

# Трехмерные бильярды с проскальзыванием

*Белозеров Г. В., Завьялов В. Н.*

МГУ имени М. В. Ломоносова

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 22-71-00111 в МГУ имени М. В. Ломоносова

**Аннотация.** Рассматривается задача о движении материальной точки в трехмерной софокусной области с проскальзыванием на границе. Такая динамическая система является интегрируемой по Лиувиллю в кусочно гладком смысле. Для нескольких типов бильярдных столов найдены классы гомеоморфности поверхностей постоянной энергии, построены бифуркационные диаграммы, описана топология малых окрестностей особых и неособых слоев. Исследован псевдоевклидов аналог бильярда с проскальзыванием внутри эллипсоида (в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}$ ): описаны регулярные слои и 1-перестройки торов Лиувилля.

**Ключевые слова:** интегрируемая система, бильярд, интегрируемый бильярд, слоение Лиувилля, бифуркационная диаграмма, топологический инвариант.

## §1 Введение

Математический бильярд — это задача о движении материальной точки внутри области  $n$ -мерного евклидова пространства с абсолютно упругим отражением от границы (т.е. по классическому закону “угол падения равен углу отражения”). Интегрируемость бильярда внутри эллипса была замечена Дж. Д. Биркгофом в работе [1]. В книге В. В. Козлова и Д. В. Трещева [2] была отмечена интегрируемость плоских бильярдных систем, ограниченных дугами софокусных квадрик. В качестве дополнительного первого интеграла таких систем выступает параметр софокусной квадрики, которой касаются все звенья (или их продолжения) траектории-ломаной. Такие бильярды были исследованы с точностью до лиувиллевой эквивалентности в работах В. Драговича и М. Раднович [3, 4], а также В. В. Ведюшкиной (Фокичевой) [5, 6, 7].

Важным расширением класса плоских бильярдных систем стало введение В. В. Ведюшкиной бильярдных книжек — комплексов, склеенных из плоских софокусных областей (см. [8, 9]). При попадании на границу листа (т.е. элементарного плоского бильярдного стола) книжки материальная точка переходит на другой лист согласно перестановке, указанной на ребре границы. Важным подклассом бильярдных книжек являются топологические бильярды. Такие бильярды имеют на ребрах только циклические перестановки длины 1 или 2 и являются кусочно гладкими двумерными многообразиями. В классе таких бильярдных систем В. В. Ведюшкиной и А. Т. Фоменко (см. [10]) были промоделированы геодезические потоки на сфере  $S^2$  и торе  $T^2$ , обладающие линейным по импульсам дополнительным первым интегралом, а также квадратично интегрируемые геодезические потоки на сфере  $S^2$ . Для моделирования квадратичных геодезических потоков на торе были использованы другие бильярдные книжки.

Еще одним обобщением плоских бильярдных систем является софокусные бильярды с проскальзыванием, введенные А. Т. Фоменко в работе [11]. Отражение у таких бильярдных систем устроено иначе (см. рис. 1). Частица, попадая на границу стола, отражается и выходит из точки, полученной поворотом радиус-вектора точки столкновения с границей на некоторый угол. В работе [11]

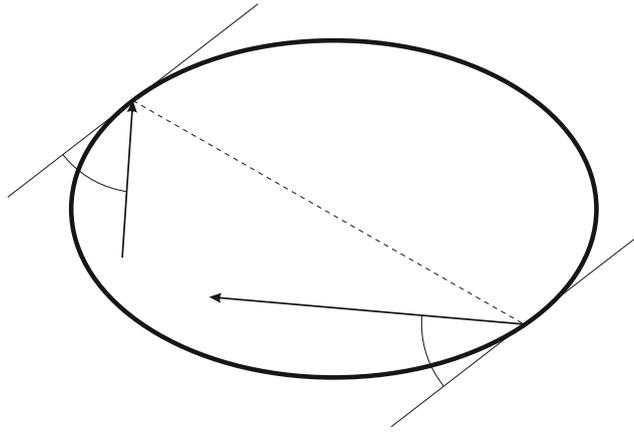


Рис. 1: Динамика частицы при попадании на границу бильярда с проскальзыванием.

была доказана интегрируемость таких бильярдов в случае, когда угол поворота равняется  $\pi$ . В работе В. В. Ведюшкиной и В. Н. Завьялова [12] с помощью бильярдов с проскальзыванием были развиты результаты В. В. Ведюшкиной и А. Т. Фоменко [10] по реализации линейных геодезических потоков бильярдами на случай неориентируемых многообразий. Отметим, что в работе В. Н. Завьялова [13] была показана интегрируемость круговых бильярдов с проскальзыванием на произвольный угол.

Аналогично плоскому случаю классические трехмерные бильярды (т.е. со стандартным законом отражения), ограниченные конечным числом софокусных квадрик, интегрируемы. Дополнительными первыми интегралами таких систем являются параметры двух софокусных квадрик, которых касаются все звенья (или их продолжения) траектории-ломаной. Бильярд внутри эллипсоида был рассмотрен В. Драговичем и М. Раднович в книге [4]. В этой работе они построили бифуркационную диаграмму этой системы, описали регулярные слои. Классификация трехмерных бильярдных столов в  $\mathbb{R}^3$ , ограниченных конечным числом софокусных квадрик, была получена Г. В. Белозеровым в [16]. В этой работе он описал топологию 1-перестроек торов Лиувилля таких систем и доказал, что неособая изоэнергетическая поверхность произвольного трехмерного софокусного бильярда гомеоморфна либо  $S^2 \times S^3$ , либо  $S^1 \times S^4$ , либо  $S^5$ .

В настоящей работе изучается обобщение бильярдов с проскальзыванием на трехмерный случай. Рассмотрим связный трехмерный бильярдный стол, симметричный относительно начала координат и ограниченный конечным числом софокусных квадрик. Все грани этого стола мы разобьем на два класса: с проскальзыванием и с отражением. При попадании на грань с проскальзыванием материальная точка, находившаяся в точке  $P$  с вектором скорости  $v$ , продолжит движение из точки  $-P$  с вектором скорости  $v'$ , который получается из  $v$  путем следующих преобразований: сначала  $v$  отражается от касательной плоскости к данной грани в точке  $P$ , а затем заменяется на противоположный.

Мы рассмотрим два бильярдных стола: область, ограниченную эллипсоидом, а также бесфокусную область, ограниченную тремя софокусными квадрами. Отметим, что первый стол допускает лишь один режим проскальзывания, в то время как другой в точности 7. Для каждого из этих столов, а также любого вида проскальзывания на нем были определены классы го-

меоморфности неособых изоэнергетических поверхностей, описаны 1 и 2-перестройки торов Лиувилля. Для бильярда с проскальзыванием, ограниченного эллипсоидом, был рассмотрен псевдоевклидов аналог, доказана его интегрируемость описаны регулярные слои и их 1-перестройки.

## §2 Описание задачи. Интегрируемость

Напомним определение и некоторые свойства семейства софокусных квадрик.

**Определение 1.** Семейством софокусных квадрик в  $\mathbb{R}^3$  называется множество квадрик, заданных уравнением

$$(b - \lambda)(c - \lambda)x^2 + (a - \lambda)(c - \lambda)y^2 + (a - \lambda)(b - \lambda)z^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda), \quad (1)$$

где  $a > b > c$  — фиксированные числа, а  $\lambda$  — вещественный параметр. Если параметр квадрики этого семейства равен  $a$ ,  $b$  или  $c$ , то она называется вырожденной, в противном случае квадрика называется невырожденной.

**Замечание 1.** Если  $\lambda \in (-\infty, c)$ , то соответствующая квадрика является эллипсоидом, если  $\lambda \in (c, b)$ , то — однополостным гиперболоидом, если  $\lambda \in (b, a)$ , то — двуполостным гиперболоидом. Вырожденные квадрики — это в точности координатные плоскости.

К. Якоби, исследуя геодезический поток на эллипсоиде, показал (см. [15]), что через каждую точку  $\mathbb{R}^3$  проходит в точности 3 софокусные квадрики (с учетом кратности). Параметры этих квадрик  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , упорядоченные по возрастанию, образуют тройку, называемую *эллиптическими координатами* в  $\mathbb{R}^3$ . В каждом координатном октанте эллиптические координаты являются однозначными и регулярными. Отметим также, что эллиптические координаты являются ортогональными.

Семейству софокусных квадрик можно сопоставить две кривые: *фокальный эллипс*  $F_1 = \left\{ (x, y, 0) \mid \frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1 \right\}$ , и *фокальную гиперболу*  $F_2 = \left\{ (x, 0, z) \mid \frac{x^2}{a-b} - \frac{z^2}{b-c} = 1 \right\}$ . Эти кривые называются фокальными, поскольку они очень похожи по своей структуре с фокусами плоского семейства софокусных квадрик. Действительно, на плоскости фокусы есть граница предельных расположений софокусных квадрик. Рассмотрим предел софокусных эллипсоидов при  $\lambda \rightarrow c-0$  в метрике Хаусдорфа. Получим компактную область, лежащую в плоскости  $z = 0$  и ограниченную фокальным эллипсом  $F_1$ . Если же рассмотреть предел при  $\lambda \rightarrow c+0$ , получим замыкание к дополнению этой области. Гипербола  $F_2$  возникает аналогичным образом. Для этого нужно рассмотреть предел софокусных квадрик при  $\lambda \rightarrow b$ .

Теперь опишем конфигурационное пространство системы, которую мы будем изучать.

**Определение 2.** Трехмерным бильярдным столом будем называть связное компактное множество с непустой внутренностью, ограниченное конечным числом софокусных квадрик и имеющее двугранные углы излома на границе, равные  $\pi/2$ .

Среди всех бильярдных столов мы выделим класс тех, с которыми мы будем работать.

**Определение 3.** Бильярдный стол  $D$  будем называть допустимым, если он центрально симметричен.

На рисунке 2 изображены два допустимых бильярдных стола, которым будет посвящена бóльшая часть настоящей статьи. Это стол, ограниченный эллипсоидом, а также стол, ограниченный тремя различными софокусными квадрами. Отметим, что второй стол не пересекается с фокальными кривыми. В связи с этим мы будем называть его *бесфокусным*. Нетрудно проверить, что это единственный допустимый бильярдный стол с таким свойством.

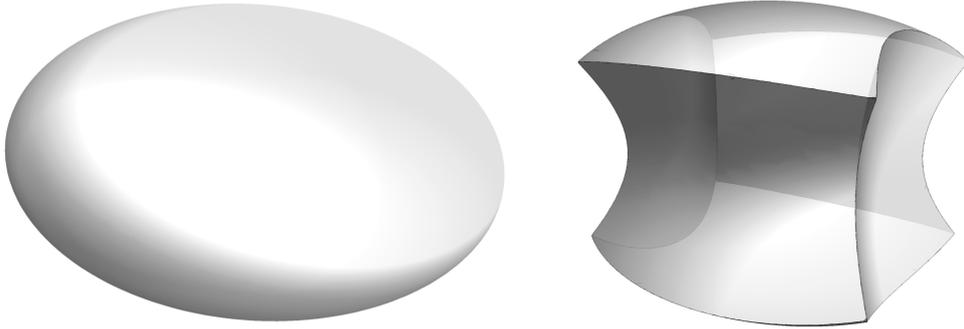


Рис. 2: Примеры допустимых бильярдных столов.

Пусть  $D$  — допустимый бильярдный стол,  $F_D$  — множество его гладких 2-граней, а  $A$  — оператор центральной симметрии в  $\mathbb{R}^3$ . Отметим, что в силу определения 3 оператор  $A$  действует на множестве  $F_D$ . Пусть  $F$  — непустое инвариантное подмножество  $F_D$  относительно  $A$ . Рассмотрим следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри допустимого бильярдного стола  $D$  равномерно и прямолинейно, преобразуя свое движение на границе  $D$  по следующему правилу.

- Если материальная точка попала в точку  $P$  гладкой 2-грани  $f \notin F$  с вектором скорости  $v$ , то отражение от границы в этом случае происходит классическому бильярдному закону. То есть материальная точка отражается от  $P$  с вектором скорости  $v' = v - 2(v, n_f)n_f$ , где  $n_f$  — единичный вектор нормали к грани  $f$  в точке  $P$ .
- Если материальная точка попала в точку  $P$  гладкой 2-грани  $f \in F$  с вектором скорости  $v$ , то в этот же момент времени она “перескакивает” в точку  $AP$  и продолжает свое движение с вектором скорости  $v' = Av - 2(Av, n_f)n_f$ , где  $n_f$  — единичный вектор нормали к грани  $f$  в точке  $P$ .

Такую динамическую систему мы будем называть *трехмерным бильярдом с проскальзыванием*.

Отметим, что бильярдный стол, ограниченный эллипсоидом, допускает единственное проскальзывание, в то время как бесфокусный стол (изображенный справа на рис. 2), допускает 7 режимов проскальзывания. Действительно, у этого стола 3 пары центрально симметричных граней. Поэтому количество типов проскальзывания на нем равно  $2^3 - 1$ , т.е. 7.

На самом деле, описание системы, представленное выше, определяет ее не во всех точках конфигурационного пространства. В частности, непонятна динамика точки, попавшей на стык двух или трех гладких 2-граней. Тем не менее, движение такой частицы можно доопределить по непрерывности.

