = a$. Запрещенный случай $a = b = 0$ отвечал бы паре из конуса и проходящей через его вершину плоскости.

2. В остальных случаях явно вычислим инварианты одномерного пересечения плоскости $f_2 = b$ и обобщенного гиперboloида $f_1 = a$ как квадратики, лежащей в этой плоскости (след, определитель квадратичной формы и определитель расширенной матрицы) и используем аффинную классификации квадратик по ним. Как известно, тип квадратика может меняться только при изменении знаков ее инвариантов — т.е. все бифуркационные значения параметров k, a, b отсюда легко найти.

При $J_3 \neq 0$ выразим x_3 из $x_1 J_1 + x_2 J_2 - x_3 J_3 = b$ и найдем формулы для аффинных инвариантов I_1, I_2, I_3 — следа и определителя квадратичной формы, определителя расширенной матрицы соответственно — и полуинварианта \hat{I}_2 , равного сумме главных миноров 2×2 , полученной квадратике с переменными x_1, x_2 :

$$J_3^2 \cdot I_1 = -k + J_3^2, \quad J_3^2 \cdot I_2 = -k, \quad J_3^2 \cdot I_3 = a \cdot k - b^2, \quad J_3^2 \hat{I}_2 = 2b^2 - k - a \cdot I_1.$$

Если $J_3 = 0$, и $(J_1, J_2) \neq (0, 0)$, то $k > 0$. Тогда уравнение $b = x_1 J_1 + x_2 J_2$ задает в плоскости $Ox_1 x_2$ прямую

$$(x_1, x_2) = t(-J_2, J_1) + \frac{b}{J_1^2 + J_2^2}(J_1, J_2) = t(-J_2, J_1) + \frac{b}{k} \vec{J}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ имеем плоскость с координатами x_3, t . Ограниченная на нее квадратика $f_1 = a$ имеет инварианты

$$I_1^0 = -k + 1, \quad I_2^0 = -k, \quad I_3^0 = ak - b^2, \quad \hat{I}_2^0 = -(1 + a)k + b^2/k(k - 1).$$

Если на один и тот же слой попадают две точки $J_3 = 0$ и $J_3 \neq 0$, то $k \geq 0$ и знаки указанных выше инвариантов I_1, I_2, I_3, \hat{I}_2 в них совпадают.

Определитель квадратичной части I_2 не равен нулю при $k \neq 0$, определитель расширенной матрицы I_3 — при $k \neq b^2/a$. Типы квадратик теперь следуют из известной аффинной классификации:

Отметим, что в окрестности одномерного (при $k > 0$) уровня $J_3 = 0$ регулярными локальными координатами ϕ, J_3 , где $J_1 = r \cos \varphi, J_2 = r \sin \varphi$: уравнение поверхности примет вид $r^2 - J_3^2 = k$. Отсюда

- если $I_2 < 0$, то знакам $I_3 = 0$ и $I_3 \neq 0$ соответствуют пара действительных пересекающихся прямых и гипербола,
- если $I_2 > 0$, т.е. $k < 0$ и $I_1 > 0$, т.е. знакам $I_3 < 0, I_3 = 0, I_3 > 0$ соответствуют мнимый эллипс (обозначим Im-элл), пара мнимых пересекающихся прямых (обозначим Im-X) и эллипс,

- если $I_2 = 0, I_3 \neq 0$, то квадратика является параболой (ортогонально проектирующейся на часть луча $x_3 > 0$ или на часть луча $x_3 < 0$),
- если $I_2 = 0, I_3 = 0$, то $I_1 > 0$ и тип квадратика определяется знаком \hat{I}_2 , случаям $\hat{I}_2 < 0, \hat{I}_2 < 0$ и $\hat{I}_2 > 0$ соответствуют пара действительных параллельных прямых (обозначаем $||$), пара совпадающих прямых (обозначим ее $|$) и пара мнимых параллельных прямых ($\text{Im-}||$).

3. В случае $\varkappa \neq 0$ уровню $f_1 = a, f_2 = b$ соответствует уровень $f_1^0 = a_0 = a - \varkappa k, f_2 = b$. Подставив в формулы инвариантов a_0 , получаем для I_3 квадратичное по k выражение:

$$I_3 = -\varkappa k^2 + ak - b^2.$$

Если $b = 0, a \neq 0$, то его корни равны 0 и $\varkappa a/\varkappa$. Если $a = 0, b \neq 0$, то при $\varkappa < 0$ корней нет, а при $\varkappa > 0$ имеем два корня $\frac{\pm |b|}{\sqrt{-\varkappa}}$. В общем случае имеем при $\Delta = a^2 - 4\varkappa b^2 > 0$ два корня

$$k_1 < k_2 : \quad \frac{a \pm \sqrt{\Delta}}{2\varkappa}, \quad \Delta = a^2 - 4\varkappa b^2.$$

В случае $\varkappa < 0$ условие $\Delta > 0$ верно для всех неособых пар, в случае $\varkappa > 0$ — для тех, где $|a| > 2\sqrt{\varkappa}|b|$. Далее перебором комбинаций знаков получаем ответ.

