

УДК 517.938.5

Траекторные инварианты некомпактных интегрируемых систем с двумя степенями свободы

Г. В. Белозеров¹ А. Т. Фоменко²

Рассматриваются интегрируемые гамильтоновы системы (ИГС) с двумя степенями свободы, содержащие некомпактные слои, при условии постоянства энергии. Для таких систем изучаются аналоги реберного траекторного инварианта, классифицирующие ИГС на регулярных, топологически устойчивых участках слоения Лиувилля с некомпактными слоями (плоскости и цилиндры) относительно траекторной эквивалентности. Оказалось, что в случае цилиндрических слоев таким инвариантом служит количество слоев с замкнутыми траекториями. Если же слои двух систем гомеоморфны плоскости, то системы на соответствующих регулярных участках слоения гладко сопряжены.

Ключевые слова: интегрируемая система, слоение Лиувилля, траекторная эквивалентность, реберный траекторный инвариант.

We consider integrable Hamiltonian systems (IHS) with two degrees of freedom containing noncompact fibers under the condition of energy constancy. For such systems, analogues of the edge orbital invariant are studied, classifying IHSs on regular, topologically stable Liouville foliation sections with noncompact fibers (planes and cylinders) with respect to orbital equivalence. It turned out that in the case of cylindrical fibers such invariant is the number of fibers with closed trajectories. If the fibers of two systems are homeomorphic to the plane, then the systems are smoothly conjugate on the corresponding regular parts of the Liouville foliation.

Key words: integrable system, Liouville foliation, orbital equivalence, edge orbital invariant.

Рассмотрим две интегрируемые гамильтоновы системы $v_1 = \text{sgrad } H_1$, $v_2 = \text{sgrad } H_2$ на симплектических многообразиях (M_1^4, ω_1) , (M_2^4, ω_2) соответственно. Дополнительные первые интегралы этих систем обозначим через F_1 и F_2 , а через Q_1^3 и Q_2^3 — неособые изоэнергетические поверхности. Функции F_i задают слоение Лиувилля на поверхностях Q_i^3 . Предположим, что при $F_i \in (a_i, b_i)$ слоение Лиувилля на соответствующих Q_i^3 являются регулярными, связными и тривиальными. Будем считать, что интервалы (a_i, b_i) являются максимальными по включению. Обозначим ограничения Q_i^3 на $F_i^{-1}(a_i, b_i)$ через \tilde{Q}_i^3 . Когда системы v_i являются траекторно эквивалентными на \tilde{Q}_i^3 ?

В работе [1] А. В. Болсинов и А. Т. Фоменко построили инвариант, классифицирующий ИГС на компактных изоэнергетических поверхностях с точностью до непрерывной траекторной эквивалентности (т.е. гомеоморфизма, переводящего траектории одной системы в траектории другой). Этот инвариант — *меченая t-молекула* — представляет инвариант Фоменко-Цишанга (меченая молекула), дополнительно оцененный метками двух видов: реберный траекторный инвариант и седловой траекторный инвариант. Напомним, что *реберный траекторный инвариант (вектор вращения)* представляет собой вектор конечной длины, состоящий из вещественных чисел и символов $\pm\infty$. Он содержит информацию об минимумах, максимумах и полюсах функции вращения на слоях системы и классифицирует ИГС на регулярных участках слоения Лиувилля.

Замечание 1. Отметим, что с помощью траекторных инвариантов А. Т. Фоменко и А. В. Болсинов показали траекторную эквивалентность задачи Якоби (о геодезических на эллипсоиде) системе Эйлера динамики твердого тела с нулевой константой площадей (см. [2]).

¹ Белозеров Глеб Владимирович — аспирант каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: gleb0511beloz@yandex.ru.

Belozerov Gleb Vladimirovich — graduate student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Department of Differential Geometry and Applications.

² Фоменко Анатолий Тимофеевич — академик РАН, д.ф.-м.н., зав. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: atfomenko@mail.com.

Fomenko Anatoly Timofeevich — Academician of the Russian Academy of Sciences, chairman of Department of Differential Geometry and Applications.

В настоящее время активно изучаются интегрируемые системы с некомпактными слоями. Подробный обзор о топологии слоений таких систем был сделан А. Т. Фоменко и Д. А. Федосеевым [3]. Например, некомпактные слои и некритические бифуркации встречаются в различных обобщениях систем Бертрана.

