

# Трехмерный бильярд в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{2,1}$ , ограниченный эллипсоидом

Белозеров Г. В.

МГУ им. М. В. Ломоносова

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 22-71-00111 в МГУ имени М. В. Ломоносова

**Аннотация.** Рассматривается трехмерный бильярд внутри эллипсоида в псевдоевклидовом пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Такая система отличается от обычного (евклидового) бильярда устройством отражения от границы бильярдного стола. Материальная точка отражается от эллипсоида в соответствии с законом отражения в пространстве  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Такая система является интегрируемой по Лиувиллю в кусочно-гладком смысле. В настоящей работе выписаны явные формулы интегралов этого бильярда, перечислены типы областей возможного движения, построена бифуркационная диаграмма. Показано, что все регулярные слои рассматриваемой системы являются трехмерными торами, а слоение Лиувилля вблизи таких слоев тривиально. Тем самым, для бильярда внутри эллипсоида верен кусочно-гладкий аналог теоремы Лиувилля. Также показано, что малые окрестности слоев, отвечающих внутренним 1-перестройкам торов Лиувилля гомеоморфны почти прямому произведению 2-атома, двумерного тора и двумерного диска. Некомпактные слои системы соответствуют точкам границы образа отображения момента. Описана топология слоения Лиувилля малых окрестностей некоторых некомпактных слоев. Отметим, что топология слоения Лиувилля геодезического потока *на поверхности* эллипсоида в пространстве  $\mathbb{R}^{2,1}$  изучалась В. Драговичем и М. Раднович в работе [1].

## 1. Описание системы

Рассмотрим псевдоевклидово пространство  $\mathbb{R}^{2,1}$  с каноническими координатами  $(x, y, z)$  (*Пояснение:* канонические координаты суть те, в которых матрица метрики приведена к нормальной форме). Напомним, что расстояние между двумя точками  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  в пространстве  $\mathbb{R}^{2,1}(x, y, z)$  вычисляется по формуле

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}. \quad (1)$$

Соответствующее псевдоевклидово скалярное произведение векторов мы будем обозначать  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Поскольку подкоренное выражение в формуле 1 может принимать как положительные, так и отрицательные значения, все векторы в этом делятся на три класса: *пространственно-подобные*, *изотропные*, *времени-подобные*. Напомним, что вектор  $v \in \mathbb{R}^{2,1}$  называется пространственно-подобным, если  $\langle v, v \rangle > 0$ , времени-подобным, если  $\langle v, v \rangle < 0$ , изотропным, если  $\langle v, v \rangle = 0$ .

Рассмотрим в псевдоевклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2,1}(x, y, z)$  эллипсоид  $\mathcal{E}$ , заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

Для определенности мы будем считать, что  $a > b$ , поскольку от перестановки первых двух координат метрика не изменится. Случай  $a = b$  здесь не приводится.

Геодезические потоки на софокусных квадриках в пространстве с псевдоевклидовым скалярным произведением изучались в работах С. Л. Табачникова и Б. А. Хесина [2], [3]. В последней была введена система бильярда в таких областях. Топологические свойства бильярдов, ограниченных такими квадриками, изучались также В. Драговичем и М. Раднович [4], [1].

Одной из мотиваций настоящей работы служит следующая. В настоящее время большой интерес вызывает обобщение теории топологической классификации слоений Лиувилля и их особенностей, разработанной в работах школы А. Т. Фоменко [6], [7], [8] на случай некомпактных слоений. Ряд известных результатов был перечислен в [9]. Новые примеры систем с такими слоениями получаются из классических систем динамики путем преобразования, предложенного

А. В. Борисовым и И. С. Мамаевым в [10]. Евклидово скалярное произведение при этом переходит в псевдоевклидово. В работах [11, 12, 13] изучались свойства таких систем, в частности, показано наличие некомпактных слоев и некритических бифуркаций в их слоях Лиувилля.

Мы будем рассматривать следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри замкнутой области  $D$ , ограниченной эллипсоидом  $\mathcal{E}$ , отражаясь от  $\mathcal{E}$  абсолютно упруго в метрике Минковского, то есть если  $v$  — вектор скорости, с которым материальная точка соударяется с  $\mathcal{E}$ , и  $v = \alpha + n$  — разложение этого вектора на касательную и ортогональную составляющие (в метрике Минковского) к эллипсоиду в точке соударения, то после отражения частица приобретет вектор скорости  $v' = \alpha - n$ . Такую систему мы будем называть трехмерным бильярдом внутри эллипсоида в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

Однако у такого бильярда отражение определено не во всех точках. Оно не определено там, где ортогональное дополнение к касательному пространству к  $\mathcal{E}$  содержится в самом касательном пространстве. Такие точки мы будем называть *тропическими*. Тем не менее, отражение в этих точках можно доопределить по непрерывности. Для того чтобы это сделать, опишем сначала это множество тропических точек.

Касательное пространство к эллипсоиду в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  задается уравнением

$$\frac{x_0 x}{a} + \frac{y_0 y}{b} + \frac{z_0 z}{c} = 0.$$

Это уравнение можно переписать иначе:

$$\left\langle \left( \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}, -\frac{z_0}{c} \right), (x, y, z) \right\rangle = 0.$$

Таким образом,  $n = \left( \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}, -\frac{z_0}{c} \right)$  — вектор, ортогональный касательной плоскости. Поскольку в тропических точках вектор  $n$  должен лежать в самой касательной плоскости, он ортогонален самому себе, то есть  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0$ . Таким образом, множество точек, в которых отраже-

ние нуждается в доопределении, есть пересечение эллипсоида  $\mathcal{E}$  с конусом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ . Это пересечение является несвязным объединением двух гладких кривых (симметричных друг другу относительно плоскости  $z = 0$ ), которые, следуя В. Драговичу и М. Раднович, мы будем называть *тропическими*. Тропические кривые на эллипсоиде изображены на рисунке [1].

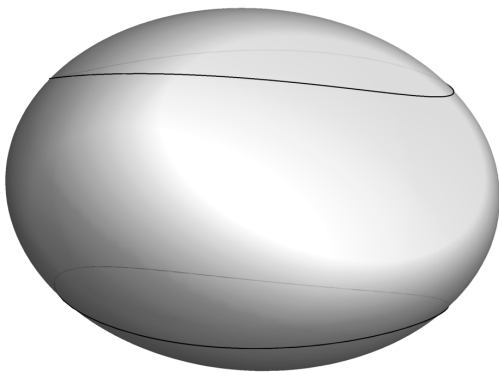


Рис. 1: Тропические кривые на эллипсоиде

Заметим, что касательный вектор к тропической кривой и вектор  $n$  в этой точке линейно независимы. Действительно, если бы в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  тропической кривой ее вектор скорости равнялся бы  $n$ , то поскольку эта кривая лежит на конусе  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ , мы бы получили, что  $\frac{x^2}{a^3} + \frac{y^2}{b^3} + \frac{z^2}{c^3} = 0$ , откуда  $x_0 = y_0 = z_0$  — противоречие.

Более того, касательный вектор к тропической кривой в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  не лежит в плоскости, порожденной векторами  $n$  и  $(x_0, y_0, z_0)$ . Действительно, если бы нашлись  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , такие, что касательный вектор  $v$  к тропической кривой представлялся бы в виде

$v = \alpha n + \beta(x_0, y_0, z_0)$ , то, скалярно домножив это уравнение на  $n$ , мы бы получили равенство  $\beta = 0$ . А поскольку  $v$  и  $n$  линейно независимы, наше допущение приводит к противоречию.

Итак, используя полученные сведения, определим отражение в точках тропической кривой. Пусть материальная точка, движущаяся с вектором скорости  $v$ , соударяется с точкой  $P = (x_0, y_0, z_0)$  тропической кривой. Представим этот вектор в виде  $v = v_1 + v_2$ , где  $v_1$  — вектор, сонаправленный с касательным вектором к тропической кривой в точке  $P$ , а  $v_2$  — вектор, лежащий в плоскости, проходящей через начало координат, точку  $P$  и вектор  $n$  (в точке  $P$ ).

Такое разложение существует согласно предыдущим рассуждениям. Тогда после отражения частица будет двигаться с вектором скорости  $v' = v_1 - v_2$ .

Тот факт, что отражение происходит именно так, легко объяснить. Вектор  $v_1$  является касательным, а касательные векторы не отражаются. Сечение эллипсоида  $\mathcal{E}$  плоскостью, проходящей через начало координат, точку  $P$  и вектор  $n$ , является эллипсом, касательная к которому в точке  $P$  параллельна  $n$ , то есть светопободна. Однако хорошо известно, что отражение в таких точках переводит вектор скорости в противоположный.

Остается одна проблема: траектория системы не определена, если в начальный момент времени частица находится в тропической кривой, а вектор скорости в ней является касательным к эллипсоиду  $\mathcal{E}$ . В таком случае ограничение псевдометрики на касательную плоскость к  $\mathcal{E}$  в этой точке вырождено, а следовательно, уравнения геодезических не определены. Поэтому такие пары точка-вектор мы учитывать не будем.