Совместный уровень $H = h, K = k$ в пространстве $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ при различных значениях A_1, A_2, A_3 был описан в [9] для попарно различных A_1 . В настоящей работе ограничимся случаем $A_3 < A_2 < A_1$ (эквивалентным случаю $A_3 > A_2$ и $A_3 > A_1$), а полное описание случая, когда знак “минус” стоит при средней полуоси приведем в будущем.

При $k > 0$ слоение $H = h$ на уровне $K = k$ имеет два особых уровня при $h = k/(2A_1) = h_1$ и $h = k/(2A_2) = h_2$, где $h_1 < h_2$. Уровень $k, h_2(k)$ состоит из двух морсовских точек максимума $(0, \pm\sqrt{k}, 0)$, а уровень $k, h_1(k)$ содержит две морсовские седловые точки $(\pm\sqrt{k}, 0, 0)$ и гомеоморфен особому слою 2-атома C_2 .

При $k < 0$ слоение $H = h$ на уровне $K = k$ имеет один особый уровень при $h = k/(2A_3)$, содержащий две компоненты связности и по одной морсовской точке максимума на каждом из них (два двуполостных гиперблоида $H = h, K = k$ касаются в точках оси OJ_3). При $h < k/(2A_3)$ пересечение гомеоморфно двум окружностям. При $k = 0$ уровень $h < 0$ гомеоморфен несвязному объединению двух окружностей, уровень $h = 0$ — точке, а уровни $h > 0$ пусты.

Иначе говоря, при $A_3 < A_2 < A_1$ совместный уровень $H = h, K = k$ оказывается компактным или пустым при всех $(k, h) \in \mathbb{R}^2$.

§ 3. Основные результаты

Ранее нами были изучен аналог случая классического Эйлера, т.е. $\varkappa = 0$. Результат для случая $ab = 0$ был приведен в работе [9]. Ниже мы изложим результаты о классическом случае $\varkappa = 0$ для $ab \neq 0$ и аналоги волчка Эйлера- $so(4)$ и волчка Эйлера- $so(3, 1)$.

Критическое множество, т.е. множество точек, где косые градиенты $sgrad H$ и $sgrad K$ интегралов H и K линейно зависимы, не зависит от \varkappa , поскольку косые градиенты имеют вид

$$\begin{aligned} sgrad H : \quad & \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}\right)J_2J_3\sigma, \left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1}\right)J_1J_3\sigma, \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right)J_1J_2, \\ & -\frac{1}{A_3}J_3x_2\sigma + \frac{1}{A_2}J_2x_3\sigma, \frac{1}{A_3}J_3x_1\sigma - \frac{1}{A_1}J_1x_3\sigma, -\frac{1}{A_2}J_2x_1 + \frac{1}{A_1}J_1x_2. \quad (3.1) \\ sgrad K = & (0, 0, 0, 2\sigma(J_2x_3 - J_3x_2), 2\sigma(J_3x_1 - J_1x_3), 2J_1x_2 - 2J_2x_1) \end{aligned}$$

Отличаться будет лишь попадание этих критических точек на те или иные орбиты $f_1 = a, f_2 = b$. Последнее нетрудно восстановить, поскольку $f_2 = f_2^0 + \varkappa K$, и при $\varkappa = 0$ такое множество в орбите $f_1^0 = a_0, f_2 = b$ зависит только от знаков a_0, b , но не от их конкретных значений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Критическое множество отображения (K, H) для псевдоевклидова аналога волчка Эйлера, а также инварианты локальных особенностей (коэффициенты аннулирующей линейной комбинации, собственные значения линеаризации гамильтонова поля) не зависят от конкретного значения $\varkappa \in \mathbb{R}$ и его знака. Последний влияет лишь на распределение указанных точек по совместным уровням $M_{a,b}^4 : f_1 = a, f_2 = b$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вида косых градиентов получаем, что в критических точках или $sgrad K = 0$, или первые три компоненты $sgrad H$ равны нулю.