**Предложение 1.** Система трехмерного бильярда с проскальзыванием может быть корректно доопределена во всех точках конфигурационного пространства.

*Доказательство.* Покажем, что на гладких 1-гранях границы стола доопределение возможно. Для точек, в которых пересекаются три гладких грани, рассуждения будут аналогичные.

Пусть в точке  $P$  смыкаются грани  $f$  и  $g$ . Тогда возможны три варианта:  $f, g \notin F$ ;  $f, g \in F$ ;  $f \in F, g \notin F$ . Рассмотрим каждый из этих случаев.

1. Пусть  $f, g \notin F$ , тогда в граничных точках стола, близких к  $P$  происходит отражение. Покажем сначала, что операторы отражений от граней  $f$  и  $g$  в точке  $P$  коммутируют друг с другом. Пусть  $n_f, n_g$  — внешние единичные нормали к граням  $f$  и  $g$  соответственно в точке  $P$ . Поскольку софокусные квадрики пересекаются под прямым углом, векторы  $n_f$  и  $n_g$  ортогональны друг другу, а следовательно, соответствующие им операторы отражений коммутируют.

Условие коммутирования операторов отражений гарантирует существование непрерывного продолжения траектории, попавшей в точку  $P$ . Действительно, пусть в точку  $P$  попала частица с вектором скорости  $v$ . В таком случае, рассмотрим близкую траекторию материальной точки с тем же вектором скорости. Поскольку  $n_f$  и  $n_g$  — внешние нормали и двугранный угол между  $f$  и  $g$  равен  $\pi/2$ , углы между  $v$  и  $n_f$ ,  $v$  и  $n_g$  острые. Предположим, что близкая траектория сначала отразится от грани  $f$ . Тогда, после отражения угол между вектором скорости  $v'$  и  $n_f$  станет тупым, а между  $v'$  и  $n_g$  останется по-прежнему острым. Следовательно, далее частица должна отразиться от грани  $g$ . Отсюда становится ясным, что в пределе, т.е. при стремлении к точке  $P$ , отраженный вектор  $\hat{v}$  получится из  $v$  путем последовательных отражений от граней  $f$  и  $g$ , причем порядок отражений может быть произвольным. Поэтому для корректного доопределения нам достаточно коммутирования операторов отражения, соответствующих  $n_f$  и  $n_g$ .

2. Пусть теперь  $f, g \in F$ . Проверим коммутативность проскальзываний на этих гранях. Этого условия снова будет достаточно для корректного доопределения траектории в точке  $P$ . При проскальзывании через грань  $f$  точка  $P$  перейдет в  $AP$ , а вектор  $v$  скорости в  $v' = Av - (v, n_f)n_f$ . При проскальзывании через грань  $g$  точка  $AP$  вернется в  $P$ , а вектор  $v'$  преобразуется к  $v''$  по правилу:  $v'' = Av' - (v', n_g)n_g$ . Отсюда заключаем, что

$$v'' = A(Av - (v, n_f)n_f) - (Av - (v, n_f)n_f, n_g)n_g = v + (v, n_f)n_f + (v, n_g)n_g.$$

Последняя формула симметрична относительно  $n_f$  и  $n_g$ . Следовательно, проскальзывания коммутируют.

3. Этот случай проверяется аналогично предыдущим. Предложение доказано.  $\square$

Таким образом, трехмерный бильярд с проскальзыванием — корректно определенная динамическая система.

Как и в плоском случае трехмерный бильярд с проскальзыванием является интегрируемым. Действительно, рассмотрим классический бильярд внутри допустимого бильярдного стола. Согласно теореме Якоби-Шаля такая динамическая система является интегрируемой. Ее первыми интегралами являются кинетическая энергия  $H$ , а также параметры двух софокусных (с границей) квадратик  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ , которых касаются все прямолинейные участки траектории или их продолжения. Покажем, что эти же функции  $(H, \Lambda_1, \Lambda_2)$  являются первыми интегралами рассматриваемой задачи.

Итак, если прямая, проведенная из точки  $P \in f$  в направлении вектора  $v$  касается софокусной квадрики  $Q$ , то прямая, проведенная из этой же точки в направлении вектора  $v' = v - 2(v, n_f)n_f$ , также касается  $Q$ . Однако при проскальзывании точка  $P$  переходит в  $AP = -P$ , а вектор  $v$  в  $Av - 2(Av, n_f)n_f$ , т.е. в  $Av' = -v'$ . Остается заметить, что уравнения софокусных квадрик не содержат линейной части, а следовательно, если прямая из точки  $P$  с вектором скорости  $v'$  касается  $Q$ , то прямая из точки  $AP$  с направляющим вектором  $Av'$  также касается  $Q$ .

Отметим, что при различных положительных значениях  $h_1, h_2$  энергии  $H$  рассматриваемая система на изоэнергетических поверхностях  $Q_{h_1}$  и  $Q_{h_2}$  система устроена одинаково. Действительно, увеличивая или уменьшая энергию материальной точки мы изменяем скорость ее движения, не меняя при этом траектории. Поэтому далее мы будем рассматривать нашу систему на изоэнергетических поверхностях положительного значения энергии.

В заключении параграфа напишем уравнения движения трехмерного бильярда с проскальзыванием на изоинтегральной поверхности  $H = h, \Lambda_1 = \tilde{\lambda}_1, \Lambda_2 = \tilde{\lambda}_2$ . Для этого рассмотрим функции  $I_1 = H(\Lambda_1 + \Lambda_2)$  и  $I_2 = H\Lambda_1\Lambda_2$ . Они являются первыми интегралами нашей задачи и в декартовых координатах принимают следующий вид:

$$I_1 = \frac{b+c}{2}\dot{x}^2 + \frac{a+c}{2}\dot{y}^2 + \frac{a+b}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2),$$

$$I_2 = \frac{bc}{2}\dot{x}^2 + \frac{ac}{2}\dot{y}^2 + \frac{ab}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2),$$

где  $K_x, K_y, K_z$  — компоненты вектора кинетического момента. Эти формулы легко получить, выписав условие касания квадрик. Нетрудными вычислениями можно показать, что  $\{I_1, I_2\} = 0$ .

Переходя к эллиптическим координатам  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  и сопряженным им импульсам  $(p_1, p_2, p_3)$ , мы преобразуем функции  $H, I_1, I_2$  к следующему виду.

$$H = 2\frac{(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}p_1^2 + 2\frac{(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}p_2^2 + 2\frac{(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2,$$

$$I_1 = 2\frac{(\lambda_2+\lambda_3)(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}p_1^2 + 2\frac{(\lambda_1+\lambda_3)(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}p_2^2 +$$

$$+ 2\frac{(\lambda_1+\lambda_2)(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2,$$

$$I_2 = 2\frac{\lambda_2\lambda_3(a-\lambda_1)(b-\lambda_1)(c-\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}p_1^2 + 2\frac{\lambda_1\lambda_3(a-\lambda_2)(b-\lambda_2)(c-\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_3-\lambda_2)}p_2^2$$

$$+ 2\frac{\lambda_1\lambda_2(a-\lambda_3)(b-\lambda_3)(c-\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}p_3^2,$$

Отсюда с учетом уравнений Гамильтона приходим к следующим уравнениям движения.

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{(H\lambda_i^2 - I_1\lambda_i + I_2)(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)}.$$

С учетом зависимости  $I_1, I_2$  от  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  получаем следующие формулы.

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{h(\lambda_i - \tilde{\lambda}_1)(\lambda_i - \tilde{\lambda}_2)(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)}. \quad (2)$$

Здесь  $h, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$  — значения первых интегралов  $H, \Lambda_1, \Lambda_2$  соответственно. Эти формулы нам понадобятся в дальнейшем.

**Замечание 2.** *Везде далее будем обозначать уровни первых интегралов  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  через  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$  соответственно, а не через  $\lambda_1, \lambda_2$ , чтобы не возникла путаница с эллиптическими координатами.*

### §3 Топология изоэнергетических поверхностей

Сперва рассмотрим трехмерный бильярд с проскальзыванием внутри эллипсоида. Заметим, что если вместо эллипсоида рассмотреть стандартную двумерную сферу  $S^2$  в  $\mathbb{R}^3$ , заданную уравнением  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , класс гомеоморфности изоэнергетической поверхности не изменится.

**Теорема 1.** *Изоэнергетическая поверхность бильярда с проскальзыванием внутри сферы гомеоморфна почти прямому произведению  $(S^3 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$ , где группа  $\mathbb{Z}_2$  действует на сомножителях центральной симметрией.*

*Доказательство.* Заметим, что если рассмотреть геодезический поток на стандартной сфере  $S^3$ , а затем отождествить пары  $(P, v), (-P, -v)$  для всех  $P \in S^3, v \in T_P S^3$ , то фазовое пространство и изоэнергетическая поверхность получившейся системы будут соответственно гомеоморфны фазовому пространству и изоэнергетической поверхности бильярда с проскальзыванием внутри стандартной сферы  $S^2$ .

Поскольку сфера  $S^3$  — группа Ли (изоморфная  $SU(2)$ ), многообразие единичных касательных векторов к ней диффеоморфно прямому произведению двумерной и трехмерной сфер. Склейка диаметрально противоположных точек на сфере  $S^3$  эквивалентна факторизации группы  $SU(2)$  по подгруппе  $\mathbb{Z}_2$ , порожденной матрицей  $-E$ . Эта подгруппа действует также и на фазовом пространстве, и на поверхностях постоянной энергии геодезического потока на сфере  $S^3$ . Ее действие как раз и порождает склейку пар точка-вектор, описанную выше.  $\square$

Теперь определим классы гомеоморфности изоэнергетических поверхностей бильярдных столов с проскальзыванием на бесфокусном столе. Для этого, как и в случае эллипсоида, упростим конфигурационное пространство системы. Вместо бесфокусного стола мы можем рассмотреть куб, одной паре граней которого сопоставим эллипсоид границы, второй — однополостный гиперболоид, третьей — двуполостный гиперболоид. Нетрудно убедиться, что при таком преобразовании фазовое пространство и изоэнергетическая поверхность не изменят свой класс гомеоморфности.

После такого упрощения нам остается рассмотреть три случая; все они соответствуют количеству противоположных пар граней куба, на которых задано проскальзывание.

**Теорема 2.** *Пусть  $Q_h^5$  — изоэнергетическая поверхность бильярда с проскальзыванием на бесфокусном столе и  $k$  — количество пар граней этого стола, на которых задано проскальзывание. Тогда:*

1. *Если  $k = 1$ , то  $Q_h^5$  гомеоморфна почти прямому произведению  $(S^1 \times S^4)/\mathbb{Z}_2$ , где  $\mathbb{Z}_2$  действует на каждом сомножителе центральной симметрией.*

2. Если  $k = 2$ , то  $Q_h^5$  гомеоморфна почти прямому произведению  $(S^1 \times S^1 \times S^3)/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ , где первое слагаемое группы действует центральной симметрией на первом и третьем сомножителе, а второе — на втором и третьем.
3. Если  $k = 3$ , то  $Q_h^5$  гомеоморфна почти прямому произведению  $(S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^2)/(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ , где первое слагаемое группы действует центральной симметрией на первом и четвертом сомножителе, второе — на втором и четвертом, третье — на третьем и четвертом.

*Доказательство.* Докажем первый пункт теоремы. Как было отмечено выше, мы можем рассматривать бильярд внутри куба, на одной паре гранией которого задано проскальзывание. Заметим, что фазовое пространство (а также изоэнергетические поверхности) рассматриваемого бильярда двулистно накрывается фазовым пространством (изоэнергетическими поверхностями) бильярда внутри трехмерной области  $D$ , получаемой следующим образом. Рассмотрим два одинаковых прямоугольных параллелепипеда, выберем на каждом из них по одной паре противоположных граней, а затем склеим эти параллелепипеды по соответствующим выбранным граням.

Отметим, что область  $D$  представляет собой полноторие, которое получается вращением квадрата вдоль некоторой оси. Обозначим это полноторие через  $K$ . Мы утверждаем, что изоэнергетическая поверхность  $Q'_h$  этого бильярда при  $h > 0$  гомеоморфна прямому произведению окружности и четырехмерной сферы. Тот факт, что  $Q'_h$  обладает тривиальным  $S^1$  расслоением, является довольно очевидным. Действительно, полноторие  $K$  обладает тривиальным  $S^1$  расслоением и на каждом его слое система устроена одинаково. Остается показать, что ограничение  $Q'_h$  на каждый такой слой полнотория  $K$  гомеоморфно сфере  $S^4$ . Опишем устройство этого ограничения.

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  плоский квадрат  $R = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, z = 0\}$ . В каждой точке этого квадрата рассмотрим единичную сферу касательных векторов со следующим отношением эквивалентности на границе  $R$ :

$$(P, v) \sim (P, v'), \quad \text{где } P \in \partial R, \quad v, v' \in T_P \mathbb{R}^3, \quad |v| = |v'| = 1, \quad v - v' \parallel (0, 0, 1).$$

Введем на этом множестве фактор-топологию и обозначим получившееся топологическое пространство через  $\tilde{Q}$ . По построению ясно, что  $Q'_h \cong S^1 \times \tilde{Q}$ .