Теперь система полностью определена. Ее фазовым пространством является кусочно-гладкое многообразие  $M^6$ , которое получено из множества  $\widetilde{M}^6 = \{(x, v) | x \in D, v \in T_x \mathbb{R}^3\}$  отождествлением с учетом бильярдного отражения. Отметим, что на  $M^6$  корректно определено отображение проекции  $\pi : M^6 \rightarrow D$ , сопоставляющее паре точка-вектор точку стола.

Заметим, что функция  $H = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2$  является первым интегралом бильярда. Действительно, эта функция является первым интегралом системы без отражения, а поскольку отражение происходит в метрике Минковского, оно не меняет длину вектора скорости в этой метрике.

Оказывается, что рассматриваемый бильярд является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно-гладком смысле с функцией Гамильтона  $H$ . Наша цель — описать топологию возникающего слоения Лиувилля этой системы. В этом нам помогут эллиптические координаты, которым посвящен следующий параграф.

## 2. Эллиптические координаты в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{2,1}$

Свяжем с эллипсоидом  $\mathcal{E}$  семейство квадрик, определяемое следующим образом.

**Определение 1.** Семейством софокусных квадрик в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}(x, y, z)$  назовем семейство квадрик  $Q_\lambda$ , заданных уравнением

$$(b - \lambda)(c + \lambda)x^2 + (a - \lambda)(c + \lambda)y^2 + (a - \lambda)(b - \lambda)z^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)(c + \lambda),$$

где  $a > b > 0$ ,  $c > 0$  — фиксированные числа, а  $\lambda$  — вещественный параметр. Если значение параметра  $\lambda$  равно  $a$ ,  $b$  или  $-c$ , то квадрику  $Q_\lambda$  мы будем называть вырожденной, иначе — невырожденной.

**Замечание 1.** Отметим, что все вырожденные квадрики суть координатные плоскости.

В зависимости от значения параметра  $\lambda$  возможны следующие квадрики.

- Если  $\lambda \in (-\infty, -c)$ , то  $Q_\lambda$  — однополостный гиперboloид.
- Если  $\lambda \in (-c, b)$ , то  $Q_\lambda$  — эллипсоид.
- Если  $\lambda \in (b, a)$ , то  $Q_\lambda$  — однополостный гиперboloид.
- Если  $\lambda \in (a, +\infty)$ , то  $Q_\lambda$  — двуполостный гиперboloид.

На рисунке [2] изображены софокусные квадрики, каждого из этих видов.

Теперь опишем пределы софокусных квадрик, когда значение параметра  $\lambda$  стремится к критическому.

Пусть  $\lambda \rightarrow -c - 0$ . В этом случае мнимая полуось однополостного гиперboloида стремится к нулю, в то время как вещественные стремятся к  $a + c$  и  $b + c$ . Таким образом, в пределе мы получим плоскость  $z = 0$  без области, ограниченной эллипсом  $\frac{x^2}{a + c} + \frac{y^2}{b + c} = 1$ . Если же мы рассмотрим предел квадрик  $Q_\lambda$ , когда  $\lambda \rightarrow -c + 0$ , то получим плоскую замкнутую область, ограниченную тем же эллипсом. Обозначим этот эллипс через  $F_1$ .

Рассматривая пределы в остальных критических значениях параметра  $\lambda$ , можно аналогичным образом определить эллипс  $F_2 = \{(x, 0, z) | \frac{x^2}{a-b} + \frac{z^2}{c+b} = 1\}$  и гиперболу  $F_3 = \{(0, y, z) | \frac{z^2}{a+c} - \frac{y^2}{a-b} = 1\}$ . Кривые  $F_1, F_2, F_3$  мы будем называть *фокальными* по аналогии с евклидовым случаем. Эти кривые выделены черным цветом на рисунке [2].

Напомним, что в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  семейство софокусных квадрик определяет эллиптические координаты. Каждой точке  $\mathbb{R}^3$  мы сопоставляем неубывающий набор параметров  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  софокусных квадрик, проходящих через данную точку. Применим аналогичный подход в  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

**Утверждение 1.** *Через каждую точку множества  $D$  проходит в точности три софокусных квадрики (с учетом кратности). Более того, две из них являются эллипсоидами параметров  $\lambda_1 \in [-c, 0]$  и  $\lambda_2 \in [0, b]$ , а третья — однополостным гиперboloидом параметра  $\lambda_3 \in [b, a]$ .*

**Доказательство.** Это утверждение достаточно доказать для точек  $X = (x, y, z)$ , таких, что  $x \cdot y \cdot z \neq 0$ . Более того, можем считать, что  $X$  — внутренняя точка  $D$ . Для каждой такой точки рассмотрим функцию  $f_X(\lambda) = \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda}$ . Отметим, что квадрика параметра  $\lambda_0$  проходит через точку  $X$  в том и только том случае, когда  $f_X(\lambda_0) = 1$ . Покажем, что внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$  уравнение  $f_X(\lambda) = 1$  имеет три вещественных корня с учетом кратности.

Заметим, что  $f_X(\lambda) \rightarrow +\infty$ , когда  $\lambda \rightarrow a-0$ , и  $f_X(\lambda) \rightarrow -\infty$ , когда  $\lambda \rightarrow b+0$  (см. рис [3]). Поскольку непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения, в некоторой точке интервала  $(b, a)$  функция  $f_X(\lambda)$  принимает значение 1.

Теперь воспользуемся тем, что точка  $X$  лежит внутри области, ограниченной эллипсоидом  $\mathcal{E}$ . Это условие равносильно тому, что  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} < 1$ , то есть  $f_X(0) < 1$ . А поскольку  $f_X(\lambda) \rightarrow +\infty$  при  $\lambda \rightarrow -c-0, b+0$ , по теореме о промежуточном значении непрерывной функции  $f_X(\lambda)$  принимает значение 1 в некоторых точках интервалов  $(-c, 0), (0, b)$  (см. рис.[3]). Следовательно, через точку  $X$  проходит по крайней мере 3 софокусные квадрики.

Для завершения доказательства осталось заметить, что уравнение  $f_X(\lambda) = 1$  равносильно кубическому уравнению относительно  $\lambda$ . Таким образом, через точку  $X$  проходит не более трех квадрик. Утверждение доказано. ■

Таким образом, в области  $D$  корректно определены эллиптические координаты. Отметим, что уравнение  $\lambda_1 = \lambda_2$  задает тропические кривые, а уравнение  $\lambda_2 = \lambda_3$  — фокальный эллипс  $F_2$ .

Теперь, используя эллиптические координаты в  $\mathbb{R}^{2,1}$ , проведем качественный анализ рассматриваемого бильярда.

### 3. Интегрируемость бильярда

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^{2,1}$  движение точки по инерции. Хорошо известно, что в таком случае частица либо будет находиться в положении равновесия, либо двигаться вдоль прямой с постоянной по модулю скоростью. Ее траекторию можно описать параметрически:  $(x+\tau\dot{x}, y+\tau\dot{y}, z+\tau\dot{z})$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , где  $(x, y, z)$  — некоторая точка траектории, а  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  — вектор скорости в ней. Определим параметры софокусных квадрик, которых касается эта траектория.

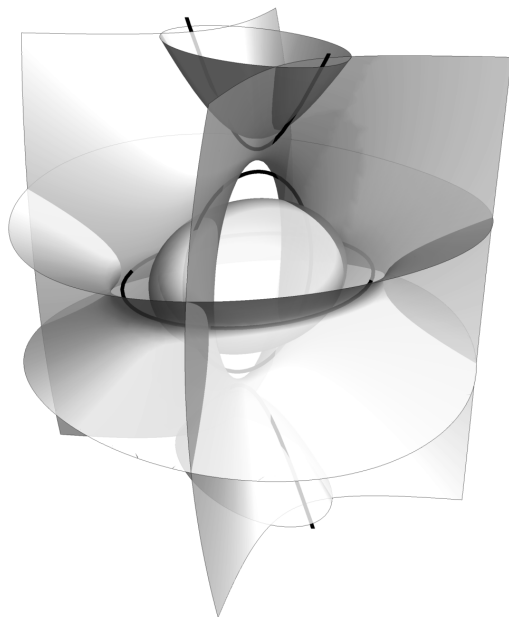


Рис. 2: Софокусные квадрики в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Черным выделены фокальные кривые.