1. Во втором случае получаем, что два из трех чисел J_1, J_2, J_3 равны нулю. Пусть оставшееся число $J_i \neq 0$. Тогда имеем $sgrad H = \frac{1}{2A_i} sgrad K$. Собственные значения линеаризации $A_H - \frac{1}{2A_i} A_K$ поля $sgrad H - \frac{1}{2A_i} sgrad K$ равны

$$\begin{aligned} J_1 \neq 0 : \quad \lambda_1^\pm &= \pm \frac{(i\sqrt{\sigma(A_2 - A_1)(A_3 - A_1)}J_1)}{A_1\sqrt{A_2A_3}}, \\ J_2 \neq 0 : \quad \lambda_1^\pm &= \pm \frac{(i\sqrt{\sigma(A_1 - A_2)(A_3 - A_2)}J_2)}{A_2\sqrt{A_1A_3}}, \\ J_3 \neq 0 : \quad \lambda_1^\pm &= \pm \frac{(i\sigma\sqrt{(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)}J_3)}{A_3\sqrt{A_1A_2}}. \end{aligned}$$

Здесь через σ обозначен знак при J_3^2, J_3, x_3, x_3^2 в интегралах: он равен 1 для классических систем и -1 для псевдоевклидовых.

Среди них точками ранга ноль будут в точности точки с условием $J_j = 0, x_j = 0$ для $j \neq i, j \in \{1, 2, 3\}$. Вычислив в этих точках собственные значения A_H , имеем в качестве собственных значений найденные выше $\pm\lambda_1$ соответствующих семейств и

$$\lambda_2^\pm = \pm \frac{i\sigma J_j}{A_3}, \quad j = 1, 2, 3.$$

2. В первом случае имеем, что вектора \vec{J} и \vec{x} линейно зависимы. Если $\vec{J} = 0$, то $h = k = 0$ (в этой точке пересекаются сразу три бифуркационные кривые, т.е. она будет существенно особой).

Если $\vec{x} = 0$ и $\vec{J} \neq 0$, то при $\varkappa \neq 0$ получим точку, попадающую в неособый уровень $M_{a,b}^4$. В ней $sgrad H$ равен нулю только если среди J_1, J_2, J_3 есть хотя бы два нуля (такой случай был рассмотрен выше). В ином случае это точка ранга 1, в ней линейная комбинация $sgrad K + 0 \cdot sgrad H$ является аннулирующей. Собственные значения A_K будут равны $\pm 2i\sqrt{\sigma k}$, т.е. в случае $\sigma = -1$ имеем $\pm 2\sqrt{k}$. Эти критические точки вырождены в случае $k = 0, \vec{J} \neq 0$ (тогда хотя бы два J_j отличны от нуля).

В общем случае имеем $\vec{J} = \mu\vec{x}$. При $\mu \neq \pm\sqrt{\varkappa}$ такие точки не попадают на запрещенные уровни $M_{a,b}^4$. В них A_K имеет собственные значения $\pm 2i\sqrt{\sigma k}$, равное при $\sigma = -1$ числам $\pm 2\sqrt{k}$. Отметим, что в случае равенства нулю ровно двух J_i и соответствующих x_i , существует линейная комбинация $sgrad H$ и $sgrad K$, чья линеаризация имеет попарно различные собственные значения.

Из приведенной информации количество и типы критических точек ранга 1 или 0 легко вычисляются для каждого конкретного \varkappa, a, b .

3.1. Слои слоения Лиувилля и интегральные трехмерные поверхности как расслоения с 1-слоем. Пусть тройка значений a, b, k не являются бифуркационными при данном \varkappa , т.е. $k \neq 0$ и $a_0 = a - k \neq 0$. Тогда нетрудно доказать следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Изоинтегральная поверхность Q_k^3 при $k \neq 0$ является расслоением с базой, гомеоморфной цилиндру при $k > 0$ и несвязному объединению двух дисков D^2 при $k < 0$. Слой при этом гомеоморфен совместному уровню $f_1^0 = a_0 = a - \varkappa k, f_2 = b$ указанному в утверждении 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. При не бифуркационном k прообраз в $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ каждой точки поверхности $\{K = k\} \subset \mathbb{R}^3(\vec{J})$ либо пуст, либо является (как плоская квадрака) гиперболой или эллипсом.