На пространстве  $\tilde{Q}$  определена и непрерывна функция  $f$ , которая паре точка-вектор  $(P, v) \in \tilde{Q}$  сопоставляет третью координату вектора  $v$ . Функция  $f$  принимает значения на отрезке  $[-1, 1]$  и ее поверхности уровня  $f^{-1}(t)$  гомеоморфны друг другу при  $t \in (-1, 1)$ . При этом,  $f^{-1}(1)$  и  $f^{-1}(-1)$  гомеоморфны двумерным дискам. Заметим, что  $f^{-1}(0)$  есть изоэнергетическая поверхность бильярда внутри квадрата  $R$ . Поэтому согласно известным результатам Смейла поверхность  $f^{-1}(0)$  гомеоморфна трехмерной сфере  $S^3$ .

Итак, согласно приведенным выше результатам для всех  $t \in (-1, 1)$  поверхность  $f^{-1}(t)$  гомеоморфна трехмерной сфере  $S^3$ , а при  $t = \pm 1$  — двумерному диску. Отсюда заключаем, что  $\tilde{Q}$  гомеоморфна четырехмерной сфере  $S^4$  (трехмерные сферы стягиваются к двумерным дискам). Более строгое доказательство этого факта читатель может найти в [17].

Итак, мы показали, что  $Q'_h \cong S^1 \times S^4$ , а следовательно,  $Q_h^5 = (S^1 \times S^4)/\mathbb{Z}_2$ . Осталось описать действие этой инволюции. Совершенно ясно, что она склеивает диаметрально противоположные точки окружности. Чуть менее очевидно устроена инволюция на сфере  $S^4$ . Тем не менее, аккуратно выписав условия склейки области  $D$ , можно убедиться, что и на  $S^4$  группа  $\mathbb{Z}_2$  склеивает диаметрально противоположные точки. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Оставшиеся два пункта теоремы доказываются по аналогии с первым. Теорема доказана.  $\square$

#### §4 Биллиард с проскальзыванием внутри эллипсоида

Без ограничения общности можем считать, что параметр  $c$  семейства софокусных квадрик 1 положителен. Рассмотрим биллиард с проскальзыванием внутри эллипсоида параметра 0. Отметим, что траектория биллиардного стола не может касаться двух софокусных квадрик положительной гауссовой кривизны. Следовательно, дополнительные первые интегралы  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  нашего биллиарда удовлетворяют следующим ограничениям:  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ ,  $\Lambda_1 \in [c, a]$ ,  $\Lambda_2 \in [0, b]$ . Откуда заключаем, что образ отображения момента, ограниченный на постоянный уровень энергии системы представляет собой многоугольник, изображенный на рисунке 3а.

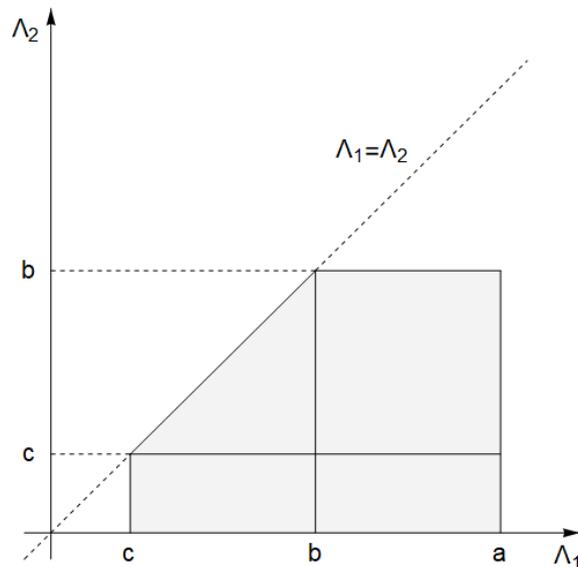
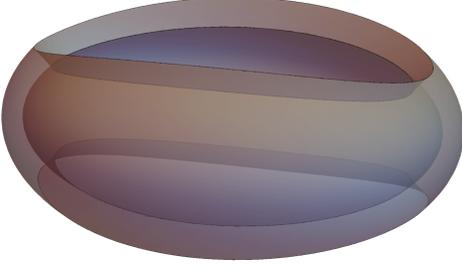
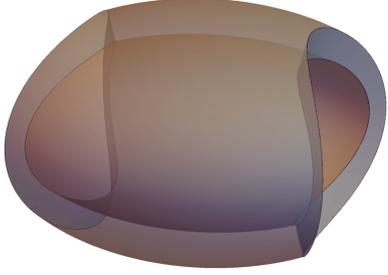
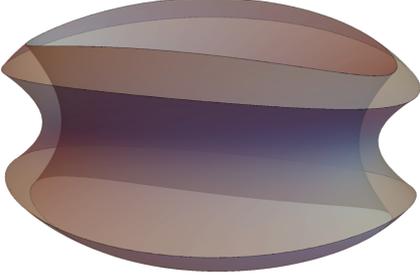
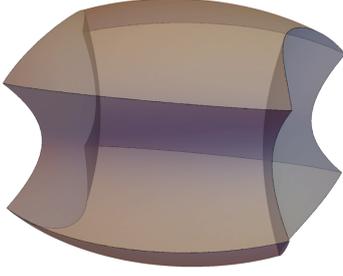


Рис. 3: Серым выделен образ отображения момента на неособой изоэнергетической поверхности, черными сплошными линиями — бифуркационная диаграмма.

Исходя из уравнений 2, опишем типичные области возможного движения. Все они представлены в таблице 1.

Заметим, что вид области возможного движения может измениться либо на прямых  $\Lambda_1 = b$ ,  $\Lambda_2 = c$ , либо на границе образа отображения момента. Таким образом, граница образа отображения момента, а также отрезки прямых  $\Lambda_1 = b$ ,  $\Lambda_2 = c$  составляют *бифуркационную диаграмму* нашего биллиарда. Точки образа отображения момента, не лежащие на бифуркационной диаграмме, будем называть *регулярными*. Слои Лиувилля, соответствующие регулярным точкам, тоже будем называть *регулярными*.

Таблица 1. Области возможного движения общего положения

<p><b>I</b> <math>0 &lt; \tilde{\lambda}_1 &lt; c &lt; \tilde{\lambda}_2 &lt; b</math></p> 	<p><b>II</b> <math>0 &lt; \tilde{\lambda}_1 &lt; c &lt; b &lt; \tilde{\lambda}_2 &lt; a</math></p> 
<p><b>III</b> <math>c &lt; \tilde{\lambda}_1 &lt; \tilde{\lambda}_2 &lt; b</math></p> 	<p><b>IV</b> <math>c &lt; \tilde{\lambda}_1 &lt; b &lt; \tilde{\lambda}_2 &lt; a</math></p> 

**Теорема 3.** Все регулярные слои трехмерного бильярда с проскальзыванием внутри эллипсоида гомеоморфны трехмерному тору. Слоение Лиувилля вблизи регулярных слоев тривиально.

*Доказательство.* Обусловимся нумеровать камеры бифуркационной диаграммы номерами соответствующих им типов областей возможного движения из таблицы 1 (далее ОВД). Мы докажем теорему для точек камеры I. Остальные случаи разбираются аналогично.

Пусть  $P = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) \in I$ . Обозначим через  $D_P$  соответствующую ОВД, а через  $T_P$  — поверхность совместного уровня. В каждой точке  $x \in D_P$  рассмотрим все векторы  $v$  такие, что  $(x, v) \in T_P$ . Согласно уравнениям движения 2, в каждой внутренней точке  $D_P$ , не лежащей ни в одной из координатных плоскостей, возникает в точности 8 таких векторов. Действительно, в этих точках эллиптические координаты удовлетворяют ограничениям  $\lambda_1 \in (0, \tilde{\lambda}_1)$ ,  $\lambda_2 \in (c, \tilde{\lambda}_2)$ ,  $\lambda_3 \in (b, a)$ , а следовательно,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ . Выясним, сколько векторов расположено в оставшихся точках ОВД.

Для начала разберемся с внутренними точками  $D_P$ , лежащими в координатных плоскостях. Рассмотрим все внутренние точки, расположенные в плоскости  $x = 0$ , но не лежащие в плоскостях  $y = 0$ ,  $z = 0$ . Поскольку плоскость  $x = 0$  в эллиптических координатах задается уравнением  $\lambda_3 = a$ , в этих точках вырождается третья эллиптическая координата. При этом, остальные эллиптические координаты не вырождаются и соответствующие значения  $|\dot{\lambda}_1|$  и  $|\dot{\lambda}_2|$  отличны от нуля. Поскольку плоскость  $x = 0$  задается уравнением  $\lambda_3 = a$  и эллиптические координаты ортогональны, пара координат  $(\lambda_1, \lambda_2)$  в плоскости  $x = 0$  при  $y, z \neq 0$  является гладкой

локальной системой координат. Следовательно, если мы спроектируем векторы скорости в рассматриваемых точках на касательную плоскость  $T_{(0,y,z)}Oyz$ , то в проекции получим 4 вектора. Давайте теперь покажем, что  $|\dot{x}| \neq 0$ . Для этого отметим, что в области невырожденности эллиптических координат справедлива формула

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \dot{\lambda}_1 + \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} \dot{\lambda}_2 + \frac{\partial x}{\partial \lambda_3} \dot{\lambda}_3,$$

при этом, если  $\lambda_3 \rightarrow a$ , производные  $\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}$  и  $\frac{\partial x}{\partial \lambda_2}$  стремятся к нулю. Значит, верна формула

$\dot{x}^2 = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda_3} \dot{\lambda}_3 \right)^2$ . Воспользовавшись уравнениями движения и формулами перехода к эллиптическим координатам, получим:

$$\dot{x}^2 = \frac{h(a - \tilde{\lambda}_1)(a - \tilde{\lambda}_2)}{(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)}.$$

Отсюда заключаем, что  $|\dot{x}| \neq 0$ . А значит, в точках  $D_P$ , лежащих в плоскости  $x = 0$ , но не лежащих в других координатных плоскостях снова возникают 8 векторов скорости. Оставшиеся виды внутренних точек области  $D_P$  разбираются аналогично.

В каждой гладкой грани границы области  $D_P$  за исключением границы стола в силу билиардного отражения возникают в точности 4 пары неэквивалентных векторов, на ребрах — 2 пары. На грани границы стола возникает 8 векторов скорости.

Используя знания о расположении векторов скорости, опишем топологию слоя  $T_P$ . Итак, сперва введем обозначения векторов скорости для внутренних точек  $D_P$ , не лежащих в плоскостях  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y = 0$ . Отметим, что эти плоскости разбивают  $D_P$  на 8 компонент связности. При этом, для всякой внутренней точки любой из этих 8 компонент каждому вектору скорости в ней можно взаимнооднозначно сопоставить тройку знаков его компонент в эллиптических координатах:  $(\text{sign } \dot{\lambda}_1, \text{sign } \dot{\lambda}_2, \text{sign } \dot{\lambda}_3)$ . Используя эту кодировку векторов скорости, заполним таблицу обозначений.

	(+, +, +)	(-, +, +)	(-, -, +)	(+, -, +)	(+, +, -)	(-, +, -)	(-, -, -)	(+, -, -)
$x > 0$ $y > 0$ $z > 0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
$x > 0$ $y > 0$ $z < 0$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$x < 0$ $y > 0$ $z > 0$	$v_2$	$v_1$	$v_3$	$v_3$	$v_6$	$v_5$	$v_8$	$v_7$

$x < 0$								
$y > 0$	$v_6$	$v_5$	$v_8$	$v_7$	$v_2$	$v_1$	$v_3$	$v_3$
$z < 0$								
$x > 0$								
$y < 0$	$v_4$	$v_3$	$v_2$	$v_1$	$v_8$	$v_7$	$v_6$	$v_5$
$z > 0$								
$x > 0$								
$y < 0$	$v_8$	$v_7$	$v_6$	$v_5$	$v_4$	$v_3$	$v_2$	$v_1$
$z < 0$								
$x < 0$								
$y < 0$	$v_3$	$v_4$	$v_1$	$v_2$	$v_7$	$v_8$	$v_5$	$v_6$
$z > 0$								
$x < 0$								
$y < 0$	$v_7$	$v_8$	$v_5$	$v_6$	$v_3$	$v_4$	$v_1$	$v_2$
$z > 0$								

Отметим, что одному и тому же набору знаков соответствуют разные обозначения векторов. Тем не менее, благодаря такой нумерации векторные поля  $v_i$  можно по непрерывности продолжить на все множество  $D_P$ . Более того, векторные поля  $v_i$  будут гладкими внутри  $D_P$ .

Векторные поля  $v_1, \dots, v_8$  разбивают поверхность  $T_P$  на 8 компонент связности, каждая из которых гомеоморфна  $D_P$ . Обозначим эти компоненты через  $D_1, \dots, D_8$  соответственно. В силу билиардного отражения, а также устройства  $D_P$  заключаем, что  $D_1$  и  $D_2$ ,  $D_3$  и  $D_4$ ,  $D_5$  и  $D_6$ ,  $D_7$  и  $D_8$  отождествляются на внутренней эллиптической границе, а  $D_1$  и  $D_4$ ,  $D_2$  и  $D_3$ ,  $D_5$  и  $D_7$ ,  $D_6$  и  $D_8$  — на гиперболических. В силу проскальзывания на границе стола  $D_1$  и  $D_2$ ,  $D_3$  и  $D_4$ ,  $D_5$  и  $D_6$ ,  $D_7$  и  $D_8$  склеиваются по с “перекруткой”. При склеке областей  $D_i$  по соответствующим границам, получим два трехмерных тора  $T^3$ , которые будут составлены из компонент  $D_1, \dots, D_4$  и  $D_5, \dots, D_8$ . Таким образом, первую часть теоремы мы доказали.