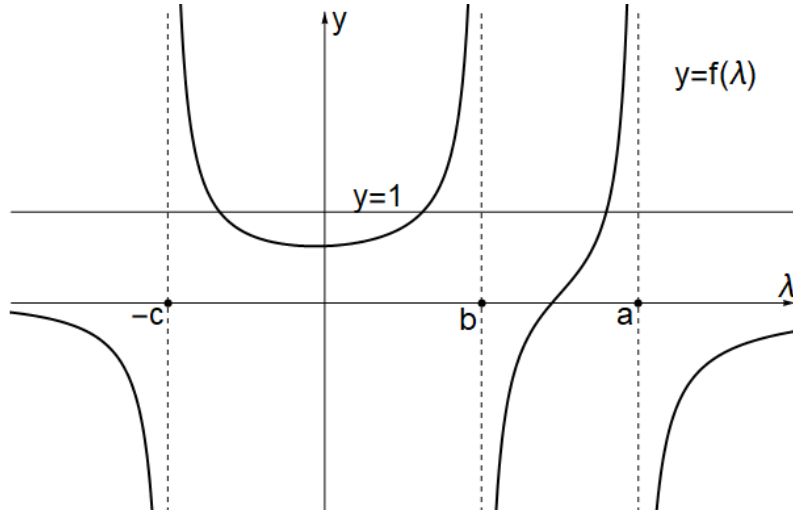


Рис. 3: График функции  $f_X(\lambda)$

Чтобы найти точки пересечения траектории и софокусной квадррики, нужно решить квадратное относительно  $\tau$  уравнение

$$\frac{(x + \tau \dot{x})^2}{a - \lambda} + \frac{(y + \tau \dot{y})^2}{b - \lambda} + \frac{(z + \tau \dot{z})^2}{c + \lambda} = 1.$$

Поэтому, если траектория касается квадррики, дискриминант этого уравнения равен 0 и наоборот. Это условие равносильно следующему уравнению.

$$\left( \frac{x\dot{x}}{a - \lambda} + \frac{y\dot{y}}{b - \lambda} + \frac{z\dot{z}}{c + \lambda} \right)^2 = \left( \frac{\dot{x}^2}{a - \lambda} + \frac{\dot{y}^2}{b - \lambda} + \frac{\dot{z}^2}{c + \lambda} \right) \left( \frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} + \frac{z^2}{c + \lambda} - 1 \right) \quad (2)$$

Домножив его на  $(a - \lambda)(b - \lambda)(c + \lambda)$  и перенеся все слагаемые в правую сторону, мы сведем уравнение к следующему.

$$H\lambda^2 - F_1\lambda + F_2 = 0 \quad (3)$$

Это уравнение мы будем называть *уравнением касания*. Здесь  $H$  — энергия рассматриваемого бильярда, а функции  $F_1$  и  $F_2$  вычисляются по формулам:

$$F_1 = \frac{1}{2}((b - c)\dot{x}^2 + (a - c)\dot{y}^2 - (a + b)\dot{z}^2) + \frac{1}{2}(K_x^2 + K_y^2 - K_z^2),$$

$$F_2 = \frac{1}{2}(-bc\dot{x}^2 - ac\dot{y}^2 - ab\dot{z}^2) + \frac{1}{2}(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2),$$

где  $K = (K_x, K_y, K_z)$  — вектор углового момента.

**Определение 2.** Величины  $p_x = \partial H / \partial x$ ,  $p_y = \partial H / \partial y$ ,  $p_z = \partial H / \partial z$  назовем импульсами, сопряженными координатам  $x, y, z$  соответственно.

**Утверждение 2.** Функции  $H, F_1, F_2$  (как функции на  $\mathbb{R}^6(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ ) являются функционально независимыми и попарно коммутирующими относительно скобки Пуассона, ассоциированной с формой  $\omega = dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y + dz \wedge dp_z$ .

**Доказательство.** Инволютивность проверяется прямым вычислением. Для доказательства функциональной независимости нужно вычислить определитель матрицы Якоби по импульсам. Из явного вида этого определителя станет ясно, что он не ноль почти всюду. ■

Опишем альтернативный способ доказательства этого утверждения. Для этого заменим переменную  $z$  на  $i\tilde{z}$ , где  $i$  — мнимая единица, а константу  $c$  на  $-\tilde{c}$ . В таком случае семейство софокусных квадрик будет задано уравнением

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}-\lambda} = 1,$$

а функции  $H, F_1, F_2$  переписутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + \tilde{z}^2), \\ F_1 &= \frac{1}{2}\left((\tilde{c}+b)x^2 + (\tilde{c}+a)y^2 + (a+b)\tilde{z}^2\right) - \frac{1}{2}(\tilde{K}_x^2 + \tilde{K}_y^2 + \tilde{K}_z^2), \\ F_2 &= \frac{1}{2}\left(b\tilde{c}x^2 + a\tilde{c}y^2 + ab\tilde{z}^2\right) - \frac{1}{2}(a\tilde{K}_x^2 + b\tilde{K}_y^2 + \tilde{c}\tilde{K}_z^2), \end{aligned}$$

где  $\tilde{K} = (\tilde{K}_x, \tilde{K}_y, \tilde{K}_z)$  компоненты вектора кинетического момента в координатах  $x, y, \tilde{z}$ . Хорошо известно, что функции  $F_1, F_2, H$  являются функционально независимыми и попарно коммутирующими относительно стандартной скобки Пуассона на кокасательном расслоении к  $\mathbb{R}^3(x, y, \tilde{z})$ . Поэтому, в частности,  $F_1, F_2, H$ , являются функционально независимыми как функции на кокасательном расслоении к  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ . Осталось выразить дифференциальную форму  $\omega = dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y + d\tilde{z} \wedge dp_{\tilde{z}}$  в координатах  $(x, y, z)$  и импульсах  $(p_x, p_y, p_z)$ . Имеем:  $p_z = \partial H / \partial \dot{z} = -\dot{z} = -i\tilde{z} = -ip_{\tilde{z}}$ , откуда  $dp_z = -idp_{\tilde{z}}$ . Поскольку  $dz = id\tilde{z}$ , то  $dz \wedge dp_z = d\tilde{z} \wedge dp_{\tilde{z}}$ . Таким образом,  $H, F_1, F_2$  попарно коммутируют.

Используя такой прием, можно выписать формулы связи эллиптических координат в  $\mathbb{R}^{2,1}$  с каноническими  $(x, y, z)$ . Поскольку  $(x, y, \tilde{z})$  связаны системой

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(a-b)(a-\tilde{c})}, \\ y^2 = \frac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)(b-\lambda_3)}{(b-a)(b-\tilde{c})}, \\ \tilde{z}^2 = \frac{(\tilde{c}-\lambda_1)(\tilde{c}-\lambda_2)(\tilde{c}-\lambda_3)}{(\tilde{c}-a)(\tilde{c}-b)}, \end{cases}$$

формулы связи  $(x, y, z)$  с  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(a-b)(a+c)}, \\ y^2 = \frac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)(b-\lambda_3)}{(b-a)(b+c)}, \\ z^2 = \frac{(c+\lambda_1)(c+\lambda_2)(c+\lambda_3)}{(c+a)(c+b)}. \end{cases} \quad (4)$$

Аналогичным образом можно получить явные формулы для  $H, F_1, F_2$  в эллиптических координатах и сопряженных им импульсах  $(p_1, p_2, p_3)$ .

$$\begin{cases} H = 2 \left( \frac{\Delta_1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} p_1^2 + \frac{\Delta_2}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} p_2^2 + \frac{\Delta_3}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)} p_3^2 \right) \\ F_1 = 2 \left( \frac{\Delta_1(\lambda_2+\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} p_1^2 + \frac{\Delta_2(\lambda_1+\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} p_2^2 + \frac{\Delta_3(\lambda_1+\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)} p_3^2 \right) \\ F_2 = 2 \left( \frac{\Delta_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} p_1^2 + \frac{\Delta_2\lambda_1\lambda_3}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} p_2^2 + \frac{\Delta_3\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_1)} p_3^2 \right) \end{cases} \quad (5)$$

В приведенных формулах  $\Delta_i = -(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)(\lambda_i + c)$ .

**Теорема 1** (С. Л. Табачников, Б. А. Хесин). *Функции  $H, F_1, F_2$  являются функционально независимыми попарно коммутирующими относительно стандартной скобки Пуассона первыми интегралами бильярда внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$  в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}$ .*

**Доказательство.** Большую часть теоремы мы уже доказали. Остается показать, что  $F_1$  и  $F_2$  сохраняются при отражении. При отражении точки от эллипсоида  $\mathcal{E}$  один из сопряженных импульсов меняет свой знак, в то время как другие два остаются неизменными. Поскольку  $F_1$  и  $F_2$  зависят только от квадратов импульсов, эти функции сохраняются при отражении. ■

**Замечание 2.** *Эта теорема доказана С. Л. Табачниковым и Б. А. Хесиным в работе [3]. Мы приводим иное доказательство этой теоремы. Наше доказательство оперирует с эллиптическими координатами, которые сыграют ключевую роль в изучении топологии слоения Ливуилля рассматриваемого бильярда.*

Выясним еще несколько свойств функций  $H, F_1, F_2$ .

**Утверждение 3.** *Пусть  $h, f_1, f_2$  — совместный уровень первых интегралов  $H, F_1, F_2$  соответственно, тогда на этом уровне уравнения движения имеют вид:*

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{V(\lambda_i)}, \quad (6)$$

где  $V(z) = -(z - a)(z - b)(z + c)(hz^2 - f_1z + f_2)$ .

**Доказательство.** Пусть  $z$  — новая переменная, вычислим  $P(z) = Hz^2 - F_1z + F_2$ . Согласно теореме Виета и формулам 5

$$P(z) = 2 \left( \frac{\Delta_1(z - \lambda_2)(z - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_1^2 + \frac{\Delta_2(z - \lambda_1)(z - \lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_2^2 + \frac{\Delta_3(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} p_3^2 \right),$$

откуда  $P(\lambda_i) = 2\Delta_i p_i^2$ . Следовательно,  $p_i^2 = \frac{H\lambda_i^2 - F_1\lambda_i + F_2}{2\Delta_i}$ .