2. Докажем, что для не запрещенных (\varkappa, a, b) и неособых $k(a, b, \varkappa)$ в его каждой точке градиенты K, f_2, f_1 будут линейно независимы в фазовом пространстве \mathbb{R}^6 , т.е. будет выполнена теореме о неявной функции. Запишем градиенты в “краткой” записи, сопоставив вектору из $\mathbb{R}^6(\vec{J}, \vec{x})$ два вектора из $\mathbb{R}^3(\vec{J})$ и $\mathbb{R}^3(\vec{x})$:

$$dK = (2\vec{J}, \vec{0}), \quad df_2 = (\vec{x}, \vec{J}), \quad df_1 = (2\varkappa\vec{J}, 2\vec{x}).$$

Легко видеть линейную независимость в случае, если $\vec{J} \neq \vec{0}, \vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{x} \neq \lambda\vec{J}$. Если $\vec{J} = \vec{0}$, то значение $K = k$, которое является бифуркационным. Если $\vec{x} = \vec{0}$, то $b = 0$, и $a = \varkappa k$, т.е. k является бифуркационным. Если $\vec{x} = \lambda\vec{J}$ для $\lambda \neq 0$, то $a = (\varkappa + \lambda^2)k, b = \lambda k$, т.е. при $k \neq 0$ имеем $ak = \varkappa k^2 + b^2$ — уравнение, задающее бифуркационные $k_{1,2}$ от a, b при $\varkappa \neq 0$ и $k = b^2/a$ при $\varkappa = 0$.

3. Если слой $f_1 = a, f_2 = b$ для данного $K = k$ является эллипсом, то прообраз малой замкнутой окрестности каждой точки поверхности $K = k$ в $Q_{abk}^3 \subset \mathbb{R}^6$ компактен. Заметим, что эллипс биективно проецируется на плоскость Ox_1x_2 . Поскольку инварианты непрерывно зависят от J_1, J_2, J_3 , получим требуемое.

При этом сама поверхность Q_k^3 является гладким многообразием: при не бифуркационных k имеем $sgrad K \neq 0$, а при всех a, b помимо запрещенных имеем линейно независимые df_1 и df_2 . Последние являются нормальными векторами к $M_{a,b}^4$, в то время как $sgrad K$ будет касательным. Если $k = 0$ (в точке $\vec{J} = 0$ имеем $sgrad K = 0$), то аналогичное верно для Q^3 без прообраза окрестности точки $\vec{J} = 0$.

4. Если $k < 0$, то $K = k$ является двуполостным гиперboloидом, т.е. каждая из двух ее связных компонент гомеоморфна диску и допускает локальные координаты J_1, J_2 . Выразив $J_3 = \pm\sqrt{k - J_1^2 - J_2^2}$ и подставив в систему $f_1 = a, f_2 = b$, получим уравнение плоскости. Тогда вне окрестности точки $x_1 = x_2 = 0, x_3 = \pm\sqrt{-a}$ однопараметрическое семейство гипербол, плоскость, центр и оси которой непрерывно зависят от точки в базе.

Как следствие данного утверждения, имеем что всем точкам уровня $K = k$ (даже без учета $H = h$) соответствует один и тот же тип пересечения $f_1 = a, f_2 = b$. Иными словами, структуру изоинтегральной поверхности можно будет описать в терминах двумерной базы $\{K = k\} \subset \mathbb{R}^3(\vec{J})$ и одномерного слоя $f_1 = a, f_2 = b$, исключая отдельные значения a, b, k и \varkappa .

Для изоэнергетических поверхностей $f_1 = a, f_2 = b, H = h$ утверждение представляется более сложным: такая поверхность разбивается на уровни $K = k$, и им может соответствовать смена типа пересечения $f_1 = a, f_2 = b$ в $\mathbb{R}^3(\vec{x})$. Тем не менее, гладкость самой поверхности проверяется легко, из вида градиентов f_1, f_2, H . Для попарно различных A_1, A_2, A_3 имеем, что три градиента линейно зависимы, только если $\vec{J} = 0$ или (a, b) является запрещенной.

Для доказательства того, что такая некомпактная поверхность действительно содержит описанные ниже бифуркации, воспользуемся следующим соображением. Из теории конических сечений известно, что фокусы эллипсов, парабол и гипербол являются точками касания плоскости и шаров Данделена, касающихся одновременно с этим квадрики ($f_1 = a$ есть фигура вращения). Условие на центр такого шара, а значит и на точку касания, будет непрерывно зависеть от типа квадрики (т.е. знака a) и положения плоскости — ее нормального вектора (задаваемого по \vec{J}) и расстояния до нуля (вычисляемого по b и вектору \vec{J}). Вектор оси квадрики-сечения также непрерывно зависит от \vec{J} . Введя в плоскости координаты Аполлония $y^2 = 2px \pm (p/c)x^2$ для p — фокального параметра параболы и ограниченного окрестности нуля $1/c$, получаем параметризацию слоя для конкретной точки базы — вектора \vec{J} . В случае перестройки эллипса в гиперболу через пару параллельных прямых воспользуемся тем, что расстояние между ними является пределом как малых полуосей эллипса, так и расстоянием между точками пересечения ветвей гиперболы с координатной осью. Для критических перестроек (т.е. имеющих критические точки) мы также используем их невырожденность (как критических точек как точек линий уровня на двумерной поверхности, и как критических точек боттовского интеграла на поверхности Q^3).