Класс псевдоевклидовых аналогов систем механики, введенный А. В. Борисовым и И. С. Мамаевым в работе [4], также реализует, см. недавние работы В. А. Кибкало [5-7], богатый набор слоений Лиувилля на неособых изоэнергетических и изоинтегральных поверхностях, содержащих компактные и некомпактные слои и их бифуркации, включая некритические. Также отметим возникновение некритических бифуркаций в системах вихревой динамики [8], а некомпактных слоев и их перестроек — в некоторых системах бильярдов [9, 10].

Настоящая работа посвящена конструкции реберного траекторного инварианта ИГС с некомпактными слоями.

Далее мы будем предполагать, что все функции, фигурирующие в тексте, являются аналитическими, а слои Лиувилля на \tilde{Q}_i^3 некомпактны, т.е. являются либо двумерными плоскостями, либо цилиндрами. Без ограничения общности можем считать, что F_i на \tilde{Q}_i^3 изменяются на интервале $(0, 1)$.

Как оказалось, реберные траекторные инварианты систем с некомпактными слоями устроены проще, чем у систем с компактными слоями. Начнем мы с наиболее простого случая.

Теорема 1. Пусть слои \tilde{Q}_i^3 гомеоморфны двумерной плоскости, тогда ограничения систем v_i на \tilde{Q}_i^3 гладко сопряжены.

Доказательство. Рассмотрим ограничение v_1 на \tilde{Q}_1^3 . На каждом слое выберем точку O_f , гладко зависящую от F . Теперь для каждого $f \in (0, 1)$ построим отображение Φ_f , переводящее \mathbb{R}^2 с координатами (t_1, t_2) в слой Лиувилля $F = f$. Зададим это отображение следующим образом. Обозначим через $\Phi_f(t_1, t_2)$ точку, полученную из O_f , композицией двух сдвигов: сначала сдвигаем O_f вдоль $\text{sgrad } H$ на время t_1 , а затем получившуюся точку перемещаем вдоль $\text{sgrad } F$ на время t_2 . Поскольку $\text{sgrad } H$ и $\text{sgrad } F$ коммутируют, последовательность сдвигов не важна.

Координаты (t_1, t_2, F) , построенные выше, являются гладкими регулярными и однозначными в \tilde{Q}_1^3 . Действительно, если бы некоторая точка какого-то слоя соответствовала двум различным парам вида (t_1, t_2) , то мы бы получили нетривиальную группу, возвращающую точку O_f в исходное положение. В этом случае сам слой был бы гомеоморфен либо \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} , т.е. цилиндру, либо $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, т.е. тору. Однако, все слои системы на \tilde{Q}_1^3 гомеоморфны двумерной плоскости. Следовательно, тройка (t_1, t_2, F) является однозначной системой координат. Отметим, что система v_1 в этой системе координат задается уравнениями:

$$\dot{F} = 0, \quad \dot{t}_1 = 1, \quad \dot{t}_2 = 0.$$

Иными словами, в координатах (t_1, t_2, F) траектории системы представляют собой параллельные прямые.

Поскольку наши рассуждения остаются верны и для \tilde{Q}_2^3 , ограничения систем v_i на \tilde{Q}_i^3 гладко сопряжены. Теорема доказана. ■

Итак, в случае, когда слой является двумерной плоскостью, любые две системы гладко сопряжены, в частности они гладко траекторно эквивалентны. Если же предположить, что слой гомеоморфен цилиндру, ситуация усложняется, поскольку траектории системы могут замыкаться. В связи с этим определим следующую числовую характеристику.

Определение 1. Количество слоев с замкнутыми траекториями на \tilde{Q}^3 назовем *числом замыканий* и обозначим его через \mathbf{N} .

Замечание 2. Мы всегда будем предполагать, что число \mathbf{N} конечно.

Оказывается, число замыканий однозначно кодирует систему на \tilde{Q}^3 с цилиндрическими слоями с точностью до траекторной эквивалентности.

Теорема 2. Ограничения систем v_i на \tilde{Q}_i^3 с цилиндрическими слоями непрерывно траекторно эквивалентны в том и только том случае, когда их числа замыканий совпадают.

Доказательство. Слои системы с незамкнутыми траекториями очевидно не являются траекторно эквивалентными слоям с замкнутыми траекториями. Следовательно, у траекторно эквивалентных систем числа замыканий обязаны совпадать. Теперь докажем в обратную сторону.