Теперь напишем часть уравнений Гамильтона, а именно

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{4\Delta_i}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} p_i.$$

Совмещая последние две формулы, получим требуемые уравнения. ■

Воспользуемся этим утверждением, чтобы прояснить геометрический смысл первых интегралов  $F_1$  и  $F_2$ .

**Утверждение 4** (С. Л. Табачников, Б. А. Хесин). *Пусть энергия материальной точки отлична от нуля, тогда все прямолинейные участки ее траектории (или их продолжения) одновременно касаются двух софокусных с эллипсоидом  $\mathcal{E}$  квадрик (с учетом кратности).*

**Доказательство.** Заметим, что многочлен  $P(z) = Hz^2 - F_1z + F_2$  сохраняется вдоль бильярдной траектории. Как мы уже выяснили, прямолинейная траектория касается квадрики параметра  $\lambda_0$  тогда и только тогда, когда  $P(\lambda_0) = 0$ . Следовательно, квадрики, которых касаются прямые, входящие в состав бильярдной траектории, сохраняются. Осталось показать, что  $P(z)$  имеет 2 вещественных корня (с учетом кратности).

В случае общего положения многочлен  $V(z)$  из формулы 6 обязан принимать положительные значения в некоторых точках интервалов  $(-c, b)$ ,  $(b, a)$ , поскольку эллиптические координаты определены на этих промежутках. Согласно условию  $h \neq 0$ , а следовательно,  $V(z)$  — многочлен 5-й степени.

Если бы многочлен  $P(z)$  не имел вещественных корней, то  $P(z) > 0$  или  $P(z) < 0$  для любого вещественного  $z$  (в зависимости от знака  $h$ ). В таком случае, знаки  $V(z)$  на интервалах  $(-c, b)$  и  $(b, a)$  были бы разными. Противоречие. ■

Следовательно, в случае  $H \neq 0$  мы можем в качестве дополнительных первых интегралов рассматривать параметры  $\Xi_1, \Xi_2$  софокусных квадрик, которых одновременно касаются все прямолинейные участки траектории.

Теперь, используя результаты этого параграфа, мы перейдем к описанию областей возможного движения рассматриваемой системы в случае общего положения.

#### 4. Области возможного движения

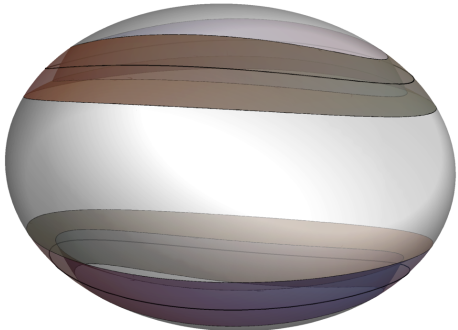
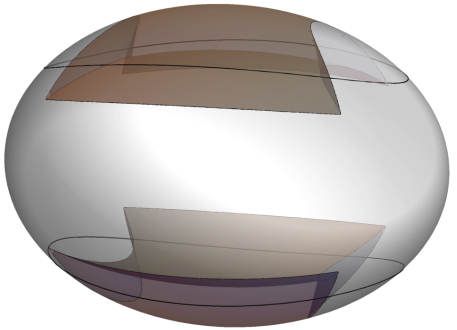
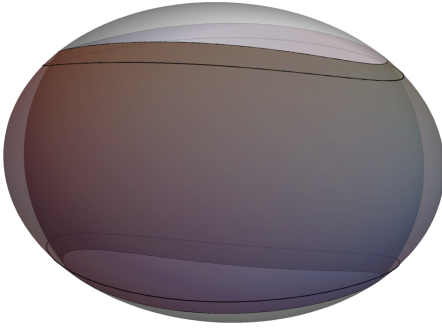
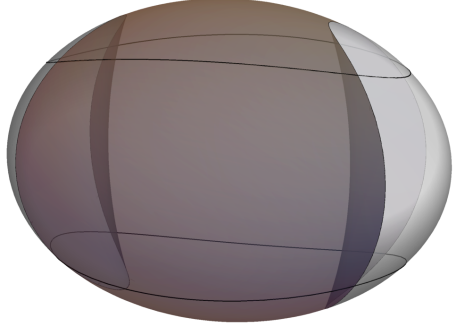
Мы будем рассматривать только случай общего положения. Поскольку при  $h = 0$  степень многочлена  $V(z)$  падает, этот случай отличается от остальных. Однако уравнение  $H = 0$  задает в фазовом пространстве  $M^6$  поверхность меры нуль, поэтому далее мы будем считать, что  $h \neq 0$ .

Заметим, что если два числа  $h_1$  и  $h_2$ , отличных от нуля, имеют одинаковые знаки, то топологии слоений Лиувилля на изоэнергетических поверхностях  $Q_{h_1}^5, Q_{h_2}^5$  совпадают (напомним что *изоэнергетической поверхностью* называется множество  $Q_h^5 = \{(x, v) \in M^6 | H(x, v) = h\}$ ). Действительно, траектории систем на  $Q_{h_1}^5$  и  $Q_{h_2}^5$  будут совпадать, изменится только скорость движения. При этом знак  $h$  существенен, поскольку от него зависит знак старшего коэффициента многочлена  $V(z)$ .

Согласно утверждению 4 при  $h \neq 0$  многочлен  $P(z) = hz^2 - f_1z + f_2$  имеет два вещественных корня (с учетом кратности). Обозначим эти корни через  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Мы будем считать, что  $\xi_1 < \xi_2$ . Исследуем все возможные расположения этих чисел относительно  $a, b$  и  $-c$ , чтобы описать области возможного движения.

Итак, пусть сначала  $h > 0$ . Тогда возможны следующие случаи и только они.

Таблица 1. Области возможного движения при  $h > 0$

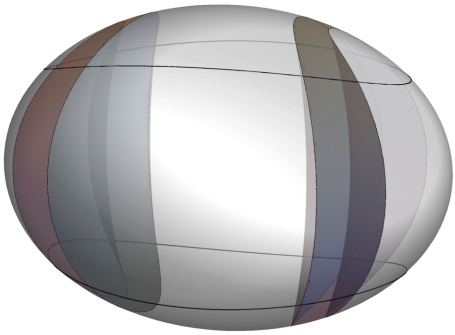
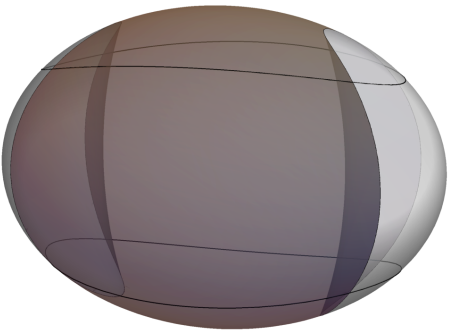
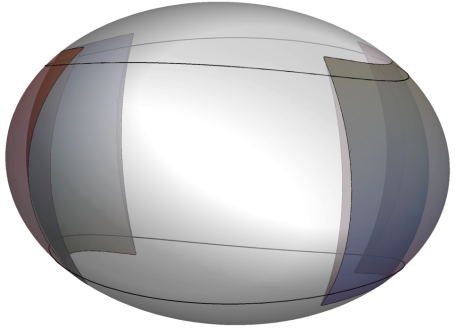
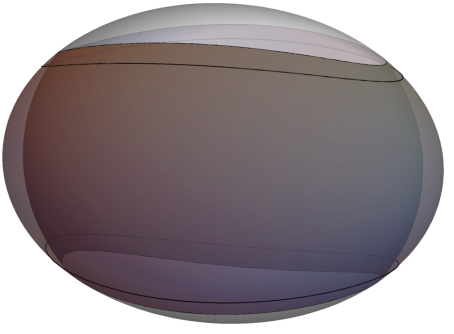
I a	$-c < \xi_1 < 0 < \xi_2 < b$	II a	$-c < \xi_1 < 0 < b < \xi_2 < a$
			
III a	$\xi_1 < -c < 0 < \xi_2 < b$	IV a	$\xi_1 < -c < b < \xi_2 < a$
			

Таким образом, при  $h > 0$  возможно только 4 вида областей возможного движения.

Пусть теперь  $h < 0$ . В таком случае мы получаем следующие виды областей возможного движения.



Таблица 2. Области возможного движения при  $h < 0$

<p><b>I б</b> <math>b &lt; \xi_1 &lt; \xi_2 &lt; a</math></p> 	<p><b>II б</b> <math>b &lt; \xi_1 &lt; a &lt; \xi_2</math></p> 
<p><b>III б</b> <math>0 &lt; \xi_1 &lt; b &lt; \xi_2 &lt; a</math></p> 	<p><b>IV б</b> <math>0 &lt; \xi_1 &lt; b &lt; a &lt; \xi_2</math></p> 

Следовательно, при  $h < 0$  возможны только 4 вида областей возможного движения и только они.