3.2. Бифуркационные диаграммы (K, H) , аналоги атомов и молекул. Приведем вид бифуркационных диаграмм при различных значениях $(a, b) \neq (0, 0)$ и $\varkappa \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 1. Бифуркационные диаграммы отображения момента для различных неособых a, b и $\varkappa \in \mathbb{R}$ приведены на рис. 1 для случая нулевого \varkappa (т.е. для аналога классического волчка), и новые в сравнении с ними, возникающими при $\varkappa \neq 0$ — на рис. 2. Соответствие номеров комбинациям знаков приведено в таблицах 1, 2, 3 выше.

Для всех камер, дуг и особых точек (исключая $h = 0, k = 0$) диаграммы указано, чему гомеоморфен ее прообраз. Он представляется в виде произведения, являющегося прямым, причем первый (левый) компонент отвечает уровню $H = h, K = k$ в $\mathbb{R}^3(\vec{J})$, а второй (правый) компонент отвечает уровню $f_1 = a, f_2 = b$ в $\mathbb{R}^3(\vec{x})$ при произвольном J из первого уровня.

Для ветвей гиперболы указан их тип: символ \cup , если каждая из двух ветвей проецируется на всю ось Ox_3 биективно, и символ \succ , если некоторые точки оси не имеют такого прообраза. Для пар точек минимума-максимума тоже укажем, лежат ли они на оси Ox_3 в “полюсах” псевдосферы (пару точек расположим по вертикали), либо же на экваторе однополостного гиперболоида в плоскости Ox_1x_2 (и тогда две точки расположены по горизонтали). Символами $U, ||, X, C_2$ обозначены: парабола, пара действительных прямых (параллельных или пересекающихся) и особый слой 2-атома C_2 , получаемый как трансверсальное пересечение двух окружностей в плоскости.

Тем самым, имеем следующее устройство разделяющего множества на плоскости Oba , т.е. стратификации плоскости так, что окрестности двух точек страта b_i, a_i гомеоморфны с сохранением типа слоения Лиувилля (бифуркационной диаграммы и типов ее особенностей) при гомеоморфизме, т.е. для уровней M_{a_1, b_1}^4 и $M_{\phi(a_1, b_1)}^4 = M_{a_2, b_2}^4$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Разделяющее множество симметрично при замене $b \rightarrow -b$ и в зависимости от \varkappa устроено так:

- при $\varkappa = 0$ оно состоит из вершины $(0, 0)$, четырех лучей $a = 0, b \neq 0$ и $a \neq 0, b = 0$ и четырех секторов $a \cdot b \neq 0$;
- при $\varkappa < 0$ оно состоит из вершины $(0, 0)$, двух лучей $a \neq 0, b = 0$ и двух двумерных дисков $a > 0, a < 0$;
- при $\varkappa > 0$ оно состоит из вершины $(0, 0)$, шести лучей $a \neq 0, b = 0$ и $|a| = 2\sqrt{\varkappa}|b|, b \neq 0$ и шести секторов в их дополнении.

Теперь сформулируем теорему о типах баз слоения Лиувилля для неособых изоэнергетических или изоинтегральных поверхностей. Они будут задаваться мечеными графами, вершины которых отмечены типами особенностей (обобщениями атомов Фоменко), т.е. изучим, какие обобщения инвариантов Фоменко будут возникать.

ТЕОРЕМА 2. В слоениях Лиувилля псевдоевклидовых аналогов систем Эйлера на алгебрах Ли при $\varkappa \in \mathbb{R}$, имеющих параметры $A_1 < A_2 < A_3$ или $A_3 < A_2 < A_1$, следующие перестройки слоев являются типичными в трехмерных многообразиях, являющихся однопараметрическими семействами уровней энергии:

- атомы $A \times S^1, A \times I^1$ для эллиптического атома A (минимального или максимального),