Осталось отметить, что при малом изменении точки  $P$  область возможного движения не меняет свой тип, а векторные поля  $v_i$  будут непрерывно меняться. Значит, вблизи  $T_P$  слоение Лиувилля является тривиальным. Что и требовалось доказать.  $\square$

Теперь опишем топологию слоения Лиувилля вблизи нерегулярных слоев. Заметим, что на бифуркационной диаграмме имеется ровно одна точка типа *крест*:  $(b, c)$  (см. рис. 3). Обозначим слой слоения Лиувилля, отвечающий этой точке через  $L$ . Если мы опишем топологию слоения Лиувилля вблизи  $L$ , то будет ясно, какие бифуркации происходят на прямых  $\Lambda_1 = b$  и  $\Lambda_2 = c$ .

**Теорема 4.** *Малая окрестность слоя  $L$  в  $Q_h$  гомеоморфна  $S^1 \times (C_2 \times C_2)/\mathbb{Z}_2$ , где группа  $\mathbb{Z}_2$  действует центральной симметрией на каждом из 2-атомов.*

*Доказательство.* Обозначим точку креста  $(b, c)$  через  $P$ . Этой точке соответствуют две критические окружности, возникающие при движении частицы по оси  $Ox$ . Окружность, соответствующая

ящую движению материальной точки в направлении оси  $Ox$ , обозначим через  $\gamma(P)$ . Оказывается, на близких к  $L$  торах Лиувилля  $T_{P'}$  можно выбрать базисный цикл  $\gamma(P')$ , гомологичный  $\gamma(P)$ , который при стремлении  $P'$  к  $P$  перейдет в  $\gamma(P)$ . Это наглядно показано на рисунке 4 для всех четырех видов торов Лиувилля, близких к поверхности  $T_P$ .

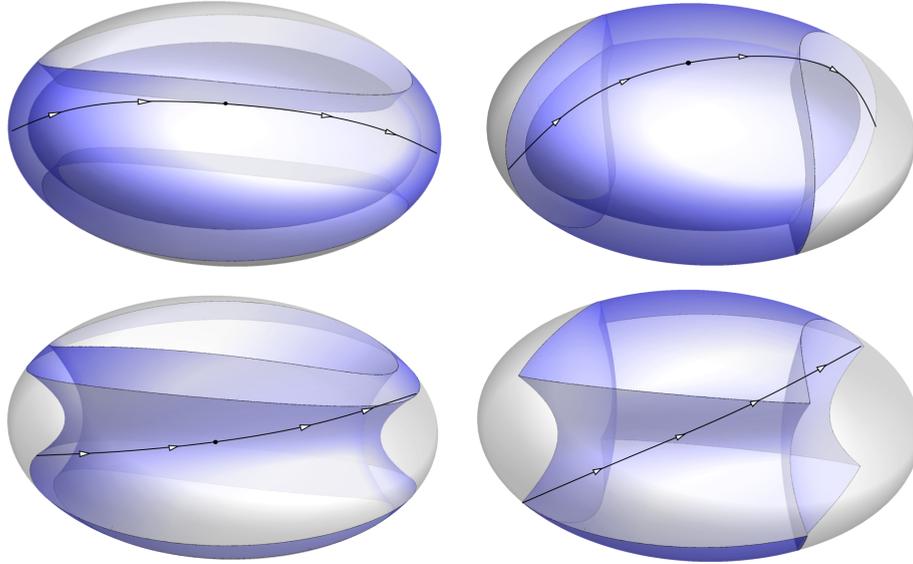


Рис. 4: Цикл  $\gamma$  на торах Лиувилля, близких к изоинтегральной поверхности  $L$ . Выделенные точки есть точки касания цикла  $\gamma$  и эллипсоида (в случаях а, б), однополостного гиперболоида (случай в) меньших параметров.

Заметим, что формы  $\alpha = p_1 d\lambda_1 + p_2 d\lambda_2 + p_3 d\lambda_3$  и  $\omega = dp_1 \wedge d\lambda_1 + dp_2 \wedge d\lambda_2 + dp_3 \wedge d\lambda_3$  корректно определены на фазовом пространстве биллиарда. Это следует из результатов В. Лазуткина [18] и Е. А. Кудрявцевой [19]. Определим в малой окрестности слоя  $L$  на регулярных участках слоения Лиувилля функцию

$$s(P') = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma(P')} \alpha.$$

Найдем явный вид функции  $s(P')$ . Согласно формулам разделения переменных справедливы равенства

$$p_i^2 = \frac{h}{2} \frac{(\lambda_i - \tilde{\lambda}_1)(\lambda_i - \tilde{\lambda}_2)}{(a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)} \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Цикл  $\gamma$  обходит каждую эллиптическую координату в точности 2 раза. Следовательно,

$$s(h, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\min\{\tilde{\lambda}_1, c\}} \sqrt{2h \frac{(t - \tilde{\lambda}_1)(t - \tilde{\lambda}_2)}{(a - t)(b - t)(c - t)}} dt + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\max\{c, \tilde{\lambda}_1\}}^{\min\{\tilde{\lambda}_2, b\}} \sqrt{2h \frac{(t - \tilde{\lambda}_1)(t - \tilde{\lambda}_2)}{(a - t)(b - t)(c - t)}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\max\{b, \tilde{\lambda}_2\}}^a \sqrt{2h \frac{(t - \tilde{\lambda}_1)(t - \tilde{\lambda}_2)}{(a - t)(b - t)(c - t)}} dt.$$

**Лемма 1.** Функция  $s(h, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2)$  является аналитической в малой окрестности точки  $P$ . При этом  $\left. \frac{\partial s}{\partial h} \right|_P \neq 0$ .

**Доказательство леммы 1.** Пусть  $\tilde{\lambda}_1 \neq b$ ,  $\tilde{\lambda}_2 \neq c$ . Рассмотрим на комплексной плоскости контур  $C$ , изображенный на рисунке 5. Он состоит из верхней полуокружности  $l$ , соединяющей точки  $0$  и  $a$ , четырех верхних полуокружностей  $l_\varepsilon$  радиусов  $\varepsilon$  с центрами в точках  $c, b, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$  и пяти отрезков. Выберем на контуре положительное направление обхода. Пусть

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2h(z - \tilde{\lambda}_1)(z - \tilde{\lambda}_2)}{(a - z)(b - z)(c - z)}}.$$

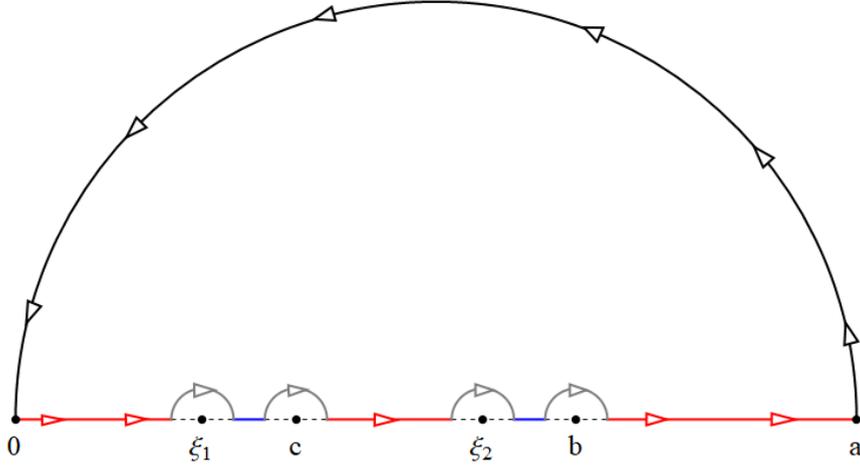


Рис. 5: Контур интегрирования. Черным выделена дуга  $l$ .

Согласно теореме Коши об интеграле по замкнутому контуру

$$0 = \oint_{C^+} f(z)dz = \int_{l^+} f(z)dz + I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3(\varepsilon), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \int_0^{\min\{\tilde{\lambda}_1, c\} - \varepsilon} f(z)dz + \int_{\max\{c, \tilde{\lambda}_1\} + \varepsilon}^{\min\{\tilde{\lambda}_2, b\} - \varepsilon} f(z)dz + \int_{\max\{b, \tilde{\lambda}_2\} - \varepsilon}^a f(z)dz, \\ I_2(\varepsilon) &= \int_{\min\{\tilde{\lambda}_1, c\} + \varepsilon}^{\max\{\tilde{\lambda}_1, c\} - \varepsilon} f(z)dz + \int_{\min\{b, \tilde{\lambda}_2\} + \varepsilon}^{\max\{\tilde{\lambda}_2, b\} - \varepsilon} f(z)dz, \\ I_3(\varepsilon) &= \int_{l_\varepsilon^-(\xi_1)} f(z)dz + \int_{l_\varepsilon^-(\xi_1)} f(z)dz + \int_{l_\varepsilon^-(\xi_2)} f(z)dz + \int_{l_\varepsilon^-(c)} f(z)dz + \int_{L_\varepsilon^-(b)} f(z)dz. \end{aligned}$$

Заметим, что  $s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1(\varepsilon)$ , при этом,  $I_2(\varepsilon)$  является чисто мнимым числом. Остается заметить, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_3(\varepsilon) = 0$ . Действительно, этот факт следует из стандартного неравенства:

$$\left| \oint_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot |\gamma|.$$

Таким образом,

$$s = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{l^-} \sqrt{\frac{2h(z - \tilde{\lambda}_1)(z - \tilde{\lambda}_2)}{(a - z)(b - z)(c - z)}} dz.$$

В виду отсутствия на контуре  $l$  особых точек  $c, b, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$  функция  $s$  корректно определена и является аналитической в малой окрестности точки  $P$ . Условие  $\frac{\partial s}{\partial h} \Big|_P \neq 0$  проверяется прямой подстановкой. Лемма 1 доказана. ■

Отметим, что функция  $s$  есть не что иное, как переменная действия. Таким образом, эта переменная действия корректно определена в малой окрестности  $U$  слоя  $T_P$  в фазовом пространстве. Заметим, что  $ds \neq 0$  в  $U$ . Действительно, если бы  $ds$  обратился бы в 0 в некоторой точке, то поскольку  $\partial_h s \neq 0$ ,  $dh$  линейно выражался бы через  $d\Lambda_1$  и  $d\Lambda_2$ . Однако в окрестности точки  $P$  пересекаются две стенки бифуркационной диаграммы, соответствующие условиям  $d\Lambda_1 = 0$  и  $d\Lambda_2 = 0$ . При этом, ни в одной из точек этой окрестности ранг не падает до нуля. Следовательно,  $dh$  не может линейно выражаться через  $d\Lambda_1$  и  $d\Lambda_2$ .

Таким образом, корректно определено векторное поле  $v = \operatorname{sgrad} s$ , которое ни в какой точке не обращается в ноль.

Согласно классической теории интегрируемых гамильтоновых систем, траектории поля  $v$  замкнуты, а интегральные кривые являются  $2\pi$ -периодическими. Более того, траектории  $v$ , живущие на слое  $T_{P'}$ , гомологичны циклам  $\gamma(P')$ , которые по своему определению гомологичны  $\gamma(P)$ . Теперь, используя векторное поле  $v$ , определим класс гомеоморфности малой окрестности в  $Q_h$  слоя  $L$ .

Рассмотрим ту часть  $Q_h$ , которая задается условиями:  $x = 0$ . Обозначим ее через  $\hat{M}$ . Нетрудно показать, что в силу симметрии рассматриваемого бильярдного стола и формулы, задающей интеграл  $s$ , векторное поле  $v$  в окрестности слоя  $L$  будет трансверсально пересекать  $\hat{M}$ . Рассмотрим задачу Коши векторного поля  $v$  с начальными точками на многообразии  $\hat{M}$ . Получаем поток  $g_t$ , под действием которого многообразие  $\hat{M}$  деформируется внутри  $Q_h$ . Однако заметим, что  $g_{2\pi} = g_0 = \operatorname{id}$ . Иными словами, за время  $t = 2\pi$  многообразие  $\hat{M}$  возвращается в исходное положение. Таким образом, мы получаем отображение  $G : \hat{M} \times S^1 \rightarrow Q_h$ , которое действует по формуле  $G(x, t) = g_t(x)$ . Перечислим свойства этого отображения.

1. Отображение  $G$  непрерывно. Этот факт следует из теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных.
2. Отображение  $G$  биективно. Действительно, многообразие  $\hat{M}$  пересекает каждый тор Лиувилля  $T_{P'}$  по двумерному тору  $\tilde{T}_{P'}$ . При этом, векторное поле  $v = \operatorname{sgrad} s$  будет трансверсальным к  $\tilde{T}_{P'}$ . А значит, интегральные траектории поля  $v$ , проведенные из разных точек  $\tilde{T}_{P'}$  пересекаться не будут. Отсюда заключаем инъективность отображения  $G$ . Если дополнить произвольный базис на этом двумерном торе  $\tilde{T}_{P'}$  циклом  $\gamma(P')$ , полученная тройка будет базисом в группе гомологий тора  $T_{P'}$ . Следовательно, весь тор Лиувилля покрывается отображением  $G$ .