Как и в доказательстве теоремы 1 на каждом слое \tilde{Q}_1^3 выберем точку O_f , гладко зависящую от F . Для каждого значения $f \in (0, 1)$ построим отображение Φ_f , переводящее плоскость с координатами (t_1, t_2) в слой Лиувилля, соответствующий значению интеграла $F = f$. Это отображение определим следующим правилом. Через $\Phi_f(t_1, t_2)$ мы обозначим точку, полученную из O_f , композицией двух сдвигов: сначала сдвигаем O_f вдоль $\text{sgrad } H$ на время t_1 , а затем получившуюся точку перемещаем вдоль $\text{sgrad } F$ на время t_2 . В отличие от предыдущего утверждения отображение Φ_f уже не является однозначным. Существует

одномерная решетка Γ_f , такая, что для любого $x \in \Gamma_f$ выполнено равенство $\Phi_f(x) = O_f$. При этом, для любого $x \notin \Gamma_f$ последнее равенство неверно.

Теперь на плоскости $\mathbb{R}^2(t_1, t_2)$ сделаем линейную замену и перейдем к новым координатам (x, y) . На это преобразование наложим ряд ограничений.

1. Прямая $y = 0$ содержит решетку Γ_f .
2. Для каждого $f \in (0, 1)$ замена осуществляется с помощью матрицы из $SO(2)$.
3. Матрица преобразования непрерывно зависит от f .

Отметим, что на каждом слое мы можем выбрать в точности две замены, удовлетворяющие условиям 1 и 2. Однако если на каком-то из слоев уже выбрана замена, требование 3 однозначно восстановит замену на любом другом слое. Более того, матрица преобразования будет не только непрерывной от f , но и гладкой.

Теперь, не меняя обозначений, домножим координату x на положительное число λ_f , так, что ближайшие к нулю точки решетки имели бы координаты $(\pm 1, 0)$.

Будем считать, что координаты (x, y) являются декартовыми. Обозначим через $\varphi(f)$ — угол между прямыми $y = 0$ и $t_2 = \text{const}$ (см рис. 1). Заметим, что φ как функция от f является гладкой. При этом траектории на слое $F = f$ являются замкнутыми в том и только том случае, когда $\varphi(f) = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, число замыканий есть не что иное, как количество решений уравнения $\sin(\varphi(f)) = 0$. Обозначим решения этого уравнения через $f_1 < \dots < f_N$. Будем считать, что $\varphi(f_i) = \pi n_i$.

Наша цель — привести систему $\text{sgrad } H$ к универсальному виду. Для этого мы построим послойный гомеоморфизм \tilde{G} множества \tilde{Q}_1^3 на себя, переводящий траектории системы в другие прямолинейные обмотки, однако функция угла $\tilde{\varphi}(f)$ преобразованной обмотки будет иметь кусочно-линейный вид.

Для начала отделим точки f_1, \dots, f_N друг от друга. Обозначим через d минимум из расстояний между двумя соседними f_i, f_j и уменьшим это число так, чтобы $d < \min\{f_1, 1 - f_N\}$. Ясно, что окрестности точек f_1, \dots, f_N радиуса $d/3$ не пересекаются друг с другом. Поскольку функция $\varphi(f)$ непрерывна, уменьшая d , можем добиться того, что в каждой замкнутой $d/3$ -окрестности точек f_i функция $\varphi(f)$ не будет принимать значений вида $\pi/2 + \pi n$.

Обозначим через A объединение замкнутых $d/3$ -окрестностей точек f_i , а замыкание дополнения до A на $(0, 1)$ — через B (см. рис. 2). Преобразуем функцию $\varphi(f)$ на каждом из этих множеств. Начнем мы с множества A .

Пусть n_i кратно двум и f_i является корнем кратности k_i функции $\varphi(f) - f_i$. Пусть также $\forall f \in (f_i, f_i + d/3]$ выполнено неравенство $\varphi(f) > f_i$.