## 5. Бифуркационные диаграммы

Поскольку первые интегралы  $\Xi_1$  и  $\Xi_2$  имеют наглядную геометрическую интерпретацию, проще всего работать именно с ними. Однако при  $H = 0$  эти функции не определены, и следовательно, мы можем работать с ними только либо при  $H > 0$ , либо при  $H < 0$ .

Как уже было отмечено, ограничения системы на изоэнергетические поверхности с одинаковыми знаками энергии топологически эквивалентны, получаясь друг из друга растяжением вектора скорости. Поэтому сначала мы построим бифуркационные диаграммы для случаев  $h > 0$  и  $h < 0$ , а затем нарисуем общую диаграмму.

Поскольку рассматриваемая система является кусочно-гладкой, нам необходимо дать определение особых точек образа отображения момента и бифуркационной диаграммы.

**Определение 3.** Точку  $P \in \mathbb{R}^3$  (или  $\mathbb{R}^2$ , если рассматривается ограничение на изоэнергетическую поверхность) образа отображения момента будем называть особой, если  $P$  лежит на границе образа отображения момента, или для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся две точки из  $U_\varepsilon(P)$ , прообразы которых соответствуют разным типам областей возможного движения.

**Определение 4.** Бифуркационной диаграммой будем называть совокупность всех особых точек образа отображения момента.

Согласно результатам предыдущего параграфа в состав бифуркационной диаграммы системы на изоэнергетической поверхности  $Q_h^5$  войдут

- отрезки прямых  $\xi_1 = -c$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_2 = b$ ,  $\xi_2 = a$  при  $h > 0$ ;
- отрезки прямых  $\xi_1 = \xi_2$ ,  $\xi_1 = b$ ,  $\xi_1 = a$ ,  $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_2 = b$ ,  $\xi_2 = a$  при  $h < 0$ .

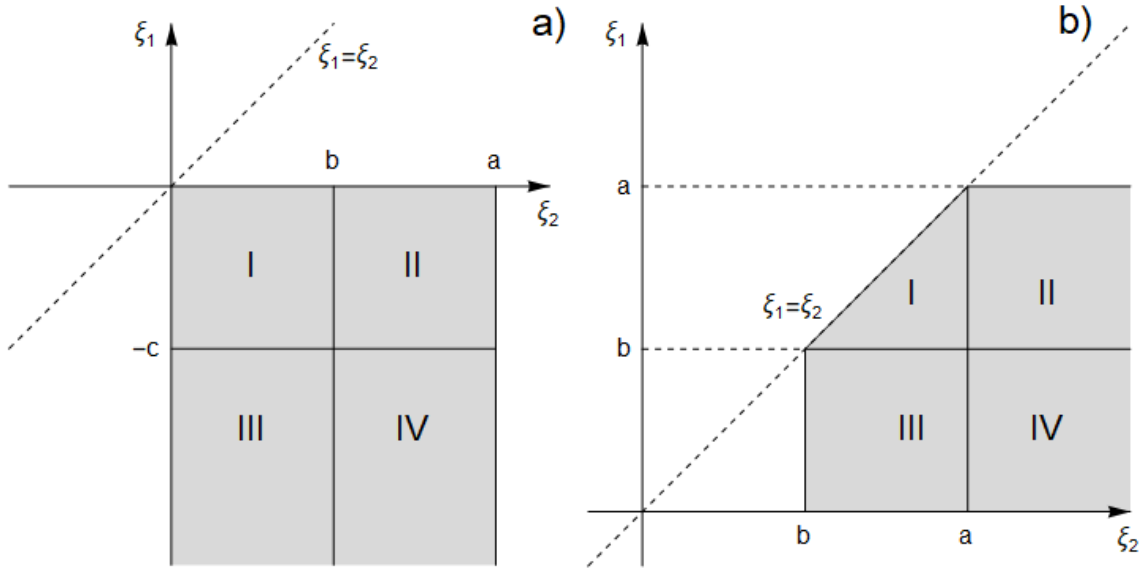


Рис. 4: Бифуркационные диаграммы отображения момента, ограниченного на изоэнергетическую поверхность  $Q_h^5$  а) при  $h > 0$ , б) при  $h < 0$ .

Эти бифуркационные диаграммы изображены на рисунке [4]. Каждая из них содержит 4 камеры, которые соответствуют разным типам областей возможного движения. Нумерация камер совпадает с нумерацией областей возможного движения из предыдущего параграфа.

Теперь построим бифуркационную диаграмму отображения момента для интегралов  $H, F_1, F_2$  всего фазового пространства. Поскольку многочлен касания всегда должен иметь два корня, в состав бифуркационной диаграммы должен войти конус  $f_1^2 = 4hf_2$ . Также она должна содержать участки плоскостей  $a^2h - af_1 + f_2 = 0$ ,  $b^2h - bf_1 + f_2 = 0$ ,  $c^2h + cf_1 + f_2 = 0$ ,  $f_2 = 0$ . Эти плоскости отвечают условиям  $\xi_i = a, b, -c, 0$ . В итоге, мы получим комплекс, изображенный на рисунке [5].

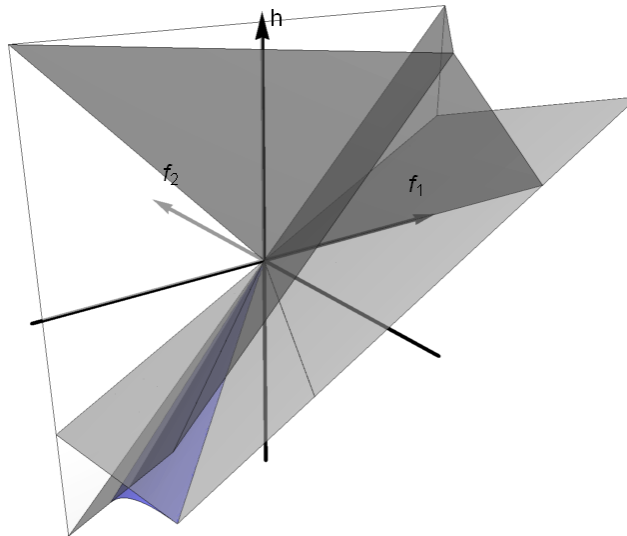


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма биллиарда внутри эллипсоида в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Синим выделен участок конуса  $f_1^2 = 4hf_2$ , входящий в состав бифуркационной диаграммы.

Отметим, что образ отображения момента (см рис. [5]) состоит из шести камер. Каждая из них соответствует своему типу области возможного движения. Занумеруем камеры следующим

образом.

Номер камеры	Номер ОВД
I	I a
II	II a
III	III a, IV b
IV	IV a, II b
V	I b
VI	III b

### §6 Класс гомеоморфности регулярных слоев отображения момента

**Теорема 2.** Пусть  $P = (h, f_1, f_2)$  — регулярное значение отображения момента, тогда слой, соответствующий этой точке в  $M^6$ , гомеоморфен одному трехмерному тору или несвязному объединению нескольких трехмерных торов. Более того, слоение Лиувилля в инвариантной окрестности этого слоя тривиально.

**Доказательство.** Мы докажем эту теорему только для точек камеры I. Доказательство в остальных случаях аналогичное.

Пусть точка  $P = (h, f_1, f_2)$  лежит в камере I, тогда, согласно классификации областей возможного,  $h > 0$ , а значения  $\xi_1, \xi_2$  интегралов  $\Xi_1, \Xi_2$  удовлетворяют неравенству  $-c < \xi_1 < 0 < \xi_2 < b$ . Следовательно, в эллиптических координатах ОВД, соответствующая точке  $P$ , задается условиями:  $\lambda_1 \in [\xi_1, 0]$ ,  $\lambda_2 \in [0, \xi_2]$ ,  $\lambda_3 \in [b, a]$ . Отметим, что координата  $\lambda_2$  отделена от значения  $b$ , поэтому мы можем расслоить ОВД на софокусные однополостные гиперboloиды, отвечающие третьей эллиптической координате. При этом все связные компоненты таких слоев будут гомеоморфны друг другу.

Заметим, что наша ОВД является дизъюнктым объединением двух компонент связности, симметричных друг другу относительно начала координат. Следовательно, прообраз точки  $P$  гомеоморфен дизъюнктому объединению двух комплексов, отвечающих компонентам связности ОВД. Поэтому мы будем рассматривать не всю ОВД, а только одну ее связную компоненту, а именно ту, которая расположена в полупространстве  $z > 0$ . Обозначим ее буквой  $Q$ .

Опишем расположение векторов скорости в точках множества  $Q$ . Пусть точка  $X$  лежит внутри  $Q$ . Если все ее канонические координаты отличны от нуля, то эллиптические координаты в окрестности  $X$  являются гладкой регулярной системой координат, а следовательно, согласно формулам 6 точке  $X$  соответствует 8 векторов скорости. Если среди канонических координат есть хотя бы одна нулевая, то, осуществляя предельный переход в формуле замены координат 4, можно показать, что точке  $X$  будут по-прежнему соответствовать 8 векторов скорости.