Поскольку  $\hat{M}$  и  $S^1$  компактны, а отображение  $G$  — непрерывная биекция,  $G$  — гомеоморфизм. Остается разобраться, что из себя представляет  $\hat{M}$ .

Рассмотрим уравнения движения 2, индуцированные на  $\tilde{M}$ . Поскольку на  $\tilde{M}$  зафиксирована третья эллиптическая координата, посмотрим на дифференциальные уравнения первых двух координат. Получим:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(a - \lambda_1)} \sqrt{h(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_2)(a - \lambda_1)(b - \lambda_1)(c - \lambda_1)}, \\ \dot{\lambda}_2 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(a - \lambda_2)} \sqrt{h(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_1)(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2)(a - \lambda_2)(b - \lambda_2)(c - \lambda_2)},\end{aligned}$$

Поскольку  $\lambda_1, \lambda_2 < a$ , динамика, а следовательно, и топология слоения Лиувилля, совпадает с системой, уравнения движения которой имеют следующий вид.

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \sqrt{h(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_2)(b - \lambda_1)(c - \lambda_1)}, \\ \dot{\lambda}_2 &= \pm \frac{2\sqrt{2}}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{h(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_1)(\lambda_2 - \tilde{\lambda}_2)(b - \lambda_2)(c - \lambda_2)},\end{aligned}$$

Однако мы должны учесть, что при проскальзывании в точке вида  $(0, y, z)$  первая координата вектора скорости меняет свой знак. Это равносильно переходу материальной точки с листа на лист бильярдной книжки, склеенной из двух эллипсов. Таким образом, для описания  $\tilde{M}$  необходимо понять что за динамическая система на бильярдной книжке из двух склеенных эллипсов задается приведенной выше системой уравнений.

Аналогичным уравнениям удовлетворяет софокусный бильярд с потенциалом Гука (см., например, [20]). Поскольку  $h > 0$  и бильярдная книжка, описанная выше, предстает собой двумерный эллипсоид, многообразие  $\hat{M}$  гомеоморфно малой окрестности особого слоя точки типа седло-седло бильярда с притягивающим потенциалом Гука на трехосном эллипсоиде. Эта окрестность гомеоморфна почти прямому произведению двух 2-атомов  $C_2$  с инволюцией, отождествляющей центрально симметричные точки атомов. Теорема доказана.  $\square$

Топология особенностей на границе образа отображения момента устроена существенно проще и в рамках настоящей статьи рассматриваться не будет.

## §5 Бильярды с проскальзыванием в бесфокусной области

Рассмотрим всевозможные пересечения эллипсоидов, однополостных гиперboloидов (в том числе и вырожденных) и бесфокусного стола. Такие пересечения представляют собой отрезки, на которые расслаивается бильярдный стол. Назовем такие отрезки отрезками типа  $eo h$ . Отрезки, образованные пересечением эллипсоидов, двуполостных гиперboloидов и нашего стола, назовем отрезками типа  $ed h$ . А отрезки, образованные пересечением гиперboloидов и нашего стола, назовем отрезками типа  $hh$ . Если введена склейка, то отрезок любого типа по данной склейке может быть склеен с аналогичным отрезком, замыкая оба отрезки в окружность. Заметим, что отрезки одного типа могут пересекаться только с квадриками, не соответствующий никакому типу квадратик, пересечением которых был образован отрезок.

Если прообраз точек каустики, которая вырождается на особом слое, склеиваются между собой на особом слое, при этом принадлежащих одному трехмерному тору, тогда на особом

слое будет атом со звездочкой, где количество звездочек равно половине количества областей связности каустики, принадлежащих областям возможного движения. Для описания атомов без звездочек на линии бифуркационной диаграммы необходимо рассмотреть прообразы отрезков типа пересечения квадратик, которые не вырождаются на особом слое. Прообраз каждого из этих отрезков в фазовом многообразии лежит несвязное объединение окружностей. На особом слое эти окружности склеиваются последовательно по точке, а значит все атомы, которые будут представлены в данной работе, гомеоморфны либо  $B$ , либо  $C_2$ , в зависимости от того сколько трехмерных тором лежит в выколотой окрестности особого слоя.

В данной работе для описания слоения окрестности точки, являющейся особой для двух дополнительных интегралов, воспользуемся слоением Лиувилля столов, являющихся накрытием данных. Рассмотрим бильярдный стол с проскальзыванием. Возьмем копию данного бильярдного стола. Отменим проскальзывание, а грани стола, которые были склеены между собой проскальзыванием, теперь склеим с аналогичными гранями копии. Такой бильярд накрывает исходный стол с проскальзыванием.

Докажем, что для бильярдов типа  $\delta$ , допуская склейки без проскальзывания, каждая поверхность уровня интегралов представляет собой прямое произведение прообразов отрезков каждого типа. Из каждой точки общего положения может быть направлено всего 8 векторов скорости для фиксированных значений интегралов. В работе Белозерова говорится о том, что данные 8 векторов могут быть однозначно закодированы знаком их компонент в эллиптических координатах. При отражении от квадратика вектор скорости изменяется на вектор скорости, в коде которого знак компоненты, соответствующей данной квадратике, изменяется на противоположный. Проведем по одному отрезку каждого типа через какую-то точку, если на каких-то гранях имеются склейки, то проведем отрезки и на другом бильярдном столе, которые пересекают грань со склейкой. Поставим фиксированный вектор скорости в точку пересечения. Перенесем его по отрезкам каждого типа. Так как при отражении и склейке меняется только одна компонента, а отрезки не могут пересекать грани, которые имеют непустое пересечение, то прообразы данных отрезков имеют только одну точку пересечения на поверхности уровня. Переносом отрезков каждого типа можно получить всю поверхность уровня. Следовательно, поверхность уровня представляет собой прямое произведение прообразов отрезков каждого типа.

Для описания особых слоев необходимо рассмотреть прообразы отрезков каждого типа. Отрезок типа  $eo h$  снабдим векторами скорости с положительными двумя компонентами в коде и с произвольной третьей компонентой, для отрезка типа  $ed h$  вторая компонента произвольная, остальные положительные, и для отрезка типа  $hh$  первая компонента произвольная, остальные положительные. В прообразе точки, лежащей в плоскости вырожденного эллипса и на отрезке типа  $hh$ , вектора скорости разных знаков в первой компоненте склеиваются. Аналогичная ситуация в граничных точках таких отрезков, если не введена склейка. Если введена склейка, то точка с вектором скорости с одним знаком в компоненте склеивается с аналогичной точкой другого стола с вектором скорости с другим знаком. Если нет склейки, то в слое, отвечающего значениям дополнительных интегралов  $(\cdot, c)$ , то в прообразе отрезка типа  $hh$  будет 2-атом  $B$ , если нет склеек, и 2-атом  $C_2$  если есть склейка. Аналогичная ситуация с отрезком типа  $ed h$  при

рассмотрении плоскости вырожденной гиперболы в значениях  $(b, \cdot)$ . Если особый слой соответствует значению дополнительного интеграла, соответствующего склейке граней, лежащих на двуполостном гиперboloиде, тогда в прообразе граничных точек отрезка типа  $oeh$  склеиваются точка с вектором скорости с одним знаком в третьей компоненте скорости, а также с точкой другого стола с аналогичными векторами скорости. В этом случае в прообразе отрезка типа  $oeh$  лежит 2-атом  $C_2$ . В остальных случаях в прообразе отрезка типа  $oeh$  лежит окружность. В остальных случаях в прообразе отрезка типа  $hh$  лежит окружность. Осталось рассмотреть прообраз отрезка типа  $edh$  в значении интеграла  $(b, \lambda')$ , соответствующего склейке по грани, лежащей на однополостном гиперboloиде. В данном случае происходит склейка точек в фазовом многообразии, лежащих в образе как в плоскости вырожденной гиперболы, так и на грани склейки. Получается, что в прообразе отрезка типа  $edh$  в этом случае лежит 2-атом  $C_4$ .

Особенности для накрытия каждого случая представлены в таблице:

случай	Точка	Описание особенности
(1, 0, 0)	$(b, c)$	$B \times C_2 \times S^1$
(0, 1, 0)	$(b, c)$	$B \times C_2 \times S^1$
(0, 1, 0)	$(b, \lambda')$	$C_4 \times S^1 \times S^1$
(0, 0, 1)	$(b, c)$	$2 \times B \times B \times S^1$
(0, 0, 1)	$(\lambda c)$	$B \times C_2 \times S^1$
(1, 0, 1)	$(b, c)$	$B \times C_2 \times S^1$
(1, 0, 1)	$(\lambda c)$	$C_2 \times C_2 \times S^1$
(1, 1, 0)	$(b, c)$	$C_2 \times C_2 \times S^1$
(1, 1, 0)	$(b, \lambda')$	$C_4 \times S^1 \times S^1$
(0, 1, 1)	$(b, c)$	$B \times C_2 \times S^1$
(0, 1, 1)	$(b, \lambda')$	$C_4 \times S^1 \times S^1$
(0, 1, 1)	$(\lambda c)$	$B \times C_2 \times S^1$
(0, 1, 1)	$(\lambda \lambda')$	$C_2 \times C_2 \times S^1$
(1, 1, 1)	$(b, c)$	$C_2 \times C_2 \times S^1$
(1, 1, 1)	$(b, \lambda')$	$C_4 \times S^1 \times S^1$
(1, 1, 1)	$(\lambda c)$	$C_2 \times C_2 \times S^1$
(1, 1, 1)	$(\lambda \lambda')$	$C_2 \times C_2 \times S^1$

Фазовое многообразие  $n$ -листного накрытия конфигурационного пространства накрывает фазовое пространство изначального конфигурационного пространства при этом с тем же числом листом  $n$ , так как любой паре точке-вектор из изначального фазового пространства можно поставить  $n$ -значное соответствие в накрывающем фазовом многообразии в пары точек-вектор, где точки при отображении накрывающего пространства переходят в одну точку, а вектор скорости тот же самый. Для описания топологии слоения Лиувилля базы накрытия необходимо профакторизовать фазовое многообразие по отображению соответствующего накрытию.

Особенности для факторизации накрытия каждого случая представлены в таблице:

случай	Точка	Описание особенности
(1, 0, 0)	$(b, c)$	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{Z_2}$
(0, 1, 0)	$(b, c)$	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{Z_2}$
(0, 1, 0)	$(b, \lambda')$	---
(0, 0, 1)	$(b, c)$	$2 \times \frac{B \times B \times S^1}{Z_2}$
(0, 0, 1)	$(\lambda c)$	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{Z_2}$
(1, 0, 1)	$(b, c)$	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{Z_2 \times Z_2}$
(1, 0, 1)	$(\lambda c)$	$\frac{C_2 \times C_2 \times S^1}{Z_2 \times Z_2}$
(1, 1, 0)	$(b, c)$	$\frac{C_2 \times C_2 \times S^1}{Z_2 \times Z_2}$
(1, 1, 0)	$(b, \lambda')$	---
(0, 1, 1)	$(b, c)$	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{Z_2 \times Z_2}$
(0, 1, 1)	$(b, \lambda')$	---
(0, 1, 1)	$(\lambda c)$	$\frac{B \times C_2 \times S^1}{Z_2 \times Z_2}$
(0, 1, 1)	$(\lambda \lambda')$	$\frac{C_2 \times C_2 \times S^1}{Z_2 \times Z_2}$
(1, 1, 1)	$(b, c)$	$\frac{C_2 \times C_2 \times S^1}{Z_2 \times Z_2 \times Z_2}$
(1, 1, 1)	$(b, \lambda')$	---
(1, 1, 1)	$(\lambda c)$	$\frac{C_2 \times C_2 \times S^1}{Z_2 \times Z_2 \times Z_2}$
(1, 1, 1)	$(\lambda \lambda')$	$\frac{C_2 \times C_2 \times S^1}{Z_2 \times Z_2 \times Z_2}$

## §6 Псевдоевклидов бильярд внутри эллипсоида с проскальзыванием

В настоящем параграфе мы проанализируем, как качественно изменится система бильярда с проскальзыванием внутри эллипсоида, если в качестве объемлющего пространства рассмотреть  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

### 6.1 Описание системы.

Рассмотрим псевдоевклидово пространство  $\mathbb{R}^{2,1}$  с каноническими координатами  $(x, y, z)$  (*Пояснение*: канонические координаты суть те, в которых матрица метрики приведена к нормальной форме). Напомним, что расстояние между двумя точками  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  и  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

в пространстве  $\mathbb{R}^{2,1}(x, y, z)$  вычисляется по формуле

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2}. \quad (4)$$

Соответствующее псевдоевклидово скалярное произведение векторов мы будем обозначать  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Поскольку подкоренное выражение в формуле 4 может принимать как положительные, так и отрицательные значения, все векторы в этом пространстве делятся на три класса: *пространственно-подобные*, *изотропные*, *времени-подобные*. Напомним, что вектор  $v \in \mathbb{R}^{2,1}$  называется пространственно-подобным, если  $\langle v, v \rangle > 0$ , времени-подобным, если  $\langle v, v \rangle < 0$ , изотропным, если  $\langle v, v \rangle = 0$ .

Рассмотрим в псевдоевклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{2,1}(x, y, z)$  эллипсоид  $\mathcal{E}$ , заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1.$$

Для определенности мы будем считать, что  $a > b$ , поскольку от перестановки первых двух координат метрика не изменится. Случай  $a = b$  здесь не приводится.