Рассмотрим на произвольном отрезке $[a, b]$ функцию

$$g_n(x) = (b - a) \left(\frac{x - a}{b - a} \right)^n + a.$$

Она монотонно переводит отрезок $[a, b]$ в себя, при этом точка a является нулем порядка n функции $g_n(x) - a$. Нам понадобится эта функция для $a = f_i, b = f_i + d/3, n = k_i$. Теперь рассмотрим отображение G , определенное на $\mathbb{R}^3(x, y, F)$ в ограничении $f \in [f_i, f_i + d/3]$ и переводящее это множество в себя. Это отображение действует по следующей формуле.

$$G(x, y, f) = \left(x, \frac{\text{tg}(3(f - f_i)/d)^{k_i}}{\text{tg } \varphi(f)} y, g_{k_i}(f) \right)$$

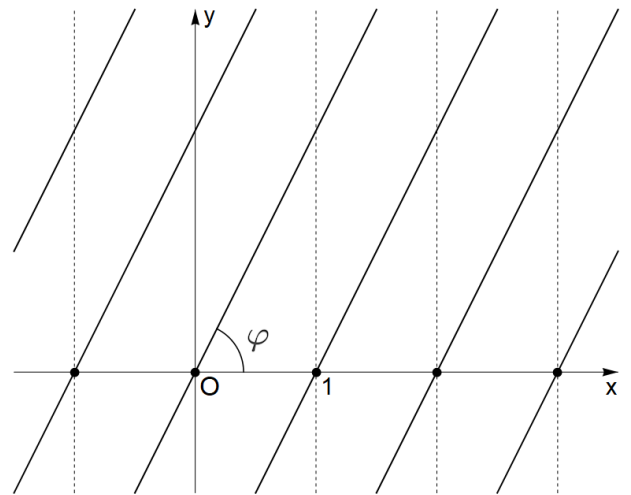


Рис. 1: Развертка цилиндрического слоя на плоскости. Черными точками выделена решетка факторизации, черными косыми линиями — траектории системы на слое.

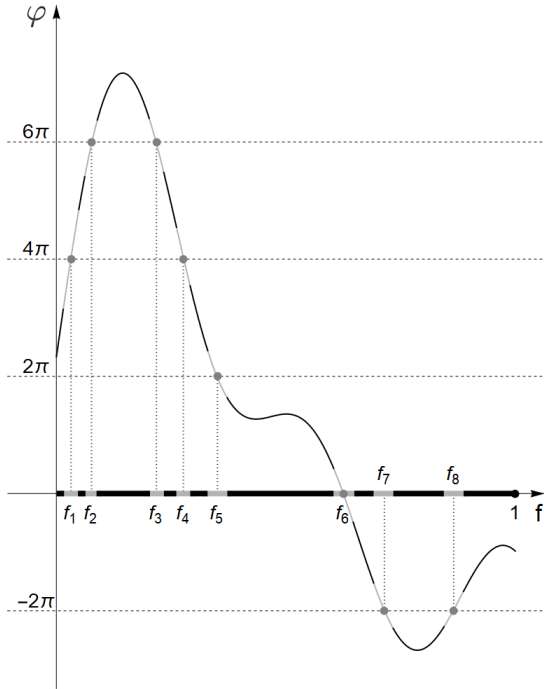


Рис. 2: Функция угла обмотки в зависимости от слоя. По оси x серым выделено множество A , черным — множество B .

Отображение G' может не совпадать с \tilde{G} на слоях вида $f = f_i \pm d/3$. Тем не менее траектории образов системы v_1 у них совпадают. Для того чтобы сделать эти отображения согласованными, мы непрерывно сожмем цилиндры вдоль координаты t_1 . Иными словами, в окрестностях точек $f = f_i \pm d/3$ на множестве B в координатах (t_1, x) непрерывно изменим t_1 так, чтобы $G' = \tilde{G}$ при $f = f_i \pm d/3$.

Таким образом, мы построили послойный гомеоморфизм \tilde{G} множества \tilde{Q}_1^3 на себя, переводящий прямолинейные обмотки в прямолинейные обмотки. При этом соответствующая функция угла имеет следующий вид (см. рис. 3):

$$\tilde{\varphi}(f) = \begin{cases} 1, & \text{если } f \in B, \\ 0, & \text{если } f = f_i, \\ \text{кусочно-линейная в оставшихся точках.} \end{cases}$$

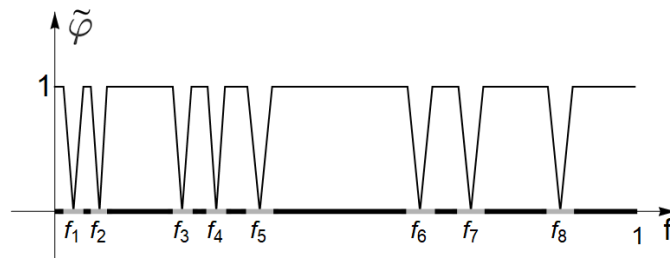


Рис. 3: Функция угла системы v_1 на образе отображения G'