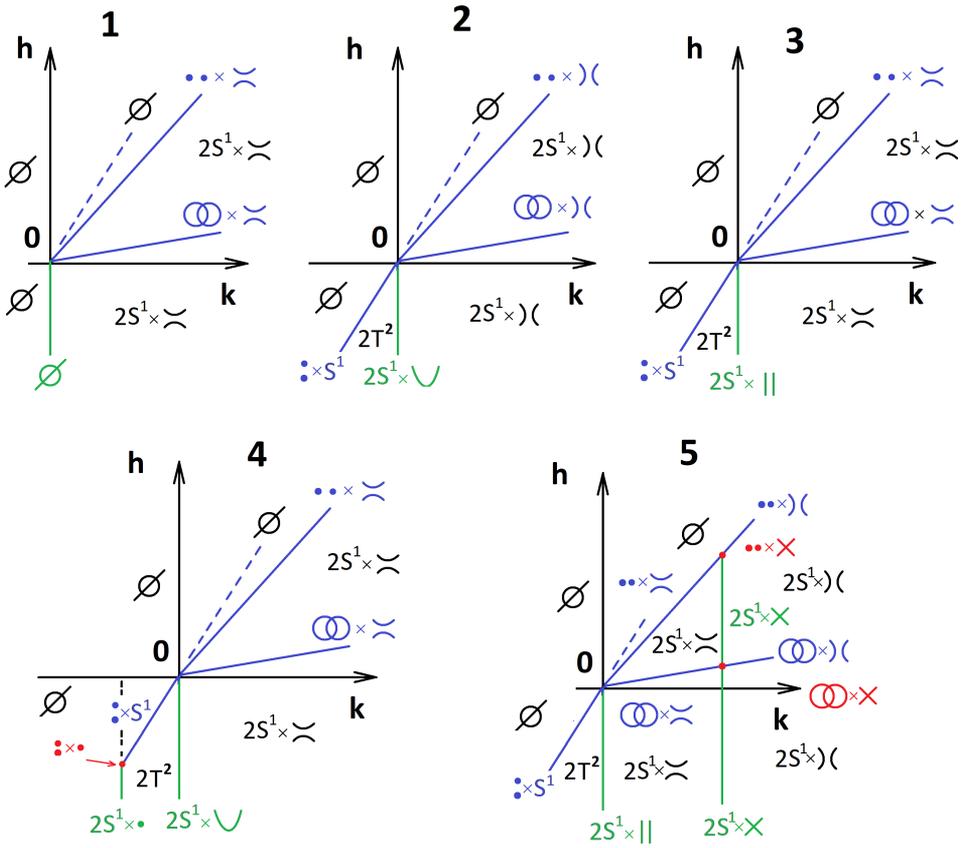


Рис. 1. Бифуркационные диаграммы типов 1-5, возникающие при $\varkappa = 0$. Диаграмма типа 2 также возникает при $\varkappa > 0$ при $|a| < 2\sqrt{\varkappa}|b|, b \neq 0$.

- $C_2 \times S^1, C_2 \times I^1$ для седлового атома ${}_2 : 2S^1 \rightarrow 2S^1$,
- $S^1 \times B''$ для морсовского седла B'' (атома B , обе ленточки которого разрезаны),
- $S^1 \times X_U, S^1 \times X_{||}$ для перестроек конических сечений: эллипс в ветвь гиперболы через параболу, эллипса в две ветви гиперболы через пару параллельных прямых, эллипса
- $S^1 \times O_2$ перестройки с пустыми слоями $f \geq 0$ и регулярным слоем $f < 0$, гомеоморфным I^1 (ветвь гиперболы)
- $S^1 \rightarrow$

Поясним, что перестройка O_2 имеет разную природу для разных дуг диаграммы. В одном случае она соответствует появлению у квадрики второй связанной компоненты (перестройка эллипса в другую ветвь гиперболы). Иными словами, с точки зрения $\mathbb{R}P^3$ это касание квадратикой бесконечно удаленной $\mathbb{R}P^2$ в точке, соответствующей оси этой квадратки (параболы). В другом случае парное появление двух перестроек O_2 отвечает бифуркации мнимого эллипса в