Для того чтобы описать склейку векторов на границе  $Q$ , нужно ввести обозначения векторов скорости внутри  $Q$ . Поскольку в координатных октантах, эллиптические координаты являются регулярными, занумеруем векторы скорости в них с помощью формул 6. Сделаем мы это с помощью таблицы, в строках которой будем указывать октант, а в столбцах — тройки знаков  $(\text{sign } \lambda_1, \text{sign } \lambda_2, \text{sign } \lambda_3)$ . Поскольку  $Q$  лежит в полупространстве  $z > 0$ , нужно ввести обозначения в четырех октантах.

	(+, +, +)	(-, +, +)	(-, -, +)	(+, -, +)	(+, +, -)	(-, +, -)	(-, -, -)	(+, -, -)
$x > 0$ $y > 0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$x > 0$ $y < 0$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$x < 0$ $y < 0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$x < 0$ $y > 0$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$

Нами выбрана именно такая нумерация, поскольку при склейке двух соседних октантов векторы с одинаковыми номерами склеиваются на границе. Это можно проверить, используя предельный переход в формулах 4. Таким образом, векторные поля  $v_i$  являются непрерывными в  $Q$ .

Теперь мы можем описать склейку векторов скорости на границе  $Q$  в терминах векторных полей  $v_i$ . На поверхности эллипсоида параметра  $\xi_1$  в силу касания  $v_1$  склеивается с  $v_2$ ,  $v_3$  — с  $v_4$ ,  $v_5$  — с  $v_6$ ,  $v_7$  — с  $v_8$ . Аналогично, на поверхности эллипсоида параметра  $\xi_2$  векторное поле  $v_1$  склеивается с  $v_4$ ,  $v_2$  — с  $v_3$ ,  $v_5$  — с  $v_8$ ,  $v_6$  — с  $v_7$ . На участке эллипсоида  $\mathcal{E}$ , расположенном ниже тропической кривой, в силу бильярдного отражения происходит та же склейка, что и на эллипсоиде параметра  $\xi_2$ . А на участке выше тропической кривой, склейка такая же, как на поверхности эллипсоида параметра  $\xi_1$ . Остается описать склейку векторов на тропической кривой, а также на кривых попарного пересечения каустических эллипсоидов и эллипсоида  $\mathcal{E}$ . Поскольку в этих кривых смыкаются стенки с одинаковыми правилами склейки, на этом множестве точек  $v_1$  склеивается с  $v_2$ ,  $v_3$  и  $v_4$ , а  $v_5$  — с  $v_6$ ,  $v_7$  и  $v_8$ .

Как уже было отмечено, множество  $Q$  можно расслоить однополостными гиперboloидами, отвечающими третьей эллиптической координате. При таком расслоении все связные компоненты слоев будут гомеоморфны друг другу. Более того, ограничения прообразов точки  $P$  на эти слои будут совпадать. Этот факт легко пояснить с помощью формул 6. Рассмотрим два слоя, соответствующих гиперboloидам параметров  $\mu_1, \mu_2 \in (b, a)$ . На каждом из этих слоев третья эллиптическая координата зафиксирована, а остальные две изменяются на одинаковом множестве и задают равное количество векторов в каждой точке. Поскольку условия склейки векторов общее, то, действительно, ограничения прообраза точки  $P$  на эти слои гомеоморфны. Для того чтобы доказать аналогичный факт для слоев, соответствующих параметрам  $a$  и  $b$ , необходимо совершить предельный переход в формулах замены 4.

Итак, рассмотрим сечение множества  $Q$  квадрикой параметра  $a$ . Напомним, что этому параметру соответствует плоскость  $x = 0$ . В сечении мы получим множество, ограниченное тремя эллипсами:  $\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$ ,  $\frac{y^2}{b - \xi_1} + \frac{z^2}{c - \xi_1} = 1$ ,  $\frac{y^2}{b - \xi_2} + \frac{z^2}{c - \xi_2} = 1$  (отметим, что все три эллипса являются софокусными квадриками на плоскости Минковского). Это множество показано на рисунке [6]. Оно состоит из двух симметричных друг другу компонент связности. Рассмотрим ту, которая лежит в полуплоскости  $y > 0$  и обозначим ее через  $Q_a$ . Ограничение прообраза точки  $P$  на  $Q_a$  состоит из двух компонент связности, одна из них соответствует векторным полям  $v_1, v_2, v_3, v_4$ , а другая —  $v_5, v_6, v_7, v_8$ . Рассмотрим ту часть, которая соответствует первым четырем полям, и определим ее класс гомеоморфности.

Для того чтобы это сделать, нужно расслоить  $Q_a$  на софокусные эллипсоиды, отвечающие первой эллиптической координате. На каждом слое, кроме  $\lambda = \xi_1$  и  $\lambda = 0$ , векторы  $v_1 - v_4$  будут образовывать несвязное объединение двух окружностей. На слоях  $\lambda = \xi_1$  и  $\lambda = 0$  в силу бильярдного отражения будут располагаться по одной окружности направлений. Совершив полный обход по всем таким слоям, мы можем легко убедиться, что  $Q_a$  с векторными полями  $v_1 - v_4$  гомеоморфно двумерному тору  $T^2$ .

Теперь будем смещать слой  $Q_a$  с векторами  $v_1 - v_4$  в положительном направлении обхода относительно оси  $Oz$  по слоям расслоения множества  $Q$  на однополостные гиперboloиды (соответствующие третьей эллиптической координате). Как было отмечено ранее, все слои (с соответствующими векторами) будут гомеоморфны друг другу, то есть гомеоморфны двумерному тору  $T^2$ . Совершив полный обход, мы приведем слой в начальное положение, то есть в  $Q_a$ .

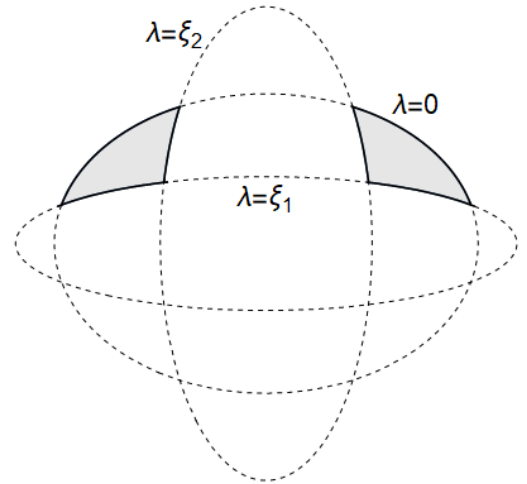


Рис. 6: Пересечение множества  $Q$  с квадрикой параметра  $a$

При этом все векторы вернутся в исходное положение. Значит, множество  $Q$  с векторами  $v_1 — v_4$  гомеоморфно прямому произведению двумерного тора и окружности, то есть трехмерному тору.

Аналогично, заключаем, что ограничение прообраза точки  $P$  на множество  $Q$  с векторами  $v_5 — v_8$  гомеоморфно трехмерному тору. Поскольку ОВД прообраза точки  $P$  состоит из несвязного объединения двух множеств —  $Q$  и центрально симметричного ему, прообраз точки  $P$  гомеоморфен несвязному объединению четырех трехмерных торов. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части заметим, что при малом непрерывном изменении первых интегралов векторные поля  $v_1 — v_8$  меняются непрерывно. При этом условия склейки векторов на границе остаются прежними. Теорема доказана. ■

Теперь приведем таблицу, в которой укажем количество трехмерных торов в каждой камере бифуркационной диаграммы.

Номер камеры	Количество торов $T^3$
I	4
II	2
III	2
IV	1
V	2
VI	2

## §7 Топология внутренних перестроек коразмерности 1

**Определение 5.** Точку  $P = (h, f_1, f_2)$  образа отображения момента будем называть особой точкой коразмерности 1, если выполнено одно из следующих условий.

1.  $P$  лежит на границе образа отображения момента и входит в состав ровно одной стенки бифуркационной диаграммы.
2.  $P$  является внутренней точкой образа отображения момента и граничит ровно с двумя камерами.

В первом случае будем называть особенность граничной, а во втором — внутренней.

Как оказалось, прообразы в  $M^6$  внутренних особых точек кратности 1 компактны, в отличие от некоторых внешних особенностей.

**Теорема 3.** Пусть  $P = (h, f_1, f_2)$  — внутренняя особая точка коразмерности 1, тогда прообраз малой шаровой окрестности этой точки в  $M^6$  гомеоморфен одному или несвязному объединению нескольких прямых произведений вида  $V_3 \times S^1 \times D^2$ , где  $V_3$  — один из следующих седловых 3-атомов:  $A^*$ ,  $B$ ,  $C_2$ .

**Доказательство.** Докажем эту теорему для стенки, граничащей с камерами I и III. Остальные случаи разбираются аналогично.