Теперь если есть две системы на $\tilde{Q}_1^3, \tilde{Q}_2^3$ с одинаковыми числами замыканий, мы можем перейти к образам этих систем на соответствующих $\tilde{G}(\tilde{Q}_1^3)$ и $\tilde{G}(\tilde{Q}_2^3)$. По построению графики соответствующих угловых функций выглядят как на рисунке 3. Очевидно, что существует непрерывное отображение $\rho : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$, такое, что $\tilde{\varphi}_1(\rho(f)) \equiv \tilde{\varphi}_2(f)$. Следовательно, системы v_i непрерывно траекторно эквивалентны на \tilde{Q}_i^3 . Теорема доказана. ■

Это отображение корректно определено, биективно и непрерывно в обе стороны, то есть является гомеоморфизмом множества $\mathbb{R}^3(x, y, F)$ на себя. Отметим также, что поскольку G при каждом значении F не меняет координату x , а координату y уменьшает в некоторое количество раз, это отображение сохраняет решетку и определяет гомеоморфизм \tilde{G} множества \tilde{Q}_1^3 на себя. Более того, прямолинейные обмотки цилиндров перейдут в прямолинейные обмотки. Однако заметим, что функция угла $\tilde{\varphi}(f)$ на образе \tilde{G} будет линейной на отрезке $[f_i, f_i + d/3]$ и с точностью до $2\pi n$ выполнены равенства $\tilde{\varphi}(f_i) = 0, \tilde{\varphi}(f_i + d/3) = 1$.

Аналогичным образом поступим со всеми отрезками вида $[f_i - d/3, f_i], [f_i, f_i + d/3]$. При этом добьемся того, чтобы с точностью до $2\pi n$ было выполнено $\tilde{\varphi}(f_i) = 0, \tilde{\varphi}(f_i \pm d/3) = 1$. Отметим, что отображения \tilde{G} будут согласованы в точках f_i .

Итак, мы преобразовали систему на множестве A , теперь упростим ее на множестве B . Для этого все траектории на цилиндрах мы повернем так, чтобы угол $\tilde{\varphi}(f)$ стал равным 1. На плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ это выглядит следующим образом: мы совершаем линейное преобразование, сохраняющее координату y и поворачивающее все траектории так, чтобы угол между направляющим вектором траекторий и осью x стал равным 1. Очевидно, что такое преобразование будет послойным гомеоморфизмом множества \tilde{Q}_1^3 , ограниченного на B . Обозначим его через G' .

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 22-71-00111 в МГУ имени М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2 (Монография). Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999.
 2. *Болсинов А. В., Фоменко А. Т.* Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела // Функциональный анализ и его прил., 1995, **29**, № 3, 1–15.
 3. *Fedoseev D. A., Fomenko A. T.* Noncompact Bifurcations of Integrable Dynamic Systems // Journal of Mathematical Sciences, 2020, **248**, 810–827.
 4. *Borisov A. V., Mamaev I. S.* Rigid Body Dynamics in Non-Euclidean Spaces // Russ. J. Math. Phys., 2016, **23**, № 4, 431–454.
 5. *Kibkalo V. A.* Noncompactness property of fibers and singularities of non-Euclidean Kovalevskaya system on pencil of Lie algebras // Moscow University Mathematics Bulletin, 2020, **75**, № 6, 263–267.
 6. *Altyev M. K., Kibkalo V. A.* Topological analysis of pseudo-Euclidean Euler top for special values of the parameters // Sb. Math., 2023, **214**, № 3, 334–348.
 7. *Kibkalo V. A.* First Appelrot class of pseudo-Euclidean Kovalevskaya system / Первый класс Аппельрота псевдоевклидовой системы Ковалевской // Chebyshevskii Sbornik, 2023, **24**, № 1, 69–88, <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2023-24-1-69-88>.
 8. *Palshin G. P.* On noncompact bifurcation in one generalized model of vortex dynamics // Theoret. and Math. Phys., 2022, **212**, № 1, 972–983.
 9. *Vedyushkina (Fokicheva) V. V., Fomenko A. T.* Integrable topological billiards and equivalent dynamical systems // Izv. Math., 2017, **81**, № 4, 688–733.
 10. *Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В.* Биллиарды и интегрируемые системы // УМН, 2023, **78**, № 5(473), 93–176.
-