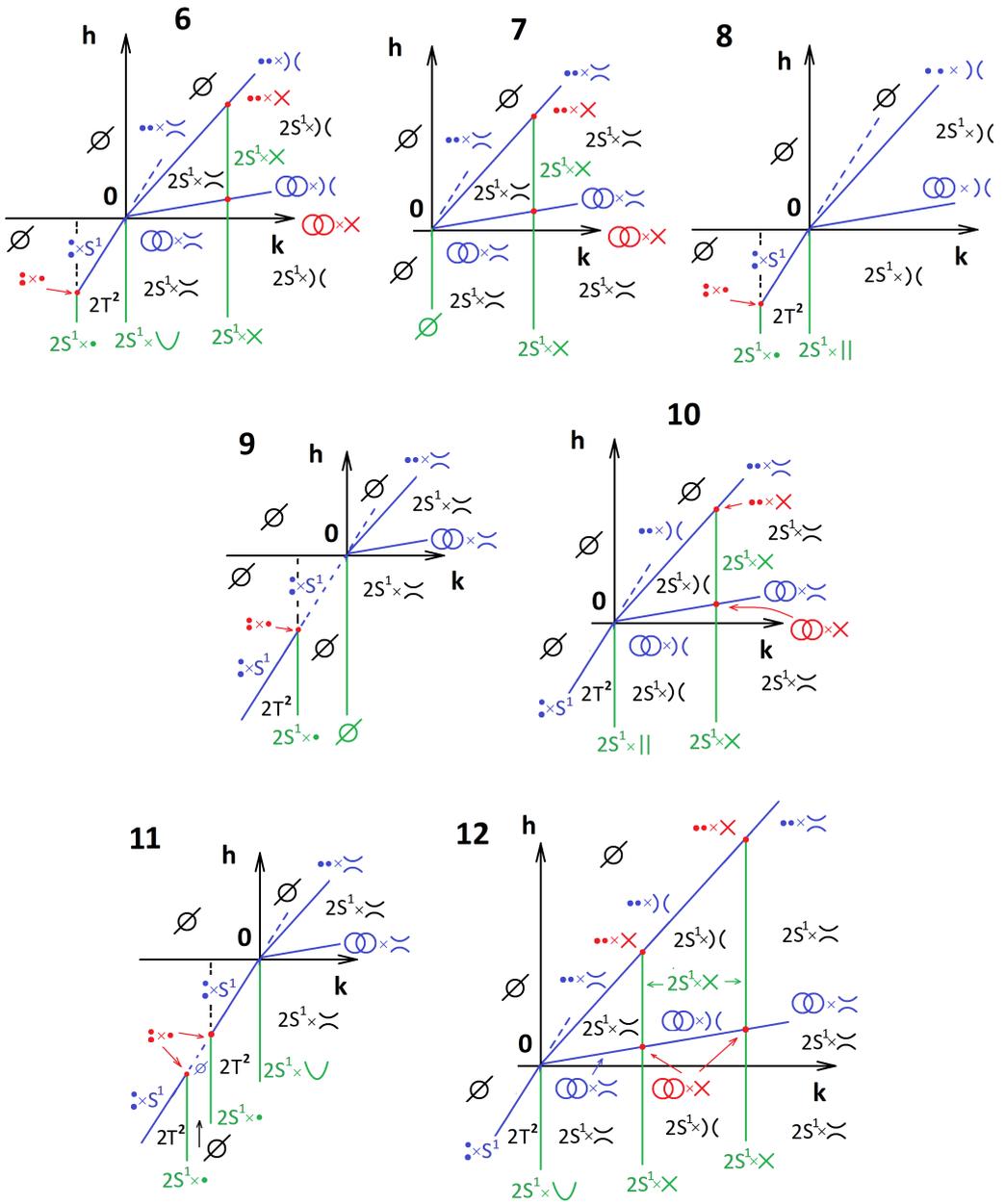


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы типов 6-12, возникающие при $\kappa \neq 0$ ($\kappa < 0$: диаграммы 6-8, $\kappa > 0$: диаграммы 9-12 и 2 с рис. 1) и не встречавшиеся при $\kappa = 0$.

гиперболу через пару мнимых параллельных прямых, т.е. через одноточечное (в $\mathbb{R}P^3$) множество, лежащее при этом на бесконечно удаленной $\mathbb{R}P^2$.

Слоения Лиувилля на неособых уровнях постоянной энергии или интеграла устроены следующим образом:

ТЕОРЕМА 3. 1. *Неособые изоинтегральные поверхности $Q_k^3 = Q_{abk}^3 : f_1 = a, f_2 = b, K = k$ (точнее, их связные компоненты) послойно гомеоморфны прямому произведению S^1 или I^1 на расслоенный открытый диск с морсовскими особенностями и одной из следующих молекул: $\infty - A$ для S^1 или $2(\infty -) = {}_2 = 2(-A)$ для I^1 , где регулярный слой есть S^1 , а атомы являются морсовскими: седловым C_2 или максимальными A .*

2. *Неособые изоэнергетические поверхности $Q : Z_{abh} : f_1 = a, f_2 = b, H = h$ имеют слоение Лиувилля со следующим устройством базы (графа Руба + локального поднятия слоения вблизи его вершины): комбинаторно его тип восстанавливается из вида диаграммы. Если в графе инцидентны два седловых атома типа B'' , то метка r между ними равна ∞ (особые слои гомологичны друг другу).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Первый факт следует из явной проверки невырожденных особенностей и показанного выше представления Q_{abk}^3 как тривиально-го расслоения со слоем I^1 или S^1 над двумерной базой.