Пусть  $P = (h, f_1, f_2)$  — внутренняя особая точка коразмерности 1, граничащая с камерами I и III. Эти камеры входят в состав бифуркационной диаграммы только при положительном значении энергии, поэтому  $h > 0$ . Рассмотрим изоэнергетическую поверхность  $Q_h^5$  и опишем прообраз малой окрестности точки  $P$  в  $Q_h^5$ . Поскольку  $h$  зафиксировано, прообраз этой окрестности совпадает с прообразом малой окрестности (гомеоморфной диску) точки  $(f_1, f_2)$  в  $Q_h^5$ . Так как при  $h > 0$  корректно определены первые интегралы  $\Xi_1, \Xi_2$ , прообраз малой окрестности точки  $(f_1, f_2)$  совпадает с прообразом малой окрестности точки  $(\xi_1^0, \xi_2^0)$ , где  $(\xi_1^0, \xi_2^0)$  — значения первых интегралов  $(\Xi_1, \Xi_2)$  на совместном уровне  $P$ .

Поскольку  $P$  граничит с камерами I и III, точка  $(\xi_1^0, \xi_2^0)$  разделяет камеры Ia и IIIa. Следовательно,  $\xi_1^0 = -c$ , а  $\xi_2^0 \in (0, b)$ . Пусть  $\varepsilon \in (0, c)$ . Опишем прообраз отрезка  $[(-c-\varepsilon, \xi_2^0), (-c+\varepsilon, \xi_2^0)]$  в  $Q_h^5$ .

Поскольку  $\xi_2^0 < b$ , ОВД, соответствующие точкам отрезка  $[(-c - \varepsilon, \xi_2^0), (-c + \varepsilon, \xi_2^0)]$ , обладают следующим замечательным свойством: третья эллиптическая координата в них отделена от значения  $b$ . Следовательно, каждую ОВД на этом отрезке можно расслоить на софокусные однополостные гиперboloиды, отвечающие третьей эллиптической координате, так, чтобы связанные компоненты всех слоев были бы гомеоморфны друг другу. Рассмотрим слой, отвечающий квадрике параметра  $a$ , то есть плоскости  $x = 0$ . Пересечение ОВД, соответствующей любой точки отрезка  $[(-c - \varepsilon, \xi_2^0), (-c + \varepsilon, \xi_2^0)]$ , симметрично относительно прямой  $y = 0$  и не пересекает ее.

Рассмотрим полуплоскость  $x = 0, y > 0$  и проследим, как меняется пересечение ОВД и этой полуплоскости в зависимости от точки отрезка  $[(-c - \varepsilon, \xi_2^0), (-c + \varepsilon, \xi_2^0)]$ . Для любого  $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  пересечение ОВД, соответствующей точке  $(\xi_1^0 + t, \xi_2^0)$ , с полуплоскостью  $x = 0, y > 0$  обозначим через  $Q(t)$ . Согласно доказательству теоремы 2, при  $t > 0$  множество  $Q(t)$  гомеоморфно двум замкнутым областям, симметричным относительно прямой  $z = 0$  и ограниченными эллипсами  $\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$ ,  $\frac{y^2}{b - \xi_2^0} + \frac{z^2}{c + \xi_2^0} = 1$  и  $\frac{y^2}{b - \xi_1^0 - t} + \frac{z^2}{c + \xi_1^0 + t} = 1$ . При  $t \leq 0$  множество  $Q(t)$  ограничено эллипсами  $\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$  и  $\frac{y^2}{b - \xi_2^0} + \frac{z^2}{c + \xi_2^0} = 1$ , т.е. не зависит от  $t$ . Динамика изменения множества  $Q(t)$  показана на рисунке [7].

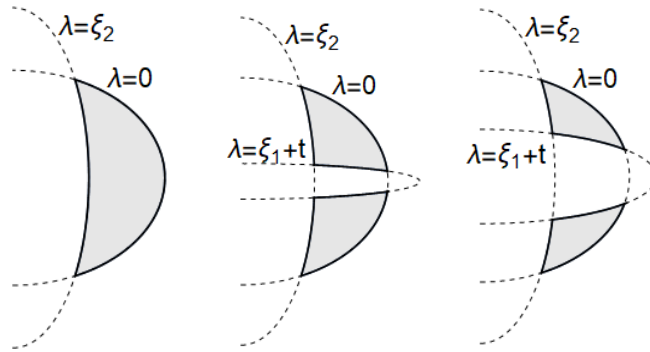


Рис. 7: Изменение множества  $Q(t)$  при увеличении параметра  $t$ ; а)  $Q(t)$  при  $t \leq 0$ ; б)  $Q(t)$  при  $t = t_1 > 0$ ; в)  $Q(t)$  при  $t = t_2 > t_1$ .

Теперь выясним как при таком изменении параметра  $t$  деформируются векторные поля в точках  $Q(t)$ . Для этого нужно ввести обозначения векторов в каждом из координатных октантов. Поступим также, как в теореме 2. Закодируем вектора с помощью таблицы знаков. В строках таблицы будем указывать координатные октанты, которые мы будем нумеровать знаками канонических координат, а в столбцах — тройки знаков эллиптических координат векторов скорости. Отметим, что обозначения выбираются так, чтобы векторные поля  $v_i$  непрерывно продолжались на координатные плоскости  $x = 0, y = 0, z = 0$ .

	(+, +, +)	(-, +, +)	(-, -, +)	(+, -, +)	(+, +, -)	(-, +, -)	(-, -, -)	(+, -, -)
(+, +, +)	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
(+, -, +)	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
(-, -, +)	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
(-, +, +)	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
(+, +, -)	$v_2$	$v_1$	$v_4$	$v_3$	$v_6$	$v_5$	$v_8$	$v_7$
(+, -, -)	$v_6$	$v_5$	$v_8$	$v_7$	$v_2$	$v_1$	$v_4$	$v_3$
(-, -, -)	$v_2$	$v_1$	$v_4$	$v_3$	$v_6$	$v_5$	$v_8$	$v_7$
(-, +, -)	$v_6$	$v_5$	$v_8$	$v_7$	$v_2$	$v_1$	$v_4$	$v_3$

То, что  $\forall t$  векторные поля  $v_i$  продолжаются на координатные плоскости  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  проверяется прямым вычислением с помощью предельного перехода в формулах 4.

Ограничим эти поля на  $Q(t)$ , иными словами  $\forall t$  ограничим прообраз точки отрезка  $[(-c - \varepsilon, \xi_2^0), (-c + \varepsilon, \xi_2^0)]$  в  $Q_h^5$  на  $Q(t)$ . Заметим, что при таком ограничении совокупности векторных  $v_1 - v_4$ ,  $v_5 - v_8$  лежат в разных компонентах связности (этого ограничения). Поэтому рассмотрим  $\forall t$  векторные поля  $v_1 - v_4$  на  $Q(t)$ . Обозначим соответствующее множество в  $M^6$  через  $L(t)$ , а через  $L$  множество  $\bigcup_{t \in [-\varepsilon, \varepsilon]} L(t)$ .

Расслоив  $Q(t)$  на софокусные эллипсы  $\frac{y^2}{b - \mu} + \frac{z^2}{c + \mu} = 1$  при  $\mu \in [0, \xi_2]$ , нетрудно видеть, что  $L$  на каждом из таких слоев гомеоморфно 2-атому  $B$ . При полном обходе все векторы вернуться в исходное положение. Следовательно,  $L$  гомеоморфно прямому произведению 2 атома  $B$  и окружности, т.е. 3-атому  $B$ .

Теперь будем перемещать  $Q(t)$  с векторными полями  $v_1 - v_4$  по всем слоям расслоения ОВД на однополостные гиперboloиды, соответствующие третьей эллиптической координате. На каждом таком слое снова получим 3-атом  $B$ . При полном обходе по слоям все множества  $Q(t)$  вместе с векторами  $v_1 - v_4$  вернуться в исходное положение. Следовательно, ограничение прообраза отрезка  $[(-c - \varepsilon, \xi_2^0), (-c + \varepsilon, \xi_2^0)]$  на векторные поля  $v_1 - v_4$  гомеоморфно прямому произведению окружности и 3-атома  $B$ . Поскольку рассуждения в случае векторов  $v_5 - v_8$  будут аналогичными, прообраз этого отрезка гомеоморфен несвязному объединению двух прямых произведений атома  $B$  и окружности.

Теперь заметим, что при малом непрерывном изменении параметра  $\xi_2$  все рассуждения остаются прежними, при этом векторные поля  $v_i$  непрерывно меняются. Следовательно, прообраз малой окрестности точки  $(\xi_1^0, \xi_2^0)$  в  $Q_h^5$  гомеоморфен двум прямым произведениям вида  $B^{(3)} \times S^1 \times D^1$  (здесь через  $B^{(3)}$  обозначен 3-атом  $B$ ). Следовательно, согласно рассуждению в начале параграфа, прообраз малой шаровой окрестности точки  $P = (h, f_1, f_2)$  гомеоморфен двум прямым произведениям вида  $B^{(3)} \times S^1 \times D^2$ . Теорема доказана. ■

Ниже приведены классы гомеоморфности прообразов в  $M^6$  малых шаровых окрестностей внутренних особых точек (бифуркационной диаграммы) кратности 1. Все атомы в таблице трехмерные.