Мы будем рассматривать следующую динамическую систему. Материальная точка единичной массы движется внутри замкнутой области, ограниченной эллипсоидом  $\mathcal{E}$ , равномерно и прямолинейно. При столкновении с границей стола в некоторой точке  $P$  материальная точка, обладавшая вектором скорости  $v$ , в этот же момент времени выходит из точки  $-P$  с вектором скорости  $v'$ , где  $v'$  получается из  $v$  следующим преобразованием. Пусть  $v = \alpha + n$  — разложение вектора  $v$  на касательную и ортогональную составляющие (в метрике Минковского) к эллипсоиду в точке соударения, тогда  $v' = -\alpha + n$ . Такую систему мы будем называть *трехмерным бильярдом с проскальзыванием внутри эллипсоида в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}$* .

Однако у такого бильярда проскальзывание определено не во всех точках. Оно не определено там, где ортогональное дополнение к касательному пространству к  $\mathcal{E}$  содержится в самом касательном пространстве. Такие точки мы будем называть *тропическими*. Тем не менее, отражение в этих точках можно доопределить по непрерывности.

Опишем сначала это множество тропических точек. Касательное пространство к эллипсоиду в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  задается уравнением

$$\frac{x_0 x}{a} + \frac{y_0 y}{b} + \frac{z_0 z}{c} = 0.$$

Это уравнение можно переписать иначе:

$$\left\langle \left( \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}, -\frac{z_0}{c} \right), (x, y, z) \right\rangle = 0.$$

Таким образом,  $n = \left( \frac{x_0}{a}, \frac{y_0}{b}, -\frac{z_0}{c} \right)$  — вектор, ортогональный касательной плоскости. Поскольку в тропических точках вектор  $n$  должен лежать в самой касательной плоскости, он ортогонален самому себе, то есть  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0$ . Таким образом, множество точек, в которых отражение

нуждается в доопределении, есть пересечение эллипсоида  $\mathcal{E}$  с конусом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ . Это пересечение является несвязным объединением двух гладких кривых (симметричных друг другу относительно плоскости  $z = 0$ ), которые, следуя В. Драговичу и М. Раднович, мы будем называть *тропическими*. Тропические кривые на эллипсоиде изображены на рисунке 6.

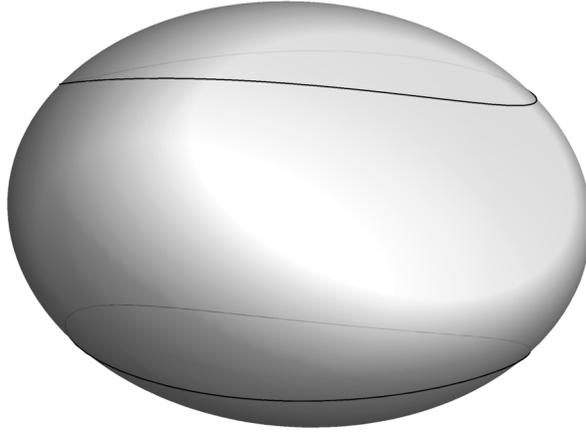


Рис. 6: Тропические кривые на эллипсоиде

Напомним, что на фазовом пространстве  $M^6$  корректно определено *отображение проекции*  $\pi : M^6 \rightarrow D$ , сопоставляющее паре точка-вектор точку стола.

Заметим, что функция  $H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2)$  является первым интегралом нашего бильярда. Действительно, эта функция является первым интегралом системы без отражения, а поскольку проскальзывание согласовано с метрикой Минковского, оно не меняет длину вектора скорости в этой метрике.

Оказывается, что рассматриваемый бильярд является интегрируемой гамильтоновой системой в кусочно-гладком смысле с функцией Гамильтона  $H$ . Наша цель — описать топологию возникающего слоения Лиувилля этой системы.

**6.2 Эллиптические координаты. Интегрируемость.** Свяжем с эллипсоидом  $\mathcal{E}$  семейство квадрик, определяемое следующим образом.

**Определение 4.** Семейством софокусных квадрик в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}(x, y, z)$  назовем семейство квадрик  $Q_\lambda$ , заданных уравнением

$$(b - \lambda)(c + \lambda)x^2 + (a - \lambda)(c + \lambda)y^2 + (a - \lambda)(b - \lambda)z^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)(c + \lambda),$$

где  $a > b > 0$ ,  $c > 0$  — фиксированные числа, а  $\lambda$  — вещественный параметр. Если значение параметра  $\lambda$  равно  $a$ ,  $b$  или  $-c$ , то соответствующую квадрику мы будем называть вырожденной, иначе — невырожденной.

**Замечание 3.** Отметим, что все вырожденные квадрики суть координатные плоскости.

В зависимости от значения параметра  $\lambda$  возможны следующие квадрики.

- Если  $\lambda \in (-\infty, -c)$ , то  $Q_\lambda$  — однополостный гиперboloид.
- Если  $\lambda \in (-c, b)$ , то  $Q_\lambda$  — эллипсоид.
- Если  $\lambda \in (b, a)$ , то  $Q_\lambda$  — однополостный гиперboloид.
- Если  $\lambda \in (a, +\infty)$ , то  $Q_\lambda$  — двуполостный гиперboloид.

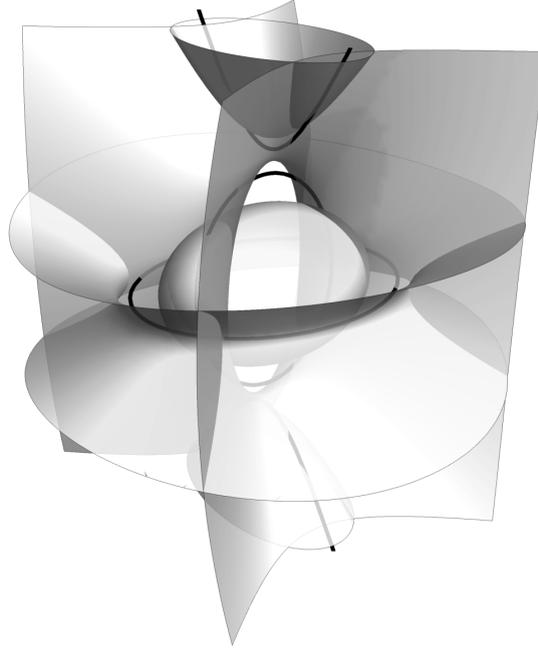


Рис. 7: Софокусные квадрики в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Черным выделены фокальные кривые.

На рисунке 7 изображены софокусные квадрики, каждого из этих видов.

Напомним, что в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  семейство софокусных квадрик определяет эллиптические координаты. Каждой точке  $\mathbb{R}^3$  мы сопоставляем неубывающий набор параметров  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  софокусных квадрик, проходящих через данную точку. Аналогичное справедливо и в  $\mathbb{R}^{2,1}$ .

**Предложение 2.** *Через каждую точку множества  $D$  проходит в точности три софокусных квадрики (с учетом кратности). Более того, две из них являются эллипсоидами параметров  $\lambda_1 \in [-c, 0]$  и  $\lambda_2 \in [0, b]$ , а третья — однополостным гиперboloидом параметра  $\lambda_3 \in [b, a]$ .*

*Доказательство.* Это утверждение достаточно доказать для точек  $X = (x, y, z)$ , таких, что  $x \cdot y \cdot z \neq 0$ . Более того, можем считать, что  $X$  — внутренняя точка  $D$ . Для каждой такой точки рассмотрим функцию  $f_X(\lambda) = \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda}$ . Отметим, что квадрика параметра  $\lambda_0$  проходит через точку  $X$  в том и только том случае, когда  $f_X(\lambda_0) = 1$ . Покажем, что внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$  уравнение  $f_X(\lambda) = 1$  имеет три вещественных корня с учетом кратности.

Заметим, что  $f_X(\lambda) \rightarrow +\infty$ , когда  $\lambda \rightarrow a - 0$ , и  $f_X(\lambda) \rightarrow -\infty$ , когда  $\lambda \rightarrow b + 0$  (см. рис [3]). Поскольку непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения, в некоторой точке интервала  $(b, a)$  функция  $f_X(\lambda)$  принимает значение 1.

Теперь воспользуемся тем, что точка  $X$  лежит внутри области, ограниченной эллипсоидом  $\mathcal{E}$ . Это условие равносильно тому, что  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} < 1$ , то есть  $f_X(0) < 1$ . А поскольку  $f_X(\lambda) \rightarrow +\infty$  при  $\lambda \rightarrow -c - 0, b + 0$ , по теореме о промежуточном значении непрерывной функции  $f_X(\lambda)$  принимает значение 1 в некоторых точках интервалов  $(-c, 0)$ ,  $(0, b)$  (см. рис.[3]). Следовательно, через точку  $X$  проходит по крайней мере 3 софокусные квадрики.

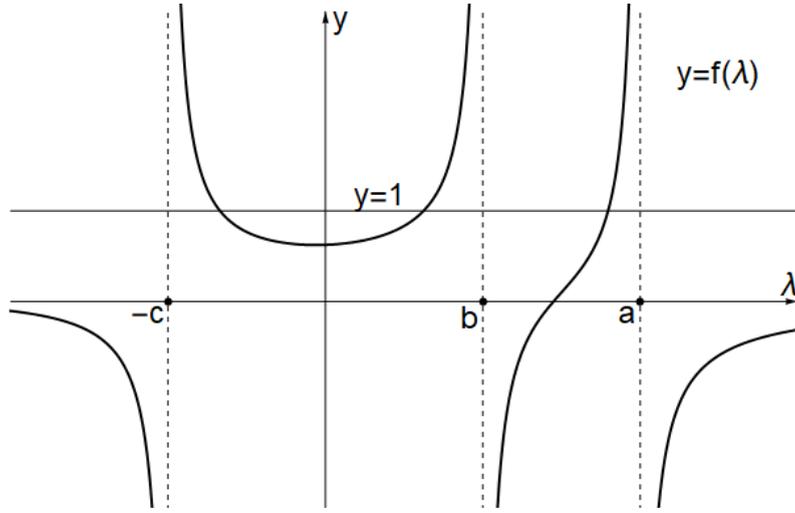


Рис. 8: График функции  $f_X(\lambda)$

Для завершения доказательства осталось заметить, что уравнение  $f_X(\lambda) = 1$  равносильно кубическому уравнению относительно  $\lambda$ . Таким образом, через точку  $X$  проходит не более трех квадрик. Предложение доказано.  $\square$

Таким образом, в области  $D$  корректно определены эллиптические координаты. Отметим, что уравнение  $\lambda_1 = \lambda_2$  задает тропические кривые, а уравнение  $\lambda_2 = \lambda_3$  — фокальный эллипс.

Теперь, используя эллиптические координаты в  $\mathbb{R}^{2,1}$ , проведем качественный анализ рассматриваемого билиарда.

Рассмотрим в  $\mathbb{R}^{2,1}$  движение точки по инерции. Хорошо известно, что в таком случае частица либо будет находиться в положении равновесия, либо двигаться вдоль прямой с постоянной по модулю скоростью. Ее траекторию можно описать параметрически:  $(x + \tau\dot{x}, y + \tau\dot{y}, z + \tau\dot{z})$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ , где  $(x, y, z)$  — некоторая точка траектории, а  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  — вектор скорости в ней. Определим параметры софокусных квадрик, которых касается эта траектория.

Чтобы найти точки пересечения траектории и софокусной квадрики, нужно решить квадратное относительно  $\tau$  уравнение

$$\frac{(x + \tau\dot{x})^2}{a - \lambda} + \frac{(y + \tau\dot{y})^2}{b - \lambda} + \frac{(z + \tau\dot{z})^2}{c + \lambda} = 1.$$

Поэтому, если траектория касается квадрики, дискриминант этого уравнения равен 0 и наоборот. Это условие равносильно следующему уравнению.

$$\left( \frac{x\dot{x}}{a - \lambda} + \frac{y\dot{y}}{b - \lambda} + \frac{z\dot{z}}{c + \lambda} \right)^2 = \left( \frac{\dot{x}^2}{a - \lambda} + \frac{\dot{y}^2}{b - \lambda} + \frac{\dot{z}^2}{c + \lambda} \right) \left( \frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} + \frac{z^2}{c + \lambda} - 1 \right) \quad (5)$$

Домножив его на  $(a - \lambda)(b - \lambda)(c + \lambda)$  и перенеся все слагаемые в правую сторону, мы сведем уравнение к следующему.

$$H\lambda^2 - F_1\lambda + F_2 = 0 \quad (6)$$

Это уравнение мы будем называть *уравнением касания*. Здесь  $H$  — энергия рассматриваемого бильярда, а функции  $F_1$  и  $F_2$  вычисляются по формулам:

$$F_1 = \frac{1}{2}((b-c)x^2 + (a-c)y^2 - (a+b)z^2) + \frac{1}{2}(K_x^2 + K_y^2 - K_z^2),$$

$$F_2 = \frac{1}{2}(-bcx^2 - acy^2 - abz^2) + \frac{1}{2}(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2),$$

где  $K = (K_x, K_y, K_z)$  — вектор углового момента.

**Определение 5.** Величины  $p_x = \partial H / \partial x$ ,  $p_y = \partial H / \partial y$ ,  $p_z = \partial H / \partial z$  назовем импульсами, сопряженными координатам  $x, y, z$  соответственно.