2. Покажем, что особенности $S^1 \times B''$ действительно дают особенности с ориентируемыми сепаратрисными диаграммами (т.е. не содержат окружностей-звездочек, а имеют тип прямого произведения). Это следует из того, что компонента X особого слоя после оборота вокруг окружности обязана перейти в себя тождественно: направленные “вверх” лучи (на которых $x_3 \rightarrow +\infty$) перейдут в направленные “вверх”, а между собой они различаются направлением векторного поля $\text{sgrad } H$ — к критической окружности, или от нее. Это гарантирует, что в окрестности особого слоя слоение также имеет тип прямого произведения

Аналогично, в точке пересечения дуг диаграммы с седловыми особенностями имеем некомпактную особенность седло-седло типа $C_2 \times B''$.

3. Покажем, что неособый уровень постоянной энергии обязательно имеет хотя бы две связные компоненты. Для $h > 0$ это следует из несвязности особенностей центр-седло $A \times B''$. Для $h < 0$ рассмотрим особенности X_U , которые появляются парами: эллипсы отвечают одной из двух точек псевдосферы псевдосферы $h = \frac{k}{2A_3}, k < 0$, лежащих на оси Ox_3 . Последние получаются для двух векторов \vec{J} , направленных вдоль оси OJ_3 либо вниз, либо вверх. Поскольку система симметрична при $x_3 \rightarrow -x_3, J_3 \rightarrow -J_3$, то при $k \rightarrow -0$ один из эллипсов перестраивается в параболу, ветви которой направлены вниз (в смысле проекции на ось Ox_3), а для другой вверх. Поскольку \vec{k} в точках Q_{abh}^3 меняется непрерывно, то если уровень $K = k, H = h$ состоит из двух окружностей, то всем точкам связной компоненты Q_{abh}^3 соответствует одна и та же связная компонента уровня $K = k, H = h$. Иными словами, при $h < 0$ поверхность имеет две связные компоненты (или четыре, пары которых имеют непересекающиеся области значений K).

Список литературы

- [1] S. Smale, “Topology and Mechanics: 1”, *Invent. Math.*, **10:4** (1970), 305–331.

- [2] А.В. Болсинов, А.Т.Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: РХД, т. 1, 2. 1999.
- [3] А.Т. Фоменко, “Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем”, ДАН. 1986. Т. 287, №5. С. 1071–1075.
- [4] А.Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 50:6 (1986), 1276–1307.
- [5] А.Т. Фоменко, Х. Цишанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:3 (1990), 546–575.
- [6] А.В. Болсинов, С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности”, УМН. 45:2 (1990), 49–77.
- [7] I.V. Komarov, “Kowalewski basis for the hydrogen atom” // Theoret. and Math. Phys., **47**:1 (1981), 320–324.
- [8] A.V. Borisov, I.S. Mamaev, “Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces” // Rus. J. of Math. Phys. **23**:4 (2016), 431–454.
- [9] М. К. Алтуев, В. А. Кибкало, “Топологический анализ псевдоевклидова волчка Эйлера при особых значениях параметров”, Матем. сб., 214:3 (2023), 54–70
- [10] С.В. Соколов, “Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных”, Труды МАИ, 100 (2018), 1–13.
- [11] V.A. Kibkalo, “Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras”, Moscow Univ. Math. Bull., 75:6 (2020), 263–267.
- [12] D.A. Fedoseev, A.T. Fomenko, “Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems”, J. Math. Sc., **248** (2020), 810–827.
- [13] С.С. Николаенко, “Топологическая классификация гамильтоновых систем на двумерных некомпактных многообразиях”, Матем. сб., 211:8 (2020), 68–101.
- [14] С.С. Николаенко, “Топологическая классификация некомпактных 3-атомов с действием окружности”, Чебышевский сб., **22**:5 (2021), 185–197.
- [15] Е.А. Кудрявцева, “Аналог теоремы Лиувилля для интегрируемых гамильтоновых систем с неполными потоками”, ДАН, 445:4 (2012), 383–385.
- [16] К.Р. Алешкин, “Топология интегрируемых систем с неполными полями”, Матем. сб., **205**:9 (2014), 49–64.
- [17] Palshin G. P. On noncompact bifurcation in one generalized model of vortex dynamics // Theor. Math. Phys., **212**:1 (2022), 972–983.
- [18] Д.В. Новиков, “Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $e(3)$ ”, Матем. сб., **202**:5 (2011), 127–160.
- [19] Д.В. Новиков, “Топологические особенности интегрируемого случая Соколова на алгебре Ли $so(3,1)$ ”, Матем. сб., **205**:8 (2014), 41–66.
- [20] А.В.Борисов, И.С.Мамаев, Классическая динамика в неевклидовых пространствах. — Москва, Ижевск: РХД, 2004.

В. А. Кибкало (V. Kibkalo)

Механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

E-mail: slava.kibkalo@gmail.com