Номера соседних камер	Класс гомеоморфности малой окрестности слоя
I, II	$2B \times S^1 \times D^2$
I, III	$2B \times S^1 \times D^2$
II, IV	$B \times S^1 \times D^2$
III, IV	$B \times S^1 \times D^2$
IV, V	$B \times S^1 \times D^2$
V, VI	$2A^* \times S^1 \times D^2$
III, VI	$C_2 \times S^1 \times D^2$

## §8 Топология некомпактных слоев и их малых окрестностей

В этом параграфе мы опишем топологию малых окрестностей слоев, соответствующих граничным стенкам бифуркационной диаграммы. Но для начала докажем одно очень важное утверждение.

**Утверждение 5.** Пусть точка  $P = (h, f_1, f_2)$  лежит на границе образа отображения момента, тогда прообраз этой точки в  $M^6$  компактен в том и только том случае, когда  $f_2 \neq 0$ .

**Доказательство.** Напомним, что фазовое пространство рассматриваемой системы не включает пары вида  $(x, v)$ , где  $x$  — точка тропической кривой, а  $v \in T_x \mathcal{E}$ . В случае, когда один из корней многочлена касания равен нулю, материальная точка будет двигаться по эллипсоиду  $\mathcal{E}$ . Более того, поверхность возможного движения при таком условии всегда будет ограничена

тропической кривой. Поскольку мы исключили вышеуказанные пары точка-вектор из фазового пространства, граница поверхности возможного движения ей (самой поверхности) не принадлежит. Следовательно, поверхность возможного движения не компактна, откуда прообраз точки  $P$  некомпактен. Остается отметить, что ноль является корнем многочлена касания в том и только том случае, когда  $f_2 = 0$ .

При  $f_2 \neq 0$  в точках тропической кривой соответствующие векторы скорости отличны от касательных к эллипсоиду  $\mathcal{E}$ . Поэтому область возможного движения включает эти точки, а стало быть, она компактна. Описание топологии соответствующего слоя слоения Лиувилля производится методами, описанными выше, следовательно, при  $f_2 \neq 0$  прообраз точки  $P$  в  $M^6$  компактен. ■

**Теорема 4.** Пусть  $P = (h, f_1, f_2)$  — граничная особая точка коразмерности 1, тогда если  $f_2 \neq 0$ , прообраз малой окрестности этой точки в  $M^6$  гомеоморфен одному или несвязному объединению нескольких прямых произведений вида  $A^{(3)} \times S^1 \times D^2$ .

**Доказательство.** Доказательство этой теоремы производится методами, описанными в доказательстве теоремы 3. ■

Пусть теперь  $f_2 = 0$ .

**Утверждение 6.** Если  $P = (h, f_1, 0)$  — граничная особая точка коразмерности 1, то прообраз этой точки в  $M^6$  гомеоморфен несвязному объединению нескольких цилиндров  $(S^1 \times D^1)$ .

**Доказательство.** Докажем, для точки  $P$ , граничащей с камерой III. Рассуждения в остальных случаях аналогичные.

Расслоим поверхность возможного движения, отвечающую точке  $P$ , на софокусные однополостные гиперболоиды, соответствующие третьей эллиптической координате. Все связные компоненты этого расслоения гомеоморфны открытому интервалу. В каждой точке такого интервала расположено 4 касательных вектора. Совершив полный обход по всем слоям с векторами, заключаем, что в прообразе точке  $P$  (в  $M^6$ ) лежит несвязное объединение четырех цилиндров. ■

Для того чтобы описать прообраз малой окрестности точки  $P$  из утверждения выше, рассмотрим 3-комплекс  $\mathfrak{A}$  получаемый деформацией тора в пару параллельных прямых. Этот комплекс расположен в  $\mathbb{R}^4(x, y, z, t)$ , в полосе  $t \in [0, 1)$  и при  $t \neq 0$  задан следующей системой.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} \cos \varphi \left( 1 + \frac{t}{2} \cos \theta \right) \\ y = \sin \varphi \left( 1 + \frac{t}{2} \cos \theta \right) \\ z = \frac{t}{2} \cos \theta \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, 2\pi], t \in (0, 1)$$

Сечение  $\mathfrak{A}$  плоскостью  $t = 0$  представляет собой пару параллельных прямых, задаваемых уравнениями  $y = \pm 1, z = 0$ .

Теперь опишем этот комплекс наглядно. Заметим, что если в формулу выше подставить  $t = 1$ , то в  $\mathbb{R}^3$  получится тор вращения с большим радиусом 1 и меньшим 1/2. При уменьшении параметра  $t$ , соответствующая поверхность по-прежнему будет тором, одна из образующих которого будет вытягиваться вдоль оси  $Ox$ , а другая стягиваться. В итоге, при  $t = 0$  получим пару параллельных прямых  $y = \pm 1, z = 0$ . Динамика изменения среза  $\mathfrak{A}$  в зависимости от  $t$  показана на рисунке [8].

**Теорема 5.** Пусть  $P = (h, f_1, 0)$  — граничная особая точка коразмерности 1, тогда прообраз малой окрестности этой точки в  $M^6$  гомеоморфен одному или несвязному объединению нескольких прямых произведений вида  $\mathfrak{A} \times S^1 \times D^2$ .

Доказательство этой теоремы производится с помощью методов, описанных в доказательстве теоремы 3.



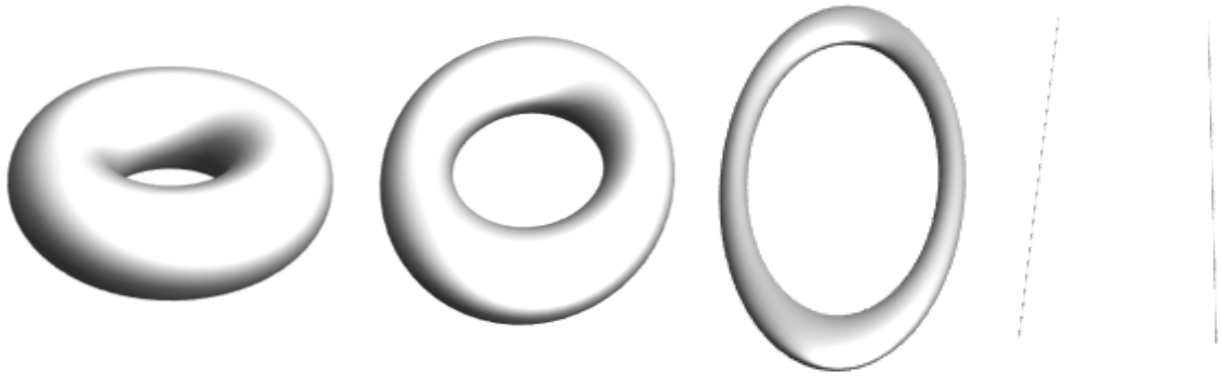


Рис. 8: Изменение среза комплекса  $\mathfrak{A}$  плоскостью  $t = \text{const}$  при уменьшении параметра  $t$  к нулю.

## Список литературы

- [1] V. Dragovic, M. Radnovic, “Topological Invariants for Elliptical Billiards and Geodesics on Ellipsoids in the Minkowski Space” // J Math Sci, 223, 686–694 (2017).
- [2] Genin D., Khesin B., Tabachnikov S. Geodesics on an ellipsoid in Minkowski space // Enseign. Math. — 2007. — Vol. 53. — P. 307-331.
- [3] Khesin B., Tabachnikov S. Pseudo-Riemannian geodesics and billiards // Adv. Math. — 2009. — Vol. 221. — P. 1364-1396.
- [4] Dragovic V., Radnovic M. Ellipsoidal billiards in pseudo-Euclidean spaces and relativistic quadrics // Adv. Math. — 2012. — Vol. 231. — P. 1173–1201.
- [5] V. Dragovic, S. Gasiorek, M. Radnovic, “Integrable billiards on a Minkowski hyperboloid: extremal polynomials and topology” // Sb. Math., 213:9 (2022), 1187–1221
- [6] A. T. Fomenko, “The topology of surfaces of constant energy in integrable Hamiltonian systems, and obstructions to integrability”, Math. USSR-Izv., 29:3 (1987), 629–658
- [7] A. T. Fomenko, Kh. Tsishang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, Math. USSR-Izv., 36:3 (1991), 567–596
- [8] A. V. Bolsinov, S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity”, Russian Math. Surveys, 45:2 (1990), 59–94
- [9] D. A. Fedoseev, A. T. Fomenko, “Noncompact bifurcations of integrable dynamic systems”, J. Math. Sci. (N.Y.), 248:6 (2020), 810–827
- [10] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Rigid body dynamics in non-Euclidean spaces”, Russ. J. Math. Phys., 23:4 (2016), 431–454
- [11] С. В. Соколов, “Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных”, Труды МАИ, 100 (2018), 4, 13 с.
- [12] Kibkalo, V.A. Noncompactness Property of Fibers and Singularities of Non-Euclidean Kovalevskaya System on Pencil of Lie Algebras. Moscow Univ. Math. Bull. 75, 263–267 (2020)
- [13] М. К. Алтуев, В. А. Кибкало, “Топологический анализ псевдоевклидова волчка Эйлера при особых значениях параметров”, Матем. сб., 214:3 (2023), 54–70