**Предложение 3.** Функции  $H, F_1, F_2$  (как функции на  $\mathbb{R}^6(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ ) являются функционально независимыми и попарно коммутирующими относительно скобки Пуассона, ассоциированной с формой  $\omega = dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y + dz \wedge dp_z$ .

**Доказательство.** Инволютивность проверяется прямым вычислением. Для доказательства функциональной независимости нужно вычислить определитель матрицы Якоби по импульсам. Из явного вида этого определителя станет ясно, что он не ноль почти всюду. ■

Опишем альтернативный способ доказательства этого утверждения. Для этого заменим переменную  $z$  на  $i\tilde{z}$ , где  $i$  — мнимая единица, а константу  $c$  на  $-\tilde{c}$ . В таком случае семейство софокусных квадрик будет задано уравнением

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{\tilde{z}^2}{\tilde{c}-\lambda} = 1,$$

а функции  $H, F_1, F_2$  переписутся в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\tilde{z}}^2),$$

$$F_1 = \frac{1}{2}\left((\tilde{c}+b)x^2 + (\tilde{c}+a)y^2 + (a+b)\dot{\tilde{z}}^2\right) - \frac{1}{2}(\tilde{K}_x^2 + \tilde{K}_y^2 + \tilde{K}_z^2),$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\left(b\tilde{c}x^2 + a\tilde{c}y^2 + ab\dot{\tilde{z}}^2\right) - \frac{1}{2}(a\tilde{K}_x^2 + b\tilde{K}_y^2 + \tilde{c}\tilde{K}_z^2),$$

где  $\tilde{K} = (\tilde{K}_x, \tilde{K}_y, \tilde{K}_z)$  компоненты вектора кинетического момента в координатах  $x, y, \tilde{z}$ . Хорошо известно, что функции  $F_1, F_2, H$  являются функционально независимыми и попарно коммутирующими относительно стандартной скобки Пуассона на кокасательном расслоении к  $\mathbb{R}^3(x, y, \tilde{z})$ . Поэтому, в частности,  $F_1, F_2, H$ , являются функционально независимыми как функции на кокасательном расслоении к  $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ . Осталось выразить дифференциальную форму  $\omega = dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y + d\tilde{z} \wedge dp_{\tilde{z}}$  в координатах  $(x, y, z)$  и импульсах  $(p_x, p_y, p_z)$ . Имеем:  $p_z = \partial H / \partial \dot{z} = -\dot{z} = -i\dot{\tilde{z}} = -ip_{\tilde{z}}$ , откуда  $dp_z = -idp_{\tilde{z}}$ . Поскольку  $dz = id\tilde{z}$ , то  $dz \wedge dp_z = d\tilde{z} \wedge dp_{\tilde{z}}$ . Таким образом,  $H, F_1, F_2$  попарно коммутируют.

Используя такой прием, можно выписать формулы связи эллиптических координат в  $\mathbb{R}^{2,1}$  с каноническими  $(x, y, z)$ . Поскольку  $(x, y, \tilde{z})$  связаны системой

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a-\lambda_1)(a-\lambda_2)(a-\lambda_3)}{(a-b)(a-\tilde{c})}, \\ y^2 = \frac{(b-\lambda_1)(b-\lambda_2)(b-\lambda_3)}{(b-a)(b-\tilde{c})}, \\ \tilde{z}^2 = \frac{(\tilde{c}-\lambda_1)(\tilde{c}-\lambda_2)(\tilde{c}-\lambda_3)}{(\tilde{c}-a)(\tilde{c}-b)}, \end{cases}$$

формулы связи  $(x, y, z)$  с  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)(a - \lambda_3)}{(a - b)(a + c)}, \\ y^2 = \frac{(b - \lambda_1)(b - \lambda_2)(b - \lambda_3)}{(b - a)(b + c)}, \\ z^2 = \frac{(c + \lambda_1)(c + \lambda_2)(c + \lambda_3)}{(c + a)(c + b)}. \end{cases} \quad (7)$$

Аналогичным образом можно получить явные формулы для  $H, F_1, F_2$  в эллиптических координатах и сопряженных им импульсах  $(p_1, p_2, p_3)$ .

$$\begin{cases} H = 2 \left( \frac{\Delta_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_1^2 + \frac{\Delta_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_2^2 + \frac{\Delta_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} p_3^2 \right) \\ F_1 = 2 \left( \frac{\Delta_1(\lambda_2 + \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_1^2 + \frac{\Delta_2(\lambda_1 + \lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_2^2 + \frac{\Delta_3(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} p_3^2 \right) \\ F_2 = 2 \left( \frac{\Delta_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_1^2 + \frac{\Delta_2 \lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_2^2 + \frac{\Delta_3 \lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)} p_3^2 \right) \end{cases} \quad (8)$$

В приведенных формулах  $\Delta_i = -(\lambda_i - a)(\lambda_i - b)(\lambda_i + c)$ .

**Теорема 5.** *Функции  $H, F_1, F_2$  являются функционально независимыми попарно коммутирующими относительно стандартной скобки Пуассона первыми интегралами бильярда с проскальзыванием внутри эллипсоида  $\mathcal{E}$  в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}$ .*

*Доказательство.* Большую часть теоремы мы уже доказали. Остается показать, что  $F_1$  и  $F_2$  сохраняются при отражении. При проскальзывании точки на эллипсоиде  $\mathcal{E}$  эллиптические координаты остаются неизменными, и два из трех сопряженных импульсов меняют свой знак, в то время как один остаются неизменными. Поскольку  $F_1$  и  $F_2$  зависят только от квадратов импульсов, эти функции сохраняются при отражении.  $\square$

Выясним еще несколько свойств функций  $H, F_1, F_2$ .

**Предложение 4.** *Пусть  $h, f_1, f_2$  — совместный уровень первых интегралов  $H, F_1, F_2$  соответственно, тогда на этом уровне уравнения движения имеют вид:*

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{2\sqrt{2}}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{V(\lambda_i)}, \quad (9)$$

где  $V(z) = -(z - a)(z - b)(z + c)(hz^2 - f_1z + f_2)$ .

*Доказательство.* Пусть  $z$  — новая переменная, вычислим  $P(z) = Hz^2 - F_1z + F_2$ . Согласно теореме Виета и формулам 8

$$P(z) = 2 \left( \frac{\Delta_1(z - \lambda_2)(z - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} p_1^2 + \frac{\Delta_2(z - \lambda_1)(z - \lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} p_2^2 + \frac{\Delta_3(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} p_3^2 \right),$$

откуда  $P(\lambda_i) = 2\Delta_i p_i^2$ . Следовательно,  $p_i^2 = \frac{H\lambda_i^2 - F_1\lambda_i + F_2}{2\Delta_i}$ .

Теперь напишем часть уравнений Гамильтона, а именно

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{4\Delta_i}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)} p_i.$$

Совмещая последние две формулы, получим требуемые уравнения.  $\square$

Воспользуемся этим утверждением, чтобы прояснить геометрический смысл первых интегралов  $F_1$  и  $F_2$ .

**Предложение 5.** Пусть энергия материальной точки отлична от нуля, тогда все прямолинейные участки ее траектории (или их продолжения) одновременно касаются двух софокусных с эллипсоидом  $\mathcal{E}$  квадрик (с учетом кратности).

*Доказательство.* Заметим, что многочлен  $P(z) = Hz^2 - F_1z + F_2$  сохраняется вдоль бильярдной траектории. Как мы уже выяснили, прямолинейная траектория касается квадрики параметра  $\lambda_0$  тогда и только тогда, когда  $P(\lambda_0) = 0$ . Следовательно, квадрики, которых касаются прямые, входящие в состав бильярдной траектории, сохраняются. Осталось показать, что  $P(z)$  имеет 2 вещественных корня (с учетом кратности).

В случае общего положения многочлен  $V(z)$  из формулы 9 обязан принимать положительные значения в некоторых точках интервалов  $(-c, b)$ ,  $(b, a)$ , поскольку эллиптические координаты определены на этих промежутках. Согласно условию  $h \neq 0$ , а следовательно,  $V(z)$  — многочлен 5-й степени.

Если бы многочлен  $P(z)$  не имел вещественных корней, то  $P(z) > 0$  или  $P(z) < 0$  для любого вещественного  $z$  (в зависимости от знака  $h$ ). В таком случае, знаки  $V(z)$  на интервалах  $(-c, b)$  и  $(b, a)$  были бы разными. Противоречие.  $\square$

Следовательно, в случае  $H \neq 0$  мы можем в качестве дополнительных первых интегралов рассматривать параметры  $\Xi_1, \Xi_2$  софокусных квадрик, которых одновременно касаются все прямолинейные участки траектории.

Используя результаты этого пункта, перейдем к описанию областей возможного движения рассматриваемой системы в случае общего положения.

### 6.3 Области возможного движения. Бифуркационные диаграммы

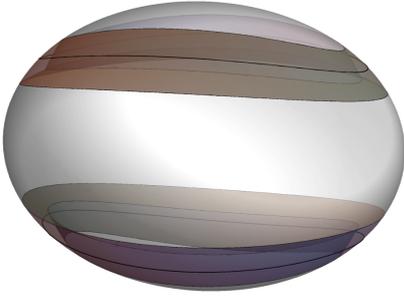
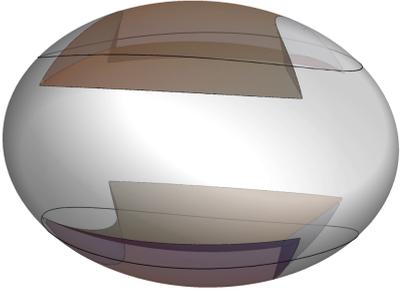
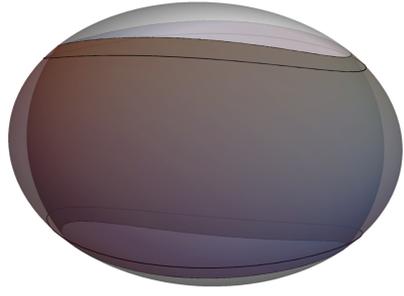
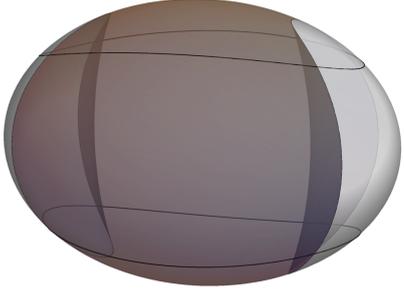
Мы будем рассматривать только случай общего положения. Поскольку при  $h = 0$  степень многочлена  $V(z)$  падает, этот случай отличается от остальных. Однако уравнение  $H = 0$  задает в фазовом пространстве  $M^6$  поверхность меры нуль, поэтому далее мы будем считать, что  $h \neq 0$ .

Заметим, что если два числа  $h_1$  и  $h_2$ , отличных от нуля, имеют одинаковые знаки, то топологии слоений Лиувилля на изоэнергетических поверхностях  $Q_{h_1}^5, Q_{h_2}^5$  совпадают. Действительно, траектории систем на  $Q_{h_1}^5$  и  $Q_{h_2}^5$  будут совпадать, изменится только скорость движения. При этом знак  $h$  существенен, поскольку от него зависит знак старшего коэффициента многочлена  $V(z)$ .

Согласно утверждению 5 при  $h \neq 0$  многочлен  $P(z) = hz^2 - f_1z + f_2$  имеет два вещественных корня (с учетом кратности). Обозначим эти корни через  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Мы будем считать, что  $\xi_1 < \xi_2$ . Исследуем все возможные расположения этих чисел относительно  $a, b$  и  $-c$ , чтобы описать области возможного движения.

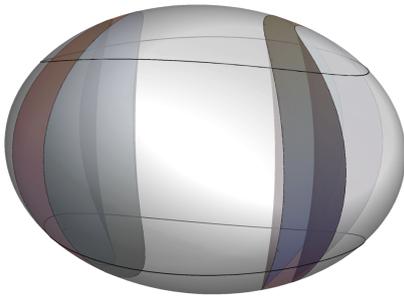
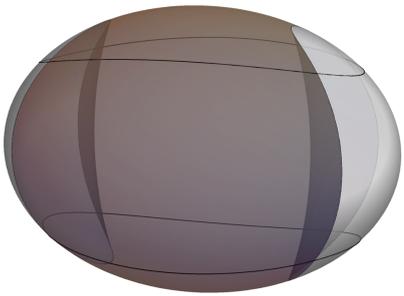
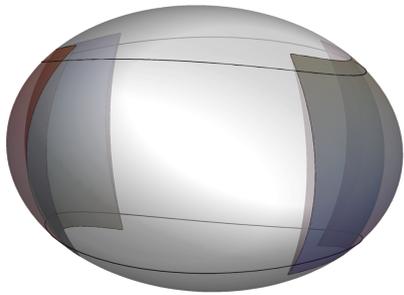
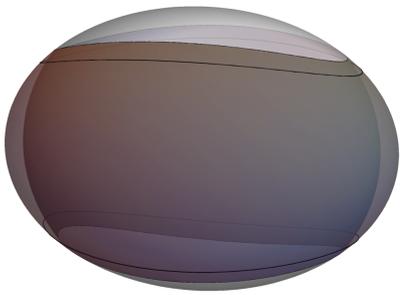
Итак, пусть сначала  $h > 0$ . Тогда возможны следующие случаи и только они.

**Таблица 1.** Области возможного движения при  $h > 0$

<p><b>Ia</b> <math>-c &lt; \xi_1 &lt; 0 &lt; \xi_2 &lt; b</math></p> 	<p><b>IIa</b> <math>-c &lt; \xi_1 &lt; 0 &lt; b &lt; \xi_2 &lt; a</math></p> 
<p><b>IIIa</b> <math>\xi_1 &lt; -c &lt; 0 &lt; \xi_2 &lt; b</math></p> 	<p><b>IVa</b> <math>\xi_1 &lt; -c &lt; b &lt; \xi_2 &lt; a</math></p> 

Таким образом, при  $h > 0$  возможно только 4 вида областей возможного движения. Пусть теперь  $h < 0$ . В таком случае мы получаем следующие виды областей возможного движения.

**Таблица 2.** Области возможного движения при  $h < 0$

<p><b>Ib</b> <math>b &lt; \xi_1 &lt; \xi_2 &lt; a</math></p> 	<p><b>IIb</b> <math>b &lt; \xi_1 &lt; a &lt; \xi_2</math></p> 
<p><b>IIIb</b> <math>0 &lt; \xi_1 &lt; b &lt; \xi_2 &lt; a</math></p> 	<p><b>IVb</b> <math>0 &lt; \xi_1 &lt; b &lt; a &lt; \xi_2</math></p> 

Следовательно, при  $h < 0$  возможны только 4 вида областей возможного движения и только они.

Как уже было отмечено, ограничения системы на изоэнергетические поверхности с одинаковыми знаками энергии топологически эквивалентны, получаясь друг из друга растяжением вектора скорости. Поэтому сначала мы построим бифуркационные диаграммы для случаев  $h > 0$  и  $h < 0$ , а затем нарисуем общую диаграмму.

Поскольку рассматриваемая система является кусочно-гладкой, нам необходимо дать определение особых точек образа отображения момента и бифуркационной диаграммы.

**Определение 6.** Точку  $P \in \mathbb{R}^3$  (или  $\mathbb{R}^2$ , если рассматривается ограничение на изоэнергетическую поверхность) образа отображения момента будем называть особой, если  $P$  лежит на границе образа отображения момента, или для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся две точки из  $U_\varepsilon(P)$ , прообразы которых соответствуют разным типам областей возможного движения.

**Определение 7.** Бифуркационной диаграммой будем называть совокупность всех особых точек образа отображения момента.

Согласно результатам предыдущего параграфа в состав бифуркационной диаграммы системы на изоэнергетической поверхности  $Q_h^5$  войдут

- отрезки прямых  $\xi_1 = -c$ ,  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_2 = b$ ,  $\xi_2 = a$  при  $h > 0$ ;
- отрезки прямых  $\xi_1 = \xi_2$ ,  $\xi_1 = b$ ,  $\xi_1 = a$ ,  $\xi_2 = 0$ ,  $\xi_2 = b$ ,  $\xi_2 = a$  при  $h < 0$ .

Эти бифуркационные диаграммы изображены на рисунке . Каждая из них содержит 4 камеры, которые соответствуют разным типам областей возможного движения. Нумерация камер совпадает с нумерацией областей возможного движения из предыдущего параграфа.

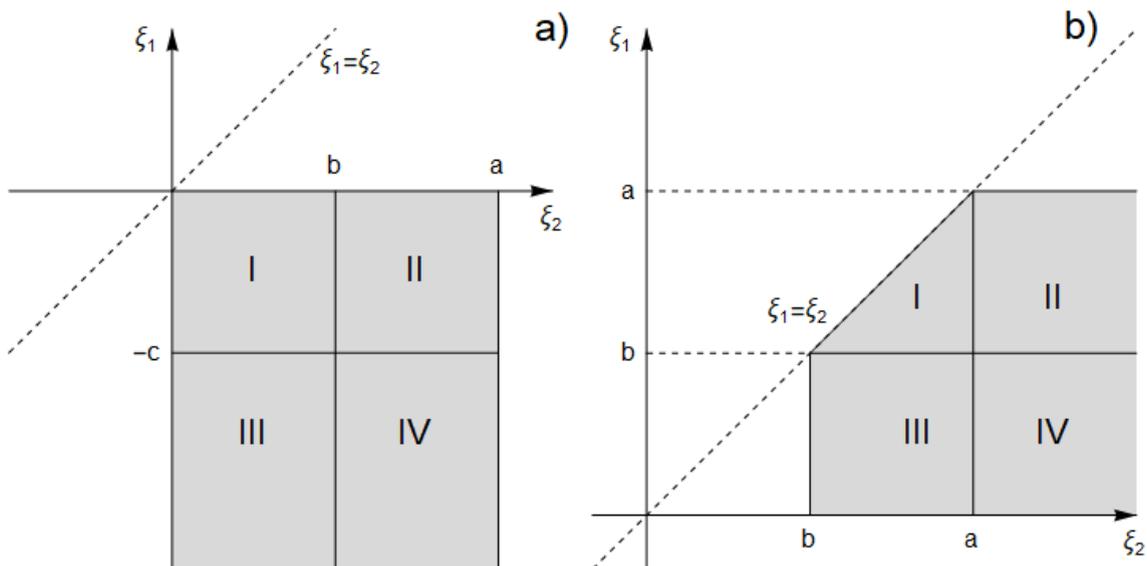


Рис. 9: Бифуркационные диаграммы отображения момента, ограниченного на изоэнергетическую поверхность  $Q_h^5$  а) при  $h > 0$ , б) при  $h < 0$ .

Теперь построим бифуркационную диаграмму отображения момента для интегралов  $H, F_1, F_2$  всего фазового пространства. Поскольку многочлен касания всегда должен иметь два корня, в состав бифуркационной диаграммы должен войти конус  $f_1^2 = 4hf_2$ . Также она должна содержать участки плоскостей  $a^2h - af_1 + f_2 = 0$ ,  $b^2h - bf_1 + f_2 = 0$ ,  $c^2h + cf_1 + f_2 = 0$ ,  $f_2 = 0$ . Эти плоскости отвечают условиям  $\xi_i = a, b, -c, 0$ . В итоге, мы получим комплекс, изображенный на рисунке 10.

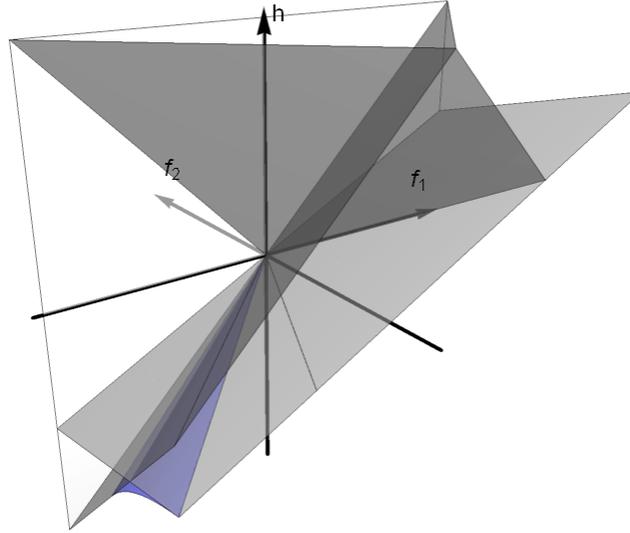


Рис. 10: Бифуркационная диаграмма бильярда с проскальзыванием внутри эллипсоида в пространстве Минковского  $\mathbb{R}^{2,1}$ . Синим выделен участок конуса  $f_1^2 = 4hf_2$ , входящий в состав бифуркационной диаграммы.

Отметим, что образ отображения момента (см рис. 10) состоит из шести камер. Каждая из них соответствует своему типу области возможного движения. Занумеруем камеры следующим образом.

Номер камеры	Номер ОВД
I	I a
II	II a
III	III a, IV b
IV	IV a, II b
V	I b
VI	III b

**6.4 Классы гомеоморфности регулярных слоев отображения момента и топология 1-перестроек.** Приведем следующие результаты без доказательства. Отметим, что рассуждения в доказательстве этих фактов абсолютно такие, как в теореме 3.

**Теорема 6.** Пусть  $P = (h, f_1, f_2)$  — регулярное значение отображения момента, тогда слой, соответствующий этой точке в  $M^6$ , гомеоморфен одному трехмерному тору или несвязному

объединению нескольких трехмерных торов. Более того, слоение Лиувилля в инвариантной окрестности этого слоя тривиально.

Приведем таблицу, в которой укажем количество трехмерных торов в каждой камере бифуркационной диаграммы.

Номер камеры	Количество торов $T^3$
I	2
II	1
III	2
IV	1
V	2
VI	1

**Определение 8.** Точку  $P = (h, f_1, f_2)$  образа отображения момента будем называть особой точкой коразмерности 1, если выполнено одно из следующих условий.

1.  $P$  лежит на границе образа отображения момента и входит в состав ровно одной стенки бифуркационной диаграммы.
2.  $P$  является внутренней точкой образа отображения момента и граничит ровно с двумя камерами.

В первом случае будем называть особенность граничной, а во втором — внутренней.

Как оказалось, прообразы в  $M^6$  внутренних особых точек кратности 1 компактны, в отличие от некоторых внешних особенностей.

**Теорема 7.** Пусть  $P = (h, f_1, f_2)$  — внутренняя особая точка коразмерности 1, тогда прообраз малой шаровой окрестности этой точки в  $M^6$  гомеоморфен одному или несвязному объединению нескольких прямых произведений вида  $V_3 \times S^1 \times D^2$ , где  $V_3$  — один из следующих седловых 3-атомов:  $A^{**}$ ,  $B$ ,  $C_2$ .

Ниже приведены классы гомеоморфности прообразов в  $M^6$  малых шаровых окрестностей внутренних особых точек (бифуркационной диаграммы) кратности 1. Все атомы в таблице трехмерные.

Номера соседних камер	Класс гомеоморфности малой окрестности слоя
I, II	$B \times S^1 \times D^2$
I, III	$C_2 \times S^1 \times D^2$
II, IV	$A^{**} \times S^1 \times D^2$
III, IV	$B \times S^1 \times D^2$
IV, V	$B \times S^1 \times D^2$
V, VI	$B \times S^1 \times D^2$
III, VI	$B \times S^1 \times D^2$

## Список литературы

- [1] Дж. Д. Биркгоф, Динамические системы, Изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999, 408 с.
- [2] В. В. Козлов, Д. В. Трещев, Генетическое введение в динамику систем с ударами, Москва, Изд-во МГУ, 1991
- [3] V. Dragović, M. Radnović, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards”, Regul. Chaotic Dyn., 14:4-5 (2009), 479 – 494.
- [4] В. Драгович, М. Раднович, Интегрируемые бильярды, квадрики и многомерные поризмы Понселе, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2010, 338 с.
- [5] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы «бильярд в эллипсе»”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2012, № 5, 31 – 34.
- [6] В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1., Матем., мех., 2014, №4, 18–27.
- [7] В. В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик”, Матем. сб., **206**:10, (2015), 127–176.
- [8] В. В. Ведюшкина, А. Т. Фоменко, И. С. Харчева, “Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами”, Докл. РАН, **479**, 6, 2018, 607–610
- [9] В. В. Ведюшкина, И. С. Харчева, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем”, Матем. сб. **209**, 12, 2018, 17–56
- [10] В.В. Ведюшкина (Фокичева), А.Т. Фоменко, “Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды”, Изв. РАН. Сер. матем., **83**:6 (2019), 63–103;
- [11] А.Т. Fomenko, V.V. Vedyushkina and V.N. Zav’yalov, “Liouville foliations of topological billiards with slipping”, Russ. J. Math. Phys. Vol. 28, No. 1, 2021, pp. 37–55.
- [12] В. В. Ведюшкина, В. Н. Завьялов, “Реализация геодезических потоков с линейным интегралом бильярдами с проскальзыванием”, Матем. сб., **213**:12 (2022), 31–52.
- [13] В. Н. Завьялов, “Бильярд с проскальзыванием на любой рациональный угол”, Матем. сб., 214:9 (2023), 3–26;
- [14] Г. В. Белозеров, “Топологическая классификация бильярдов в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадриками”, Матем. сб., **213**:2 (2022), 3–36.
- [15] К. Якоби, Лекции по динамике, ОНТИ, М.–Л., 1936, 272 с.

- [16] *Г. В. Белозеров*, “Топологическая классификация бильярдных траекторий в трехмерном евклидовом пространстве, ограниченных софокусными квадриками”, Матем. сб., **213**:2 (2022), 3–36.
- [17] *Г. В. Белозеров*, “Топология изоэнергетических 5-поверхностей трехмерного бильярда внутри трехосного эллипсоида с потенциалом Гука”, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2022, № 6, 21–31.
- [18] *V. Lazutkin* KAM theory and semiclassical approximations to eigenfunctions, SpringerVerlag, Berlin, 1993.
- [19] *Е. А. Кудрявцева*, “Интегрируемые по Лиувиллю обобщённые бильярдные потоки и теоремы типа Понселе”, Фундамент. и прикл. матем., **20**:3 (2015), 113–152.
- [20] *И. Ф. Кобцев*, “Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: классификация движений, топологический анализ”, Матем. сб., **211**:7 (2020), 93–120.